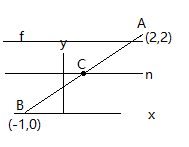
设一点(x’,y’)，near平面为n，则该点投影到near平面的p坐标为,当n=0时，所有投影点都有px=0,所以考虑到让投影有意义，n应该大于0，（x’,y’）的投影点坐标可写为齐次坐标(nx’,y’)，这样就能够表示出投影点的x位置，当y’=0时，即(nx’,0)表示一个无穷远点，和已知常识不冲突。

并且这个齐次坐标还包含了原始点的信息，所以可以用于裁剪。考虑到如下的情况：



线段A,B投影到near平面之后的点pA=(2n,2),pB=(-n,0)，可以发现B点不能投影，是一个无穷远点，所以需要裁剪，也就是把线段AB裁剪成AC，然后才能裁剪。C点的坐标可以使用方程组解出来:

联立上述方程可以解出来即为C点坐标，但是这里是因为我们知道了原始线段的坐标和n所以才能计算出C的坐标，如果只有pA和pB的坐标，即只知道两个齐次坐标(2n,2)和(-n,0)的话怎么计算C的坐标呢?这两个齐次坐标是无法进行裁剪的，这两个坐标包含的信息太少，比如得到(6,2),(-3,0)，根本无法确定原先的x,y和n，所以需要加上一些其他信息。

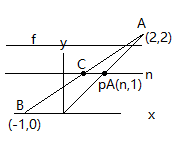
现在构建另一个齐次坐标(depth,y’)（w分量继续为y’，这样可以和和上面的那个齐次坐标合并）,在opengl的CVV中深度取值范围是[-1,1],在D3D中的取值范围是[0,1]，depth=f(y’)，并且f(y’)单调递增，y’=near时f(y’)/y’=-1（Opengl），y’=far时f(y’)/y’=1，这样y值越大的话深度就越深，就可以用于消隐，此时可得到如下关系：

仅仅凭借以上信息包含还是可以构造出无数的函数的，所以我们尝试构造一个如下的函数使其符合上述关系(之所以构造下面的函数是为了方便CVV裁剪，其他函数可能不适合进行CVV裁剪)：

设:f(y’)=Ay’+B,且y’=n时(Ay’+B)/y’=-1,y’=f时(Ay’+B)/y’=1,联立两个方程组:

解出,(如果你学习过opengl的矩阵推导的话，看到这里可能会发现这个和opengl的矩阵不一样，因为opengl的投影矩阵矩阵w分量取的是-depth，而我们这里取的是depth，所以略有偏差)，构建一个齐次坐标为

我们可以将上述两个齐次坐标合并为,当y’>=0的时候就nx’/y’就是点(x’,y’)在near平面的正确投影



如图所示，A点的投影为pA，因为是二维点投影到一维屏幕，所以只需要pA点的x分量即可，即只需要在屏幕上绘制出点(n)。把(nx’,y’)变换成的过程叫做透视除法。接下来我们应该考虑一下裁剪的问题了。

首先要证明出线段AB转化为齐次坐标之后任然是线性关系(这就是为什么刚才对深度变换的时候要设:f(y’)=Ay’+B，就是为了让他们保持线性关系)。

因为x’和y’成线性关系，所以nx’和y也是线性关系，depth分量=Ay’+B，和y’也是线性关系，所以中的三个分量是线性相关的，这样的话可以得出结论：

假设上图中的AB点经过透视乘法之后分别得到投影点,,此时线段AB中间有一点(这里的t就是表示AC线段在AB线段中的占比，有大小和方向,(Ax!=Bx)或者(Ay!=By))，则C的投影点也应该是。这像是把2D空间升维到3D空间，而且这条直线升维之后仍然是直线，各个分量也仍然是线性关系。

上面讨论了这么多有什么用呢？下面请看：假如C是线段AB和near的交点呢？这时候裁剪起来是不是特别方便？现在的新问题就是怎么确定C的坐标，或者说怎么确定出t的值?

先列出如下方程:

表示这个点和near相交，并且near点的depth为-1，是不是就可以求出t来了。

我们可以将上面图片中的点代入本公式验证一下对不对，设n=1,f=2,则pA=(2,2,2),pB=(-1,-4,0),而C点的实际坐标我们是可以计算出来的为根据AB和C的坐标可以求出t=0.5,根据公式，，t同样也等于0.5。所以可以使用齐次空间中的点直接裁剪。

可以裁剪的核心原理就是：如果原始空间中点的坐标(x,y,z....)中的各个分量是线性相关的，则经过透视乘法之后的得到的新齐次坐标(x,y,z....,w)各个分量仍然是线性相关的。这样即使不知道原始空间中点的信息，在齐次空间中裁剪仍然可以得到一样的效果。

接下来的问题就是怎么判断线段需要被near裁剪，假如线段的两个点都大于near的话是不需要裁剪的，强行裁剪反而会使得线段被延长，只有当其中一个或者两个点小雨near时才需要裁剪。通过上述信息可以知道(x,y,w)这三个分量和y’成线性关系，且随着y’的增加而增加，现在把重点放在y,w这两个分量上。假设当前点是在near上面，则有y=-w，现在需要一个判断条件用于判断点小于near，y=Aw+B，y=-w,即当时，点和near相交，w>时，点的深度大于near，w<时，点的深度小于near(应当被裁剪),此时需要裁剪的判断条件如下:

实际上当w<=0时,aw+b+w仍然小于0。

如果在cvv的四个边上面裁剪呢(3D投影是六个面，这个例子是因为我们是2D投影成1D)?即在n<=y’<=far,left<=x<=right呢？

裁剪公式为:

left和right暂时不讨论了，要讨论也是类似的结果