應數三期中考 Q6Q7Q9 詳解

教師：陳恒榆
助教：蕭鎬澤

6.

$$\frac{\sin\pi z}{\pi}=\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}=ze^{\gamma z}\prod_{k=1}(1+\tfrac{z}{k})e^{-z/k}\times(1-z)e^{\gamma(1-z)}\prod_{k=1}(1+\tfrac{1-z}{k})e^{-(1-z)/k}$$

$$=ze^{\gamma}\prod_{k=1}(1+\tfrac{z}{k})(1-\tfrac{z}{k})\times\underbrace{\prod_{j=1}(\tfrac{j+1}{j})e^{-1/j}}_{e^{-\gamma}}$$

$$\sin\pi z=\pi z\prod_{k=1}(1-\tfrac{z^2}{k^2})$$

(4 分) #

where, $\gamma\equiv\lim_{n\to\infty}(\sum_{m=1}^{n}m^{-1}-\ln n)$, $\quad e^{\gamma}=\lim_{n\to\infty}\prod_{m=1}^{n}\frac{1}{n}\times e^{1/m}$, $\quad e^{-\gamma}=\lim_{n\to\infty}\prod_{m=1}^{n}n\times e^{-1/m}$

By $\int dz\cot\pi z=\frac{1}{\pi}\ln\sin\pi z+C$,

$$\ln\sin\pi z=\ln\{\pi z\prod_{k=1}(\tfrac{k^2-z^2}{k^2})\}=\ln\pi+\ln z+\sum_{k=1}[\ln(k-z)+\ln(k+z)-2\ln k]$$

$$\pi\cot\pi z=\tfrac{d}{dz}[\ln\sin\pi z]=\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}[\frac{-1}{k-z}+\frac{1}{k+z}]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{z+k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{z-k}$$

(6 分) #

By $\cot\pi z+\dfrac{1}{\sin\pi z}=\dfrac{\cos\pi z+1}{\sin\pi z}=\dfrac{2\cos^2(\frac{\pi z}{2})}{2\sin(\frac{\pi z}{2})\cos(\frac{\pi z}{2})}=\cot(\tfrac{\pi z}{2})$

$$\frac{\pi}{\sin\pi z}=\pi\cot(\tfrac{\pi z}{2})-\pi\cot\pi z=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\frac{z}{2})-k}-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{z-k}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2}{z-2k}-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{z-k}$$

$$=\sum_{k=even}\frac{1}{z-k}+\sum_{k=even}\frac{1}{z-k}-\sum_{k=even}\frac{1}{z-k}-\sum_{k=odd}\frac{1}{z-k}$$

$$=\sum_{k=even}\frac{1}{z-k}-\sum_{k=odd}\frac{1}{z-k}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z-k}$$

(10 分) #

7. 定義：$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}dt\,e^{-t}t^{z-1}$

$$\Gamma(z+1)=\int_0^{\infty}dt\,e^{-t}t^{z}=-\int_0^{\infty}de^{-t}\,t^{z}$$

$$=-e^{-t}\cdot t^{z}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}dt^{z}\,e^{-t}=0+z\int_0^{\infty}dt\,e^{-t}t^{z-1}$$

$$=z\Gamma(z)$$

(6 分) #

教師：陳恒榆
助教：蕭鎬澤

$\Gamma(n)\Gamma(\frac{1}{2})=2^{n-1}\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})$

If $n=2k,\quad k\in Z$

左式：$\Gamma(n)\Gamma(\frac{1}{2})=\Gamma(2k)\Gamma(\frac{1}{2})=(2k-1)!\times\Gamma(1)\Gamma(\frac{1}{2})$

右式：$2^{n-1}\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})=2^{2k-1}\Gamma(\frac{2k}{2})\Gamma(\frac{2k+1}{2})=2^{2k-1}\Gamma(k)\Gamma(k+\frac{1}{2})$

$=2^{2k-1}\Gamma(k)\Gamma(k+\frac{1}{2})$

$=2^{2k-1}\times\underbrace{(k-1)\times(k-2)\times\cdots\times1}_{k\text{-1個}}\times\Gamma(1)\times\underbrace{(k+\frac{1}{2}-1)\times(k+\frac{1}{2}-2)\times\cdots\times\frac{1}{2}}_{k\text{個}}\times\Gamma(\frac{1}{2})$

$=\underbrace{(2k-2)\times(2k-4)\times\cdots\times2}_{k\text{-1個}}\times\underbrace{(2k-1)\times(2k-3)\times\cdots\times1}_{k\text{個}}\times\Gamma(1)\Gamma(\frac{1}{2})$

$=(2k-1)!\times\Gamma(1)\Gamma(\frac{1}{2})$

左式=右式(7 分) #

If $n=2k+1,\quad k\in Z$

左式：$\Gamma(n)\Gamma(\frac{1}{2})=\Gamma(2k+1)\Gamma(\frac{1}{2})=(2k)!\times\Gamma(1)\Gamma(\frac{1}{2})$

右式：$2^{n-1}\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})=2^{2k}\Gamma(\frac{2k+1}{2})\Gamma(\frac{2k+1+1}{2})=2^{2k}\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(k+1)$

$=2\cdot2^{2k-1}\Gamma(k+\frac{1}{2})\times k\Gamma(k)$

$=2k\cdot2^{2k-1}\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(k)$

$=2k\cdot(2k-1)!\times\Gamma(1)\Gamma(\frac{1}{2})$

$=(2k)!\times\Gamma(1)\Gamma(\frac{1}{2})$

左式=右式(7 分) #

9. 單位圓盤映射至上半平面，其公式為：$w=i(\frac{1-z}{1+z})=u+iv$

其中，$z=x+iy=re^{i\theta}$， $r=(x^2+y^2)^{1/2}<1$， $\theta=\arctan(x/y)$

將 $z=x+iy$ 代入 $w=i(\frac{1-z}{1+z})=u+iv$ 可得，

$w=i(\frac{1-x-iy}{1+x+iy})=\frac{2y+i(1-x^2-y^2)}{(1+x)^2+y^2}=u+iv$

$(u,v)=(\frac{2y}{(1+x)^2+y^2},\frac{1-x^2-y^2}{(1+x)^2+y^2})$

下列為須證明(或詳述)事項：

(1).圓盤邊界映射為 u 軸

(2).上半圓 C_+ 內映射為正實數軸 R_+

(3).下半圓 C_- 內映射為負實數軸 R_-

(4).圓盤內映射為上半平面

(5).圓盤外映射為下半平面

(1)(2)(3) u 軸的條件，$v=0$。

$v=\frac{1-x^2-y^2}{(1+x)^2+y^2}=0\Rightarrow1-x^2-y^2=0\Rightarrow x^2+y^2=1$ (單位圓)

找幾個特殊映射的點。

$A(x\to-1,y\to0^+)\xrightarrow{w}A'(u\to+\infty,v\to0)$，$E(x\to-1,y\to0^-)\xrightarrow{w}E'(u\to-\infty,v\to0)$

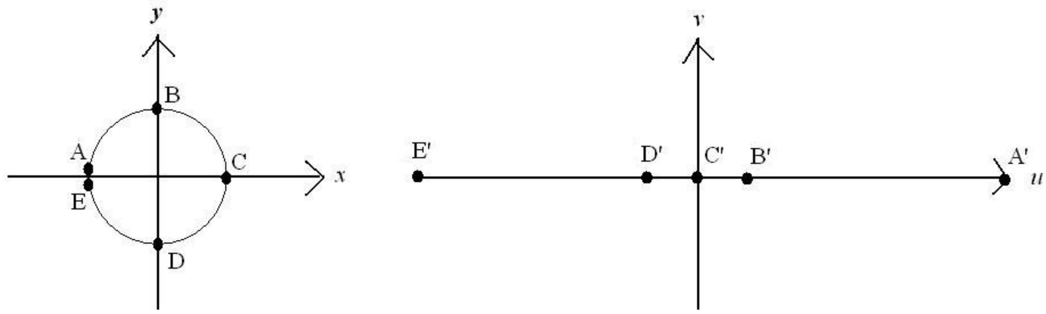
$C(x\to1,y\to0)\xrightarrow{w}C'(u\to0,v\to0)$

應數三期中考 Q6Q7Q9 詳解

教師：陳恒榆
助教：蕭鎬澤

$\mathrm{B}(x \to 0, y \to 1) \xrightarrow{w} \mathrm{B}'(u \to 1, v \to 0)$ ， $\mathrm{D}(x \to 0, y \to -1) \xrightarrow{w} \mathrm{D}'(u \to -1, v \to 0)$

畫出下列關係圖



由以上可知，圓盤邊界映射為u軸且上半圓C_+內映射為正實數軸R_+，而下半圓C_-內映射為負實數軸R_-。

(4)上半平面的條件，$v > 0$。

$v = \frac{1-x^2-y^2}{(1+x)^2+y^2} > 0 \Rightarrow 1 - x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 < 1$(單位圓盤內)

(5)下半平面的條件，$v < 0$。

$v = \frac{1-x^2-y^2}{(1+x)^2+y^2} < 0 \Rightarrow 1 - x^2 - y^2 < 0 \Rightarrow x^2 + y^2 > 1$(單位圓盤外)

(10 分) ＃

由 $(u,v) = (\frac{2y}{(1+x)^2+y^2}, \frac{1-x^2-y^2}{(1+x)^2+y^2})$

$\frac{u}{v} = \frac{2y}{1-x^2-y^2}$ 代入 $f(u,v) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(\frac{u}{v})$ 可得 $F(x,y)$

$F(x,y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(\frac{2y}{1-x^2-y^2})$

(6 分) ＃

Explain steps.

(4 分) ＃