Homework-1

1. Prove $2n+\Theta(n^2)=\Theta(n^2)$

即证

$$\exists c_1,c_2,n_1\in\mathbb{R}^+,\forall n\geq n_1,0\leq c_1n^2\leq 2n+\Theta(n^2)\leq c_2n^2$$

根据$\Theta(n^2)$的定义可知:

$$\exists c_3,c_4,n_2\in\mathbb{R}^+,\forall n\geq n_2,0\leq c_3n^2\leq f(n)\leq c_4n^2$$

进一步放缩:

$\exists c_3,c_4,n_2\in\mathbb{R}^+,\forall n\geq n_0,0\leq c_3n^2\leq c_3n^2+2n\leq f(n)+2n\leq c_4n^2+2n\leq (c_4+2)n^2$

取$n_0=max(n_1,n_2)$，$\forall n\geq n_0$，当$c_1=c_3$，$c_2=c_4+2$时

$$\exists c_1,c_2,n_0\in\mathbb{R}^+,\forall n\geq n_0,0\leq c_1n^2\leq 2n+\Theta(n^2)\leq c_2n^2$$

即:

$$2n+\Theta(n^2)=\Theta(n^2)$$

2. Prove $\Theta(g(n))\cap\ o(g(n))=\phi$

反证法:

假设 $f(n)=\Theta(g(n))\cap\ o(g(n))$, 则$f(n)$同时满足:

$$\exists c_1,c_2,n_0\in\mathbb{R}^+,\forall n\geq n_1,0\leq c_1g(n)\leq f(n)\leq c_2g(n)$$

$$\forall c_3,\exists n_0\geq 0,\forall n\geq n_2,0\leq f(n)<c_3g(n)$$

取$n_0=max(n_1,n_2)$，$\forall n\geq n_0$，当$c_1=c_3$时

$$c_1g(n)\leq f(n)<c_1g(n)$$

此式不成立，因此假设不存在，即:

$$\Theta(g(n))\cap\ o(g(n))=\phi$$

3. Prove $\Theta(g(n))\cup\ o(g(n))\neq\ O(g(n))$

反证法:

假设$\Theta(g(n))\cup\ o(g(n))=O(g(n))$

对于$f(n)=n^2\ |cos(n)|$

$$\exists c_1, n_0 \in \mathbb{R}^+, \forall n \geq n_0, 0 \leq n^2 \left| cos(n) \right| \leq c_1 n^2$$

当$c_1 = 1$时，上式成立，所以$f(n) = O(n^2)$

同理可证$f(n) \neq \ \Theta(n^2)$ 且 $f(n) \neq \ o(n^2)$

因此假设不成立，即：

$$\Theta(g(n)) \cup \ o(g(n)) \neq \ O(g(n))$$

4. Prove $\max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$

即证

$\exists c_1, c_2, n_0 \in \mathbb{R}^+, \forall n \geq n_0, 0 \leq c_1(f(n) + g(n)) \leq max(f(n), g(n)) \leq c_2(f(n) + g(n))$

取 $c_1 = 0.5, c_2 = 1$时，不等式成立

即:

$$\max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$$

5. Solve the recurrence $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + 1$

令 $m = lgn$

则：

$$T(2^m) = 2T(2^{\frac{m}{2}}) + 1$$

令 $S(m) = T(2^m)$

则：

$$S(m) = 2T(m/2) + 1$$

根据主方法得：

$$S(m) = \Theta(m) = \Theta(lgn)$$

6. Solve the recurrence $nT(n) = (n-2)T(n-1) + 2$

等式两边同乘 $n-1$ 得:

$$n(n-1)T(n) = (n-2)(n-1)T(n-1) + 2(n-1)$$

设$S(n) = n(n-1)T(n)$, 上式则可以写成：

$$S(n) = S(n-1) + 2(n-1)$$

由累加递推式可得：$S(n) = n(n-1)$

所以$T(n) = 1$, 即 $T(n) = \Theta(1)$

7. CLRS, Page 35, 3-3

a.

阶从高到底排列，同行为一等价类：

$$
\begin{aligned}
&2^{2^{n+1}} \\
&2^{2^n} \\
&(n+1)! \\
&n! \\
&e^n \\
&n \cdot 2^n \\
&2^n \\
&(3/2)^n \\
&(\lg n)^{\lg n} \text{ and } n^{\lg \lg n} \\
&(\lg n)! \\
&n^3 \\
&n^2 \text{ and } 4^{\lg n} \\
&n \lg n \text{ and } \lg(n!) \\
&n \text{ and } 2^{\lg n} \\
&(\sqrt{2})^{\lg n} \\
&2^{\sqrt{2 \lg n}} \\
&\lg^2 n \\
&\ln n \\
&\sqrt{\lg n} \\
&\ln \ln n \\
&2^{\lg^* n} \\
&\lg^* n \text{ and } \lg^*(\lg n) \\
&\lg(\lg^*) n \\
&n^{1/\lg n} \text{ and } 1
\end{aligned}
$$

b.

要满足$f(n)$既不是$O(g_i(n))$也不是$\Omega(g_i(n))$,

可以使$f(n)$的上临界大于$O(g_i(n))$的最大值，下邻界小于$\Omega(g_i(n))$的最小值,

根据这个思路可以设计以下函数：

$$
y = \begin{cases} 2^{2^{n+2}}, & x\%2 == 0 \\ 0, & x\%2 == 1 \end{cases}
$$