Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Домашняя работа № 1

По курсу: «Математическая статистика»

Студент: Керимов А. Ш.

Группа: ИУ7-64Б

Преподаватель: Саркисян П. С.

Москва

2020

Вариант 10

Задача № 1 (Предельные теоремы теории вероятности)

Исследователь зафиксировал по одной реализации каждой из независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_{200}$. Известно, что $DX_i \leqslant 4$, $i = \overline{1; 200}$. Оценить вероятность того, что отклонение среднего арифметического этих случайных величин от среднего арифметического их математического ожидания не превосходит 0,2.

Решение. Пусть

$$Y = \frac{1}{200} \sum_{i=1}^{200} X_i,$$

$$DY = \frac{1}{40000} \sum_{i=1}^{200} DX_i \leqslant \frac{1}{40000} \cdot 200 \cdot 4 = 0{,}02.$$

Требуется найти $P\{|Y - MY| \leqslant 0{,}2\} = 1 - P\{|Y - MY| \geqslant 0{,}2\}$.

Согласно второму неравенству Чебышева, $P\{|Y - MY| \geqslant 0{,}2\} \leqslant \dfrac{DY}{0{,}04} \leqslant 0{,}5$.

$$P\{|Y - MY| \leqslant 0{,}2\} \geqslant 1 - 0{,}5 = 0{,}5.$$

Ответ: $P\{|Y - MY| \leqslant 0{,}2\} \geqslant 0{,}5$.

Задача № 2 (Метод моментов)

С использованием метода моментов для случайной выборки $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ из генеральной совокупности X найти точечные оценки указанных параметров заданного закона распределения $f_X(x) = \dfrac{x^\theta}{\Gamma(\theta+1)} e^{-x}, x > 0$.

Решение.

$$\Gamma(\theta) = \int_0^\infty t^{\theta-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t, \quad \Gamma(\theta+1) = \theta\Gamma(\theta),$$

$$m_1 = MX = \int_0^\infty \frac{x^\theta x}{\Gamma(\theta+1)} e^{-x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\Gamma(\theta+1)} \int_0^\infty x^{\theta+1} e^{-x} \, \mathrm{d}x = \frac{\Gamma(\theta+2)}{\Gamma(\theta+1)} = \theta + 1,$$

$$\hat{\mu}_1 = \overline{x} \quad \Rightarrow \quad \theta + 1 = \overline{x} \quad \Rightarrow \quad \theta = \overline{x} - 1.$$

Ответ: $\theta = \overline{x} - 1$.

Задача № 3 (Метод максимального правдоподобия)

С использованием метода максимального правдоподобия для случайной выборки $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ из генеральной совокупности X найти точечные оценки параметров заданного закона распределения. Вычислить выборочные значения найденных оценок для выборки $\vec{x}_5 = (x_1, \ldots, x_5)$. $f_X(x) = 2\theta x e^{-\theta x^2}$, $x > 0$, $\vec{x}_5 = (2, 4, 3, 6, 1)$.

Решение.

$$L(\vec{x}_5, \theta) = \prod_{i=1}^{5} f_X(x_i) = \prod_{i=1}^{5} \left(2\theta x_i e^{-\theta x_i^2}\right) = 2^5 \theta^5 \prod_{i=1}^{5} x_i \cdot \exp\left(\sum_{i=1}^{5} (-\theta x_i^2)\right).$$

$$\ln L(\vec{x}_5, \theta) = 5\ln 2 + 5\ln\theta + \sum_{i=1}^{5} \ln x_i - \theta \sum_{i=1}^{5} x_i^2.$$

$$\frac{\partial \ln L(\vec{x}_5, \theta)}{\partial \theta} = \frac{5}{\theta} - \sum_{i=1}^{5} x_i^2 \quad \Rightarrow \quad \hat{\theta} = \frac{5}{\sum_{i=1}^{5} x_i^2} = \frac{5}{4 + 16 + 9 + 36 + 1} = \frac{5}{66}.$$

Ответ: $\dfrac{5}{66}$.

Задача № 4 (Доверительные интервалы)

После обработки $n = 8$ результатов независимых наблюдений нормально распределённой случайной величины X получено значение $\sigma^2(\vec{X}_n) = 5{,}75$ смещённой оценки выборочной дисперсии. С какой вероятностью можно гарантировать выполнение неравенства $\vec{X}_n - 6{,}2 < MX < \vec{X}_n + 6{,}2$?

Решение.

$$P\{\vec{X}_n - 6{,}2 < MX < \vec{X}_n + 6{,}2\} = P\{\vec{X}_n - MX - 6{,}2 < 0 < \vec{X}_n - MX + 6{,}2\} =$$
$$= P\left\{\left|\vec{X}_n - MX\right| < 6{,}2\right\} = 1 - P\left\{\left|\vec{X}_n - MX\right| \geqslant 6{,}2\right\} \geqslant 1 - \frac{1}{n}\frac{DX}{6{,}2^2} = 1 - \frac{1}{64} \cdot \frac{5{,}75}{38{,}44} = 0{,}997.$$

Ответ: 0,997.