

# **Zadania ze statystyki**

Wojciech Bonna

20-11-2022

# Table of contents

<b>Wstęp</b>	<b>3</b>
<b>1 Statystyka - Mieczysław Sobczyk</b>	<b>4</b>
1.1 Opisowa analiza struktury zjawisk masowych . . . . .	4
<b>Bibliografia</b>	<b>15</b>

# Wstęp

Rozwiązania zadań z książek o statystyce.

# 1 Statystyka - Mieczysław Sobczyk

## 1.1 Opisowa analiza struktury zjawisk masowych

1. W dwóch komórkach organizacyjnych przedsiębiorstwa pracują po dwie osoby. W pierwszej komórce miesięczne zarobki brutto wynoszą odpowiednio 1400 zł i 1600 zł, a w komórce drugiej - 2000 zł i 4000 zł. Związki zawodowe domagają się zwiększenia średniego zarobku w obydwu komórkach. Jak to zrobić, nie zwalniając pracowników i nie wydając na podwyżki ani grosza?

Przesunąć pracownika zarabiającego 2000 zł z komórki II do I.

2. W mieszance jest 20 kg składnika *A* w cenie 15 zł za kilogram, 25 kg składnika *B* w cenie 20 zł za kilogram oraz 5 kg składnika *C* w cenie 30 zł za kilogram. Oblicz cenę jednego kilograma mieszanki.

```
wagi <- c(20, 25, 5)
ceny <- c(15, 20, 30)

x <- sum(wagi*ceny) / sum(wagi)

cat(x, "zł")
```

19 zł

3. Jaka jest średnia arytmetyczna dwóch liczb, jeżeli:
  - a) pierwsza liczba jest o 5 większa od drugiej;
  - b) suma 10% pierwszej liczby i połowy drugiej liczby jest równa 4?

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 5 \\ \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{2} = 4 \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned}
\frac{x_2+5}{10} + \frac{x_2}{2} &= 4 \mid \cdot 10 \\
x_2 + 5 + 5x_2 &= 40 \\
6x_2 &= 35 \\
x_2 &= \frac{35}{6} \\
x_1 &= \frac{35}{6} + 5 = \frac{65}{6} \\
\bar{x} &= \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{\frac{65}{6} + \frac{35}{6}}{2} = \frac{100}{12} = 8\frac{1}{3}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

4. Średnia arytmetyczna trzech kolejnych liczb naturalnych wynosi 8. Znajdź te liczby.

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + 1 \\ x_3 = x_1 + 2 \\ \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = 8 \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}
\frac{x_1+(x_1+1)+(x_1+2)}{3} &= 8 \\
3x_1 + 3 &= 24 \\
3x_1 &= 21 \\
x_1 &= 7
\end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 8 \\ x_3 = 9 \end{cases} \tag{1.5}$$

5. Ojciec Huberta jest teraz 3 razy starszy od syna. Za 10 lat ojciec będzie dwa razy starszy od syna. Jaki jest obecnie przeciętny wiek tych osób?

$$\begin{cases} o = 3h \\ o + 10 = 2 \cdot (h + 10) \end{cases} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}
3h + 10 &= 2 \cdot (h + 10) \\
3h + 10 &= 2h + 20 \\
h &= 10 \\
o &= 3h = 3 \cdot 10 = 30 \\
\bar{x} &= \frac{o+h}{2} = \frac{30+10}{2} = 20
\end{aligned} \tag{1.7}$$

6. W pewnym zakładzie zbadano pracowników bezpośrednio produkcyjnych pod względem stażu pracy. Okazało się, że 25% tych pracowników pracowało krócej niż 6 lat, połowa od 6 do 12 lat, natomiast najdłuższy staż pracy pozostałych pracowników był równy 18 lat. Średni czas pracy pracowników administracyjno-biurowych w tym zakładzie wynosił 12 lat. Jaki jest średni staż pracy ogółu pracowników tego zakładu, jeśli grupa pracowników bezpośrednio produkcyjnych jest 2,5-krotnie liczniejsza od administracyjno-biurowych?

```
# średnia przedziału
w <- c(3, 9, 15, 12)
# liczba pracowników (jako procent pracowników produkcyjnych)
q <- c(25, 50, 25, 100/2.5)

x <- sum(w*q) / sum(q)

cat(x, "lat.")
```

9.857143 lat.

7. Obwód trójkąta jest równy 21 cm. Pierwszy bok jest równy średniej arytmetycznej pozostałych boków. Drugi bok stanowi 75% boku trzeciego. Oblicz długości boków trójkąta.

$$\begin{cases} a + b + c = 21 \\ a = \frac{b+c}{2} \\ b = \frac{3}{4}c \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\begin{cases} a + b + c = 21 \\ 2a = b + c \\ a = \frac{\frac{3}{4}c + c}{2} \end{cases} \quad (1.9)$$

$$\begin{cases} a + 2a = 21 \\ a = \frac{7}{8}c \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} a &= 7 \\ 7 &= \frac{7}{8}c \\ c &= 8 \\ b &= 6 \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{cases} a = 7 \\ b = 6 \\ c = 8 \end{cases} \quad (1.12)$$

8. Średni miesięczny zarobek 25 pracowników w pewnej spółce akcyjnej wynosił 2000 zł, gdyż 20 osób zarabiałoby 1400 zł, 4 osoby po 3000 zł, a 1 osoba 10000 zł. Dwudziestu najniżej zarabiających pracowników zażądało podniesienia ich płac do poziomu średniej płacy w spółce. Żądanie zostało spełnione. Czy po podwyżce zarabiają oni powyżej średniej?

```

# pracownicy
p <- c(20, 4, 1)
# zarobki przed zmianą
c0 <- c(1400, 3000, 10000)

#średnia przed zmianą
m0 <- sum(p*c0) / sum(p)

#zarobki po zmianie
c1 <- c(m0, 3000, 10000)

#średnia po zmianie
m1 <- sum(p*c1) / sum(p)

if (m0 > m1) {
  cat("Tak, zarabiają powyżej średniej.")
} else {
  cat("Nie, nie zarabiają powyżej średniej.")
}

```

Nie, nie zarabiają powyżej średniej.

9. Stosunek dwóch liczb całkowitych wynosi 3:5. Jeżeli pierwszą liczbę zmniejszymy o 2, to otrzymamy 40% drugiej liczby. Jaka jest średnia arytmetyczna tych liczb?

$$\begin{cases} 5x_1 = 3x_2 \\ x_1 - 2 = \frac{2}{5}x_2 \end{cases} \cdot 5 \quad (1.13)$$

$$\begin{cases} 5x_1 = 3x_2 \\ 5x_1 - 10 = 2x_2 \end{cases} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 10 \\ x_1 - 2 &= \frac{2}{5} \cdot 10 \\ x_1 &= 6 \\ \bar{x} &= \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{6+10}{2} = 8 \end{aligned} \quad (1.15)$$

10. W pewnej grupie uczniów średnia wieku wynosi 11 lat. Najstarszy z nich ma 17 lat, a średnia wieku pozostałych wynosi 10 lat. Ile uczniów liczy ta grupa?

$$\begin{aligned}
\frac{17+10 \cdot (n-1)}{n} &= 11 \\
17 + 10 \cdot (n-1) &= 11n \\
17 + 10n - 10 &= 11n \\
n &= 7
\end{aligned} \tag{1.16}$$

11. Iloczyn dwóch kolejnych liczb parzystych jest o 296 mniejszy od iloczynu następnych dwóch liczb parzystych. Oblicz średnią arytmetyczną tych czterech liczb.

$$\begin{cases} x_1 x_2 + 296 = x_3 x_4 \\ x_2 = x_1 + 2 \\ x_3 = x_1 + 4 \\ x_4 = x_1 + 6 \end{cases} \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned}
x_1 \cdot (x_1 + 2) + 296 &= (x_1 + 4) \cdot (x_1 + 6) \\
x_1^2 + 2x_1 + 296 &= x_1^2 + 10x_1 + 24 \\
-8x_1 &= -272 \\
x_1 &= 34 \\
\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} &= \frac{34 + 36 + 38 + 40}{4} = 37
\end{aligned} \tag{1.18}$$

12. Z miast  $A$  i  $B$  oddległych o 35 km wyjeżdżają dwaj rowerzyści. Prędkość jazdy jednego z nich jest równa 75% prędkości drugiego. Oblicz prędkość każdego z nich, wiedząc, że spotkają się po 1,25h jazdy.

$$\begin{cases} V_A = \frac{3}{4} V_B \\ V_A = \frac{S_A}{t_A} \\ V_B = \frac{S_B}{t_B} \\ t_A = t_B = \frac{5}{4} \\ S_A + S_B = 35 \end{cases} \tag{1.19}$$

$$\begin{aligned}
\frac{S_A}{t_A} &= \frac{3}{4} \cdot \frac{S_B}{t_B} \\
\frac{S_A}{t_A} &= \frac{3}{4} \cdot \frac{35 - S_A}{t_A} \cdot t_A \\
S_A &= \frac{3}{4} \cdot (35 - S_A) \\
\frac{7}{4} S_A &= \frac{105}{4} \\
S_A &= 15 \\
V_A &= \frac{15}{\frac{5}{4}} = 12 \\
\frac{3}{4} V_B &= 12 \\
V_B &= 16
\end{aligned} \tag{1.20}$$

$$\begin{cases} V_A = 12 \\ V_B = 16 \end{cases} \tag{1.21}$$



13. Zbierano pieniądze na wycieczkę szkolną. Jeśli każdy z uczestników wycieczki wpłaci 20 zł, to zabraknie 104 zł, a jeśli każdy wpłaci po 25 zł, to zostanie 96 zł. Jaki jest średni koszt tej wycieczki?

$$\begin{cases} X = 20n + 104 \\ X = 25n - 96 \\ \bar{x} = \frac{X}{n} \end{cases} \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} 20n + 104 &= 25n - 96 \\ 5n &= 200 \\ n &= 40 \\ X &= 20 \cdot 40 + 104 = 904 \\ \bar{x} &= \frac{904}{40} = 22.6 \end{aligned} \quad (1.23)$$

14. Trzy miejscowości  $A$ ,  $B$ ,  $C$  leżą przy jednej drodze w podanej kolejności, przy czym od  $B$  do  $C$  jest o 12 km dalej niż od  $A$  do  $B$ . Samochód jadący z prędkością 70 km/h przebył drogę od  $A$  do  $C$  w czasie o 54 minuty krótszym niż motocykl jadący z prędkością 40 km/h. Jaka jest odległość od  $A$  do  $B$ , a jaka od  $A$  do  $C$ ?

$$\begin{cases} S_{AB} + S_{BC} = S_{AC} \\ S_{AB} = S_{BC} - 12 \\ \frac{S_{AC}}{70} + \frac{9}{10} = \frac{S_{AC}}{40} \end{cases} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{S_{AC}}{70} + \frac{9}{10} &= \frac{S_{AC}}{40} \quad | \cdot 280 \\ 4S_{AC} + 252 &= 7S_{AC} \\ 3S_{AC} &= 252 \\ S_{AC} &= 84 \\ S_{AB} + S_{BC} &= 84 \\ S_{BC} - 12 + S_{BC} &= 84 \\ S_{BC} &= 48 \\ S_{AB} &= 48 - 12 = 36 \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\begin{cases} S_{AB} = 36 \\ S_{AC} = 84 \end{cases} \quad (1.26)$$

15. Firma zagraniczna zakupiła w Polsce węgiel i przewiozła go statkami. Jeden statek zabrał 5/12 ładunku, drugi 5750 ton, czyli o 500 ton mniej niż pierwszy, a trzeci zabrał resztę. Jaka jest średnia arytmetyczna ładunku zabrana przez statek?

$$\begin{cases} X = x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 = \frac{5}{12}X \\ x_2 = 5750 \\ x_2 = x_1 - 500 \\ \bar{x} = \frac{X}{3} \end{cases} \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} x_1 - 500 &= 5750 \\ x_1 &= 6250 \\ 6250 &= \frac{5}{12}X \\ X &= 15000 \\ \bar{x} &= \frac{15000}{3} = 5000 \end{aligned} \quad (1.28)$$

16. Koszt 60 egzemplarzy I tomu i 75 egzemplarzy II tomu broszury wynosi 405 zł. Przy 15% rabatu za I tom i 10% rabatu za II tom zapłacono 355,50 zł. Jaka była średnia cena tomu?

$$\bar{x} = \frac{450}{60+75} = 3 \quad (1.29)$$

17. Jeśli zwiększy się prędkość pociągu o 10 km/h, to zyskuje się 40 minut na trasie. Jeśli natomiast zmniejszy się prędkość o 10 km/h, to straci się godzinę. Jaka jest długość trasy?

$$\begin{cases} V = \frac{S}{t} \implies S = Vt \\ V + 10 = \frac{S}{t - \frac{2}{3}} \implies S = (V + 10)(t - \frac{2}{3}) \\ V - 10 = \frac{S}{t + 1} \implies S = (V - 10)(t + 1) \end{cases} \quad (1.30)$$

$$\begin{cases} Vt = (V + 10)(t - \frac{2}{3}) \\ Vt = (V - 10)(t + 1) \end{cases} \quad (1.31)$$

$$\begin{cases} Vt = Vt - \frac{2}{3}V + 10t - \frac{20}{3} \\ Vt = Vt + V - 10t - 10 \end{cases} \quad (1.32)$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}V = 10t - \frac{20}{3} \\ V = 10t + 10 \end{cases} \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} V - \frac{2}{3}V &= 10t + 10 - 10t + \frac{20}{3} \\ \frac{1}{3}V &= 10 + \frac{20}{3} \mid \cdot 3 \\ V &= 30 + 20 = 50 \\ 50 &= 10t + 10 \implies t = 4 \\ S &= Vt = 50 \cdot 4 = 200 \end{aligned} \quad (1.34)$$

18. Kolumna demonstrantów porusza się z prędkością 3 km/h. Motocyklista, jadący z prędkością 15 km/h w tym samym kierunku co kolumna, potrzebował dwie minuty, aby wyprzedzić kolumnę. Jaką długość miała kolumna?

$$\begin{aligned} V &= 15 - 3 = 12 \\ t &= \frac{2}{60} \\ S &= Vt = 12 \cdot \frac{2}{60} = 0.4[km] \end{aligned} \quad (1.35)$$

19. Samochód jechał z miejscowości A do B z prędkością 80 km/h, w drodze powrotnej zaś z prędkością 60 km/h. Jaka była średnia prędkość samochodu na trasie z A do B i z B do A?

```
x <- 2 / (1/60 + 1/80)
cat(x, "km/h")
```

68.57143 km/h

20. Pociąg osobowy o długości 450 m jechał z prędkością 54 km/h i miał przed sobą tunel. Od momentu wejścia czoła elektrowozu do tunelu do chwili, w której ostatni wagon opuścił tunel, upłynęło 3,5 minuty. Ile czasu pociąg jechał przez tunel? Jaka była długość tunelu?

$$\begin{cases} V = 54 \\ V = \frac{S}{t} \\ V = \frac{S+0.45}{\frac{3.5}{60}} \end{cases} \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} 54 &= \frac{S+0.45}{\frac{3.5}{60}} \cdot \frac{3.5}{60} \\ S + 0.45 &= 54 \cdot \frac{3.5}{60} \\ S &= 54 \cdot \frac{3.5}{60} - 0.45 = 2.7 \\ V &= \frac{S}{t} \implies t = \frac{S}{V} \\ t &= \frac{2.7}{54} = 0.05 \end{aligned} \quad (1.37)$$

$$\begin{cases} S = 2.7[km] \\ t = 0.05[h] = 3[min] \end{cases} \quad (1.38)$$

21. Z dwóch miejscowości A i B oddległych o 135 km wyjeżdżają naprzeciw siebie dwaj kolarze. Jeden jedzie ze średnią prędkością 20 km/h, drugi ze średnią prędkością 25 km/h. Po jakim czasie się spotkają?

$$\begin{cases} V = \frac{S}{t} \implies t = \frac{S}{V} \\ S = 135 \\ V = 20 + 25 \end{cases} \quad (1.39)$$

$$t = \frac{135}{20+25} = 3[h] \quad (1.40)$$

22. Pewną odległość jeden pociąg przebywa w ciągu 4 godzin. Drugi pociąg, którego prędkość jest o 14 km/h większa, przebywa tę samą odległość w czasie 3 godz. Jakie są prędkości pociągów?

$$\begin{cases} V_1 = \frac{S_1}{t_1} \\ V_2 = \frac{S_2}{t_2} \\ t_1 = 4 \\ t_2 = 3 \\ V_2 = V_1 + 14 \\ S_1 = S_2 \end{cases} \quad (1.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{S_2}{t_2} &= \frac{S_1}{t_1} + 14 \\ \frac{S_1}{3} &= \frac{S_1}{4} + 14 \\ \frac{S_1}{3} - \frac{S_1}{4} &= 14 \\ \frac{S_1}{12} &= 14 \implies S_1 = 14 \cdot 12 = 168 \\ V_1 &= \frac{168}{4} = 42 \\ V_2 &= 42 + 14 = 56 \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$\begin{cases} V_1 = 42 \\ V_2 = 56 \end{cases} \quad (1.43)$$

23. Pięciu robotników na wyprodukowanie jednej sztuki wyrobu potrzebowało 12 minut, trzech – 8 minut, a dwóch – 6 minut. Jaki jest przeciętny czas zużywany na wyprodukowanie jednej sztuki wyrobu?

```
pracownicy <- c(5, 3, 2)
sztuki <- c(1, 1, 1)
czas <- c(12, 8, 6)

# liczba sztuk wyprodukowanych przez wszystkich w minutę
sztuk.razem <- sum(pracownicy*sztuki / czas)

# liczba sztuk wyprodukowanych przez jednego pracownika w minutę
sztuk.pracownik <- sztuk.razem / sum(pracownicy)
```

```
# liczba minut potrzebnych do wyprodukowania jednej sztuki przez pracownika
x <- 1 / sztuk.pracownik

cat("Przeciętny czas w minutach:", x)
```

Przeciętny czas w minutach: 8.888889

24. Czwartą część drogi rowerzysta jechał z prędkością 20 km/h, połowę drogi z prędkością 24 km/h, a pozostałą część drogi z prędkością 12 km/h. Oblicz przeciętną prędkość rowerzysty.

```
V <- c(20, 24, 12)
S <- c(1/4, 1/2, 1/4)
t <- S/V

x <- sum(S) / sum(t)

cat(x, "km/h.")
```

18.46154 km/h.

25. Strukturę rodzin według liczby członków rodziny w miejscowości  $L$  charakteryzuje poniższy rozkład:

liczba członków rodziny	2	3	4	5	6	7	8
odsetek rodzin	15	30	20	15	10	5	5

Za pomocą miar przeciętnych scharakteryzuj ten rozkład. Wyniki zinterpretuj.

26. W spółdzielni mieszkaniowej „Kolejarz” dominują mieszkania o powierzchni 45 - 50 m<sup>2</sup>. W tym przedziale jest 50% mieszkań. Na podstawie badań statystycznych ustalono, że najwięcej mieszkań miało powierzchnię 48 m<sup>2</sup>, a 20% mieszkań – od 40 do 45 m<sup>2</sup>. Jaki odsetek mieszkań w tej spółdzielni ma powierzchnię od 50 do 55 m<sup>2</sup>?
27. W wyniku pomiaru wzrostu studentów uzyskano dość asymetryczny rozkład wzrostu, dla którego dominanta była o 3% niższa od średniej arytmetycznej równej 170 cm. Jaka była wartość środkowa wzrostu w tej grupie studentów?
28. Mediana wieku zatrudnionych w pewnym przedsiębiorstwie zawarta jest w przedziale 40 – 50 lat i wynosi 44 lata. W przedziale mediany mieści się 25 pracowników. W zbiorowości zatrudnionych w tym przedsiębiorstwie 40 pracowników liczby mniej niż 40 lat. Ilu pracowników jest zatrudnionych w tym przedsiębiorstwie?

29. Mediana zarobków 120-osobowej grupy pracowników znajdowała się w przedziale 1200 - 1500 zł, do którego należało 20 pracowników, i wynosiła 1300 zł. Ilu pracowników w tym przedsiębiorstwie zarabiałoby mniej niż 1500 zł?

## **Bibliografia**