微分方程引论课程笔记

2022 秋（赵班）

作者：王曹励文

组织：中国科学技术大学数学科学学院

时间：August 30, 2023

版本：4.3

目录

前言

本文件为笔者 2022 年秋季学期赵立丰老师微分方程引论课程的部分笔记，内容几乎处处是当年上课内容的重现，以及笔者自己找到的部分资料和对上课内容的理解，由于笔者水平有限，如果有错误欢迎大家来讨论，还请海涵（教我）。做成 LaTeX 的目的也是为了方便同学们学习这一门可能出现还未学到的知识、讲的比较快、内容量非常大的一门分析硬课。(如果今年因为教材的改动导致讲义巨大的变化，去年的讲义也不乏为一个参考资料?）此处引用赵老师的一句话，“刚开学的时候发现好多都没学过，到期末的时候发现都学过了。”

在第一章的预备知识部分，我们列出了在学习到课程的某一块内容时，按照正常学习进度可能暂未学到的知识（特别是对于学习数学分析 A 与线性代数 B 系列的同学），略微了解该部分的知识，只需暂时熟悉定义与定理，我认为有助于本课程的理解。

最后，欢迎大家修读赵立丰老师的微分方程引论课程!

第一部分

常微分方程

第 1 章 常微分方程概述

1.1 微分方程学习方向

目标:

1. 给出解析表达式
2. 无法得到解析解，但要对解的行为进行描述

方法:

不同类型的方程利用不同类型的方法

1.2 常微分方程的基本概念

定义 1.1 (常微分方程, 偏微分方程)

含有未知函数的导数 (或偏导) 的方程称为微分方程. 若未知函数为一元函数, 则方程为常微分方程 (ODE); 若未知函数为多元函数, 则方程为偏微分方程 (PDE).

♣

定义 1.2 (阶数)

ODE 的一般形式: $F(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)) = 0$, 其中 $n \in \mathbb{N}^*$ 为出现导数的最高次数，称为方程的阶数.

♣

定义 1.3 (线性)

线性 ODE 的一般形式为 $\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)}(x) + b(x) = 0$, 其中 $a_k(x)$ 为与 y 无关的一元函数, $k = 0, 1, \cdots, n$. 反之, 则称方程为非线性 ODE.

♣

注 判断是否线性时，认为 $y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)$ “相同”，考虑是否为 1 次.

例题 1.1

1. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + yx^2 = 0$, 这是 1 阶线性 ODE.
2. $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x^2 = 0$, 这是 2 阶非线性 ODE.
3. Laplace 方程: $\Delta u = 0$, 其中 $\Delta := \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ 称为 **Laplace 算子**.

定义 1.4 (解, 定义区间)

若函数 $\varphi(x)$ 在 $I \subset \mathbb{R}$ 上 n 阶连续可微, 即 $\varphi(x) \in C^n(I)$, 且

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

则称 $y = \varphi(x)$ 是方程在 I 上的一个解, I 称为解的定义区间.

♣

注 对于微分方程的解应指明解的存在区间.

定义 1.5 (积分曲线)

$y = \varphi(x)$ 在 (x, y) 平面上的图形是一条光滑的曲线, 称之为积分曲线.

♣

定义 1.6 (通解, 特解)

常微分方程的解 $y=\varphi(x,C_1,\cdots,C_n)$ 称为方程的通解, 其中 $C_i(i=1,\cdots,n)$ 为任意独立常数, 即

$$\frac{\partial(\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)})}{\partial(C_1,C_2,\cdots,C_n)}\neq 0.$$

不包含任意常数的解称为方程的特解.

♣

注 通解如此定义的来源为逆映射定理, 对积分曲线上任意一点 (x_0,y_0), 由于 $Jacobbi$ 行列式不为 0, 由局部逆映射定理, 可反解出互相没有约束的常数. 自然地, 当通解中的常数确定下来, 通解自然变为特解.

1.3 前置知识提要和参考书

本部分列举了可能在课堂上用到的, 但此时按照正常进度还未讲到的来自数学分析或线性代数的知识点, 并给出了参考书的对应范围. 注意这些知识知道的较早有助于不在课上坐牢，当学完数学分析再回头看微分方程的证明也不乏为一种选择.

1. Picard 迭代证明解的存在唯一性：需要了解一致收敛的概念，一致收敛的简单性质，参考史济怀老师的《数学分析教程》15.2-15.3.
2. 扰动定理的证明：可以提前了解 $Arzela-Ascoli$ 引理.
3. 多重根的线性微分方程组的解法：需要了解 Jordan 标准型的结果，参考李尚志老师的《线性代数》7.4.
4. 幂级数解法：需要了解幂级数的定义与基本性质，参考史济怀老师的《数学分析教程》15.4-15.5.
5. R^n 波动方程问题的简化：会利用到 Fourier 变换法，只需知道最简单的定义即可，可参考《2022 秋微分方程引论习题课讲义（宁老师班)》12.2.2；或者学习完热方程后回头来看.
6. 位势方程：R^n 中的积分公式，参考《2022 秋微分方程引论习题课讲义（宁老师班)》12.2.1.

第 2 章　一阶线性方程

考虑一阶微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$, $f(x,y)$ 为区域内的连续函数. 也可写为形式 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, 其中 $P(x,y),Q(x,y)$ 为区域内的连续函数. 当 $Q(x_0,y_0)\neq 0$ 时，$\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ 在 (x_0,y_0) 处的近旁连续. 此时再将 x 视为 y 的函数，若 $P(x_0,y_0)\neq 0$，有 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$, $\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$ 在 (x_0,y_0) 处的近旁连续. 因此，当 $P(x_0,y_0)\neq 0, Q(x_0,y_0)\neq 0$ 时, 在 (x_0,y_0) 处的近旁, 以上两个形式虽然未知函数不同, 但可以统一写为对称形式:

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0. \tag{2.0.1}$$

依据定义可知一阶线性方程的表达式可化简为 $y'+p(x)y=q(x)$. $p(x),q(x)$ 在区间 I 上连续.

定义 2.1 (齐次线性, 齐次非线性)

若 $q(x)\equiv 0$, 则为齐次线性方程. 若 $q(x)\neq 0$, 则为非齐次线性方程. ♣

注 研究非齐次方程时，先考察对应的齐次方程.

考察方程 $y'+p(x)y=0$. 对其稍微变形即可得到 $\frac{1}{y}\mathrm{d}y+p(x)\mathrm{d}x=0$, 该方程为一个可分离变量的方程. 可分离变量的方程为恰当方程的特殊情形，故我们从恰当方程入手，逐渐考察一阶线性方程的解.

2.1 恰当方程

定义 2.2 (恰当方程)

若存在可微函数 $\phi(x,y)$, 使得 $\mathrm{d}\phi(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$, 即

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=P(x,y),\ \frac{\partial\phi}{\partial y}=Q(x,y). \tag{2.1.1}$$

则称方程 (2.0.1) 是恰当方程 (或全微分方程). ♣

定理 2.1 (恰当方程的解)

若 $P(x,y),Q(x,y)\in C(D)$, $D\subset\mathbb{R}^2$, 且 $\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}\in C(D)$, 则 (2.0.1) 是恰当方程的充要条件为 $\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$. 此时, (2.0.1) 的通积分为

$$\begin{aligned}\phi(x,y)&=\int_{x_0}^{x}P(x,y)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\mathrm{d}y\\&=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y\\&=C,\ \forall(t_0,x_0)\in D\subset\mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

♡

证明 必要性: 若 (2.0.1) 恰当, 则 $\exists\phi(x,y)\in C(D)$, s.t.(2.1.1) 成立.

由 $\phi(x,y)$ 二阶连续可微得

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

充分性: 目标是验证 (2.0.1) 恰当，则应构造一个函数 $\phi(x,y)$ 满足 (2.1.1).

1. 方法一. 令 $\phi(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)\mathrm{d}x+\psi(y)$, $\psi(y)$ 为待定函数, 则此时 $\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\int_{x_0}^{x}P(x,y)\mathrm{d}x=P(x,y)$. 由于

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x}P(x,y)\mathrm{d}x+\varphi'(y)$$

$$\begin{aligned}&=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x+\varphi'(y)\\&=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x+\varphi'(y)\\&=Q(x,y)-Q(x_0,y)+\varphi'(y).\end{aligned}$$

令 $\frac{\partial\phi}{\partial y}=Q(x,y)$, 则有 $\varphi'(y)=Q(x_0,y)$, 即 $\varphi(y)=\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\mathrm{d}y$, 这样就构造出了满足要求的函数 ϕ, 且推得方程通解为

$$\phi(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\mathrm{d}y=C,\ \forall(t_0,x_0)\in D\subset\mathbb{R}^2.$$

2. 方法二. 令 $\widetilde{\phi}(x,y)=\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y+\varphi(x)$, 其余过程同方法一. 则可得

$$\widetilde{\phi}(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

下验证 $\phi(x,y)\equiv\widetilde{\phi}(x,y)$. 事实上, 由 $\mathrm{d}\phi=\mathrm{d}\widetilde{\phi}=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ 可得 ϕ 和 $\widetilde{\phi}$ 只相差一个常数. 而 $\phi(x_0,y_0)=\widetilde{\phi}(x_0,y_0)=0$, 因此 $\phi\equiv\widetilde{\phi}$.

注 验证是否恰当时应该注意偏导数的连续性.

例题 2.1 可分离变量的方程的简单情形 求解方程 $p(x)\mathrm{d}x+q(y)\mathrm{d}y=0$, $p(x)$,$q(y)$ 连续可微.

解. 该方程为恰当方程，通积分为

$$\int p(x)\mathrm{d}x+\int q(y)\mathrm{d}y=C.$$

2.2 可分离变量的方程

定义 2.3 (可分离变量的方程)

若 (2.0.1) 具有形式

$$X(x)Y_1(y)\mathrm{d}x+X_1(x)Y(y)\mathrm{d}y=0,\tag{2.2.1}$$

则称为可分离变量的方程. ♣

定理 2.2 (可分离变量方程的解)

在 (2.2.1) 中, 若 $\exists\,X_1(a)=0$ 或 $Y_1(b)=0$, $x=a$ 或 $y=b$ 为一个特解.

若 $X_1(x)\neq0, Y_1(y)\neq0$, 可化为

$$\frac{X(x)}{X_1(x)}\mathrm{d}x+\frac{Y(y)}{Y_1(y)}\mathrm{d}y=0.$$

由例 2.1 可知, 可分离变量方程的通积分为

$$\int\frac{X(x)}{X_1(x)}\mathrm{d}x+\int\frac{Y(y)}{Y_1(y)}\mathrm{d}y=C.$$

♡

例题 2.2 求解微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$.

解.

1. $y=0, -\infty<x<+-\infty$ 为特解.
2. $y\neq0$ 时, 原方程可化简为

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^{\frac{1}{3}}}=\frac{3}{2}\mathrm{d}x,$$

通积分为

$$\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}x+C,$$

化简即得

$$y^2 = (x+C)^3, x \geqslant -C, \forall C \in \mathbb{R}.$$

注 该微分方程的解的图像如图 2.1 所示.

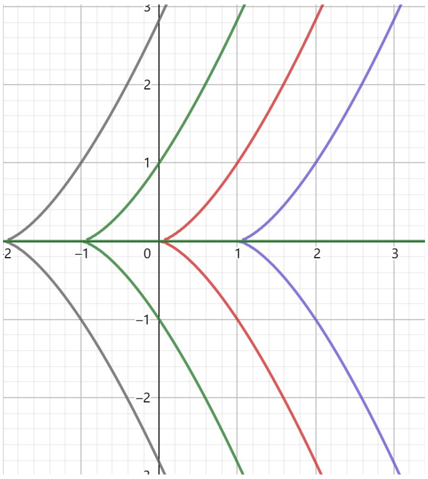

图 2.1: 例 2.2 解的图像

可以看出, 微分方程的特解与通解并不代表所有的解, 在 $y=0$ 上的任何一点均有“分支”, 不同的“分支”得到不同的解.

例题 2.3 求解微分方程 $(x^2+1)(y^2-1)\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y = 0$.

解.

1. $x=0, y=\pm 1$ 为特解.
2. $x \neq 0$ 且 $y \neq \pm 1$ 时, 原方程可化简为

$$\frac{x^2+1}{x}\mathrm{d}x + \frac{y}{y^2-1}\mathrm{d}y = 0.$$

通积分为

$$\frac{1}{2}x^2 + In|x| + \frac{1}{2}|y^2-1| = C,$$

化简即得

$$y^2 - 1 = \pm e^C x^{-2} e^{-x^2},$$

故该方程有通解

$$y^2 - 1 = Cx^{-2}e^{-x^2}, \forall C \in \mathbb{R}.$$

特解为 $x=0$.

2.3 一阶线性方程

回顾一阶线性方程的一般形式, 一阶齐次线性方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = 0. \tag{2.3.1}$$

一阶非齐次线性方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x). \tag{2.3.2}$$

其中 $p(x), q(x)$ 为 I 上的连续函数.

本节考察该两种方程的解法以及解的部分性质.

定理 2.3 (一阶线性齐次方程的解)

方程 (2.3.1) 的解为

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s}, \forall C \in \mathbb{R}.$$

♡

证明

1. $y = 0$ 为特解.
2. $y \neq 0$ 时方程 (2.3.1) 可化简为可分离变量的方程

$$\frac{dy}{y} + p(x)\mathrm{d}x = 0.$$

化简即得

$$y = \pm e^{C - \int_{x_0}^{x} p(x)\mathrm{d}x}.$$

故方程的解为 $y = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s}, \forall C \in \mathbb{R}$.

注 定理 2.3 中的 C 为任意常数, x_0 选取较为容易表示解的特殊点.

定理 2.4 (一阶线性非齐次方程的解)

方程 (2.3.2) 的解为

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s}\left(\int_{x_0}^{x} q(s)e^{\int_{x_0}^{s} p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s + C\right), \forall C \in \mathbb{R}.$$

♡

证明 设方程 (2.3.2) 的解为

$$y = C(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s}.$$

则

$$C'(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s} - C(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s}p(x) + p(x)C(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s} = q(x).$$

即

$$C'(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s} = q(x).$$

积分得

$$C(x) = \int_{x_0}^{x} q(s)e^{\int_{x_0}^{s} p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s + C.$$

带入可得方程的解为

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s}\left(\int_{x_0}^{x} q(s)e^{\int_{x_0}^{s} p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s + C\right), \forall C \in \mathbb{R}.$$

写成不定积分为

$$y = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right).$$

其中 C 为任意常数.

注

1. 定理 2.4 的结果可继续化简,

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s}\left(\int_{x_0}^{x} q(s)e^{\int_{x_0}^{s} p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s + C\right) \\ &= Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s} + \int_{x_0}^{x} q(s)e^{\int_{x_0}^{s} p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s} \\ &= Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s} + \int_{x_0}^{x} q(s)e^{-\int_{s}^{x} p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

2. 定理 2.4 的证明用到了常数变易法, 该方法考虑的初衷是猜想齐次线性方程转化为非齐次线性方程时, $q(x)$ 的存在对原方程的解造成了“扰动”.

3. 若有初值条件, 如 $y(x_0)=y_0$, 则常数 C 可被唯一确定. 根据注 1 可知 $y(x_0)=C=y_0$, 此时方程的解为

$$y=y_0e^{-\int_{x_0}^{x}p(s)\mathrm{d}s}+\int_{x_0}^{x}q(s)e^{-\int_{s}^{x}p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s.$$

4. 一阶微分方程有明确的几何意义, 考察

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y),$$

其中 $f(x,y)$ 为平面区域内的连续函数.

若 $y=\phi(x)$ 为方程的解, 其在所有点处的导数应为可计算的函数值, 称其为微分方程的**积分曲线**.

例题 2.4 求解微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x}y=x^3\quad(x\neq 0)$.

解. 先考虑齐次方程的解. 当 $x>0$ 时, 方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x}y=0$ 的解为

$$y=Ce^{-\int_{x_0}^{x}\frac{1}{s}ds}\overset{x_0=1}{=}\frac{1}{x}.$$

令非齐次方程的解为 $y=C(x)\frac{1}{x}$, 则

$$C'(x)\frac{1}{x}=x^3.$$

积分得

$$C(x)=\frac{1}{5}x^5+C.$$

$x<0$ 时, 用类似的方法计算, 最终可得原微分方程的解为

$$y=\frac{1}{5}x^4+\frac{C}{x}(x>0\text{或}x<0).$$

其中 C 为任意常数.

注 微分方程的解应指明区间.

下面讨论一阶线性微分方程解的性质.

定理 2.5

一阶齐次线性方程 (2.3.1) 的解或者恒等于 0, 或者恒不等于 0.

证明 若 $y(x_0)=0$ 但 y 不恒为 0, 由定理 2.3,

$$y=y_0e^{-\int_{x_0}^{x}p(s)\mathrm{d}s}.$$

注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(s)\mathrm{d}s})=(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y(x)p(x))e^{\int_{x_0}^{x}p(s)\mathrm{d}s}=0.$$

则 $y(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(s)\mathrm{d}s}$ 为一个常数. 而

$$y(x_0)e^{\int_{x_0}^{x_0}p(s)\mathrm{d}s}=0.$$

故

$$y(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(s)\mathrm{d}s}=0,\forall x\in I.$$

$\forall x\in I$ 上, $|e^{\int_{x_0}^{x}p(s)\mathrm{d}s}|<\infty$. 则 $y(x)\equiv 0$, 矛盾.

定理 2.6

线性方程的解整体存在, 即 (2.3.1) 与 (2.3.2) 的任意解在 $p(x)$ 与 $q(x)$ 上有定义且连续的整个区间 I 上存在.

定理 2.7

齐次方程 (2.3.1) 的解的任意线性组合均为齐次方程的解;

齐次方程 (2.3.1) 的任一解与非齐次线性方程 (2.3.2) 的任一解之和为非齐次线性方程 (2.3.2) 的解;

非齐次线性方程 (2.3.2) 的任意两解之差为齐次线性方程 (2.3.2) 的解.

注 该定理再次表明特解与通解并不为全部解.

定理 2.8

非齐次线性方程 (2.3.2) 的任一解与齐次线性方程 (2.3.1) 的通解之和构成非齐次线性方程 (2.3.2) 的通解.

定理 2.9 (初值问题的解的唯一性)

一阶线性方程的初值问题的解存在且唯一. 即

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

的解存在且唯一.

证明

1. 存在性: 已由定理 2.4 注 3 给出.
2. 唯一性: 设 $y = \phi_1(x), y = \phi_2(x)$ 均为初值问题的解.
   考虑 $\psi(x) = \phi_1(x) - \phi_2(x)$,
   $$\psi'(x) = \phi_1'(x) - \phi_2'(x) = (q(x) - p(x)\phi_1(x)) - (q(x) - p(x)\phi_2(x)) = -p(x)\psi(x).$$
   $\psi(x)$ 为一阶齐次线性方程的解, 且 $\psi(x_0) = 0$. 由定理 2.5 知 $\psi(x) \equiv 0$. 即 $\phi_1(x) \equiv \phi_2(x)$.

注 存在性的证明通常考虑给出一个符合题意的构造, 唯一性的证明通常假设存在不同的结果后证明两者相同.

例题 2.5 设微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay = f(x),$$

其中 $a > 0$ 为常数, 而 $f(x)$ 为以 2π 为周期的连续函数, 试求方程的 2π 周期解.

解. 由定理 2.4, 该方程的解为

$$\begin{aligned} y =& Ce^{-\int_{x_0}^{x} a\mathrm{d}s} + \int_{x_0}^{x} f(s)e^{-\int_s^x a\mathrm{d}t}\mathrm{d}s \\ &\overset{x_0=0}{=} Ce^{-ax} + \int_0^x f(s)e^{-a(x-s)}\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

由解的周期性, $y(0) = y(2\pi)$. 当 $y(0) = y(2\pi)$ 时, 下证明 $\forall x \in R$, 有 $y(x) = y(x + 2\pi)$.

令 $u(x) = y(x + 2\pi) - y(x)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y(x+2\pi)}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (f(x+2\pi) - ay(x+2\pi)) - (f(x) - ay(x)) = -au(x).$$

$u(x)$ 为齐次方程的解, 而 $u(0) = 0$, 故 $u(x) \equiv 0$, 即 $\forall x \in R$, 有 $y(x) = y(x + 2\pi)$. 则有方程

$$\begin{aligned} C &= y(0) \\ &= y(2\pi) \\ &= Ce^{-2\pi a} + \int_0^{2\pi} f(s)e^{-a(2\pi-s)}\mathrm{d}s \\ &= Ce^{-2\pi a} + e^{-2\pi a}\int_0^{2\pi} f(s)e^{as}\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

解得

$$C = \frac{e^{-2\pi a}}{1 - e^{-2\pi a}}\int_0^{2\pi} f(s)e^{as}\mathrm{d}s.$$

注 本题中应用的方法可以作为通法解决一系列与周期函数有关的问题. 即构造 $u(x) = y(x + \omega) - y(x)$, 求其满足的方程, 通过定理 2.5 证明 $u(x) \equiv 0$. 对于周期性的问题有结果如下:

对方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x).$$

其中 $p(x), q(x)$ 均为以 ω 为周期的周期函数. 则:

1. 若 $q(x) \equiv 0$, 该方程的任意非零解以 ω 为周期, 当且仅当
$$\bar{p} = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega p(x)\mathrm{d}x = 0.$$
2. 若 $q(x) \not\equiv 0$, 该方程有唯一的周期解, 当且仅当
$$\bar{p} = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega p(x)\mathrm{d}x \neq 0.$$

2.4 几类重要的一阶常微分方程

2.4.1 齐次方程

定义 2.4 (齐次方程)

若 $P(tx, ty) = t^m P(x, y), Q(tx, ty) = t^m Q(x, y), \forall t \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{R}$, 则称 (2.0.1) 是 m 次齐次方程. ♣

注 齐次方程可表示为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g\left(\frac{y}{x}\right)$, 此处 g 是给定的连续函数. 这是因为
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = -\frac{x^{-m}P(x,y)}{x^{-m}Q(x,y)} = -\frac{P(1,y/x)}{Q(1,y/x)}.$$
求解方法:
作变换 $y = ux$, 则 $\mathrm{d}y = u\mathrm{d}x + x\mathrm{d}u$, 从而
$$\begin{cases} P(x,y) = P(x,ux) = x^m P(1,u), \\ Q(x,y) = Q(x,ux) = x^m Q(1,u). \end{cases}$$
从而方程 (2.0.1) 可化为
$$x^m[P(1,u) + uQ(1,u)]\mathrm{d}x + x^{m+1}Q(1,u)\mathrm{d}u = 0. \tag{2.4.1}$$
这是一个可分离变量的方程.

注 方程 (2.4.1) 有特解 $x = 0$, 但不一定为齐次方程的解, 由于令 $y = ux$ 并做除法时, $x = 0$ 时不可逆.

例题 2.6 求解微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x+y}{x-y}$.

解. 令 $y = ux$, 则原方程可化简为
$$\frac{1}{x} = \frac{1-u}{1+u^2}.$$
积分得
$$arctanu - \frac{1}{2}(1+u^2) = In|x| + C.$$
即
$$|x| = e^{arctanu}\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}e^C.$$
等价于
$$|x|\sqrt{1+u^2} = Ce^{arctanu}, \forall C > 0.$$
将 $u = \frac{y}{x}$ 带入, 即得
$$\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{arctan\frac{y}{x}}, \forall C > 0.$$

注 若采用极坐标换元, 该微分方程的解为 $r = Ce^\theta$.

例题 2.7 讨论形如
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{ax+by+c}{mx+ny+l}\right)$$
的方程的求解法. 这里 a, b, c, m, n, l 为常数.

解.

1. $c=l=0$ 时, 齐次方程.
2. c 与 l 不全为 0 时, 令
$$\begin{cases} x=\xi+\alpha, \\ y=\eta+\beta. \end{cases}$$
其中 α, β 为常数. 则原方程变为
$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}=f(\frac{a\xi+b\eta+a\alpha+b\beta+c}{m\xi+n\eta+m\alpha+n\beta+l}).$$
   (a). $an-bm\neq 0$ 时, $\exists\, \alpha, \beta$, s.t.
$$\begin{cases} a\alpha+b\beta=-c, \\ m\alpha+n\beta=-l. \end{cases}$$
   此时该方程转化为齐次方程.
   (b). $an-bm=0$ 时, 令
$$\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\lambda,$$
   则原方程可化简为
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(\frac{\lambda(mx+ny)+c}{mx+ny+l}).$$
   令 $v=mx+ny$, 则
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=m+n\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=m+nf(\frac{\lambda v+c}{v+l}).$$
   此时该方程转化为可分离变量的方程.

2.4.2 Bernoulli 方程

定义 2.5

形如
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)y^n.$$
的方程称作 *Bernoulli* 方程. 其中 n 为常数, 且 $n\neq 0,1$.

♣

求解方法:

1. $y=0$ 为方程的特解.
2. $y\neq 0$ 时, 有
$$\frac{1}{y^n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{p(x)}{y^{n-1}}=q(x).$$
注意到
$$\frac{1}{y^n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1-n}\frac{\mathrm{d}(y^{1-n})}{\mathrm{d}x}.$$
令 $z=y^{1-n}$, 即有
$$\frac{1}{1-n}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+p(x)z=q(x).$$
即转化为一阶线性方程.

2.4.3 Riccati 方程

定义 2.6

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y^2+q(x)y+r(x).$$

的方程称作 *Riccati* 方程. 其中 $p(x),q(x),r(x)$ 在区间上连续, 且 $p(x)\not\equiv 0$.

该方程为形式最简单的非线性方程, 但已经无法用初等方法解决. 但有如下两个命题对解进行刻画.

定理 2.10

设方程的一个特解为 $y=\varphi(x)$, 则可用积分法求得通解.

证明 设 $y(x)=u(x)+\varphi(x)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=p(u+\varphi)^2+q(u+\varphi)+r.$$

将 φ 为特解的条件带入, 即有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=(2\varphi P+q)u+pu^2.$$

即转化为 *Bernoulli* 方程.

例题 2.8 求解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay^2=bx^{-2}.$$

其中 a,b 为常数.

解.

1. $y=0$ 不是解.
2. $y\neq 0$ 时, 有

$$\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a=b\cdot\frac{1}{x^2y^2}.$$

即

$$-\frac{\mathrm{d}(\frac{1}{y})}{\mathrm{d}x}+a=b\cdot\frac{1}{x^2}\cdot(\frac{1}{y})^2.$$

令 $z=\frac{1}{y}$, 则有

$$-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+a=b\cdot\frac{1}{x^2}\cdot z^2.$$

即转化为齐次方程.

定理 2.11

对 *Riccati* 方程的特殊情形

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay^2=bx^m,$$

其中 $a\neq 0,b,m$ 均为常数. 当 $x\neq 0,y\neq 0$ 时, 当

$$m=0,\ -2,\ \frac{-4k}{2k+1},\ \frac{-4k}{2k-1}\quad(k=1,2,\cdots)$$

时, 该形式可化为可分离变量的方程.

证明 不妨设 $a=1$, 否则可以通过令 $x'=ax$ 化简. 故讨论方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y^2=bx^m.$$

1. $m=0$ 时,
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay^2=b$$
为可分离变量的方程.
2. $m=-2$ 时, 在例 2.8中已转化为齐次方程, 进而可转化为可分离变量的方程.
3. $m=\frac{-4k}{2k+1}$ 或 $m=\frac{-4k}{2k-1}$ 时, 请参考丁同仁老师常微分方程讲义 P41 定理 3, 变换较为神奇, 感觉不太能看出来他的想法？

注 本充分条件为 1725 年 *Daniel Bernoulli* 得到的结果. 事实上该条件同样为必要条件, 在 1841 年被刘维尔证明. 表明即使是形式简单的 *Riccati* 方程, 大部分也是不能用初等积分的办法解的.

2.4.4 Gronwall 不等式

定理 2.12 (Gronwall 不等式)

令 k 是非负常数, $f(x), g(x)$ 是区间 $[\alpha,\beta]$ 上的连续非负函数, 且满足不等式
$$f(x)\leqslant k+\int_\alpha^x f(s)g(s)\mathrm{d}s,\ \forall\alpha\leqslant x\leqslant\beta.$$
则
$$f(x)\leqslant ke^{\int_\alpha^x g(s)\mathrm{d}s}.$$

证明 令
$$A(x)=k+\int_\alpha^x f(s)g(s)\mathrm{d}s,$$
则
$$A'(x)=f(x)g(x)\leqslant A(x)g(x).$$
注意到
$$(A(x)e^{-\int_\alpha^x g(s)\mathrm{d}s})'=e^{-\int_\alpha^x g(s)\mathrm{d}s}(A'(x)-A(x)g(x))\leqslant 0.$$
故
$$A(x)e^{-\int_\alpha^x g(s)\mathrm{d}s}\leqslant A(\alpha)=k.$$
即
$$A(x)\leqslant ke^{\int_\alpha^x g(s)\mathrm{d}s}.$$
故
$$f(x)\leqslant A(x)\leqslant ke^{\int_\alpha^x g(s)\mathrm{d}s},\ \forall\alpha\leqslant x\leqslant\beta.$$

定理 2.13 (Gronwall 不等式, 微分形式)

令 $f\in C^1([\alpha,\beta])$ 非负, 且满足
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\leqslant g(x)f(x),\ \forall\alpha\leqslant x\leqslant\beta.$$
其中 $g(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续, 非负. 则有
$$f(x)\leqslant f(\alpha)e^{\int_\alpha^x g(s)\mathrm{d}s},\ \forall\alpha\leqslant x\leqslant\beta.$$

证明 注意到
$$(f(x)e^{-\int_\alpha^x g(s)\mathrm{d}s})'=e^{-\int_\alpha^x g(s)\mathrm{d}s}(f'(x)-f(x)g(x))\leqslant 0.$$
故
$$f(x)e^{-\int_\alpha^x g(s)\mathrm{d}s}\leqslant f(\alpha),\ \forall\alpha\leqslant x\leqslant\beta.$$

即

$$f(x) \leqslant f(\alpha)e^{\int_\alpha^x g(s)\mathrm{d}s},\ \forall \alpha \leqslant x \leqslant \beta.$$

注 微积分不等式的解决过程中, 我们通常构造导数 $\leqslant 0$或 $\geqslant 0$ 的函数, 从而得到好的不等式关系. *Gronwall* 不等式的应用极其广泛.

2.5 一阶隐式方程

前面我们通常考虑形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$ 的方程, 事实上给出了一个对一阶导数的显式表达. 若无法给出显式表达, 则考虑更一般的一阶方程

$$F(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}) = 0. \tag{2.5.1}$$

本节探讨该方程的解.

2.5.1 微分法

设从可以解出 $y = f(x,p), p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.
则两边对于 x 求导, 可得

$$p = f'_x + f'_p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

即

$$(f'_x - p)\mathrm{d}x + f'_p\mathrm{d}p = 0.$$

化简为关于 x, p 的一阶显式微分方程.

1. 若该方程有通解 $p = u(x, C)$, 则方程 (2.5.1) 有通解

$$y = f(x, u(x, C)),\ \forall C \in \mathbb{R}.$$

2. 若该方程有特解 $p = \omega(x)$, 则方程 (2.5.1) 有特解

$$y = f(x, \omega(x)).$$

   由于 x, p 有良好的对称性, 故可能容易得到 x 关于 p 的表达但反解较为困难. 故有:

3. 若该方程有通解 $x = v(p, C)$, 则方程 (2.5.1) 有通解

$$\begin{cases} x = v(p, C), \\ y = f(v(p, c), p), \end{cases} \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

   此时 p 可以看作一个参数.

4. 若该方程有特解 $x = z(p)$, 则方程 (2.5.1) 有特解

$$\begin{cases} x = z(p), \\ y = f(z(p), p). \end{cases}$$

   此时 p 可以看作一个参数.

注 微分法适用于可用 x, p 表示 y 的部分方程.

例题 2.9 求解克莱洛方程

$$y = xp + f(p),$$

其中 $f''(p) \neq 0$.

解. 两边对 x 求导, 有

$$p = p + x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + f'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

即

$$(x+f'(p))\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=0.$$

1. $p=C$ 为该方程的一个通解, 则原方程有一个通解为

$$y=Cx+f(C),\ \forall C\in\mathbb{R}.$$

2. $x+f'(p)=0$ 时, $x=-f'(p)$ 为该方程的一个特解, 则原方程有一个特解为

$$\begin{cases}x=-f'(p)\\ y=-f'(p)p+f(p).\end{cases}$$

下考虑特解是否由通解得到, 事实上由于 $f''(p)\neq 0$, 由隐函数定理可解得 $p=\omega(x)$, 且

$$x=-f'(\omega(x)).$$

对 x 求导有,

$$1=-f''(\omega(x))\omega'(x).$$

故

$$\omega'(x)\neq 0.$$

即 $\omega(x)$ 不为常数, 这就证明了特解不能由通解得到.

注

1. 特解上任意一点 (x_0,y_0) 处的切线为

$$y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0)(x-x_0)+y_0=\omega(x_0)x+f(\omega(x_0)).$$

   故通解与特解处的切线相对应, 这也证明了特解不能由通解得到.

2. 对 $f(p)=-\frac{1}{4}p^2$ 的情形, 通解为 $y=Cx-\frac{1}{4}C^2$, 特解为 $y=x^2$. 图像如图 2.2 所示.

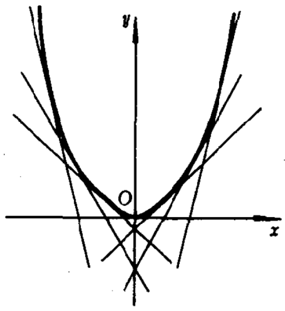

图 2.2: 例 2.9 解的图像

   该图像的特解恰好包络了所有通解.

2.5.2 参数法

对不明显包含自变量的方程, 即

$$F(y,p)=0,\ p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

设 $y=g(t),\ p=h(t)$.

1. $h(t)=0$ 时, y 为常数满足 $F(y,0)=0$, 则得到方程的特解.
2. $h(t)\neq 0$ 时, 有

$$\mathrm{d}x=\frac{1}{p}\mathrm{d}y.$$

故

$$\mathrm{d}x = \frac{g'(t)}{h(t)}\mathrm{d}t.$$

故微分方程有通解

$$\begin{cases} x = \int \frac{g'(t)}{h(t)}\mathrm{d}t + C \\ y = g(t). \end{cases}$$

例题 2.10 求解微分方程

$$(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2 + y^2 = 1.$$

解. 令 $y = cost,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = sint.$

1. $y = \pm 1$ 为方程的特解.
2. $y \neq \pm 1$ 时, 有

$$\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t.$$

故方程有通解为

$$\begin{cases} x = -t + C \\ y = cost. \end{cases}$$

即方程有通解

$$y = cos(C - x),\ \forall C \in \mathbb{R}.$$

对更一般的微分方程 (2.5.1),
若将 x, y, p 均看为变量, 则 $(x, y, p) \in \mathbb{R}^3$ 表示空间中的曲面. 令

$$x = f(u, v), y = g(u, v), p = h(u, v),$$

其中 u, v 为参数. 由

$$\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x,$$

知

$$g'_u\mathrm{d}u + g'_v\mathrm{d}v = h(f'_u\mathrm{d}u + f'_v\mathrm{d}v).$$

即

$$(g'_u - hf'_u)\mathrm{d}u + (g'_v - hf'_v)\mathrm{d}v = 0.$$

1. 若该方程有通解 $v = Q(u, C)$, 则方程 (2.5.1) 有通解

$$\begin{cases} x = f(u, Q(u, C)), \\ y = g(u, Q(u, C)). \end{cases}$$

2. 若该方程有特解 $v = S(u)$, 则方程 (2.5.1) 有特解

$$\begin{cases} x = f(u, S(u)), \\ y = g(u, S(u)). \end{cases}$$

由于 u, v 有良好的对称性, 故可能容易得到 u 关于 v 的表达但反解较为困难. 此时有另一种对称的表达方式, 在此不做说明.

例题 2.11 求解微分方程

$$(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2 + y - x = 0.$$

解. 令

$$x = u,\ p = v,\ y = u - v^2.$$

于是

$$\mathrm{d}u - 2v\mathrm{d}v = v\mathrm{d}u.$$

即

$$(1-v)\mathrm{d}u - 2v\mathrm{d}v = 0.$$

1. $v=1$ 为该方程的一个特解, 故

   $$y = x - 1$$

   为原方程的一个特解.
2. $v \neq 1$ 时, 有

   $$\mathrm{d}u - \frac{2v}{1-v}\mathrm{d}v = 0.$$

   知通解为

   $$u + 2v + 2In|v-1| = C,\ \forall C \in \mathbb{R}.$$

   即

   $$u = -2v - In(v-1)^2 + C,\ \forall C \in \mathbb{R}.$$

   故方程有通解为

   $$\begin{cases} x = -2v - In(v-1)^2 + C, \\ y = -2v - In(v-1)^2 - v^2 + C. \end{cases} \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

第 3 章 存在唯一性定理

3.1 Picard 存在唯一性定理

本节考察初值问题. 即方程 (3.1.1) 的解的理论.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

定义 3.1 (Lipschitz 条件)

设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内满足

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|,$$

常数 $L > 0$. 称函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内对 y 满足 Lip-条件. ♣

注 若 D 为有界闭凸区域, f'_y 连续, 则 f 关于 y 满足 Lip-条件. 由于

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |\int_{y_2}^{y_1} f'_y(x,z)\mathrm{d}z| \leqslant M|y_1 - y_2|.$$

其中 M 为界.

定理 3.1 (Picard 存在唯一性定理)

若 $f(x,y)$ 在矩形区域 R:$|x - x_0| \leqslant a$, $|y - y_0| \leqslant b$ 上连续, 且对于 y 满足 Lip-条件, 则初值问题 (3.1.1) 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上有并且只有一个解, 其中

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \ M > \max_{(x.y)\in R} |f(x,y)|.$$

♡

注

1. 该定理为 ODE 中最重要的定理之一, 在偏微分方程中也有重要的应用。
2. 该定理描述了, 在函数 $f(x,y)$ 连续的条件下, 且对 y 满足 Lip-条件, 则在一个区域内方程存在唯一解, 该区域取决于 a 与 $\frac{b}{M}$ 的大小关系.

证明

1. *Step* 1. 转化为等价的积分方程
$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y(x))\mathrm{d}x.$$
   (a). 若满足该积分方程, 且 y(x) 为连续函数, 且 $f(x,y(x))$ 应该满足定义域的限制, 由 $y(x)$ 的连续性知 $f(x,y(x))$ 连续, 则变上限积分函数可导, 即 $y(x)$ 可导, 且满足方程 (3.1.1).
   (b). 若满足方程 (3.1.1), 两边同时积分即可得到积分方程.
2. *Step* 2. 构造 *Picard* 序列. 目标: 构造 $\{y_n(x)\}$, s.t. $y_n(x) \to y(x)(n \to \infty)$.
$$def. \begin{cases} y_0(x) = y_0, \\ y_n(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(x,y_{n-1}(x))\mathrm{d}x. \end{cases}$$
   需要验证定义的合理性, 即 $|y_n(x) - y_0| \leqslant b, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
$$|y_1(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x,y_0(x))\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(x,y_0(x))|\mathrm{d}x\right| \leqslant M|x - x_0| \leqslant Mh \leqslant b.$$
   利用归纳: 设 $|y_n(x) - y_0| \leqslant b$, 考察 $|y_{n+1}(x) - y_0|$. 有
$$|y_{n+1}(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x,y_n(x))\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(x,y_n(x))|\mathrm{d}x\right| \leqslant M|x - x_0| \leqslant Mh \leqslant b.$$

3. *Step* 3. 证明皮卡序列在区间 I 上一致收敛到积分方程的解.
注意到
$$y_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}[y_{k+1}(x)-y_k(x)]+y_0(x).$$
故序列 $\{y_n\}$ 的一致收敛性等价于级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|y_{n+1}(x)-y_n(x)|$ 的一致收敛性.
下用归纳的办法证明
$$|y_{n+1}(x)-y_n(x)|\leqslant\frac{M}{L}\frac{(L|x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!}.$$
$n=0$ 时已证.
设命题对 $n-1$ 成立, 对 n 的情形有:
$$\begin{aligned}|y_{n+1}(x)-y_n(x)|&=\left|\int_{x_0}^{x}[f(x,y_n(x))-f(x,y_{n-1}(x))]\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}|\frac{M}{L}\frac{(L|x-x_0|)^n}{n!}|\mathrm{d}x\right|\\&=\frac{M}{L}\frac{(L|x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$
即表明皮卡序列一致收敛, 设其收敛到函数 $\varphi(x)$. 下验证 $\varphi(x)$ 为方程的解. 只需在定义式中令 $n\to\infty$, 知 $\varphi(x)$ 为积分方程的解, 亦为方程 (3.1.1) 的解.
4. *Step* 4 唯一性.
令 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ 为方程的解, 设 $\omega(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$, 则
$$|\omega(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}[f(x,\varphi_1(x))-f(x,\varphi_2(x))]\mathrm{d}x\right|\leqslant L\int_{x_0}^{x}|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|\mathrm{d}x=L\int_{x_0}^{x}|\omega(x)|\mathrm{d}x.$$
由 *Gronwall* 不等式知 $|\omega(x)|\leqslant 0$. 即 $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$.

注

1. 转化为积分方程的好处在于解 $y(x)$ 连续即可推出 $y(x)$ 可微; 积分表达式可由三角不等式估计; 且 *Picard* 序列的构造目的在于逼近方程的解, 而积分与极限的换序问题有固定的结论. 将积分方程转化为微分方程在 *PDE* 时同样重要.
2. 构造 *Picard* 序列时, n 的取值与 x 无关, 即对任意的 x, 总存在极大的 N, 使得 $n>N$ 时, $y_n(x)$ 与 $y(x)$ 的差值无比的小, 即一致收敛. 构造后应验证满足定义域的限制.
3. 证明序列一致收敛时的估计来源于对简单情形, 角标较小时的尝试.
4. 唯一性此处的证明利用了 2.4 中的结论, 但方法仍然为 “设不同与证相等” .
5. 本定理中对于 h 的定义显得奇特, 探索过程中有更深刻的考虑, 从压缩映射的角度考虑 *Picard* 存在唯一性定理的发现过程.
令
$$Ty(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y(x))\mathrm{d}x,$$
其中 T 表示一个算子. 要证:$\exists\,!\,y(x)\in C([x_0-h,x_0+h])$, s.t. $y(x)=Ty(x)$.
$$def.X=\{y(x)\in C([x_0-h,x_0+h])\big|\ |y(x)-y_0|\leqslant b\}.$$
$$def.\parallel y\parallel=\max_{x\in[x_0-h,x_0+h]}|y(x)|.$$
先证明 X 为 *Banach* 空间上的闭集, 而 $C([x_0-h,x_0+h])$ 本身为一个 *Banach* 空间, 只需证明闭集. 事实上, 若 $y_n\in X$, 且 $y_n\to y\in C[x_0-h,x_0+h]$, 则
$$|y(x)-y_0|=\lim_{n\to\infty}|y_n(x)-y_0|\leqslant b.$$

即证明了 X 为 $Banach$ 空间上的闭集. 下证 $T: X \to X$ 为 X 上的压缩映射.

(a). 压缩映射原理: X 为 $Banach$ 空间的闭集, $T: X \to X$ 且满足

$$\forall\, y_1, y_2 \in X,\ \| Ty_1 - Ty_2 \| \leqslant \theta \| y_1 - y_2 \|,\ 0 \leqslant \theta < 1.$$

则 $\exists\,!\, y(x) \in C([x_0 - h, x_0 + h])$, s.t. $y(x) = Ty(x)$. 这里 h 仍然待定.

(b). 为保证对 $\forall\, y(x) \in X$, 有 $Ty \in X$. 对 $\forall y(x) \in X$,

$$|Ty(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(x, y(x)) \mathrm{d}x \right|.$$

令 $h \leqslant a$, 才有

$$|Ty(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(x, y(x)) \mathrm{d}x \right| \leqslant M|x - x_0| \leqslant Mh.$$

由于 $h \leqslant a$ 时才可以利用有界性. 而为了满足 T 的良定义, 要求 $Mh \leqslant b$. 即为 h 定义的合理性.

(c). 为保证压缩映射的条件成立. 考察

$$|Ty_1(x) - Ty_2(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} [f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))] \right| \leqslant L \left| \int_{x_0}^{x} [y_1(x) - y_2(x)] \right|.$$

尝试要求上述等式对一切的 $y_1(x), y_2(x)$ 成立, 根据范数的定义可以要求以下的等式成立:

$$\| Ty_1(x) - Ty_2(x) \| \leqslant Lh \| y_1(x) - y_2(x) \| .$$

保证压缩映射的合理性, 只需 $Lh < 1$, 但定理中并没有如此要求, 由于对不同的函数 L 很难估计. 针对问题提出 (d) 与 (e) 的两种方案.

(d). 取 $x_1 \in [x_0 - h, x_0 + h]$, 对 x_1 再次定义, 可得到相同的 h, 定义更多区间上的函数 $y(x)$, 最终在有限次定义后必然能得到不需要条件 $Lh < 1$ 的函数.

(e). 调整范数的定义,

$$def.\ \| y \| = \max_{x \in [x_0 - h, x_0 + h]} |y(x) e^{-\alpha |x - x_0|}|.$$

最后由压缩映射原理得到了定理的证明.

例题 3.1 对 $Riccati$ 方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + y^2.$$

$f(x, y) = x^2 + y^2$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上是局部 Lip 的 (即在任意一点 (x_0, y_0), 存在一个包含该点的矩形, 该矩形内满足 Lip—条件). 由 $Picard$ 存在唯一性定理, 对于任意一点 (x_0, y_0), 在 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上存在唯一解.

注 局部 Lip 与全局 Lip 的区别在于, 局部 Lip 找不到一个 L, s.t. $\forall\, y1, y2 \in R$, 均有 Lip 条件成立, 如本题.

定理 3.2 (Peano 存在性定理)

设 $f(x, y)$ 在矩形区域 R 内连续, 则初值问题 (3.1.1) 在区间 $|x - x_0| \leqslant h$ 上至少存在一个解 $y = y(x)$. h, R 同 $Picard$ 存在唯一性定理. ♡

注 相比 $Picard$ 存在唯一性定理, 该定理的条件变弱, 故得到的结论变弱. 若 $f(x, y)$ 不满足连续, 则初值问题有可能无解.

例题 3.2 回顾方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^{\frac{1}{3}}.$$

$f(x, y) = y^{\frac{1}{3}}$ 在 $y \neq 0$ 时存在连续的偏导数, 故满足 lip-条件, 则由 $Picard$ 存在唯一性定理, 在临近的矩形内只有一个解. 而对于 $y = 0$ 的情形, 由 $Peano$ 存在性定理, 只能表明存在解. 事实上也不存在唯一解, 与解的图像对应.

在讨论了存在性定理, 存在唯一性定理后, 我们将 Lip-条件进行推广, 得到更广泛的唯一性定理.

定义 3.2 (Osgood 条件)

设 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续, 且满足不等式

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant F(|y_1-y_2|).$$

其中 $F(r)>0$ 为 $r>0$ 上的函数, 且

$$\int_0^{r_1}\frac{1}{F(r)}\mathrm{d}r=\infty,\ r_1>0\text{为常数}.$$

则称 $f(x,y)$ 在 G 内满足 *Osgood* 条件. ♣

注 *Lipschitz* 条件为 *Osgood* 条件的特例, 由于 $F(r)=kr$, 而

$$\int_0^{r_1}\frac{1}{kr}\mathrm{d}r=\infty.$$

定理 3.3 (Osgood 定理)

设 $f(x,y)$ 在 G 内满足 *Osgood* 条件, 则过 G 内任何一点的积分曲线是唯一的. ♡

证明 设过 $(x_0,y_0)\in G$ 有两个解 $y=y_1(x)$ 与 $y=y_2(x)$, 则 $\exists\, x_1\neq x_0$, s.t. $y_1(x_1)\neq y_2(x_1)$. 不妨设 $x_1>x_0$, $y_1(x_1)>y_2(x_1)$. 令

$$\bar{x}=sup\{x_0<x<x_1|y_1(x)=y_2(x)\},$$

则在 $(\bar{x},x_1]$ 上, $y_1(x)>y_2(x)$. 令

$$r(x)=y_1(x)-y_2(x),$$

则 $r(x)>0$ 在 $(\bar{x},x_1]$ 上成立, 且

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}=y_1'-y_2'=f(x,y_1(x))-f(x,y_2(x))\leqslant F(y_1(x)-y_2(x))=F(r(x)),$$

故

$$\int_0^{r(x_1)}\frac{\mathrm{d}r}{F(r)}\leqslant\int_{\bar{x}}^{x_1}\mathrm{d}x=x_1-\bar{x}<\infty.$$

与 *Osgood* 条件矛盾.

注 上述的 *Lipschitz* 与 *Osgood* 条件均为判断唯一性的充分条件, 迄今为止没有对唯一性的充要条件的刻画.

3.2 解的延伸

定理 3.4 (延伸定理)

设 P_0 为区域 G 内任一点, 并设 Γ 为微分方程 (3.1.1) 经过 P_0 点的任意一条积分曲线, 则 Γ 将在 G 内延伸到边界. 即对任何有界闭区域 $P_0\in G_1\subset G$, 积分曲线可以延伸到 G_1 之外. ♡

注 若 $G=\mathbb{R}^2$, 则必有 $x\to\infty$ 或 $y\to\infty$.

证明 设经过 P_0 的积分曲线 $\Gamma: y=\varphi(x)$, $x\in J$. J 为最大存在区间. 只考虑积分曲线在 x_0 右侧的延伸情况, 令 $J^+=J\cap[x_0,+\infty)$, 则 J^+ 为 Γ 在 P_0 的右行最大区间.

1. $J^+=[x_0,+\infty)$, 则 Γ 延伸到 G 的边界.
2. $J^+=[x_0,x_1]$, 令 $y_1=\varphi(x_1)$, $(x_1,y_1)\in G$. 令 $P_1=(x_1,y_1)$, 由于 G 为开集, 存在以 P_1 为中心的矩形 R, s.t. $R\subset G$, 由 *Peano* 存在定理, 在 $[x_1-h,x_1+h]$ 上至少存在一个解 $y=\varphi_1(x)$. 令

$$\bar{y}(x)=\begin{cases}\varphi(x),\ x_0\leqslant x\leqslant x_1\\ \varphi_1(x),\ x_1<x\leqslant x_1+h\end{cases}$$

事实上, 由于 $\bar{y}(x)$ 在 $[x_0, x_1+h]$ 上连续, 只需要证明

$$\bar{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \bar{y}(x))\mathrm{d}x.$$

(a). 若 $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, 上式等价于

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\mathrm{d}x.$$

由于 $\varphi(x)$ 为方程在 $[x_0, x_1]$ 上的解, 此式成立.

(b). 若 $x_1 < x \leqslant x_1 + h$, $\varphi_1(x)$ 为 $[x_1 - h, x_1 + h]$ 上方程的解, 满足 $\varphi_1(x_1) = y_1$, 故

$$\begin{aligned}
\bar{y}(x) = \varphi_1(x) &= y_1 + \int_{x_1}^{x} f(x, \varphi_1(x))\mathrm{d}x \\
&= y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x, \varphi(x)) + \int_{x_1}^{x} f(x, \varphi_1(x))\mathrm{d}x \\
&= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \bar{y}(x))\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

找到了在区间 $[x_0, x_1+h]$ 上定义的方程的解, 与 J^+ 为右行最大区间矛盾.

3. $J^+ = [x_0, x_1)$, 若积分曲线无法延伸到边界, 则存在有界闭集 $K \subset G$, s.t. $\Gamma \subset K$.
对任意的 $x_n, x_m \to x_1^-$, 有

$$\begin{aligned}
|\varphi(x_n) - \varphi(x_m)| &= |\int_{x_m}^{x_n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x)\mathrm{d}x| \\
&= |\int_{x_m}^{x_n} f(x, \varphi(x))\mathrm{d}x| \\
&\leqslant \max_{(x,y)\in K} |f(x,y)||x_n - x_m| \\
&\leqslant M|x_n - x_m| \to 0 \ (n, m \to \infty).
\end{aligned}$$

故 $\{\varphi(x_n)\}$ 为 *Cauchy* 列, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n)$ 存在, 令 $y_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n)$, 令

$$\bar{y}(x) = \begin{cases} \varphi(x), \ x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ y_1, \ x = x_1 \end{cases}$$

事实上, 由于 $\bar{y}(x)$ 在 $[x_0, x_1]$ 上连续, 只需要证明

$$\bar{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \bar{y}(x))\mathrm{d}x.$$

而

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\mathrm{d}x, \ x_0 \leqslant x < x_1.$$

已经成立, 对两边令 $x \to x_1^-$, 有

$$\bar{y}(x_1) = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x, \bar{y}(x))\mathrm{d}x.$$

找到了在区间 $[x_0, x_1]$ 上定义的方程的解, 与 J^+ 为右行最大区间矛盾.

注

1. 该证明的核心思路为假设存在最大延伸区间, 构造微分方程在更广区间内的解. 此时再次表明了转化为积分方程的优越性, 即只需要表明解的连续性.
2. 开区间与闭区间的解法略有不同, 闭区间构造了新的邻域, 而开区间仅定义了端点处的取值.
3. 在开区间解的验证过程中, 用到了变上限积分函数的连续性以及函数积分值不随有限个点取值的改变而改变.

推论 3.1

设函数 $f(x,y)$ 在 G 内连续, 且关于 y 满足 lip-条件, 则过 G 内任意一点 P_0, 存在唯一的积分曲线 Γ, 并且 Γ 将在 G 内延伸到边界.

注 由于在 G 内均满足 Lip-条件, 该积分曲线 Γ 在 G 中唯一确定.

例题 3.3 试证明微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + y^2.$$

任一解的存在区间是有界的.

证明 $f(x,y) = x^2 + y^2$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 且关于 y 局部 lip, 则经过任意一点, 存在唯一的积分曲线 $\Gamma : y = \varphi(x)$, 并在 Γ 内延伸到边界.

只证明 Γ 的右行最大区间有界, 否则 $[x_0, +\infty]$ 是最大右行区间, 取 $x_1 > 0, x_1 > x_0$, 则在 $[x_1, +\infty)$ 上, $f(x,y) \geqslant x_1^2 + y^2$.

故

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \geqslant x_1^2 + \varphi^2,\ x \geqslant x_1.$$

对不等式两边分离变量与积分, 得

$$x - x_1 \leqslant \frac{1}{x_1}(arctan\frac{\varphi(x)}{x_1} - arctan\frac{\varphi(x_1)}{x_1}) \leqslant \frac{\pi}{x_1}.$$

则

$$x \leqslant x_1 + \frac{\pi}{x_1} < +\infty.$$

故右行最大区间有界.

注

1. 存在区间有界, 即存在最大存在区间, 此时解 y 必然趋近于 $+\infty$ 或 $-\infty$.
2. 证明解的最大区间存在前, 应证明解的存在性.
3. 本题的思路在于找到某一个可以写出明确解的积分曲线, 在有限值趋近于 ∞, 但该积分曲线在某一点后恒小于原方程的解.

例题 3.4 在平面上任取 $P_0(x_0, y_0)$, 试证明初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (x-y)e^{xy^2} \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

的右行解都在区间 $x_0 \leqslant x < \infty$ 上存在.

证明 令 $f(x,y) = (x-y)e^{xy^2}$, 则 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 并且关于 y 局部 lip, 故经过 P_0 存在唯一的积分曲线, 且延伸到边界.

1. P_0 在 $L : y = x$ 的上方.
   若右行最大存在区间有限, 则过 P_0 的右行解延伸到 $y = +\infty$ 或 $y = -\infty$. 在 L 上方, 有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} < 0$, 积分曲线向右单调递减, 由延伸定理, 它必与 L 在 (x_0, y_0) 上相交, 并且穿越 L 到达下方.
2. P_0 在 $L : y = x$ 的下方.
   此时 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} > 0$, 则积分曲线单调递增, 但是积分曲线不会再次穿过 L 到达 L 上方. 事实上, 若积分曲线从下方接近 L, 则斜率 $\ll 1$, 但 L 的斜率为 1.

因此, 积分曲线无法在有限的区间趋于 $\pm\infty$, 这与最大存在区间有限矛盾.

注

1. 证明最大存在区间不存在时, 应说明在 x 有限时, y 无法趋近于 $+\infty$ 或 $-\infty$.
2. 考虑 $y = x$ 这条直线的原因在于在该条线上导数为 0, 也被称作零趋势线.

定理 3.5

设微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y),$$

其中 $f(x, y)$ 在条形区域 S: $\alpha < x < \beta,\ -\infty < y < +\infty$ 内连续, 且满足不等式

$$|f(x, y)| \leqslant A(x)|y| + B(x),$$

其中 $A(x)$, $B(x)$ 为 (α, β) 上的连续函数, 则微分方程的每一个解都以 (α, β) 为最大存在区间.

证明 由 *Peano* 存在定理, 经过 S 中的任一点, 存在一条积分曲线, 由延伸定理, 每一条积分曲线都可延拓到 S 的边界. 只证明经过 P_0 的积分曲线的右行最大区间为 $[x_0, \beta)$. 否则 $\exists\, \beta_0$, $x_0 < \beta_0 < \beta$, s.t. 右行最大区间为 $[x_0, \beta_0)$.

任取 $x_0 < x_1 < \beta_0, y_1 = y(x_1)$, 令 $\beta_0 < \beta_1 < \beta$, 令 R: $|x - x_1| \leqslant a$, $|y - y_1| \leqslant b$, s.t. $x_1 + a < \beta_1$. 由于 $A(x), B(x)$ 在 $\alpha < x < \beta$ 上连续, 令他们在 $[x_0, \beta_1]$ 上的上界分别为 A_0, B_0. 则在 R 上,

$$|f(x, y)| \leqslant A_0(|y_1| + b) + B_0 =: M - 1.$$

故

$$\frac{b}{M} = \frac{b}{A_0(|y_1| + b) + B_0 + 1} \to \frac{1}{A_0},\ b \to +\infty.$$

当 b 充分大时, $\frac{b}{M} \geqslant \frac{1}{2A_0}$.

选取 a, s.t. $a < \frac{1}{4A_0}$, 则 $h = min\{a, \frac{b}{M}\} = a$. 由 *Peano* 存在性定理, 经过 P_1 在区间 $[x_1 - a, x_1 + a]$ 上存在积分曲线.

只要取 x_1 充分接近 β_0, 则积分曲线在 $[x_1, x_1 + a]$ 上存在, 因此积分曲线在 $[x_0, x_1 + a]$ 上存在, 与右行最大区间为 $[x_0, \beta_0)$ 矛盾.

第 4 章 高阶微分方程

4.1 n 维线性空间中的微分方程

即考察方程

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = f(x, y, ..., y^{(n-1)}). \tag{4.1.1}$$

在 (4.1.1) 中令 $y_1 = y, y_2 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, ..., y_n = \frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}$，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ f(x, y_1, ..., y_n) \end{pmatrix} \tag{4.1.2}$$

若 $y = \varphi(x)$ 为 (4.1.1) 的解，则 $\begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \varphi'(x) \\ \vdots \\ \varphi^{n-1}(x) \end{pmatrix}$ 为 (4.1.2) 的解.

若 $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}$ 为 (4.1.2) 的解，则 $y = \varphi_1(x)$ 为 (4.1.1) 的解.

故实现了高阶方程向一阶方程组的转换.

更一般地考察

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, ..., y_n) \\ f_2(x, y_1, ..., y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, ..., y_n) \end{pmatrix} \tag{4.1.3}$$

其中 f_i 为关于 $x, y, y_1, ...y_n$ 的连续函数. 引入记号 $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$.

当 f_i 关于 y_j 线性时，(4.1.3) 即为 n 阶线性方程组，此时

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{e}(x).$$

考察方程

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}). \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0. \end{cases} \tag{4.1.4}$$

(4.1.4) 即为初值问题. 回顾第三章中解的存在唯一性，若向高维方程推广，需定义 “$|*|$”，即好的范数，如下定义均可以实现：

1. $|\mathbf{y}| = \sqrt{y_1^2 + ... + y_n^2}$
2. $|\mathbf{y}| = |y_1| + ... + |y_n|$
3. $|\mathbf{y}| = max\{|y_1|, ..., |y_n|\}$

则有

定理 4.1 (高维 Picard 存在唯一性定理)

$\mathbf{f}$(x,y) 在矩体 $R:|x-x_0|\leqslant a,|\mathbf{y}-\mathbf{y}_0|\leqslant b$ 连续且满足 Lip-条件，即 $\exists\, L>0$，s.t. $\mathbf{f}(x,\mathbf{y}_1)-\mathbf{f}(x,\mathbf{y}_2)\leqslant L|\mathbf{y}_1-\mathbf{y}_2|$. 则 (4.1.4) 在 $x\in[x_0-h,x_0+h]$ 上存在唯一解，$h=\min\{a,\frac{b}{M}\}$，$M>\max\limits_{R}|\mathbf{f}(x,\mathbf{y})|$ ♡

其证明与一维完全相同.

4.2 解对初值和参数的连续依赖性

考虑方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x}=\mathbf{f}(x,\mathbf{y},\lambda).\\ \mathbf{y}(x_0)=\mathbf{y}_0.\end{cases}\tag{4.2.1}$$

(4.2.1) 中 λ 为参数，设其解为 $\mathbf{y}=\varphi(x,x_0,\mathbf{y}_0,\lambda)$.

解对初值和参数的连续依赖性即指 φ 关于 $x_0,\mathbf{y}_0,\lambda$ 是否在某个区域上连续，我们对该问题做如下化简 (即通过平移使得解曲线经过原点):

令 $\tilde{x}=x-x_0$,$\tilde{\mathbf{y}}=\mathbf{y}-\mathbf{y}_0$，则 (4.2.1) 化简为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{y}}}{\mathrm{d}\tilde{x}}=\mathbf{f}(\tilde{x}+x_0,\tilde{\mathbf{y}}+y_0,\lambda).\\ \tilde{\mathbf{y}}(0)=0.\end{cases}\tag{4.2.2}$$

注意到此时 x_0 与 $\mathbf{y}_0$ 与 λ 相同以参数形式出现，故不失一般性可以只讨论类似 (4.2.2) 初值问题（解曲线经过原点）的解对参数的连续依赖性，之后再推出任意初值问题的解对参数和初值的连续依赖性.

定理 4.2

设 n 维向量值函数 $\mathbf{f}(x,\mathbf{y},\lambda)$ 在区域

$$G:\ |x|\leqslant a,\ |y|\leqslant b,\ |\lambda-\lambda_0|\leqslant c$$

上是连续的，而且对 $\mathbf{y}$ 满足 Lip 条件

$$|\mathbf{f}(x,\mathbf{y}_1,\lambda)-\mathbf{f}(x,\mathbf{y}_2,\lambda)|\leqslant L|\mathbf{y}_1-\mathbf{y}_2|,$$

其中常数 $L>0$. 令 $M>\max\limits_{G}|\mathbf{f}(x,\mathbf{y},\lambda)|$，则 (4.2.2) 的解 $y=\varphi(x,\lambda)$ 在 $D:|x|\leqslant h,\ |\lambda-\lambda_0|\leqslant c$ 上连续，其中 $h=\min(a,\frac{b}{M})$. ♡

证明 该定理的证明采用 picard 迭代的方法，此处只列举出核心步骤.

1. 转化为积分方程 $\mathbf{y}(x)=\displaystyle\int_0^x\mathbf{f}(x,\mathbf{y}(x),\lambda)\mathrm{d}x$.
2. 构造 picard 序列，令 $\varphi_{k+1}(x,\lambda)=\displaystyle\int_0^x\mathbf{f}(x,\varphi_k(x,\lambda),\lambda)\mathrm{d}x$.
3. $\varphi_k(x,\lambda)$ 在 D 上连续.
4. 估计 $|\varphi_{k+1}(x,\lambda)-\varphi_k(x,\lambda)|\leqslant\frac{M}{L}\frac{(L|x|)^{k+1}}{(k+1)!}$.
5. $\varphi_k(x,\lambda)$ 在 D 上一致收敛到 $\varphi(x,\lambda)$，利用一致收敛性知 $\varphi(x,\lambda)$ 的连续性.

推论 4.1 (解对初值的连续依赖性)

设 n 维向量值函数 $\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ 在区域

$$R:\ |x-x_0|\leqslant a,\ |\mathbf{y}-\mathbf{y}_0|\leqslant b$$

上连续，而且对 $\mathbf{y}$ 满足 Lip 条件，则初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}). \\ \mathbf{y}(x_0) = \eta. \end{cases} \tag{4.2.3}$$

的解 $\mathbf{y} = \varphi(x, \eta)$ 在区域

$$Q: \ |x - x_0| \leqslant \frac{h}{2}, \ |\eta - y_0| \leqslant \frac{b}{2}$$

上是连续的，其中 $h = \min(a, \frac{b}{M})$，M 为 $|\mathbf{f}(x, \mathbf{y})|$ 在区域 R 上的一个上界.

证明 记 $\tilde{x} = x - x_0$，$\tilde{y} = y - \eta$. 则 $\tilde{y}$，$\tilde{x}$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{y}}}{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{x}}} = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = f(x, \mathbf{y}) = f(\tilde{x} + x_0, \tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{y}_0) =: g(\tilde{x}, \tilde{\mathbf{y}}, \eta). \\ \tilde{\mathbf{y}}(0) = \mathbf{y}(x_0) - \eta = 0. \end{cases}$$

$g(\tilde{x}, \tilde{\mathbf{y}}, \eta)$ 在区域 $|\tilde{x}| \leqslant a$，$|\eta - \mathbf{y}_0| \leqslant \frac{b}{2}$，$|\tilde{\mathbf{y}}| \leqslant \frac{b}{2}$ 内连续，且对 $\mathbf{y}$ 满足：

$$|g(\tilde{x}, \tilde{\mathbf{y}}_1, \eta) - g(\tilde{x}, \tilde{\mathbf{y}}_2, \eta)| = |f(\tilde{x} + x_0, \tilde{\mathbf{y}}_1 + \mathbf{y}_0) - f(\tilde{x} + x_0, \tilde{\mathbf{y}}_2 + \mathbf{y}_0)| \leqslant L|\tilde{\mathbf{y}}_1 - \tilde{\mathbf{y}}_2|.$$

由定理 4.2 知微分方程的解在区域 $|\tilde{x}| \leqslant \frac{h}{2}$，$|\eta - y_o| \leqslant \frac{b}{2}$ 上连续，其中 $h = \min(a, \frac{b}{M})$.

注 利用该推论，可以对微分方程 (4.2.3) 在 $(x_0, \mathbf{y}_0$ 点的邻域内的积分曲线进行"局部拉直"，为此定义

$$Q = \{(x, y) : |x - x_0| \leqslant \frac{h}{2}, \ |y - y_0| \leqslant \frac{b}{2}.$$

以及 $T: \ Q \to T(Q)$，$(x, \eta) \to (x, \varphi(x, \eta))$.

注意到 T 具有如下性质：

1. T 为双射：由解的唯一性即得.
2. T 为连续映射：由对 η 的连续依赖性即得.
3. 结合以上两点，知 T 为一个拓扑映射，T^{-1} 具有将积分曲线部分拉直的效果.

在第三章的讨论中，我们知道解的存在性可以由局部延伸到更大的范围，同样解对初值或参数的连续性（可微性）也有类似的结论，称为扰动定理.

定理 4.3 (扰动定理)

设 n 维向量值函数 $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ 在 $(x, \mathbf{y})$ 空间内的某个开区域 G 上是连续的，而且对 $\mathbf{y}$ 满足局部 Lip-条件. 假设 $\mathbf{y} = \xi(x)$ 是微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = f(x, \mathbf{y}) \tag{4.2.4}$$

的一个解，令它的存在区间为 J. 现在，在区间 J 内任取一个有界闭区间 $a \leqslant x \leqslant b$，则存在常数 $\delta > 0$，使得对任何初值 $(x_0, \mathbf{y}_0)$，满足：

$$a \leqslant x_0 \leqslant b, \ |\mathbf{y}_0 - \xi(x_0)| \leqslant \delta,$$

柯西问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}). \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0. \end{cases}$$

的解 $\mathbf{y} = \varphi(x, x_0, \mathbf{y}_0)$ 也至少在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上存在，并且在闭区域

$$D_\delta: \ a \leqslant x \leqslant b, \ a \leqslant x_0 \leqslant b, \ |\mathbf{y}_0 - \xi(x_0)| \leqslant \delta$$

上是连续的.

证明 该定理在课本中利用 picard 迭代证明，本处采用另一种办法证明（此证明中的 y 均表示向量，打起来方便一些）.

1. 设 f 在 G 上关于 y 全局 Lip.

设以 (x_0, y_0) 为初值的解为 $y=y(x)$，令 $\eta(x)=y(x)-\xi(x)$，则 $\eta(x)$ 满足方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}=f(x,y(x))-f(x,\xi(x))=f(x,\eta(x)+\xi(x))-f(x,\xi(x))=:g(x,\eta).\\ \eta(x_0)=y(x_0)-\xi(x_0)=y_0-\xi(x_0).\end{cases}\tag{4.2.5}$$

$g(x,\eta)$ 具有如下性质：

(a). 在 $a \leqslant x \leqslant b$, $|\eta-\xi(x_0)| \leqslant \delta$ 上连续.

(b). $g(x,\eta) \leqslant L|\eta|$. 由 f 的全局 Lip 条件即得.

(c). $g(x,\eta)$ 关于 η 满足 Lip 条件，由于

$$\begin{aligned}|g(x,\eta_1)-g(x,\eta_2)|&=|f(x,\eta_1(x)+\xi(x))-f(x,\xi(x))-f(x,\eta_2(x)+\xi(x))+f(x,\xi(x))|\\&\leqslant L|\eta_1(x)+\xi(x)-\eta_2(x)-\xi(x)|=L|\eta_1(x)-\eta_2(x)|.\end{aligned}$$

故以 $(x_0, y_0-\xi(x_0))$ 为初值的方程 (4.2.5) 存在唯一解.

由定理 3.5 结合性质 b 可知上述解可延拓到区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上.

下面利用 *Gronwall* 的估计给出 δ 的存在性. 考察 η^2 满足的方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\eta^2}{\mathrm{d}x}=2\eta\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}=2\eta g(x,\eta)\leqslant 2L\eta^2.\\ \eta^2(x_0)=|y_0-\xi(x_0)|^2.\end{cases}\tag{4.2.6}$$

对方程 (4.2.6) 利用 Gronwall 不等式即得

$$\eta^2(x) \leqslant e^{2L|x-x_0|}|y_0-\xi(x_0)|^2 \leqslant e^{2L|b-a|}|y_0-\xi(x_0)|^2.$$

故

$$|\eta(x)| \leqslant e^{L|b-a|}|y_0-\xi(x_0)|.$$

对 $\forall\, \sigma>0$，令 $\delta<e^{-L|b-a|}\frac{\sigma}{2}$，则当 $|y_0-\xi(x_0)| \leqslant \delta$ 时，

$$|\eta(x)| \leqslant e^{L|b-a|}|y_0-\xi(x_0)| \leqslant e^{L|b-a|}\delta<\sigma.$$

下面说明解对初值的连续依赖性，采用反证.

否则 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 关于 $(x_0,\ y_0)$ 不连续，即 $\exists\, \epsilon>0$, ξ_i, η_i，满足 $|(\xi_i,\eta_i)-(\xi_0,\eta_0)|<\frac{1}{i}$.

且 $\exists\, a \leqslant x_i \leqslant b$，使得 $|\varphi(x_i,\xi_i,\eta_i)-\varphi(x_i,\xi_0,\eta_0)| \geqslant \epsilon$.

取该点列的子列 x_i 收敛于 $\bar{x} \in [a,b]$.（此处为了方便后面证明将子列用 x_i 表示.）

引理 4.1 (Arzela-Ascoli)

$\{\varphi_i(x)\}$ 为一列有界闭区间 I 上的连续函数，满足：

(a). 一致有界：$|\varphi_i(x)| \leqslant k$, $\forall\, i$, $\forall\, x$

(b). 等度连续：$\forall\, \epsilon>0$, $\exists\, \delta$，对 $\forall x_1$, $x_2 \in I$, $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有

$$|\varphi_i(x_1)-|\varphi_i(x_2)| \leqslant \epsilon,\ \forall\, i$$

则 $\exists\, \{\varphi_{i_j}(x)\}$ 在 I 上一致收敛.

♡

记 $\varphi(x,\xi_i,\eta_i)$ 为 $\varphi_i(x)$，验证 *Arzela − Ascoli* 的条件：

(a). $\varphi_i(x)$ 满足微分方程，进而满足对应的积分方程

$$\varphi_i(x)=\eta_i+\int_{\xi_i}^{x} f(x,\varphi(x,\xi_i,\eta_i))\mathrm{d}x.$$

故

$$|\varphi_i(x)| \leqslant |\eta_i|+M|x-\xi_i| \leqslant |y_0|+1+M(b-a).$$

其中 $M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b,\ |y-\xi(x)|\leqslant\delta}$. 故一致有界.

(b). 注意到

$$|\varphi_i(x_1)-\varphi_i(x_2)|=\int_{x_1}^{x_2} f(x,\varphi(x,\xi_i,\eta_i))\mathrm{d}x\leqslant M|x_1-x_2|.$$

故等度连续.

由引理 4.1，存在 $\{\varphi_i(x)\}$ 的某个子列在 I 上一致收敛于 $\psi(x)$，满足:

$$\psi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\psi(x))\mathrm{d}x.$$

与 $|\varphi_i(x_i)-\varphi_0(x_i)|\geqslant\epsilon$ 矛盾.

2. 回到 f 在 G 上局部 *Lip* 的情形.

引理 4.2 (有界闭集合中局部 Lip 和全局 Lip 的等价性)

G 为有界闭集合，则连续函数 f 满足局部 *Lip* 条件等价于满足全局 *Lip* 条件.

♡

证明 全局 *Lip* 即得局部 *Lip*，只需要证明局部 *Lip* 可以得到全局 *Lip*.

假设 f 在 G 上不满足全局 *Lip* 条件，则对 $\forall n$，$\exists\, x_n\neq y_n$，满足

$$|f(x_n)-f(y_n)|\geqslant n|x_n-y_n|.$$

由于 G 为紧集，则 $\exists\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$，$x_{n_k}\to x_0\in G$.

根据子列的选取，$\{x_{n_k}\}$ 应满足:

$$|x_{n_k}-y_{n_k}|\leqslant\frac{|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|}{n_k}\to 0,\ as\ k\to\infty.$$

这里利用了 f 在 G 上的有界性，故 $y_{n_k}\to x_0$.

f 满足局部 *Lip* 条件，故 $\exists\, B_r(x_0)$, $r>0$，f 在 $B_r(x_0)\cap G$ 满足

$$|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|.$$

故

$$n_k\leqslant\frac{|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|}{|x_{n_k}-y_{n_k}|}\leqslant L.$$

对较大的 n_k 即得矛盾.

回到原命题的证明.

1 部分在证明 δ 的存在时，给出了对 $\forall\,\sigma>0$, $\exists\,\delta>0$, 使得当 $|y_0-\xi(x_0)|\leqslant\delta$ 时，有 $|y(x)-\xi(x)|\leqslant\sigma.y(x)$ 为初值为 y_0 的方程的解. 该表述表明，对任意的管状区域 Σ_σ，存在 δ 使得初值 y_0 与最初给定的解曲线在 x_0 处的差距小于 δ 时，可以使得以 y_0 为初值的解曲线完全落入该管状区域 Σ_σ 内. 下图为直观的展示. 黄色区域代表管状区域 Σ_σ.

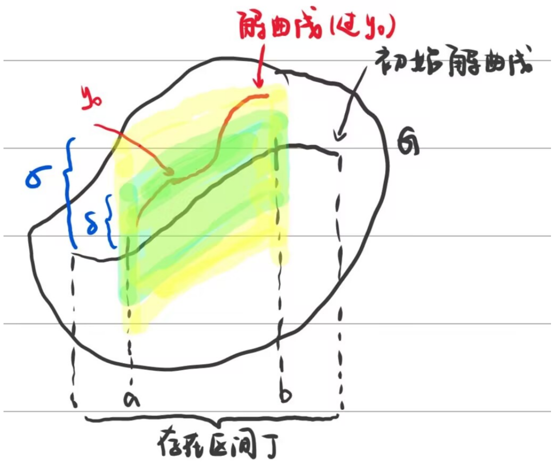

图 4.1: 扰动定理的直观图示

在给定 σ 与 a, b 的条件下，管状区域为一个紧集，在该紧集上满足局部 Lip 条件，由引理 4.2 知满足全局 Lip 条件，由 1 即完成命题的证明.

注 本证明中有几点耐人寻味:

1. ”$\sigma-\delta$” 语言的使用，是本证明中较难理解的地方.
2. 在证明 δ 存在性时考虑 η^2 作为估计对象：由于我们只有对 $|\eta|$ 的估计，求导与绝对值不可换序.

4.3 解对初值和参数的连续可微性

如上节，不失一般性，我们考虑如下微分方程的解对参数的连续可微性.

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x}=\mathbf{f}(x,\mathbf{y},\lambda).\\ \mathbf{y}(0)=0.\end{cases}\tag{4.3.1}$$

定理 4.4

设 $\mathbf{f}(x,\mathbf{y},\lambda)$ 在区域

$$G:\ |x|\leqslant a,\ |\mathbf{y}|\leqslant b,\ |\lambda-\lambda_0|\leqslant c$$

上连续，而且对 $\mathbf{y}$ 和 λ 有连续的偏微商，则微分方程 (4.3.1) 的解 $\mathbf{y}=\varphi(x,\lambda)$ 在区域

$$D:\ |x|\leqslant h,\ |\lambda-\lambda_0|\leqslant c$$

上是连续可微的，其中 h 的定义如定理 4.2.

类似地，还可以得到对初值的连续可微性.

推论 4.2 (解对初值的连续可微性)

设 n 维向量值函数 $\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ 在区域

$$R:\ |x-x_0|\leqslant a,\ |y-y_0|\leqslant b,$$

上连续，而且对 $\mathbf{y}$ 有连续的偏微商 $\mathbf{f}'_{\mathbf{y}}(x,\mathbf{y})$，则初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x}=\mathbf{f}(x,\mathbf{y}).\\ \mathbf{y}(x_0)=\eta.\end{cases}\tag{4.3.2}$$

的解 $\mathbf{y}=\varphi(x,\eta)$ 在区域

$$Q:\ |x-x_0|\leqslant\frac{h}{2},\ |\eta-y_0|\leqslant\frac{b}{2}$$

上是连续可微的，其中 h 的定义如定理 4.2.

解的连续可微性的证明在此不作叙述，其一个重要的应用是变分方程，再次提醒前置知识为含参变量积分的求导. 如下假设未知函数 y 与参数 λ 均为一维的，且定理 4.4 与推论 4.2 成立，则初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y,\lambda).\\ y(x_0)=y_0.\end{cases}\tag{4.3.3}$$

的解 $y=\varphi(x;x_0,y_0,\lambda)$ 对初值 x_0，y_0 及参数 λ 的偏导数 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}$，$\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}$，$\dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda}$ 分别在有定义的区域内连续可微.

考虑与4.3.3等价的积分方程

$$\varphi(x;x_0,y_0,\lambda)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi(x;x_0,y_0,\lambda))\mathrm{d}x.\tag{4.3.4}$$

对4.3.4两侧分别对 x_0，y_0 与 λ 求偏导数，则有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}=-f(x_0,y_0)+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x;x_0,y_0,\lambda),\lambda)\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\mathrm{d}x.$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}=1+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x;x_0,y_0,\lambda),\lambda)\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\mathrm{d}x.$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x;x_0,y_0,\lambda),\lambda)\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}+\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\varphi(x;x_0,y_0,\lambda),\lambda)\mathrm{d}x.$$

再令

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x;x_0,y_0,\lambda)=A(x,x_0,y_o,\lambda),\ \frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\varphi(x;x_0,y_0,\lambda)=B(x,x_0,y_o,\lambda).$$

则 $z=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}$ 满足初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=A(x,x_0,y_o,\lambda)z.\\ z(x_0)=-f(x_0,y_0).\end{cases}$$

$z=\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}$ 满足初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=A(x,x_0,y_o,\lambda)z.\\ z(x_0)=1.\end{cases}$$

$z=\dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda}$ 满足初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=A(x,x_0,y_o,\lambda)z+B(x,x_0,y_o,\lambda).\\ z(x_0)=0.\end{cases}$$

例题 4.1 设初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x).\\ y(x_0)=y_0.\end{cases}$$

的解为 $y=\varphi(x;x_0,y_0)$，其中 $p(x)$ 和 $q(x)$ 为连续函数，求 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}$ 与 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}$.

解. 直接利用上面的结论即可.

令 $z=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}$，满足初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-p(x)z.\\ z(x_0)=p(x_0)y_0-q(x_0).\end{cases}$$

直接求得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}=(p(x_0)y_0-q(x_0))e^{-\int_{x_0}^{x}p(x)\mathrm{d}x}.$$

类似地有：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}=e^{-\int_{x_0}^{x}p(x)\mathrm{d}x}.$$

例题 4.2 设函数 $y=\varphi(x;x_0,y_0,\lambda)$ 是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=sin(\lambda xy).\\ y(x_0)=y_0.\end{cases}$$

的解. 试求 $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right|_{x_0=y_0=0}$, $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\right|_{x_0=y_0=0}$, $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right|_{x_0=y_0=0}$.

解. 直接利用上面的结论即可. 从初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\lambda xcos(\lambda x\varphi)z.\\ z(x_0)=-sin(\lambda x_0y_0).\end{cases}$$

可以解得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}=-sin(\lambda x_0y_0)e^{\int_{x_0}^{x}\lambda xcos(\lambda x\varphi)\mathrm{d}x}.$$

因此

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right|_{x_0=y_0=0}=0.$$

类似地，从初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\lambda xcos(\lambda x\varphi)z.\\ z(x_0)=1.\end{cases}$$

可以解得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}=e^{\int_{x_0}^{x}\lambda xcos(\lambda x\varphi(x;x_0,y_0,\lambda)\mathrm{d}x}.$$

再注意到 $\varphi(x;0,0,\lambda)\equiv 0$，因此

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\right|_{x_0=y_0=0}=e^{\int_{x_0}^{x}\lambda x}\mathrm{d}x=e^{\frac{\lambda}{2}x^2}.$$

同理可得

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right|_{x_0=y_0=0}=0.$$

第 5 章 线性微分方程组