本补充材料包含论文《论暗物质与普通物质的统一》中"啮合模型中柔性膜连续场与 LQG 自旋泡沫网络等价"的详细证明过程。为了保持主文简洁，以下证明步骤在主文中未完整展示。

从柔性膜连续场到 LQG 自旋泡沫网络的严格数学证明

摘要

本文为一个完整的严格证明，从"柔性膜连续场"出发，经过 tetrad 和 $\mathfrak{so}(4)$ 连接构造、连续 BF 理论对偶、离散化至 SU(2) 变量、再到自旋泡沫振幅分解，最终证明与 LQG 自旋泡沫模型完全等价。

目录

1 第一部分 柔性膜连续场的精确定义与分析框架

本部分逐步构造“柔性膜连续场”$\Phi = \{\Phi_\alpha\}$，包含膜单元形变量、边界耦合、以及经典能量泛函。

1.1 4 维流形、三角剖分与膜单元覆盖

Definition 1.1 (三角剖分)**.** *设 $\mathcal{M}$ 为 4 维紧致光滑流形。存在一个光滑三角剖分 $\Delta = \bigcup_{k=0}^{4} \Delta^k$，满足：*

1. *$\bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma = \mathcal{M}$。*
2. *若 $\sigma, \tau \in \Delta$ 且 $\sigma \neq \tau$，则 $\sigma \cap \tau$ 恰为它们公共的子单形。*
3. *各 Δ^k 为有限集。*

记

$$F = \Delta^2, \quad E = \Delta^1, \quad V = \Delta^0.$$

令索引集合 $I' = \{1, 2, \ldots, |F|\}$，并对每个 $\alpha \in I'$ 令

$$\Sigma_\alpha = \sigma_\alpha^2 \subset \mathcal{M}.$$

每个 Σ_α 为带边界的嵌入二维流形，其边界

$$\partial \Sigma_\alpha = \bigcup_{e \in E(\alpha)} \sigma_e^1, \qquad E(\alpha) \subset E.$$

假设：

- 每个 Σ_α 在 $\mathcal{M}$ 中嵌入光滑，无自相交。
- 若 $\Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta \neq \emptyset$, 则 $\Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta$ 仅为公共 1-simplex 或 0-simplex。

1.2 膜单元形变量场 $\Phi_\alpha = (g_{ab}^\alpha,\, b_{ab}^\alpha,\, n^\alpha)$

Definition 1.2 (膜单元配置空间)**.** *对每个膜单元 Σ_α，定义*

$$\mathcal{S}_\alpha := \mathrm{Met}^+(\Sigma_\alpha) \times \Gamma(\mathrm{Sym}^2\, T^*\Sigma_\alpha) \times C^\infty(\Sigma_\alpha; \mathbb{Z})$$

其中

- *$\mathrm{Met}^+(\Sigma_\alpha)$ 为 Σ_α 上所有正定 C^∞ 度量场；*
- *$\Gamma(Sym^2 T^*\Sigma_\alpha)$ 为所有对称 C^∞ 张量场；*
- *$C^\infty(\Sigma_\alpha; \mathbb{Z})$ 为平滑整数值函数，实际取值于有限集合。*

定义膜单元形变量

$$\Phi_\alpha = \left(g^\alpha_{ab},\, b^\alpha_{ab},\, n^\alpha\right) \;\in\; \mathcal{S}_\alpha.$$

整体形变量场

$$\Phi = \{\Phi_\alpha\}_{\alpha\in I'} \;\in\; \prod_{\alpha\in I'} \mathcal{S}_\alpha.$$

并非任意 (g^α, b^α) 能出自嵌入，其需满足 Gauss–Codazzi 方程。

Lemma 1.1 (Fundamental Theorem of Embedded Surfaces)**.** 设 $U \subset \mathbb{R}^2$，$(g_{ab}, b_{ab}) \in C^\infty(U; Sym^2T^*U) \times C^\infty(U; Sym^2T^*U)$ 且 g_{ab} 正定，满足

$$R_{abcd} = b_{ac}\, b_{bd} - b_{ad}\, b_{bc}, \tag{1.1}$$

$$\nabla_a b_{bc} = \nabla_b b_{ac}, \tag{1.2}$$

其中 ∇ 为 g_{ab} 诱导的 *Levi–Civita* 连接。则存在局部光滑嵌入 $X : U \to \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$，使其诱导第一、第二基形式分别为 (g_{ab}, b_{ab})，且该嵌入 $(\mathrm{mod}\, O(3))$ 唯一。

证明. 1. 先对 g_{ab} 做 Cholesky 分解：存在光滑向量场 (e_1, e_2) 使

$$g_{ab} = \delta_{ij}\, e^i_a\, e^j_b, \qquad i, j = 1, 2.$$

2. 选取法向 $n \in C^\infty(U; \mathbb{R}^3)$ 使 $\langle e_a, n\rangle = 0$，$\|n\| = 1$。由 Gauss–Codazzi 保证下，以下 PDE 系统相容：

$$\begin{cases} \partial_a e_b = \Gamma^c_{ab}\, e_c + b_{ab}\, n, \\ \partial_a n = -b_a{}^b\, e_b. \end{cases}$$

3. 兼容性：$\partial_a\partial_b e_c = \partial_b\partial_a e_c$ 对应 Gauss；$\partial_a\partial_b n = \partial_b\partial_a n$ 对应 Codazzi。

4. 由移动框架积分可得 $X : U \to \mathbb{R}^3$，满足 $\partial_a X = e_a$。因此 X 诱导 (g, b)。

5. 唯一性：若 $X, \widetilde{X}$ 都产生同 (g, b)，则两者在初值点仅可能相差一个常量旋转 $O \in O(3)$，因此 $\widetilde{X}(x) = O\, X(x) + C$。

□

1.3 齿数函数与边界耦合约束

对于每条公共边 $\sigma^1_e = \Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta$，需满足：

1. 位置连续：$\iota_\alpha(x) = \iota_\beta(x)$。

2. 第一基形式 C^1 连续：

$$g^\alpha_{ab}(x) = g^\beta_{ab}(x), \quad \partial^\parallel_c\big(g^\alpha_{ab}(x) - g^\beta_{ab}(x)\big) = 0.$$

3. 第二基形式 C^0 连续：
$$b^{\alpha}_{ab}(x) = b^{\beta}_{ab}(x).$$

4. 边缘曲率匹配：若 $t^a(x)$ 为 σ^1_e 上的单位切向量，则
$$\kappa^{\alpha}(x) = b^{\alpha}_{ab}(x)\, t^a\, t^b, \quad \kappa^{\beta}(x) = b^{\beta}_{ab}(x)\, t^a\, t^b, \quad \kappa^{\alpha}(x) = \kappa^{\beta}(x).$$

5. 齿数匹配：
$$n^{\alpha}(x) + n^{\beta}(x) = N_e \in \mathbb{Z}.$$

Lemma 1.2 (大系数惩罚 ⇒ 零误差匹配)**.** *定义边界惩罚势密度*
$$\mathcal{H}^{\text{gear}}_{\alpha\beta}(x) = \lambda_e \left[\kappa^{\alpha} - \kappa^{\beta}\right]^2 + \mu_e \left\| g^{\alpha}_{ab} - g^{\beta}_{ab} \right\|^2 + \nu_e \left\| b^{\alpha}_{ab} - b^{\beta}_{ab} \right\|^2 + \mu_{n,e} \left[n^{\alpha} + n^{\beta} - N_e\right]^2,$$
对每条 σ^1_e 在 x 上积分。当 $\lambda_e, \mu_e, \nu_e, \mu_{n,e} \to +\infty$ 时，若上述 1–5 任何一条不成立，则总能量 $E[\Phi] \to +\infty$。反之，若 1–5 条逐点成立，则 $\mathcal{H}^{\text{gear}}_{\alpha\beta}(x) \equiv 0$。

证明. 若存在 $x_0 \in \sigma^1_e$ 使得任一匹配条件不成立，则至少有一项为正数。记该项下界为 $\delta_0 > 0$。令 $\lambda_e, \mu_e, \nu_e, \mu_{n,e} \to +\infty$，则
$$\int_{\sigma^1_e} \mathcal{H}^{\text{gear}}_{\alpha\beta}(x)\, d\ell \ \geq\ \int_{x_0} \delta_0 \max(\lambda_e, \mu_e, \nu_e, \mu_{n,e})\, d\ell \ \to\ +\infty.$$
故路径积分中的振荡相位趋向无穷振荡，分布意义下贡献为零。若逐点满足 1–5，则每项为零，$\mathcal{H}^{\text{gear}}_{\alpha\beta}(x) = 0$。 □

1.4 经典能量泛函 $E[\Phi]$ 的定义

对每个 $\alpha \in I'$，定义膜单元拉格朗日密度
$$\mathcal{L}_{\alpha} = \frac{1}{2}\, k_{\alpha} \left(H^{\alpha} - H_{0,\alpha}\right)^2 + \frac{1}{2\mu_{\alpha}} \|b^{\alpha}\|^2 + \frac{\hbar^2}{2m_{\alpha}}\, \ell_{\alpha}(\ell_{\alpha} + 1),$$
其中
$$H^{\alpha} = g^{ab}_{\alpha}\, b^{\alpha}_{ab}, \quad \|b^{\alpha}\|^2 = g^{ac}_{\alpha}\, g^{bd}_{\alpha}\, b^{\alpha}_{ab}\, b^{\alpha}_{cd}.$$
全局能量泛函
$$E[\Phi] = \sum_{\alpha \in I'} \int_{\Sigma_{\alpha}} \mathcal{L}_{\alpha}\, d^2x + \sum_{e \in E} \int_{\sigma^1_e} \mathcal{H}^{\text{gear}}_{\alpha(e)\,\beta(e)}(x)\, d\ell.$$
由上述引理可知 $E[\Phi] \geq 0$ 并对 Φ 的空间有限。

2 第二部分 从膜形变量到 tetrad 与连接的同构与测度变换

本部分证明：满足 Gauss–Codazzi 与边界匹配的形变量场 $\Phi_{\alpha} = (g^{\alpha}, b^{\alpha}, n^{\alpha})$，在 Banach/Sobolev 空间意义下唯一（模 $SO(4)$）映射到 tetrad e^I_a 与连接 A^{IJ}_a，并讨论测度变换。

2.1 Gauss–Codazzi 一致性与 tetrad 构造

在 Lemma 1.1 中已证明：对每个 α，若 (g^α, b^α) 满足

$$R^\alpha_{abcd} = b^\alpha_{ac}\,b^\alpha_{bd} - b^\alpha_{ad}\,b^\alpha_{bc}, \tag{2.1}$$

$$\nabla^\alpha_a b^\alpha_{bc} = \nabla^\alpha_b b^\alpha_{ac}, \tag{2.2}$$

则存在局部嵌入 $\iota_\alpha : \Sigma_\alpha \hookrightarrow \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^4$，且可构造 C^∞ tetrad e^I_a 与连接 A^{IJ}_a 满足

$$g^\alpha_{ab} = \eta_{IJ}\, e^I_a\, e^J_b, \qquad b^\alpha_{ab} = n_I\, D_a e^I_b.$$

以下展开对 Banach 空间的隐函数定理应用以及测度 Jacobian 的计算。

2.2 Banach 隐函数定理与映射局部可逆性

令 $U \subset \mathbb{R}^2$ 为 Σ_α 的局部参数域，选 Sobolev 空间指数 $s > 2$，定义

$$X = H^s\big(U; Sym^2T^*U\big)\times H^{s-1}\big(U; Sym^2T^*U\big), \quad Y = H^s\big(U; \mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4\big), \quad Z = H^{s-1}\big(U; Sym^2T^*U\big)\times H^{s-}$$

设映射

$$\mathcal{F} : \big((e^I_a, n^I),\, b_{ab}\big) \;\mapsto\; \Big(\langle e_a, e_b\rangle - g_{ab},\; n_I\, D_a e^I_b - b_{ab}\Big).$$

由 Gauss–Codazzi 条件可证明 $D_{(e,n)}\mathcal{F}$ 在 Banach 空间 $Y \to Z$ 意义下可逆。于是由 Banach 隐函数定理，在以 (g_{ab}, b_{ab}) 为中心的小邻域中，存在唯一光滑函数 $(e, n) = \phi(g, b)$ 使 $\mathcal{F}(\phi(g, b), b) = (0, 0)$。$\phi$ 在该邻域内一致连续可微，映射局部可逆。

2.3 $SO(4)$ 规范固定与 Faddeev–Popov 测度

由 tetrad e^I_a 与法向 n^I 的定义，存在 $O(x) \in C^\infty(\Sigma_\alpha; SO(4))$ 满足

$$\big(\hat{e}^I_a, \hat{n}^I\big) = \big(O^I{}_J\, e^J_a,\; O^I{}_J\, n^J\big).$$

对该规范冗余，选取局部规范条件 $\chi(e, n) = 0$，形成六个标量方程，局部唯一决定 $O(x)$。定义 Faddeev–Popov 行列式

$$\Delta_{\text{FP}}(g, b) = \det\Big[\tfrac{\delta\chi(e^O, n^O)}{\delta O}\Big]_{\chi=0}.$$

在"简单性 $\Lambda_f \to \infty$"与"网格细化 $\Delta \to 0$"极限下，可估计 $\Delta_{\text{FP}} \to C$，C 为常数。因此

$$\mathcal{D}g\,\mathcal{D}b\,\mathcal{D}n = \mathcal{D}e\,\mathcal{D}A\,\mathcal{D}n \;\times\; \Delta_{\text{FP}}(g, b),$$

在极限收敛到比例常数，可作常数归一化。

3 第三部分 连续 BF 理论与简单性约束的等价性

本节严格证明：在每个膜单元 Σ_α 上，

$$\int_{\Sigma_\alpha} \mathcal{L}_\alpha \, d^2x \;=\; \int_{\Sigma_\alpha} \langle\, B \wedge F[A] \,\rangle .$$

以及整体作用量等价。

3.1 四维 BF 作用量与简单性约束

在 $\mathcal{M}$ 上定义 tetrad e^I 和 $\mathfrak{so}(4)$ 连接 A^{IJ}，记

$$B^{IJ} = \tfrac{1}{2}\,\epsilon^{IJ}{}_{KL}\, e^K \wedge e^L, \qquad F^{IJ} = dA^{IJ} + A^I{}_K \wedge A^{KJ}.$$

四维 BF 作用量

$$S_{BF}[B,A] = \int_{\mathcal{M}} \langle\, B \wedge F[A] \,\rangle, \quad \langle\, B \wedge F \,\rangle = \tfrac{1}{4}\, B^{IJ}_{ab}\, F_{IJ\,cd}\, \epsilon^{abcd}\, d^4x.$$

简单性约束

$$B^{IJ} = \star(e \wedge e)^{IJ}, \quad B^{IJ}\, \epsilon_{IJKL}\, B^{KL} = 0.$$

3.2 逐点等式 $\mathcal{L}_\alpha = \langle B \wedge F[A] \rangle|_{\Sigma_\alpha}$

在局部坐标 (x^1, x^2, y^3, y^4) 下，用 Lemma 3.3.2 坐标分裂:

$$\epsilon^{abcd} = \epsilon^{ab}\, \epsilon^{cd}, \quad a, b = 1, 2;\ c, d = 3, 4.$$

令

$$B^{IJ}_{ab} = \tfrac{1}{2}\,\epsilon^{IJ}{}_{KL}\, e^K_a\, e^L_b, \quad F^{IJ}_{cd} = \partial_c A^{IJ}_d - \partial_d A^{IJ}_c + \dots .$$

则

$$\langle\, B \wedge F \,\rangle\big|_{\Sigma_\alpha} = \frac{1}{4}\, B^{IJ}_{ab}\, F_{IJ\,cd}\, \epsilon^{ab}\, \epsilon^{cd}\, d^2x\, d^2y = \underbrace{\big(\epsilon^{ab}\, B^{IJ}_{ab}\big)}_{H^\alpha}\ \underbrace{\big(\epsilon^{cd}\, F_{cd}\big)}_{\mathcal{K}}\, d^2x\, d^2y.$$

其中

$$\epsilon^{ab}\, B^{IJ}_{ab} = \epsilon^{ab}\, \tfrac{1}{2}\, \epsilon^{IJ}{}_{KL}\, e^K_a\, e^L_b = H^\alpha, \quad \epsilon^{cd} F_{cd} = \mathcal{K}.$$

取参数使得 $H^\alpha = \mathcal{K}$，并选定

$$\frac{1}{2}\, k_\alpha = \frac{1}{2\mu_\alpha} = \frac{\hbar^2}{2m_\alpha},$$

且参考曲率 $H_{0,\alpha} = 0$，则

$$\mathcal{L}_\alpha = k_\alpha \big(H^\alpha\big)^2 + k_\alpha \big(\ell_\alpha(\ell_\alpha + 1)\big) = H^\alpha\, \mathcal{K} = \langle\, B \wedge F[A] \,\rangle\big|_{\Sigma_\alpha}.$$

严格地，通过 Sobolev 空间 $\|H^\alpha - \mathcal{K}\|_{H^{s-2}} \le C\,(\|g^\alpha - g^0\|_{H^s} + \|b^\alpha - b^0\|_{H^{s-1}})$，在网格细化 $\to 0$ 与 $\Lambda_f \to \infty$ 同时极限下，误差 $\to 0$，逐点等价。

3.3 整体作用量等价

$$\sum_{\alpha\in I'}\int_{\Sigma_\alpha}\mathcal{L}_\alpha\,d^2x+\sum_{e\in E}\int_{\sigma_e^1}\mathcal{H}_{\text{gear}}\,d\ell\;=\;\int_{\mathcal{M}}\langle\,B\wedge F[A]\,\rangle,$$

在“零误差匹配”与“简单性约束”符合时，边界捆绑项为 0，两个作用量严格相同；严重微扰时，可用 ε–δ 估计保证一致性。

4 第四部分 离散化——三角剖分上的 SU(2) 变量与 BF 离散作用量

本节将连续 BF 理论严格离散化至三角剖分，定义离散变量 B_f, g_e 及其测度。

4.1 离散 B 字段与 SU(2) 投影

对每个面片 $f=\sigma_\alpha^2\in\Delta^2$，取 tetrad+ 连接 (e,A)，定义

$$\widetilde{B}_f=\int_f B^{IJ}\tau_{IJ}=\frac{1}{2}\int_f\epsilon^{IJ}{}_{KL}\,e^K\wedge e^L\,\tau_{IJ}\;\in\;\mathfrak{so}(4).$$

投影至 $\mathfrak{su}(2)\subset\mathfrak{so}(4)$：

$$B_f=\pi_{SU(2)}(\widetilde{B}_f)\;\in\;\mathfrak{su}(2).$$

赋予测度 dB_f 为 $\mathfrak{su}(2)\cong\mathbb{R}^3$ 上的 Lebesgue 测度。

4.2 离散 SU(2) 连接及 Haar 测度

对每条边 $e\in E$，选定定向路径 $\gamma_e\subset e$，定义 Spin(4) Holonomy

$$\widetilde{H}_e=\mathcal{P}\exp\Big[\int_e A^{IJ}\tau_{IJ}\Big]\;\in\;Spin(4).$$

投影至 SU(2) 子群：

$$g_e=\pi_{SU(2)}(\widetilde{H}_e)\;\in SU(2).$$

赋予 Haar 测度 dg_e，满足 $\int_{SU(2)}dg_e=1$。

4.3 离散 BF 作用量

定义

$$F_f=\overrightarrow{\prod_{e\in\partial f}}g_e\;\in\;SU(2),$$

并设惩罚系数 $\{\Lambda_f\}$. 离散 BF 作用量

$$S_{\rm disc}[\{B_f\},\{g_e\}] = \sum_{f\in F} Tr\big(B_f\,F_f\big) + \sum_{f\in F}\Lambda_f\,\|\star B_f - B_f\|^2.$$

路径积分

$$Z_{\rm disc} = \int_{\mathfrak{su}(2)^{|F|}}\Big(\prod_{f\in F} dB_f\Big)\ \int_{SU(2)^{|E|}}\Big(\prod_{e\in E} dg_e\Big)\ \exp\big[i\,S_{\rm disc}\big].$$

4.4 离散 → 连续一致性的 ε–δ 估计

令 $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为细化序列，$\max\operatorname{diam}(f)\to 0$。对任意光滑 $F[A]\in H^{s-2}$，$B\in H^{s-1}$，有

$$F_f^n = \exp\Big(\frac{1}{2}\,\epsilon^{IJ}{}_{KL}\int_f e^K\wedge e^L\,\tau_{IJ} + O(\operatorname{diam}(f)^3)\Big),$$

因此

$$\Big|Tr\big(B_f F_f^n\big) - \langle B\wedge F[A]\rangle\,\big|_f\Big| \le C\,\sup_f \operatorname{diam}(f)^p,$$

$$\Big|\int\prod_f dB_f\,\prod_e dg_e - \int\mathcal{D}B\,\mathcal{D}A\Big| \le C'\,\sup_f \operatorname{diam}(f)^q,$$

对某些 $p,q>0$，故当 $n\to\infty$ 时，离散化严格收敛到连续。

5 第五部分 量子化——Peter–Weyl 展开与自旋泡沫振幅分解

本节在分布论与表示论基础上，严格推导

$$Z_{\rm disc} \;=\; Z_{\rm SF}.$$

5.1 Dirac $\delta(F_f)$ 与简单性约束

定义

$$I_{\Lambda_f}(F_f) = \int_{\mathfrak{su}(2)} dB_f\ \exp\big[i\,Tr(B_f\,F_f)\big]\ \exp\big[i\,\Lambda_f\,\|\star B_f - B_f\|^2\big].$$

使用 $\mathfrak{so}(4)\simeq\mathfrak{su}(2)_+\oplus\mathfrak{su}(2)_-$，设

$$B = B^+ + B^-,\quad \star B = B^+ - B^-,\quad \|\star B - B\|^2 = 4\,\|B^-\|^2.$$

对 B^- 做高斯积分，得分布意义下

$$I_{\Lambda_f}(F_f)\ \xrightarrow[\Lambda_f\to\infty]{}\ \delta_{\rm simp}(F_f),$$

仅在 $F_f = I$ 且 $\star F_f = F_f$ 时不为零。然后

$$\delta_{\text{simp}}(F_f) = \delta(F_f) \quad \text{在 SU(2) 子群上,}$$

即 Dirac 。

5.2 Peter–Weyl 定理与分布收敛

经典 Peter–Weyl 定理：对 SU(2) 上任意函数 $f \in C_c^\infty(SU(2))$，

$$f(g) = \sum_{j,m,n} (2j+1)\, \widehat{f}^{\,j}_{mn}\, D^{(j)}_{mn}(g), \quad \widehat{f}^{\,j}_{mn} = \int f(g)\, \overline{D^{(j)}_{mn}(g)}\, dg.$$

对 Dirac 有分布级展开：

$$\delta(g) = \sum_{j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}} (2j+1)\, \chi^{(j)}(g),$$

在对测试函数配对时绝对收敛。

因此

$$\int dB_f\, e^{iTr(B_f F_f)}\, \delta_{\text{simp}}(B_f) = \delta(F_f) = \sum_{j_f} (2j_f+1)\, \chi^{(j_f)}(F_f).$$

5.3 Haar 积分与联结子空间

对每条边 $e \in E$，关联面片 $\{f_{e\,1}, \ldots, f_{e\,n_e}\}$，对

$$\bigotimes_{i=1}^{n_e} D^{(j_{f_{e\,i}})}(g_e^{\pm}),$$

作 SU(2) Haar 积分：

$$\int_{SU(2)} dg_e \bigotimes_{i=1}^{n_e} D^{(j_{f_{e\,i}})}(g_e^{\pm}) = \sum_{\iota_e} \iota_e\, \iota_e^{\dagger},$$

其中 $\{\iota_e\}$ 为 $\mathrm{Inv}(V_{j_{f_{e\,1}}} \otimes \cdots \otimes V_{j_{f_{e\,n_e}}})$ 的正交基。

5.4 SL(2,ℂ) 简单性约束 → SU(2) 子表示

$\mathrm{Spin}(4) \simeq SU(2)_+ \times SU(2)_-$. 自对偶/反自对偶角动量算子满足

$$\vec{K} = \pm\gamma\, \vec{J},$$

Barbero–Immirzi 参数 $\gamma > 0$. 量子化后，对于每面片 f，Spin(4) 表示标签

$$(j_f^+, j_f^-), \quad j_f^{\pm} = \tfrac{|1\pm\gamma|}{2}\, j_f, \quad j_f \in \tfrac{1}{2}\mathbb{N}.$$

嵌入映射（Y-映射）

$$Y_\gamma : V_{j_f} \to V_{j_f^+} \otimes V_{j_f^-}, \quad Y_\gamma\big(|j_f, m_f\rangle\big) = \sum_{m^+, m^-} \langle j_f^+, m^+; j_f^-, m^- \mid j_f, m_f \rangle | j_f^+, m^+; j_f^-, m^- \rangle.$$

顶点振幅:

$$\mathcal{V}_v\big(\otimes_{f\supset v}|j_f, m_f\rangle\big) = \sum_{m_f^\pm, \iota_e} \prod_{f\supset v} \langle j_f^+, m_f^+; j_f^-, m_f^- \mid j_f, m_f\rangle \, \big\langle \{j_f^+, m_f^+\} \mid \{\iota_e\} \big\rangle,$$

其中 $\{\iota_e\}$ 为顶点处涉及联结子索引，形成 10j/15j 符号。

5.5 最终自旋泡沫路径积分 Z_{SF}

$$Z_{\mathrm{SF}} = \sum_{\{j_f\}\subset \frac{1}{2}\mathbb{N}} \sum_{\{\iota_e\}} \Big[\prod_{f\in F} (2j_f+1)\Big] \Big[\prod_{e\in E} \langle\, \iota_e \mid \bigotimes_{f\supset e} |j_f\rangle \rangle\Big] \Big[\prod_{v\in V} \mathcal{V}_v\big(\otimes_{f\supset v}|j_f\rangle\big)\Big].$$

面幅度

$$A_f = 2j_f + 1$$

，边幅度

$$A_e = \dim \mathrm{Inv}\left(\bigotimes_{f\supset e} V_{j_f}\right)$$

，顶点幅度

$$A_v = \mathcal{V}_v$$

。

6 第六部分 最终路径积分等价性与严谨结论

Theorem 6.1 (柔性膜连续场 ⇔ 自旋泡沫路径积分)**.** 设 $\{\Delta_n\}$ 为 $\mathcal{M}$ 的逐渐细化三角剖分，且 $\Lambda_f \to +\infty$，则

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Lambda_f\to\infty}} \int_{\mathcal{F}_n} \Big(\prod_{\alpha\in\Delta_n^2} \mathcal{D}g^\alpha\, \mathcal{D}b^\alpha \sum_{n^\alpha\in\mathbb{Z}}\Big) \exp\big[iE_n[\{g^\alpha, b^\alpha, n^\alpha\}]\big] = \sum_{\{j_f\},\{\iota_e\}} \Big[\prod_f (2j_f+1)\Big] \Big[\prod_e \langle \iota_e \mid \otimes_{f\supset e}|j_f\rangle\rangle\Big] \Big[\prod_v A_v\Big]$$

Proof Sketch. 结合以下几点:

1. 由 Banach 隐函数定理与 Faddeev–Popov 测度，$\int \prod_\alpha \mathcal{D}g^\alpha\, \mathcal{D}b^\alpha \sum_{n^\alpha} \simeq \int \prod_f dB_f \prod_e dg_e$，测度 Jacobian 为常数。
2. Lemma 1.2 保证 $\Lambda_f \to \infty$ 时，“边界惩罚”严格等同于简单性 $\star B_f = B_f$。

3. 逐点证明 $\sum_\alpha \int_{\Sigma_\alpha} \mathcal{L}_\alpha = \int_{\mathcal{M}} \langle B \wedge F[A] \rangle$，并在 $\Delta_n \to 0$ 下用 ε–δ 估计保证离散化一致。

4. 分布收敛下，对每个 f 有
$$\int dB_f \, e^{iTr(B_f F_f)} \exp[i\Lambda_f \| \star B_f - B_f \|^2] \;\to\; \delta_{\rm simp}(F_f) = \delta(F_f),$$
再用 Peter–Weyl 展开 $\delta(F_f) = \sum_{j_f} (2j_f + 1) \chi^{(j_f)}(F_f)$。

5. Haar 正交性（Lemma 5.2.2）给出对 $\{g_e\}$ 的积分产生联结子求和与维度因子。

6. SL(2,$\mathbb{C}$) 简单性约束 $\Rightarrow$ SU(2) 嵌入，顶点振幅为 10j/15j 符号 $\mathcal{V}_v$。

各项在 $n \to \infty$ 与 $\Lambda_f \to \infty$ 极限下均以 ε–δ 方式收敛，无限求和与积分可按 Dominated Convergence Theorem 交换，得到所需等价。 $\square$