Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

ОТЧЁТ

По лабораторной работе № 3

По курсу: «Моделирование»

Тема: «Марковские процессы»

Студент: Керимов А. Ш.

Группа: ИУ7-74Б

Оценка (баллы): ______________

Преподаватель: Рудаков И. В.

Москва

2020

Оглавление

1 Формализация

1.1 Задание

Смоделировать марковский процесс, имеющий не более 10 состояний, для каждого из которых рассчитать предельную вероятность и время стабилизации.

1.2 Теория

Случайный процесс называется марковским, если он обладает следующим свойством: для каждого момента времени t_0 вероятность любого состояния системы в будущем зависит только от её состояния в настоящем (при $t = t_0$) и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние, т. е. не зависит от того, как процесс развивался в прошлом.

Пусть в системе n состояний $\{S_1, \ldots, S_n\}$. Функционирование этой системы задаётся размеченным графом: узлы — состояния, дуги — интенсивности переходов системы λ_{ij} из состояния S_i в состояние S_j. Матрица интенсивностей:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \ldots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & 0 & \lambda_{23} & \ldots & \lambda_{2n} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & 0 & \ldots & \lambda_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \lambda_{n3} & \ldots & 0 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Вероятность нахождения системы в состоянии S_i в момент времени t обозначается $p_i(t)$ и описывается уравнением Колмогорова:

$$\frac{\mathrm{d}p_i(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji} p_j(t) - p_i(t) \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}. \tag{1.2}$$

Предельная вероятность состояния S_i: $\lim\limits_{t\to\infty} p_i(t)$, она характеризует установившийся режим работы системы. Для предельных вероятностей справедливо уравнение нормировки:

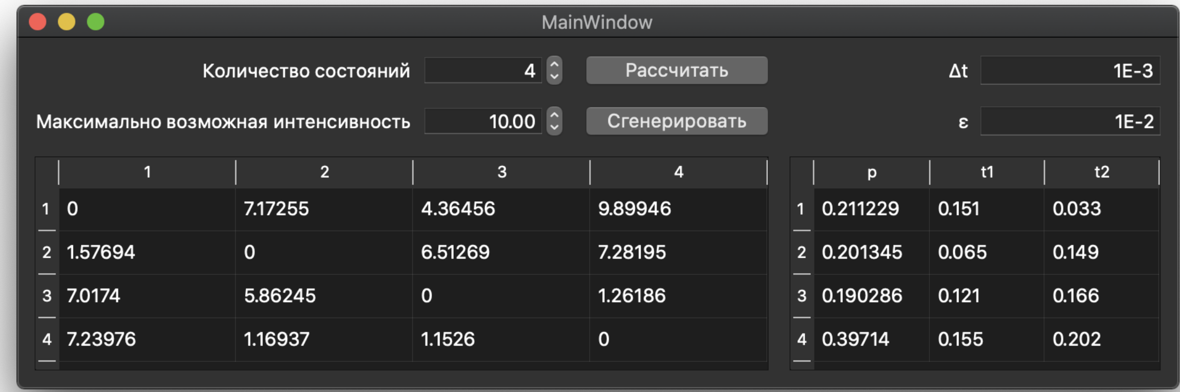
$$\sum_{i=1}^{n} \left(\lim_{t\to\infty} p_i(t) \right) = 1 \tag{1.3}$$

Для нахождения предельных вероятностей недостаточно приравнять к нулю производные в уравнениях (1.2), т. к. в системе независимых уравнений на единицу меньше n. Поэтому необходимо заменить одно любое уравнение на уравнение нормировки (1.3).

Для нахождения времени стабилизации t системы необходимо находить вероятности состояний с шагом Δt до условия: $\left(\left| p_i(t + \Delta t) - p_i(t) \right| < \varepsilon \right) \;\&\; \left(\left| p_i(t) - \lim\limits_{t\to\infty} p_i(t) \right| < \varepsilon \right)$.

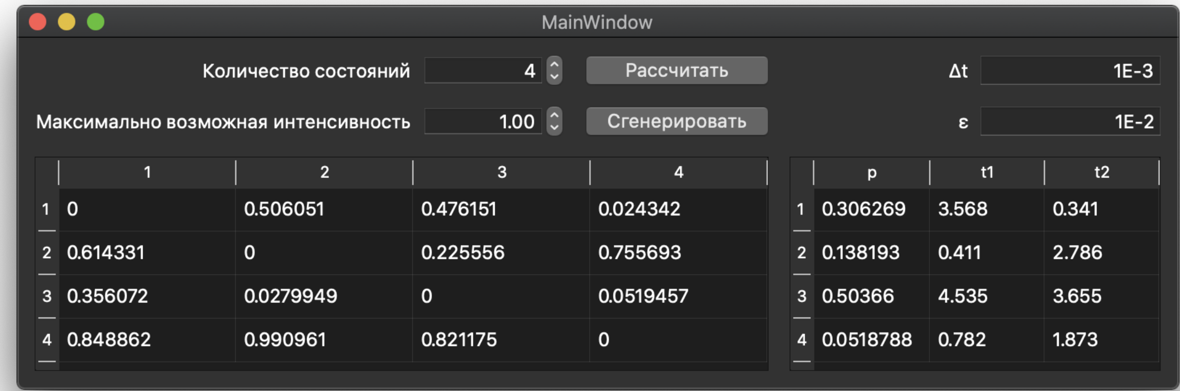
2 Результат работы

В столбце $t1$ выведено время стабилизации для следующих вероятностей состояний системы в начальный момент времени: $p_1(0) = 1, p_i(0) = 0, i = \overline{2, n}$. В столбце $t2$ — для $p_j(0) = 1/n, j = \overline{1, n}$.



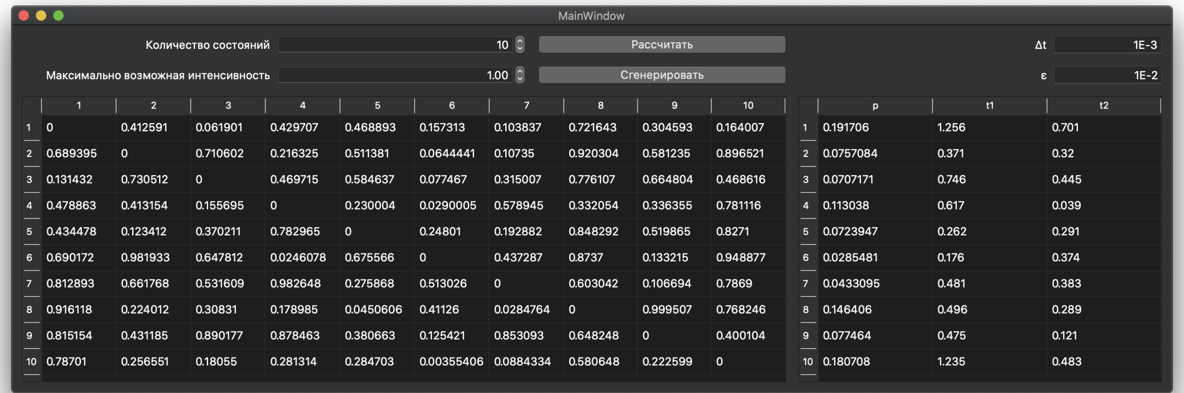
	1	2	3	4
1	0	7.17255	4.36456	9.89946
2	1.57694	0	6.51269	7.28195
3	7.0174	5.86245	0	1.26186
4	7.23976	1.16937	1.1526	0

	p	t1	t2
1	0.211229	0.151	0.033
2	0.201345	0.065	0.149
3	0.190286	0.121	0.166
4	0.39714	0.155	0.202



	1	2	3	4
1	0	0.506051	0.476151	0.024342
2	0.614331	0	0.225556	0.755693
3	0.356072	0.0279949	0	0.0519457
4	0.848862	0.990961	0.821175	0

	p	t1	t2
1	0.306269	3.568	0.341
2	0.138193	0.411	2.786
3	0.50366	4.535	3.655
4	0.0518788	0.782	1.873



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0.412591	0.061901	0.429707	0.468893	0.157313	0.103837	0.721643	0.304593	0.164007
2	0.689395	0	0.710602	0.216325	0.511381	0.0644441	0.10735	0.920304	0.581235	0.896521
3	0.131432	0.730512	0	0.469715	0.584637	0.077467	0.315007	0.776107	0.664804	0.468616
4	0.478863	0.413154	0.155695	0	0.230004	0.0290005	0.578945	0.332054	0.336355	0.781116
5	0.434478	0.123412	0.370211	0.782965	0	0.24801	0.192882	0.848292	0.519865	0.8271
6	0.690172	0.981933	0.647812	0.0246078	0.675566	0	0.437287	0.8737	0.133215	0.948877
7	0.812893	0.661768	0.531609	0.982648	0.275868	0.513026	0	0.603042	0.106694	0.7869
8	0.916118	0.224012	0.30831	0.178985	0.0450606	0.41126	0.0284764	0	0.999507	0.768246
9	0.815154	0.431185	0.890177	0.878463	0.380663	0.125421	0.853093	0.648248	0	0.400104
10	0.78701	0.256551	0.18055	0.281314	0.284703	0.00355406	0.0884334	0.580648	0.222599	0

	p	t1	t2
1	0.191706	1.256	0.701
2	0.0757084	0.371	0.32
3	0.0707171	0.746	0.445
4	0.113038	0.617	0.039
5	0.0723947	0.262	0.291
6	0.0285481	0.176	0.374
7	0.0433095	0.481	0.383
8	0.146406	0.496	0.289
9	0.077464	0.475	0.121
10	0.180708	1.235	0.483

Рис. 2.1: Результаты работы программы

Вывод

Рассмотрены и смоделированы марковский процессы. По результатам работы программы видно, что времена стабилизаций состояний значительно разятся в зависимости от вероятностей состояний системы в начальный момент времени.

Можно также заметить, что времена стабилизаций состояний уменьшаются

- с увеличением количества состояний;
- с увеличением значений интенсивностей переходов.