主观贝叶斯方法笔记

太长不看版：

> 主观贝叶斯方法用于解决已知先验概率时，如何转换为后验概率的问题

完整笔记：

首先，本文为人工智能课程笔记，如有勘误或不完成部分欢迎补充😁

1. 给出条件

$$IF \quad E \quad THEN(LS, LN) \quad R(P(R))$$

其中
【定义】LS:充分性量度;
【定义】LN:必要性量度;

2、条件概率公式

$$\text{条件概率公式} = \begin{cases} P(R|E) = \dfrac{1}{P(E)} * P(R) * P(E|R) & (1) \\ P(\neg R|E) = \dfrac{1}{P(E)} P(E|\neg R) P(\neg R) & (2) \end{cases}$$

【定义】激励函数O(n)

$$O(x) = \frac{P(x)}{P(\neg x)}$$

由（1）和（2）得到

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{P(R|E)}{P(\neg R|E)} = \frac{P(E|R)}{P(E|\neg R)} \frac{P(R)}{P(\neg R)} \quad (3)$$
$$\text{我们将}\frac{P(E|R)}{P(E|\neg R)}\text{记为}LS\text{，表示充分性相关量度因此}$$
$$O(R|E) = LS * O(R)$$

3.讨论P(E)概率

对P(E)=1 或P(否E)=1的情况

$$\because P(E) = 1$$
$$\therefore P(R|E) = \frac{P(E|R) \cdot P(R)}{P(E)}$$

$$\text{而根据}\begin{cases} LS = \dfrac{P(E|R)}{P(E|\neg R)} \\ P(E) = 1 \end{cases} \Rightarrow P(\neg R|E) = 1 - P(R|E)$$

$$\therefore \text{由（3）式} \quad P(R|E) = LS \cdot \frac{P(R)}{1-P(R)} \cdot (1 - P(R|E))$$

$$\text{推导得到}\begin{cases} P(R|E) = \dfrac{LS \cdot P(R)}{(LS-1)P(R)+1} \quad (4) \\ P(\neg R|E) = \dfrac{LN \cdot P(R)}{(LN-1) \cdot P(R)+1} \quad (5) \end{cases}$$

而由$P(x)$与$O(x)$单调性相同，由（4）（5）和LS, LN取值，可以得到

$$(4)(5) \Rightarrow \begin{cases} LS \to \text{无穷时：} \quad \text{证据}E\text{使得}P(R|E) = 1 \\ LS > 1\text{ 时：} \quad P(R|E) > P(R)\text{后验概率大于先验概率} \\ LS = 1\text{ 时：} \quad P(R|E) = P(R)\text{先验概率等于后验概率} \\ LS < 1\text{时：} \quad P(R|E) < P(R)\text{先验概率小于后验概率} \end{cases}$$

4.例题讲解

[例题1]根据以下规则计算E_1,E_2,E_3均存在时，求P(P_i|E_i)

$$\begin{array}{lllll} \text{规则1：} IF & E1 & THEN(10,1) & R1(0.03) \\ \text{规则2：} IF & E2 & THEN(20,1) & R2(0.05) \\ \text{规则3：} IF & E3 & THEN(1,0.002) & R3(0.3) \end{array}$$

$$\text{解：（1）}\begin{cases} P(R1|E1) = \dfrac{LS \cdot P(R)}{(LS-1)P(R)+1}\text{其中}LS = 10 \Rightarrow P(R1|E1) = \dfrac{10 \times 3}{9 \times 0.03 + 1} = \dfrac{0.3}{1.27} \\ \text{同理可得}P(R2|E2) = \dfrac{0.6}{1.57} \\ \text{而}LS3 = 1, \therefore P(R3|E3) = P(R3) = 0.3 \end{cases}$$

(2)问：当$E1, E2, E3$均不存在时，求$P(Ri|\neg Ei)$

$$\text{解：}\begin{cases} P(R1|\neg E1) = \dfrac{LN \cdot P(R)}{(LN-1) \cdot P(R)+1} = \dfrac{1 \times 0.03}{1} = 0.03 \\ P(R1|\neg E2) = \dfrac{LN \cdot P(R)}{(LN-1) \cdot P(R)+1} = \dfrac{1 \times 0.03}{1} = 0.05 \\ P(R1|\neg E3) = \dfrac{LN \cdot P(R)}{(LN-1) \cdot P(R)+1} = \dfrac{1 \times 0.03}{1} = \dfrac{0.03}{0.76} \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x= & \cos(t) \\ y= & \sin(t) \\ z= & \dfrac{x}{y} \end{cases}$$

5.杜达公式

$$\text{当}0<P(E)<1\text{时，需要杜达公式计算概率}$$

$$P(R|S)=\begin{cases} \text{当}C(E|S)<0\text{时}:P(R|\neg E)+(P(R)-(R|\neg E)\times(\frac{1}{5}C(E|S)+1) \\ \text{当}C(E|S)>0\text{时}:P(R)+P(R|E)-P(R)\times\frac{1}{5}C(E|S) \end{cases}$$