



# 微分方程引论习题课讲义

2023 秋 (赵老师班)

作者: Liu Xiaoran, Wang Caoliwen, Wang Dinghan

时间: January 17, 2024



# 目录

前言	3
<b>第一部分 常微分方程</b>	<b>4</b>
<b>第1章 第一次习题课讲义</b>	<b>5</b>
1.1 一阶隐式方程 . . . . .	5
1.1.1 微分法 . . . . .	5
1.1.2 参数法 . . . . .	7
1.2 Riccati 方程 . . . . .	9
1.3 习题讲解 . . . . .	10
1.3.1 作业部分 . . . . .	10
1.3.2 补充习题 . . . . .	10
1.4 补充内容 . . . . .	15
1.4.1 Lip 条件与局部 Lip 条件 . . . . .	16
1.4.2 Banach 不动点定理, 压缩映射原理 . . . . .	16
1.4.3 Arzela-Ascoli . . . . .	17
<b>第2章 第二次习题课讲义</b>	<b>18</b>
2.1 知识回顾 . . . . .	18
2.2 习题讲解 . . . . .	22
2.2.1 作业部分 . . . . .	22
2.2.2 补充习题 . . . . .	28
2.3 补充内容 . . . . .	32
<b>第3章 第三次习题课讲义</b>	<b>41</b>
<b>第4章 第四次、第六次习题课讲义</b>	<b>42</b>
4.1 幂级数解法 . . . . .	42
4.1.1 Cauchy 定理 . . . . .	42
4.1.2 幂级数解法 . . . . .	45
4.1.3 二阶线性方程的广义幂级数解 . . . . .	46
4.2 习题讲解 . . . . .	49
4.2.1 作业部分 . . . . .	49
4.2.2 补充习题 . . . . .	54
4.3 补充内容: 扰动定理 . . . . .	57
<b>第5章 第五次习题课讲义</b>	<b>61</b>
5.1 习题讲解 . . . . .	61

5.1.1 作业部分 . . . . .	61
5.1.2 补充习题 . . . . .	66
5.2 补充内容：平面线性系统的动力学分类 . . . . .	71
<b>第6章 第七次习题课讲义</b>	<b>76</b>
6.1 解一阶微分方程 . . . . .	76
6.1.1 恰当方程 . . . . .	76
6.2 存在唯一性 . . . . .	77
6.3 解对初值连续依赖可微 . . . . .	78
6.4 一阶线性微分方程组 . . . . .	79
6.5 定性理论 . . . . .	80
6.6 Sturm-Liouville 边值理论 . . . . .	81
<b>第7章 番外篇：常微分方程部分思考题</b>	<b>83</b>
<b>第二部分 偏微分方程</b>	<b>88</b>
<b>第8章 第八次习题课讲义</b>	<b>89</b>
8.1 习题讲解 . . . . .	89
8.1.1 作业部分 . . . . .	89
8.1.2 补充习题 . . . . .	92
8.2 数学分析拾遗之子流形上的积分 . . . . .	93
8.2.1 测度与积分 . . . . .	93
8.2.2 $\mathbb{R}^n$ 中的子流形 . . . . .	95
8.2.3 子流形上的积分学 . . . . .	95
<b>第9章 第九次习题课讲义</b>	<b>104</b>
9.1 知识回顾与习题讲解 . . . . .	104
9.2 Fourier 变换 . . . . .	109
<b>第10章 第十次习题课讲义</b>	<b>112</b>
10.1 习题讲解 . . . . .	112
10.1.1 作业部分 . . . . .	112
10.1.2 补充习题 . . . . .	124
<b>第11章 2022 年期末考试参考解答</b>	<b>127</b>

## 前言

这是中国科学技术大学数学科学学院 2023 年秋季学期《微分方程引论》课程（赵老师班）的配套习题课讲义。《微分方程引论》是一门面向全校数学专业二年级学生的必修课，共 4 学分，80 学时，主要介绍常微分方程和偏微分方程的基础理论。

这份讲义的完成离不开赵老师的悉心指导，也离不开同学们的积极反馈，在此表示衷心感谢。同学们的收获是我们写这份讲义的最大动力。还记得赵老师引用了丘成桐先生的一段话来结束这学期的课程，这里我们再重复一遍，与诸君共勉。

作为数学家，我们追求的不是敌国的财富，也不是千年的霸业，这些东西终究不免化为尘土。

我们追求的乃是理论和~~方程~~，它们带领着我们在寻求永恒真理的道路上迈进。这些想法比金子来得珍贵，比诗歌来得炫目，两者在简朴的真理面前黯然失色。

数学是诸多应用科学的基础，它能使国家富强。善用数学，能为现代社会维持其现状、规划其未来，达到国家的长治久安。

——丘成桐  
發自我的手機

（1982 年菲尔兹奖得主）

# 第一部分

## 常微分方程

# 第1章 第一次习题课讲义

写在前面：本次习题课的隐式方程、压缩映射证明存在唯一性定理不要求掌握.

## 1.1 一阶隐式方程

前面我们通常考虑形如  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  的方程，事实上给出了一个对一阶导数的显式表达。若无法给出显式表达，则考虑更一般的一阶方程

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0. \quad (1.1.1)$$

本节探讨该方程的解。

### 1.1.1 微分法

设从中可以解出  $y = f(x, p)$ ,  $p = \frac{dy}{dx}$ .

则两边对于  $x$  求导，可得

$$p = f'_x + f'_p \frac{dp}{dx}.$$

即

$$(f'_x - p)dx + f'_p dp = 0.$$

化简为关于  $x, p$  的一阶显式微分方程。

1. 若该方程有通解  $p = u(x, C)$ , 则方程 (1.1.1) 有通解

$$y = f(x, u(x, C)), \forall C \in \mathbb{R}.$$

2. 若该方程有特解  $p = \omega(x)$ , 则方程 (1.1.1) 有特解

$$y = f(x, \omega(x)).$$

由于  $x, p$  有良好的对称性，故可能容易得到  $x$  关于  $p$  的表达但反解较为困难。故有：

3. 若该方程有通解  $x = v(p, C)$ , 则方程 (1.1.1) 有通解

$$\begin{cases} x = v(p, C), \\ y = f(v(p, c), p), \end{cases} \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

此时  $p$  可以看作一个参数。

4. 若该方程有特解  $x = z(p)$ , 则方程 (1.1.1) 有特解

$$\begin{cases} x = z(p), \\ y = f(z(p), p). \end{cases}$$

此时  $p$  可以看作一个参数。

**注** 微分法适用于可用  $x, p$  表示  $y$  的部分方程。

**例题 1.1** 求解克莱洛方程

$$y = xp + f(p),$$

其中  $f''(p) \neq 0$ .

**解** 两边对  $x$  求导, 有

$$p = p + x \frac{dp}{dx} + f'(p) \frac{dp}{dx}.$$

即

$$(x + f'(p)) \frac{dp}{dx} = 0.$$

1.  $p = C$  为该方程的一个通解, 则原方程有一个通解为

$$y = Cx + f(C), \forall C \in \mathbb{R}.$$

2.  $x + f'(p) = 0$  时,  $x = -f'(p)$  为该方程的一个特解, 则原方程有一个特解为

$$\begin{cases} x = -f'(p) \\ y = -f'(p)p + f(p). \end{cases}$$

下考虑特解是否由通解得到, 事实上由于  $f''(p) \neq 0$ , 由隐函数定理可解得  $p = \omega(x)$ , 且

$$x = -f'(\omega(x)).$$

对  $x$  求导有,

$$1 = -f''(\omega(x))\omega'(x).$$

故

$$\omega'(x) \neq 0.$$

即  $\omega(x)$  不为常数, 这就证明了特解不能由通解得到.

**注**

1. 特解上任意一点  $(x_0, y_0)$  处的切线为

$$y = \frac{dy}{dx}(x_0)(x - x_0) + y_0 = \omega(x_0)x + f(\omega(x_0)).$$

故通解与特解处的切线相对应, 这也证明了特解不能由通解得到.

2. 对  $f(p) = -\frac{1}{4}p^2$  的情形, 通解为  $y = Cx - \frac{1}{4}C^2$ , 特解为  $y = x^2$ . 图像如图 1 所示.

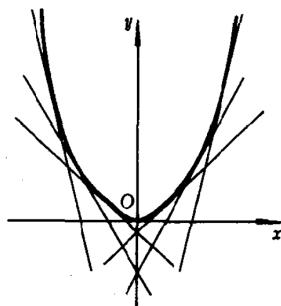


图 1.1: 例 1.1 解的图像

该图像的特解恰好包络了所有通解.

### 1.1.2 参数法

对不明显包含自变量的方程, 即

$$F(y, p) = 0, \quad p = \frac{dy}{dx}.$$

设  $y = g(t)$ ,  $p = h(t)$ .

1.  $h(t) = 0$  时,  $y$  为常数满足  $F(y, 0) = 0$ , 则得到方程的特解.

2.  $h(t) \neq 0$  时, 有

$$dx = \frac{1}{p} dy.$$

故

$$dx = \frac{g'(t)}{h(t)} dt.$$

故微分方程有通解

$$\begin{cases} x = \int \frac{g'(t)}{h(t)} dt + C \\ y = g(t). \end{cases}$$

**例题 1.2** 求解微分方程

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 1.$$

**解** 令  $y = \cos t$ ,  $\frac{dy}{dx} = \sin t$ .

1.  $y = \pm 1$  为方程的特解.

2.  $y \neq \pm 1$  时, 有

$$dx = -dt.$$

故方程有通解为

$$\begin{cases} x = -t + C \\ y = \cos t. \end{cases}$$

即方程有通解

$$y = \cos(C - x), \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

对更一般的微分方程 (1.1.1),

若将  $x, y, p$  均看为变量, 则  $(x, y, p) \in \mathbb{R}^3$  表示空间中的曲面. 令

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad p = h(u, v),$$

其中  $u, v$  为参数. 由

$$dy = pdx,$$

知

$$g'_u du + g'_v dv = h(f'_u du + f'_v dv).$$

即

$$(g'_u - hf'_u)du + (g'_v - hf'_v)dv = 0.$$

1. 若该方程有通解  $v = Q(u, C)$ , 则方程 (2.5.1) 有通解

$$\begin{cases} x = f(u, Q(u, C)), \\ y = g(u, Q(u, C)). \end{cases}$$

2. 若该方程有特解  $v = S(u)$ , 则方程 (2.5.1) 有特解

$$\begin{cases} x = f(u, S(u)), \\ y = g(u, S(u)). \end{cases}$$

由于  $u, v$  有良好的对称性, 故可能容易得到  $u$  关于  $v$  的表达但反解较为困难. 此时有另一种对称的表达方式, 在此不做说明.

**例题 1.3** 求解微分方程

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y - x = 0.$$

解 令

$$x = u, p = v, y = u - v^2.$$

于是

$$du - 2vdv = vdu.$$

即

$$(1 - v)du - 2vdv = 0.$$

1.  $v = 1$  为该方程的一个特解, 故

$$y = x - 1$$

为原方程的一个特解.

2.  $v \neq 1$  时, 有

$$du - \frac{2v}{1-v}dv = 0.$$

知通解为

$$u + 2v + 2\ln|v - 1| = C, \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

即

$$u = -2v - \ln(v - 1)^2 + C, \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

故方程有通解为

$$\begin{cases} x = -2v - \ln(v - 1)^2 + C, \\ y = -2v - \ln(v - 1)^2 - v^2 + C. \end{cases} \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

## 1.2 Riccati 方程

### 定义 1.1

形如

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x).$$

的方程称作 Riccati 方程. 其中  $p(x), q(x), r(x)$  在区间上连续, 且  $p(x) \not\equiv 0$ .



该方程为形式最简单的非线性方程, 但已经无法用初等方法解决. 但有如下两个命题对解进行刻画.

### 定理 1.1

设方程的一个特解为  $\varphi(x)$ , 则可用积分法求得通解.



**证明** 设  $y(x) = u(x) + \varphi(x)$ ,  $y(x)$  为方程的解, 则

$$\frac{du}{dx} + \frac{d\varphi}{dx} = p(u + \varphi)^2 + q(u + \varphi) + r.$$

将  $\varphi$  为特解的条件带入, 即有

$$\frac{du}{dx} = (2\varphi P + q)u + pu^2.$$

即转化为 Bernoulli 方程.

**例题 1.4** 求解

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^{-2}.$$

其中  $a, b$  为常数.

**解**

1.  $y = 0$  不是解.

2.  $y \neq 0$  时, 有

$$\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} + a = b \cdot \frac{1}{x^2 y^2}.$$

即

$$-\frac{d(\frac{1}{y})}{dx} + a = b \cdot \frac{1}{x^2} \cdot (\frac{1}{y})^2.$$

令  $z = \frac{1}{y}$ , 则有

$$-\frac{dz}{dx} + a = b \cdot \frac{1}{x^2} \cdot z^2.$$

即转化为齐次方程.

### 定理 1.2

对 Riccati 方程的特殊情形

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m,$$

其中  $a \neq 0, b, m$  均为常数. 当  $x \neq 0, y \neq 0$  时, 当

$$m = 0, -2, \frac{-4k}{2k+1}, \frac{-4k}{2k-1} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

时, 该形式可化为可分离变量的方程.



**证明** 不妨设  $a = 1$ , 否则可以通过令  $x' = ax$  化简. 故讨论方程

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = bx^m.$$

1.  $m = 0$  时,

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = b$$

为可分离变量的方程.

2.  $m = -2$  时, 在例 1.4 中已转化为齐次方程, 进而可转化为可分离变量的方程.

3.  $m = \frac{-4k}{2k+1}$  或  $m = \frac{-4k}{2k-1}$  时, 请参考丁同仁老师常微分方程讲义 P41 定理 3, 变换较为神奇, 感觉不太能看出来他的想法?

**注** 本充分条件为 1725 年 Daniel Bernoulli 得到的结果. 事实上该条件同样为必要条件, 在 1841 年被刘维尔证明. 表明即使是形式简单的 Riccati 方程, 大部分也是不能用初等积分的办法解的.

## 1.3 习题讲解

### 1.3.1 作业部分

第一次作业下一周才交, 因此在下一次习题课讲.

### 1.3.2 补充习题

**问题 1.1** 解一些方程:

1.  $y(1+x^2y^2)dx = xdy$ .
2. (20 丘赛)  $x\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^6-y^2} + 3y$ .
3.  $(y')^4 + y^2 = y^4$ .
4.  $y + xy' = 4\sqrt{y'}$ .

**解**

1. 首先  $x = 0, y = 0$  都是特解.  $x, y \neq 0$  时, 为了化齐次, 我们从“让人为难”的一项  $1+x^2y^2$  着手. 存在两种可能的变换:  $x \mapsto \frac{1}{x}, y \mapsto \frac{1}{y}$ . 我们采用前一种(后一种也可), 令  $u = \frac{1}{x}$ . 则

$$\left(1+y^2/\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)\frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{xy}dy \Rightarrow \frac{dy}{du} = -\frac{y}{u}\left(1+\frac{y^2}{u^2}\right).$$

作变换  $z = y/u$ , 则方程化为

$$u\frac{dz}{du} + z = -z - z^3 \Rightarrow \frac{u^2z}{\sqrt{z^2+2}} = C(C \neq 0).$$

由此可得原方程的通积分为  $y = Cx\sqrt{2+x^2y^2}(C \neq 0)$ ,  $C = 0$  即对应特解  $y = 0$ .

2. 从  $\sqrt{x^6-y^2}$  一项着手, 为了保证齐次, 我们作变换  $u = x^3$ , 则

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{du} = \frac{\sqrt{x^6-y^2}+3y}{3x^3} = \frac{y}{u} + \frac{\operatorname{sgn} u}{3}\sqrt{1-\frac{y^2}{u^2}}.$$

作变换  $z = \frac{y}{u}$ , 则方程化为

$$z + u\frac{dz}{du} = z + \frac{\operatorname{sgn} u}{3}\sqrt{1-z^2} \Rightarrow z = \sin\left(\frac{\operatorname{sgn} u}{3}\ln|u| + C\right).$$

由此可得原方程的通解为  $y = x^3 \sin(C + \operatorname{sgn} x \ln|x|)$ .

3. 本题可以直接硬积分处理, 但是做一些变换可以使其更加简单. 如令  $y = \frac{1}{\cos z}$ , 则有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin z}{\cos^2 z} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

因此, 原方程可以化简为

$$\frac{dz}{dx} = \pm \frac{\cos z}{\sqrt{\sin z}}.$$

故

$$\pm \frac{\sqrt{\sin z}}{\cos z} dz = dx.$$

对其积分即可 (Tip: 分子分母同乘  $\cos z$ )

4. 设  $y' = p$ ,  $p = 0$  时,  $y = 0$  为原方程的特解.  $p \neq 0$  时,

$$x = \frac{4}{\sqrt{p}} - \frac{y}{p}.$$

两边同时对  $y$  求导,

$$\frac{1}{p} = -\frac{1}{p} + \left(\frac{y}{p^2} - \frac{2}{p^{\frac{3}{2}}}\right) \frac{dp}{dy}.$$

即

$$\frac{dy}{dp} = \frac{y}{2p} - \frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}.$$

即转化为一阶线性方程.

最终可解得原方程具有通解:

$$\begin{cases} x = \frac{4}{\sqrt{p}} - C + \ln p, \\ y = \sqrt{p}(C - \ln p). \end{cases}$$

**问题 1.2(一阶线性方程的周期解)** 设微分方程

$$\frac{dy}{dx} + ay = f(x),$$

其中  $a > 0$  为常数, 而  $f(x)$  为以  $2\pi$  为周期的连续函数, 试求方程的  $2\pi$  周期解.

解

由定理 2.4, 该方程的解为

$$\begin{aligned} y &= Ce^{-\int_{x_0}^x ads} + \int_{x_0}^x f(s)e^{-\int_s^x adt} ds \\ &\stackrel{x_0=0}{=} Ce^{-ax} + \int_0^x f(s)e^{-a(x-s)} ds. \end{aligned}$$

断言: 方程的解有周期性等价于  $y(0) = y(2\pi)$ .

1. 由解的周期性,  $y(0) = y(2\pi)$ .
2. 当  $y(0) = y(2\pi)$  时, 下证明  $\forall x \in R$ , 有  $y(x) = y(x + 2\pi)$ .

令  $u(x) = y(x + 2\pi) - y(x)$ , 则

$$\frac{du}{dx} = \frac{dy(x+2\pi)}{dx} - \frac{dy}{dx} = (f(x+2\pi) - ay(x+2\pi)) - (f(x) - ay(x)) = -au(x).$$

$u(x)$  为齐次方程的解, 而  $u(0) = 0$ , 故  $u(x) \equiv 0$ , 即  $\forall x \in R$ , 有  $y(x) = y(x + 2\pi)$ .

则有方程

$$C = y(0)$$

$$\begin{aligned}
&= y(2\pi) \\
&= Ce^{-2\pi a} + \int_0^{2\pi} f(s)e^{-a(2\pi-s)} ds \\
&= Ce^{-2\pi a} + e^{-2\pi a} \int_0^{2\pi} f(s)e^{as} ds.
\end{aligned}$$

解得

$$C = \frac{e^{-2\pi a}}{1 - e^{-2\pi a}} \int_0^{2\pi} f(s)e^{as} ds.$$

### 问题 1.3 对方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x).$$

其中  $p(x), q(x)$  均为以  $\omega$  为周期的周期函数. 则:

- 若  $q(x) \equiv 0$ , 该方程的任意非零解以  $\omega$  为周期, 当且仅当

$$\bar{p} = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega p(x) dx = 0.$$

- 若  $q(x) \not\equiv 0$ , 该方程有唯一的  $\omega$  周期解, 当且仅当

$$\bar{p} = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega p(x) dx \neq 0.$$

### 证明

- 可以直接解得方程存在通解

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^x p(t) dt}.$$

故任意非零解以  $\omega$  为周期

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow y(x) = y(x + \omega), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \\
&\Leftrightarrow Ce^{-\int_{x_0}^x p(t) dt} = Ce^{-\int_{x_0}^{x+\omega} p(t) dt}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \\
&\Leftrightarrow e^{-\int_x^{x+\omega} p(t) dt} = 1.
\end{aligned}$$

由于  $p$  为周期函数, 则

$$e^{-\int_x^{x+\omega} p(t) dt} = e^{-\int_0^\omega p(t) dt} = 1.$$

$$\Leftrightarrow \bar{p} = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega p(x) dx = 0.$$

- 此时上一题中的断言仍然成立, 我们只需证明方程存在唯一满足  $y(\omega) = y(0)$  的解  $y(x)$  的充要条件是  $\bar{p} \neq 0$ . 设  $y(x)$  满足初值  $y(0) = y_0$ , 则

$$y(x) = e^{-\int_0^x p(s) ds} \left( y_0 + \int_0^x q(s) e^{\int_0^s p(u) du} ds \right).$$

计算可得

$$y(\omega) - y(0) = y_0(e^{-\omega \bar{p}} - 1) + e^{-\omega \bar{p}} \int_0^\omega q(s) e^{\int_0^s p(u) du} ds.$$

若  $\bar{p} \neq 0$ , 则求得唯一的  $\omega$ -周期解, 对应初值为

$$y_0 = \frac{e^{-\omega \bar{p}}}{1 - e^{-\omega \bar{p}}} \int_0^\omega q(s) e^{\int_0^s p(u) du} ds.$$

若  $\bar{p} = 0$ , 由解式可得方程要么不存在周期解, 要么所有解都是周期解, 因此不唯一.

**问题 1.4(分离型方程的初值问题解的局部唯一性)** 考虑分离型方程的初值问题:

$$\frac{dx}{dt} = X(x)T(t), \quad x(\xi) = \eta. \quad (1.3.1)$$

在  $X(\eta) = 0$  时, 初值问题存在解  $x \equiv \eta$ . 我们希望能给出上述解在局部唯一的充分条件.

1. 首先给出初值问题解不唯一的例子: 考虑方程  $x'(t) = \sqrt{|x|}$ .
2. 下面给出判定初值问题 (2) 解的局部唯一性的一个充分条件. 设初值问题 (2) 中的  $X(x), T(t)$  均为连续函数, 且在  $\eta$  的某个邻域  $(\eta - \varepsilon, \eta + \varepsilon)$  上成立  $X(x) = 0 \Leftrightarrow x = \eta$ . 若反常积分

$$\left| \int_{\eta}^{\eta \pm \varepsilon} \frac{dy}{X(y)} \right| = \infty,$$

则 (2) 的解局部唯一.

3. 上述反常积分发散只能作为充分条件而非必要条件, 考虑以下方程:

$$\frac{dx}{dt} = -t \operatorname{sgn}(x) \sqrt{|x|} = \begin{cases} -t\sqrt{x}, & x \geq 0 \\ t\sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

### 证明

1. 若  $x(t)$  是方程的解, 则  $-x(-t)$  也是方程的解, 因此我们只需讨论方程的正解. 此时有

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = dt \Rightarrow 2\sqrt{x} = t + C \Rightarrow x = \frac{(t + C)^2}{4}.$$

其中  $t > -C$ . 方程的负通解为  $-x(-t; C) = -\frac{(C-t)^2}{4}$ . 此外, 方程特解为  $x \equiv 0$ . 因此初值条件  $x(0) = 0$  下, 初值问题存在两个不同的解:

$$x_1(t) \equiv 0, \quad x_2(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4}, & t \geq 0 \\ -\frac{t^2}{4}, & t < 0 \end{cases} = \operatorname{sgn}(t) \frac{t^2}{4}.$$

2. 假设此时 (2) 的解在局部不唯一, 设  $x(t)$  是异于特解  $x \equiv \eta$  的解. 不妨设存在  $\bar{\xi} > \xi$ , 使得  $x(\bar{\xi}) = \bar{\eta} \in (\eta, \eta + \varepsilon)$ , 设  $t_0 = \sup\{t < \bar{\xi} : x(t) = \eta\}$ . 则在区间  $t \in (t_0, \bar{\xi}]$  上, 总成立

$$\frac{dx}{X(x)} = T(t)dt \Rightarrow \int_{\bar{\eta}}^{x(t)} \frac{dx}{X(x)} = \int_{\bar{\xi}}^t T(s)ds.$$

令  $t \rightarrow t_0^+$ , 上式中 LHS 为发散的反常积分, RHS 为有限积分, 矛盾! 因此初值问题的解在局部唯一.

3. 若  $x(t)$  是上述方程的解, 则  $-x(t)$  也是方程的解. 因此我们只需求方程的正解. 此时有

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = -tdt \Rightarrow 2\sqrt{x} = \frac{C - t^2}{2}.$$

因此正通解为

$$x = \frac{(C - t^2)^2}{16}, \quad -\sqrt{C} < t < \sqrt{C} (C > 0).$$

负通解为  $x = -\frac{(C - t^2)^2}{16}$ . 此时方程在初值条件  $x(0) = 0$  下存在唯一解  $x \equiv 0$ . 但是在  $x = 0$  附近, 有

$$\int_0^\varepsilon \frac{dx}{\operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|}} = 2\sqrt{\varepsilon}, \quad \int_{-\varepsilon}^0 \frac{dx}{\operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|}} = -2\sqrt{\varepsilon}.$$

这说明反常积分收敛不是局部解唯一的必要条件.

**问题 1.5(Gronwall 不等式的应用举例)** 已知方程  $\dot{x} = -x + f(t, x)$ , 其中  $f \in C(\mathbb{R}^2)$ , 且  $|f(t, x)| \leq \phi(t)|x|$ ,  $\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$ . 若  $\int_0^\infty \phi(t)dt < +\infty$ , 证明方程的任一解在  $t \rightarrow \infty$  时的极限为零.

**证明** 任取方程的解  $x(t)$ , 令  $y(t) = x(t)e^t$ , 则

$$\frac{d}{dt}(xe^t) = e^t f(t, x) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = e^t f(t, ye^{-t}) \Rightarrow y(t) = \eta + \int_0^t e^s f(s, y(s)e^{-s})ds.$$

由题设条件可得  $t \geq 0$  时, 有

$$|y(t)| \leq |\eta| + \int_0^t e^s |f(s, y(s)e^{-s})| ds \leq |\eta| + \int_0^t \phi(t) |y(s)| ds.$$

由 Gronwall 不等式可得

$$|y(t)| \leq |\eta| e^{\int_0^t \phi(s) ds} \leq |\eta| e^{\int_0^\infty \phi(s) ds} \triangleq M \Rightarrow |x(t)| \leq M e^{-t}.$$

因此  $x(t)$  在  $t \rightarrow +\infty$  时的极限为零.

**问题 1.6(压缩映射原理证明解的存在唯一性)** 设  $I = [a, b]$ , 设函数  $f(t)$  在  $I$  上连续,  $K(t, s)$  在  $I \times I$  上连续, 证明: 积分方程

$$x(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s)x(s)ds$$

在  $I$  上有唯一解.

**证明** 我们利用压缩映射原理证明. 设  $\max_{I \times I} |K| = M$ , 在函数空间  $C(I)$  上, 赋予范数  $\|x\| = \max_{t \in I} e^{-M(t-a)} |x(t)|$ , 则  $C(I)$  成为 Banach 空间. 构造算子

$$\mathcal{T} : C(I) \rightarrow C(I), \quad (\mathcal{T}x)(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s)x(s)ds.$$

则任取  $x_1, x_2 \in C(I)$ , 有

$$\begin{aligned} e^{-M(t-a)} |(\mathcal{T}x_1)(t) - (\mathcal{T}x_2)(t)| &\leq e^{-M(t-a)} \int_a^t |K(t, s)| |x_1(s) - x_2(s)| ds \\ &\leq e^{-M(t-a)} \int_a^t M e^{M(s-a)} \cdot e^{-M(s-a)} |x_1(s) - x_2(s)| ds \\ &\leq \|x_1 - x_2\| e^{-M(t-a)} e^{-M(s-a)} \Big|_a^t \\ &\leq (1 - e^{-M(b-a)}) \|x_1 - x_2\|. \end{aligned}$$

进而我们有  $\|\mathcal{T}x_1 - \mathcal{T}x_2\| \leq \theta \|x_1 - x_2\|$ , 其中  $\theta = 1 - e^{-M(b-a)} \in (0, 1)$ . 所以  $\mathcal{T}$  是压缩映射, 由压缩映射原理可得  $\mathcal{T}$  在  $C(I)$  中存在唯一的不动点, 进而积分方程在  $I$  上有唯一解.

下面是一个几乎一样的例子, 请读者自行完成.

**问题 1.7** 利用压缩映射原理证明: 当  $|\lambda|$  充分小时, 积分方程

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)\varphi(s)ds$$

在  $[a, b]$  上存在唯一解, 这里  $K(t, s)$  在  $a \leq t, s \leq b$  上是连续的.

**证明** 设  $\max |K| = M < \infty$ . 定义  $C[a, b]$  上的范数为  $\|\varphi\| = \max_{[a, b]} e^{M(t-a)} |\varphi(t)|$ , 则  $(C[a, b], \|\cdot\|)$  为 Banach 空间. 定义算子  $\mathcal{T} : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  为

$$(\mathcal{T}\varphi)(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)\varphi(s)ds.$$

则我们有

$$\begin{aligned} |(\mathcal{T}\varphi)(t) - (\mathcal{T}\psi)(t)| &\leq |\lambda| \int_a^b M |\varphi(s) - \psi(s)| ds = |\lambda| \int_a^b M e^{-M(s-a)} \cdot e^{M(s-a)} |\varphi(s) - \psi(s)| ds \\ &\leq |\lambda| \|\varphi - \psi\| \int_a^b M e^{-M(s-a)} ds \leq |\lambda| (1 - e^{-M(b-a)}) \|\varphi - \psi\|. \end{aligned}$$

因此当  $\lambda$  满足  $|\lambda| < (1 - e^{-M(b-a)})^{-1}$  时,  $\mathcal{T}$  成为压缩映射, 进而存在唯一的不动点, 即积分方程存在唯一解  $\varphi \in C[a, b]$ .

**问题 1.8(赵班, 21mid, 课本 P97 5, Picard 迭代方法)** 设函数  $f(x, y)$  在矩形区域  $0 \leq x \leq a, |y| < b$  上连续, 且当  $y_1 \leq y_2$  时,  $f(x, y_1) \leq f(x, y_2)$ . 对于所有的  $x$ ,  $f(x, 0) \geq 0$ . 通过构造 Picard 序列证明: 初值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(0) = 0$$

在区间  $0 \leq x \leq h$  上存在解, 其中

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, \quad M = \max_R |f(x, y)|.$$

**证明** 构造 Picard 序列如下:

$$\varphi_0(x) = 0, \quad \varphi_k(x) = \int_0^x f(s, \varphi_{k-1}(s)) ds (k \geq 1).$$

当  $x \in [0, h]$  时, 我们有:

1.  $\varphi_0(x) = 0$ .
2. 若  $|\varphi_k(x)| \leq b$ , 则

$$|\varphi_{k+1}(x)| \leq \int_0^x |f(s, \varphi_k(s))| ds \leq \int_0^x \max_R |f| ds \leq Mh \leq b.$$

由归纳法即得  $|\varphi_k(x)| \leq b, \forall x \in [0, h], \forall k$ . 另一方面, 有

1.  $\varphi_1(x) = \int_0^x f(s, 0) ds \geq 0 = \varphi_0(x)$ .
2. 若  $\varphi_k(x) \geq \varphi_{k-1}(x)$ , 则

$$\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x) = \int_0^x (f(s, \varphi_k(s)) - f(s, \varphi_{k-1}(s))) ds \geq 0.$$

由归纳法即得  $\varphi_0(x) \leq \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \dots, \forall x \in [0, h]$ . 由上述可得在  $[0, h]$  上,  $\varphi_k$  逐点收敛于某个函数  $\varphi$ , 且  $\varphi_0 \leq \varphi_1 \leq \dots \leq \varphi$ .

另一方面, 在  $[0, h]$  上, 我们已证明了  $\{\varphi_k\}$  一致有界, 又由

$$|\varphi_k(x) - \varphi_k(y)| = \left| \int_0^x f(s, \varphi_{k-1}(s)) ds - \int_0^y f(s, \varphi_{k-1}(s)) ds \right| \leq \left| \int_y^x |f(s, \varphi_{k-1}(s))| ds \right| \leq M|x - y|.$$

因此  $\{\varphi_k\}$  等度连续. 由 Arzelà-Ascoli 定理可得  $\{\varphi_k\}$  存在一致收敛子列  $\{\varphi_{k_n}\}$ , 一致极限即为  $\varphi$ . 由此可得  $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , 对任意  $n \geq N, x \in [0, h]$ , 有

$$|\varphi_{k_n}(x) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

故对任意  $k \geq k_N$ , 有

$$|\varphi_k(x) - \varphi(x)| = |\varphi(x) - \varphi_k(x)| \leq |\varphi(x) - \varphi_{k_N}(x)| + |\varphi_{k_N}(x) - \varphi_k(x)| < \varepsilon.$$

即说明了  $\varphi_k$  在  $[0, h]$  上一致收敛于  $\varphi$ . 因此

$$\varphi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^x f(s, \varphi_k(s)) ds = \int_0^x f(s, \varphi(s)) ds.$$

所以  $\varphi(x)$  是初值问题的一个解.

## 1.4 补充内容

该部分的 2、3 两个内容在泛函分析或者数学分析 B3 课程中会学到, 此处不要求掌握.

### 1.4.1 Lip 条件与局部 Lip 条件

#### 定义 1.2 (Lipschitz 条件)

设函数  $f(x, y)$  在区域  $D$  内满足

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

常数  $L > 0$ . 称函数  $f(x, y)$  在区域  $D$  内对  $y$  满足 Lip-条件.



#### 定义 1.3 (局部 Lipschitz 条件)

设函数  $f(x, y)$  在区域  $G$  上连续, 求对于区域内任意一点  $(x_0, y_0)$ , 存在一个矩形  $Q$ , 使得  $(x_0, y_0) \in Q \subset G$ , 且在  $Q$  内满足 Lipschitz 条件, 此时称函数  $f(x, y)$  在区域  $D$  内对  $y$  满足局部 Lip-条件.



**注** 自然从函数  $x^2 + y^2$  来看, 对  $y$  有连续的偏导数, 因此满足局部 Lip 条件, 但是在  $R$  上对  $y$  不满足全局 Lip 条件.

#### 定理 1.3 (有界闭集合中局部 Lip 和全局 Lip 的等价性)

$G$  为有界闭集合, 则连续函数  $f$  满足局部 Lip 条件等价于满足全局 Lip 条件.



**证明** 全局 Lip 即得局部 Lip, 只需要证明局部 Lip 可以得到全局 Lip.

假设  $f$  在  $G$  上不满足全局 Lip 条件, 则对  $\forall n$ ,  $\exists x_n \neq y_n$ , 满足

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq n|x_n - y_n|.$$

由于  $G$  为紧集, 则  $\exists \{x_n\}$  的子列  $\{x_{n_k}\}$ ,  $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in G$ .

根据子列的选取,  $\{x_{n_k}\}$  应满足:

$$|x_{n_k} - y_{n_k}| \leq \frac{|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})|}{n_k} \rightarrow 0, \text{ as } k \rightarrow \infty.$$

这里利用了  $f$  在  $G$  上的有界性, 故  $y_{n_k} \rightarrow x_0$ .

$f$  满足局部 Lip 条件, 故  $\exists B_r(x_0)$ ,  $r > 0$ ,  $f$  在  $B_r(x_0) \cap G$  满足

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

故

$$n_k \leq \frac{|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})|}{|x_{n_k} - y_{n_k}|} \leq L.$$

对较大的  $n_k$  即得矛盾.

### 1.4.2 Banach 不动点定理, 压缩映射原理

#### 定义 1.4 (压缩映射)

$(X, d)$  为度量空间, 若从  $X$  到  $X$  的映射  $T$  满足,  $\exists \alpha \in (0, 1)$ , 使得

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$



#### 定理 1.4 (Banach 不动点定理, 压缩映射原理)

完备度量空间到自身的压缩映射一定有不动点, 且不动点唯一.



**证明** 任取  $x_0 \in X$ , 定义迭代序列

$$x_{n+1} = Tx_n.$$

则  $d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) \leq \cdots \leq \alpha^n d(x_1, x_0)$ . 故

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \sum_{k=1}^p d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) \leq \sum_{k=1}^p \alpha^{n+k-1} d(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0) \rightarrow 0, \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

该表达式对任意  $p$  成立, 因此  $\{x_n\}$  为基本列.

由  $X$  的完备性可知,  $\exists x^* \in X$ , s.t.  $d(x_n, x^*) \rightarrow 0$ , as  $n \rightarrow \infty$ .

故

$$d(Tx^*, x^*) \leq d(Tx^*, Tx_n) + d(Tx_n, x_n) + d(x_n, x^*) \leq \alpha d(x^*, x_n) + d(x_{n+1}, x_n) + d(x_n, x^*) \rightarrow 0.$$

则  $Tx^* = x^*$ .

下说明唯一性. 假设  $y^*$  也为不动点, 则

$$d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \leq \alpha d(x^*, y^*).$$

则  $d(x^*, y^*) = 0$ , 有  $x^* = y^*$ .

### 1.4.3 Arzela-Ascoli

参考课本 P82 页.

## 第2章 第二次习题课讲义

Programmer: Talk is cheap, show me your code!

Mathematician: Talk is cheap, solve the ODE!

注记：本次习题课上讲解的内容包括本讲义第二部分（作业题）的全部内容，以及第三部分的例题1，例题5，例题7。本讲义中除了第二部分作业题以及第三部分例题1-例题3以外的内容均为拓展，本课程不做要求。

### 2.1 知识回顾

**警告：**本节的目的是给出常微分方程的“解”和“积分曲线”的一个确切含义，大家如果学习时没有感到什么困惑（比如为什么  $dy$  和  $dx$  可以从求导符号  $\frac{dy}{dx}$  中脱离独立参与运算？），就没有必要阅读本节。把它放在第一部分只是为了和我在习题课上讲的顺序相符。

在课堂上，我们非常熟悉下面形式的方程

$$y' = f(x, y),$$

其中等式两边都是  $n$  维向量， $f(x, y)$  是一个定义在  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  中的至少是连续的函数。我们所谓方程的解是一个定义在某区间  $I \subset \mathbb{R}$  上的  $C^1$ （向量值）函数  $\phi \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ ，使得对任意的  $x \in I$ ,  $(x, \phi(x)) \in D$ ，并且满足

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)),$$

请注意，上面的等式两边都是  $n$  维向量。这时我们说方程的一条**积分曲线**，指的便是一个解的图像  $\Gamma(\phi) \subset D$ 。

事实上，我们还可以通过引入  $y_{n+1} = x$ ,  $y'_{n+1} = 1$  来将这个  $n$  维的一阶微分方程化为  $n+1$  维的一阶**自治微分方程**，即等式右端的  $f$  不依赖于自变量  $x$ ,

$$y' = f(y),$$

不过这里等式两边都变成了  $n+1$  维向量。

为了不让大家一开始就陷入令人绝望的抽象中，我们用最熟悉的  $y' = f(x, y)$  举个例子，其中等式两边都是在  $\mathbb{R}^1$  中。这里我们把它化为自治方程的操作就是令  $y_1 = y$ ,  $y_2 = x$ ,  $f_1(y_1, y_2) = f(y_2, y_1)$ ,  $f_2(y_1, y_2) = 1$ 。于是原方程等价于下面的 2 维一阶自治方程组

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(y_1, y_2) = f(y_2, y_1) \\ y'_2 = f_2(y_1, y_2) = 1 \end{cases}$$

因此，下面我们将总是讨论自治方程（下面我们还是回到  $n$  维方程的情况，这里一般  $n \geq 2$ ）。我们先引入一些标准的定义来描述上面的情景。

#### 定义 2.1

设  $U \subset \mathbb{R}^n$  是一个开集，我们说  $U$  上的一个向量场，是指一个连续的映射

$$X : U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad p \mapsto X(p) = X^1(p) \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + X^n(p) \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

其中  $X^1(p), \dots, X^n(p)$  是  $U$  上的  $n$  个连续函数,  $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$  是  $\mathbb{R}^n$  中的一组基 ( $\frac{\partial}{\partial x^i}$  对应  $\mathbb{R}^n$  中只有第  $i$  个分量为 1, 其余分量为 0 的向量)。我们把  $U$  上所有向量场的集合记作  $\mathfrak{X}(U)$ 。



### 定义 2.2

设  $U \subset \mathbb{R}^n$  是一个开集, 我们说  $U$  上的一条(正则)参数曲线, 是指如下的  $C^1$  映射

$$\gamma : (a, b) \rightarrow U, \quad t \mapsto \gamma(t)$$

并且满足对于任意的  $t \in (a, b)$ ,  $\gamma'(t) \neq 0$ 。



这里“正则”指的就是  $\gamma$  的切向量  $\gamma'(t)$  处处不为 0, 我们下面总是要求这点而省略“正则”二字。

### 定义 2.3

设  $U \subset \mathbb{R}^n$  是一个开集,  $U$  上的一个微分 1-形式是指如下的连续映射

$$\omega : U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad p \mapsto \omega(p) = \omega_1(p)dx^1 + \dots + \omega_n(p)dx^n.$$

其中  $\omega_1, \dots, \omega_n$  是  $U$  上的  $n$  个连续函数,  $dx^1, \dots, dx^n$  是  $\mathbb{R}^n$  中的(另)一组基。我们把  $U$  上所有微分 1-形式的集合记作  $\Omega^1(U)$ 。



这里在定义向量场和微分 1-形式时用到了  $\mathbb{R}^n$  中的两组基, 即  $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$  和  $dx^1, \dots, dx^n$ 。同学们可以不去追究后面这组基究竟指的是哪些向量, 以及这两组基的关系。实际上, 这两组基(因此向量场在一点的取值和微分 1-形式在一点的取值)是生活在不同的线性空间中的, 这两个线性空间互为对偶空间, 但是它们都同构于  $\mathbb{R}^n$ , 同学们可以(暂时)忽视这些细节。

### 定义 2.4

设  $U \subset \mathbb{R}^n$  是一个开集,  $\gamma : (a, b) \rightarrow U$  是  $U$  上的一条参数曲线,  $\omega \in \Omega^1(U)$  是  $U$  上的一个微分 1-形式。我们称微分形式  $\omega$  在映射  $\gamma$  下的拉回  $\gamma^*\omega$  为如下的  $(a, b)$  上的一个微分 1-形式(我们用  $t$  表示  $\mathbb{R}$  上的坐标)

$$\gamma^*\omega = \left( \sum_{i=1}^n \omega_i(\gamma(t)) \cdot (\gamma^i)'(t) \right) dt,$$

其中  $\gamma^1, \dots, \gamma^n$  是  $\gamma$  的  $n$  个分量。



用刚刚定义的术语, 我们说一个常微分方程是指如下的方程

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)),$$

其中  $\gamma : (a, b) \rightarrow U$  是待求的一条参数曲线,  $X \in \mathfrak{X}(U)$  是一个向量场。有时我们也加上一个初值条件  $\gamma(0) = p \in U$ 。所以, 一个常微分方程就和一个向量场一一对应。现在我们现在可以给积分曲线一个新的定义。

### 定义 2.5

设  $U \subset \mathbb{R}^n$  是一个开集,  $X \in \mathfrak{X}(U)$  是一个向量场。如果一条参数曲线  $\gamma : (a, b) \rightarrow U$  满足

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)),$$

那么我们称参数曲线  $\gamma$  为向量场  $X$  的一条积分曲线。



由于我们总是考虑正则参数曲线的情形，所以我们的定义不包含“奇解”，比如  $\gamma(t) = p \in \mathbb{R}^n$  恒为常数的解。

不过，这样定义的积分曲线是一个映射，而不是我们通常想象的几何对象，这有时会给我们带来一些麻烦。比如我们经常遇到如下形式的方程（比如柳斌书上定义 2.1 中的方程），

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, (x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$$

首先要正确解释这个方程的含义：等式左边是一个  $U$  上的微分 1-形式  $\omega$ ，我们要找到一条  $U$  中的“积分曲线”，使得  $\omega$  “限制”在这条“积分曲线”上是 0。如果用参数曲线的语言来说，就是寻找  $\gamma : (a, b) \rightarrow U, t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ ，使得

$$\gamma^* \omega = (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)) dt = 0.$$

可是很明显，这里有两个待定函数  $x(t), y(t)$ ，却只有一个方程，所以是定不下来  $\gamma(t)$  的。事实上，我们这里参数化的选取是不重要的，也就是即使变换参数化后，这个方程仍然成立。具体来说，如果  $\tilde{\gamma} : (c, d) \rightarrow U, t \mapsto \tilde{\gamma}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$  是另一个参数化，我们假设  $\gamma$  和  $\tilde{\gamma}$  都是单射（根据曲线的切向量不为 0，通过缩小  $(a, b)$  和  $(c, d)$  这总是可以办到的），并且  $\text{Im}(\gamma) = \text{Im}(\tilde{\gamma})$ ，那么

$$\gamma^{-1} \circ \tilde{\gamma} : (c, d) \rightarrow (a, b)$$

是一个  $C^1$ -同胚（这里需要  $\gamma$  和  $\tilde{\gamma}$  都是正则曲线，利用反函数定理可以说明这里  $\gamma^{-1} \circ \tilde{\gamma}$  是  $C^1$  的，感兴趣的同學可以尝试证明）。简单的计算表明，

$$(\gamma^{-1} \circ \tilde{\gamma})^*(\gamma^* \omega) = P(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))\tilde{x}'(t) + Q(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))\tilde{y}'(t) = \tilde{\gamma}^* \omega,$$

从而可见  $\gamma^* \omega = 0$  当且仅当  $\tilde{\gamma}^* \omega = 0$ 。

从这个例子我们可以看出，“积分曲线”应当是一个（与参数化选取无关的）几何对象，它应该是  $\text{Im}(\gamma)$  而不是映射  $\gamma$  本身。为此我们引入下面的定义。

### 定义 2.6

我们称  $M \subset \mathbb{R}^n$  是一个  $d$  维子流形，如果对于任意的  $p \in M$ ，都存在开集  $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^n$  以及微分同胚  $\Phi : U \rightarrow V$ ，使得

$$\Phi(M \cap U) = V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}).$$

对于  $p \in M$ ，我们定义  $M$  在  $p$  点处的切空间  $T_p M$  为下面的线性空间（这是  $\mathbb{R}^n$  的线性子空间）

$$T_p M = \{\gamma'(0) \mid \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M, \gamma(0) = p, \gamma \in C^1\}.$$



### 定义 2.7

设  $\omega \in \Omega^1(U)$  是一个  $\mathbb{R}^2$  中开集  $U$  上的一个微分 1-形式。对于常微分方程

$$\omega = 0,$$

我们称它的积分曲线是一个 1 维的子流形  $\Gamma \subset U$ ，使得

$$\iota^* \omega = 0,$$

其中  $\iota : \Gamma \rightarrow U$  是嵌入映射（我们通常说  $\omega$  限制在  $\Gamma$  上是 0）。



(1) 利用子流形的语言，我们可以重述**隐函数定理**如下。设  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  是开集， $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  是一个  $C^1$  的映射。如果对任意的  $p \in f^{-1}(0)$ ， $\text{rank}(df(p)) = m$ ，那么  $f^{-1}(0)$  是一个余维数（= 背景空间维数

—子流形维数)为 $m$ 的子流形。于是隐函数定理将是一个决定子流形(积分曲线)的有力工具。

(2)这里的定义只包含了 $n=2$ 的场景,这时因为一般使一个微分1-形式等于0的东西是一个余1维的子流形,只有 $n=2$ 时余维数为1的子流形同时是维数为1的子流形,所以只有 $n=2$ 时才会出现由微分1-形式定义的方程。

我们直观上可以认为1维子流形是一个在每个点的局部看都像是一条曲线的东西。事实上,每一个1维子流形在局部上都由之前定义的参数曲线所给出,也就是对于任意的 $p \in \Gamma$ ,都存在开集 $U \subset \mathbb{R}^n$ ,以及参数曲线 $\gamma : (a, b) \rightarrow U$ ,使得 $\Gamma \cap U = \text{Im}(\gamma)$ 。此时子流形在 $p$ 处的切空间 $T_p\Gamma$ 就是局部参数化的切向量 $\gamma'(\gamma^{-1}(p))$ 生成的1维子空间。而且在这个局部上,我们可以认为 $\iota^*\omega = \gamma^*\omega$ 。

令人开心的是,我们这里通过“子流形”的定义其实可以部分涵盖上面用参数曲线的定义。之所以说是“部分涵盖”,是因为正则参数化的图像未必是一个子流形,比如参数化的像集可能出现“自交点”,另一个著名的反例是环面上的无理稠密曲线(可以参考柳斌书的8.4节)。出现这些问题的本质原因大概是局部上的分析性质不能决定整体上的拓扑性质,不过我们这里不细究这些。

### 定义 2.8

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开集, $X \in \mathfrak{X}(U)$ 是一个向量场, $\Gamma \subset U$ 是一个1维子流形。我们称向量场 $X$ 与子流形 $\Gamma$ 相切,指的是对于任意的 $p \in \Gamma$ ,有 $X(p) \in T_p\Gamma$ 。此时,我们也称 $\Gamma$ 是向量场 $X$ 的一条积分曲线。



第一眼看,好像子流形与向量场相切只是保证了局部参数化的 $\gamma'(t) = \alpha(t)X(\gamma(t))$ ,其中我们可以假设 $\alpha(t) > 0 (> 0$ 不是本质的,我们要用 $\neq 0$ ),不过我们总可以通过调整子流形 $\Gamma$ 的局部参数化使得这里的 $\alpha(t) = 1$ ,从而与之前将参数曲线作为积分曲线的定义相符。

### 定理 2.1

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开集, $X \in \mathfrak{X}(U)$ 是一个向量场, $\Gamma \subset U$ 是一个与 $X$ 相切的1维子流形。那么对于任意的 $p \in \Gamma$ ,存在开集 $U \subset \mathbb{R}^n$ ,以及参数曲线 $\gamma : (a, b) \rightarrow U$ ,使得 $\Gamma \cap U = \text{Im}(\gamma)$ ,并且 $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$ 。



**证明**先随便取一个 $\Gamma$ 的局部参数化 $\tilde{\gamma} : (a, b) \rightarrow U$ ,假设 $\tilde{\gamma}'(t) = \alpha(t)X(\tilde{\gamma}(t))$ ,其中 $\alpha(t) > 0$ 。我们令

$$\phi : (a, b) \rightarrow (0, c), \quad t \mapsto \phi(t) = \int_a^t \alpha(s) ds,$$

其中 $c = \int_a^b \alpha(s) ds$ 。于是 $\phi$ 是 $C^1$ 的双射,且导数 $\phi'(t) = \alpha(t) > 0$ ,于是根据反函数定理, $\phi^{-1} : (0, c) \rightarrow (a, b)$ , $s \mapsto \phi^{-1}(s)$ 也是 $C^1$ 的,并且 $(\phi^{-1})'(s) = \frac{1}{\alpha(\phi^{-1}(s))}$ 。我们考虑参数化 $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \phi^{-1} : (0, c) \rightarrow U$ ,它满足

$$\gamma'(s) = \tilde{\gamma}'(\phi^{-1}(s)) \frac{1}{\alpha(\phi^{-1}(s))} = \frac{\alpha(\phi^{-1}(s))X(\tilde{\gamma}(\phi^{-1}(s)))}{\alpha(\phi^{-1}(s))} = X(\gamma(s)).$$

作为总结,我们有3种关于积分曲线的(不完全等价的)定义:

- 作为解函数的图像——优点是直观,缺点是涵盖的范围太小;
- 作为参数曲线——优点是直观,缺点是参数化的选取不唯一,以及参数化未必能得到几何上具有良好结构的图形;
- 作为与给定向量场相切的子流形——优点是定义了一个几何对象,而不依赖于具体的参数化,而且基本上能够涵盖上面两种定义,缺点是所有事情只能在局部上讨论,而且不直观。

## 2.2 习题讲解

### 2.2.1 作业部分

练习 2.1(P27 2(2)) 求解微分方程  $y' = y^a$ , 其中  $a = \frac{1}{5}, 1, 2$ , 并作出积分曲线的草图。

解 当  $a = \frac{1}{5}$  时,  $y(x) = 0, x \in \mathbb{R}$  是特解, 通解计算如下

$$y^{-1/5} dy = dx \implies \frac{5}{4} y^{\frac{4}{5}} = x + C \implies y = \pm \left( \frac{4}{5}(x + C) \right)^{\frac{5}{4}}, \quad x \geq C,$$

这里  $C$  为任意实数。还可以注意到将零解与通解拼接便得到  $\mathbb{R}$  上的解。

当  $a = 2$  时,  $y(x) = 0, x \in \mathbb{R}$  是特解, 通解计算如下

$$y^{-2} dy = dx \implies \frac{-1}{y} = x + C \implies y = \frac{-1}{x + C}, \quad x \neq -C,$$

这里  $C$  为任意实数。

当  $a = 1$  时除零解仍是特解外,

$$\frac{dy}{y} = dx \implies \log |y| = x + C \implies y = \pm e^{x+C},$$

于是通解为

$$y = Ce^x,$$

这里  $C$  为任意实数。

练习 2.2(P27 3) 设有微分方程

$$y' = f(y),$$

其中  $f(y)$  在  $y = a$  的某个邻域内连续, 且  $f(y) = 0$  当且仅当  $y = a$ 。证明: 对于直线  $y = a$  上任一点  $(x_0, a)$ , 该方程满足条件  $y(x_0) = a$  的解存在且唯一的充要条件为

$$\left| \int_a^{a \pm \varepsilon} \frac{1}{f(y)} dy \right| = +\infty,$$

其中  $\varepsilon$  是任意正数。

**证明** 由于  $y = a$  显然是初值问题的解, 我们只要证明  $y = a$  是唯一的解等价于反常积分发散。

一边的证明是标准的。如果反常积分发散, 且存在一个不恒为  $a$  的解  $y(x)$ , 这是一个定义在  $x_0$  邻域  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  上的  $C^1$  函数且不妨设存在  $x_1 \in (x_0, x_0 + \delta)$  使得  $y(x_1) > a$  (请注意, 这里的不妨实际上取了四种情况中的一个), 我们令

$$x_2 = \sup\{x \in [x_0, x_1] \mid y(x) = a\},$$

根据  $y(x)$  的连续性知  $x_2 < x_1$ , 并且根据  $x_2$  的定义,  $y(x)$  在  $(x_2, x_1]$  上是恒大于  $a$  的。再注意到  $f(y)$  在  $y > a$  上是不为零的 (实际上根据我们的不妨, 它是恒正的), 从而  $y'(x) = f(y(x)) > 0$  即  $y(x)$  在  $(x_2, x_1]$  上是严格递增的, 根据反函数定理,  $y(x)$  具有  $C^1$  的反函数。现在在  $(x_2, x_1]$  上我们有

$$\frac{y'(x)}{f(y(x))} = 1,$$

对两边在  $[\xi, x_1]$  上积分，其中  $\xi \in (x_2, x_1)$ ，并且利用换元得到

$$x_1 - \xi = \int_{\xi}^{x_1} 1 dx = \int_{\xi}^{x_1} \frac{y'(x)}{f(y(x))} dx = \int_{y(\xi)}^{y(x_1)} \frac{dy}{f(y)},$$

现在令  $\xi \rightarrow x_2^+$ ，上式左边极限是  $x_1 - x_2$ ，而右边是发散的，这便得到了矛盾。

为了证明另一边，我们不妨假设  $0 < \int_a^{a+\varepsilon} \frac{1}{f(y)} dy < +\infty$ 。定义函数

$$X(y) = x_0 + \int_a^y \frac{1}{f(t)} dt, \quad y \in [a, a+\varepsilon].$$

我们有  $X(y)$  在  $[a, a+\varepsilon]$  上连续，在  $(a, a+\varepsilon)$  上  $C^1$ ，并且  $X(a) = x_0$ ， $X'(y) = \frac{1}{f(y)} > 0$ 。根据反函数定理，存在  $X(y)$  的反函数  $Y(x)$  满足在  $[x_0, X(a+\varepsilon)]$  上连续，在  $(x_0, X(a+\varepsilon))$  上  $C^1$ ，并且  $Y(x_0) = a$ ，

$$Y'(x) = \frac{1}{X'(Y(x))} = f(Y(x)), \quad x \in (x_0, X(a+\varepsilon)).$$

令  $x \rightarrow x_0^+$ ，得到

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} Y'(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} f(y) = 0,$$

这表明  $Y(x)$  实际上在  $[x_0, X(a+\varepsilon)]$  上是  $C^1$  的。从而  $Y(x)$  是初值问题不恒为  $a$  的解，矛盾。

**注** 对于一般的函数  $F(x, y)$ ，我们不能认为  $F(x, y) = 0$  确定了一条过  $(x_0, y_0)$ （这里  $F(x_0, y_0) = 0$ ）的“曲线”（通常是我们要找的积分曲线），因为这里  $F$  的定义域未必是包含  $(x_0, y_0)$  的开集，我们无法直接使用隐函数定理得到结果。比如这道题中使用“分离变量后两边积分”的办法得到的函数是

$$F(x, y) = \int_a^y \frac{1}{f(t)} dt - x + x_0, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times [a, \infty),$$

方程初始条件对应的点  $(x_0, a)$  位于  $F$  定义域的边界上。我们这里的推导是高度依赖  $F$  的具体形式的。我们有下面这个经典的反例（可以参考第一次习题课讲义）：

$$y' = xf(y), \quad y(0) = 0,$$

其中

$$y(x) = \begin{cases} -\sqrt{y}, & y \geq 0 \\ \sqrt{-y}, & y < 0 \end{cases}$$

这里积分  $\int_0^y \frac{1}{f(t)} dt = -2\sqrt{|y|}$  是收敛的，于是“分离变量后两边积分”得到的函数

$$F(x, y) = \int_0^y \frac{1}{f(t)} dt - \int_0^x x dx = -2\sqrt{|y|} - \frac{1}{2}x^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

是良好定义的。但  $F(x, y) = 0$  不能确定一条过原点  $(0, 0)$  的积分曲线，因为只有一个点  $(0, 0)$  满足  $F(x, y) = 0$ 。事实上该方程满足初值  $y(0) = 0$  的解是唯一的，只有零解。

### 练习 2.3(P32 2) 求出微分方程

$$y' \sin 2x = 2(y + \cos x)$$

的当  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$  时仍有界的解。

**解** 由于问题在  $\frac{\pi}{2}$  的局部，我们先在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上求解。对于  $y(x) \in C^1((0, \frac{\pi}{2}))$  满足方程

$$\begin{aligned} &\iff y'(x) - \frac{2}{\sin x}y(x) = \frac{2 \cos x}{\sin 2x} \\ &\iff \left( e^{-\int_{\pi/4}^x \frac{2}{\sin 2s} ds} y(x) \right)' = e^{-\int_{\pi/4}^x \frac{2}{\sin 2s} ds} \cdot \frac{2 \cos x}{\sin 2x} \\ &\iff \left( \frac{y(x)}{\tan x} \right)' = \frac{\cos x}{\sin^2 x} \\ &\iff y(x) = \tan x \left( C + \int_{\pi/4}^x \left( -\frac{1}{\sin s} \right)' ds \right) \\ &\iff y(x) = C \tan x - \frac{1}{\cos x}, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

易见只有  $C = 1$  时才能保证  $y(x)$  在  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$  时有界 (此时  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} y(x) = 0$ )。

同理，在  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  上求解，得到相同的表达式。上面的计算表明，题目中要求的解限制在  $\frac{\pi}{2}$  的一个空心邻域内一定形如

$$y(x) = \tan x - \frac{1}{\cos x}.$$

不难验证，如果补充定义  $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ ，则得到的在  $\frac{\pi}{2}$  邻域内定义的解  $y(x)$  是  $C^1$  的。综上，我们得到题目中要求的解在  $\frac{\pi}{2}$  的一个邻域内一定是

$$y(x) = \begin{cases} \tan x - \frac{1}{\cos x}, & x \text{ near } \frac{\pi}{2}, x \neq \frac{\pi}{2} \\ 0, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

**练习 2.4(P33 4)** 求出微分方程  $y' = 2y \cos^2 x - \sin x$  的周期解。

**解** 周期解一定是在  $\mathbb{R}$  上定义的解 (因为我们总考虑在一个区间上定义的解)。于是我们在  $\mathbb{R}$  上求解方程：对于  $y(x) \in C^1(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} &\iff \left( e^{-\int_0^x 2 \cos^2 s ds} y(x) \right)' = -e^{-\int_0^x 2 \cos^2 s ds} \sin x \\ &\iff e^{-x - \frac{\sin 2x}{2}} y(x) = C - \int_0^x e^{-s - \frac{\sin 2s}{2}} \sin s ds \\ &\iff y(x) = e^{x + \frac{\sin 2x}{2}} \left( C - \int_0^x e^{-s - \frac{\sin 2s}{2}} \sin s ds \right), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

下面我们断言如下事实：对于满足解的局部唯一性的 (比如  $f$  对于  $y$  是局部 Lipschitz 的) 方程  $y' = f(x, y)$ ，其中  $f$  对于  $x$  以  $\omega$  为周期，即  $f(x + \omega, y) = f(x, y)$ ，对任意的  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 。那么方程的任一周期解  $y(x) \in C^1(\mathbb{R})$  一定也以  $\omega$  为周期。

上述事实的证明： 假设  $y(x)$  是一个周期解， $y(x + \omega)$  也是解。由于周期解  $y(x)$  的最大最小值一定能被取到，即存在  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  使得

$$y(x_1 + \omega) \leq y(x_1), \quad y(x_2 + \omega) \geq y(x_2).$$

于是存在  $x_3 \in \mathbb{R}$  使得

$$y(x_3 + \omega) = y(x_3).$$

根据解的唯一性知  $y(x + \omega) = y(x)$ ，对于任意的  $x \in \mathbb{R}$ 。

回到本题，根据上面的事实，我们只要求  $y(x)$  以  $2\pi$  为周期，即

$$y(x + 2\pi) = y(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

而这又等价于

$$y(2\pi) = y(0).$$

于是我们可以确定

$$C = e^{2\pi} \left( C - \int_0^{2\pi} e^{-s-\frac{\sin 2s}{2}} \sin s ds \right),$$

即

$$C = \frac{1}{1 - e^{-2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-s-\frac{\sin 2s}{2}} \sin s ds.$$

综上，方程的周期解为

$$y(x) = e^{x+\frac{\sin 2x}{2}} \left( \frac{1}{1 - e^{-2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-s-\frac{\sin 2s}{2}} \sin s ds - \int_0^x e^{-s-\frac{\sin 2s}{2}} \sin s ds \right).$$

**注** (1) 如果我们要求  $y(0) = y(2\pi n)$ , 可以得到

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi n}} \int_0^{2\pi n} e^{-s-\frac{\sin 2s}{2}} \sin s ds \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi n}} \sum_{k=1}^n \int_{2\pi(k-1)}^{2\pi k} e^{-s-\frac{\sin 2s}{2}} \sin s ds \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi n}} \sum_{k=1}^n e^{-2\pi(k-1)} \int_0^{2\pi} e^{-s-\frac{\sin 2s}{2}} \sin s ds \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi n}} \frac{1 - e^{-2\pi n}}{1 - e^{-2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-s-\frac{\sin 2s}{2}} \sin s ds \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-s-\frac{\sin 2s}{2}} \sin s ds. \end{aligned}$$

得到的结果相同。

(2) 在 (1) 中令  $n \rightarrow \infty$ , 可以得到 (容易验证下面的反常积分存在)

$$C = \int_0^\infty e^{-s-\frac{\sin 2s}{2}} \sin s ds.$$

于是解也可以被表达为

$$y(x) = e^{x+\frac{\sin 2x}{2}} \int_x^\infty e^{-s-\frac{\sin 2s}{2}} \sin s ds.$$

(3) 两个周期函数之和未必是周期函数 (当然, 当它们周期相同时显然是对的)。事实上可以证明: 对于周期分别为  $T_1$  和  $T_2$  的连续函数  $f_1(x)$  和  $f_2(x)$ , 如果  $\frac{T_1}{T_2} \notin \mathbb{Q}$  并且它们不具有相同的正周期, 那么  $f_1 + f_2$  一定不是非常值的周期函数。

上述结论的证明: 留作习题 hhh。

✎ **练习 2.5(P33 5)** 假设连续函数  $f(t)$  满足  $|f(t)| \leq M$ ,  $t \in \mathbb{R}$ 。证明: 微分方程

$$\frac{dx}{dt} + x = f(t)$$

在  $-\infty < t < +\infty$  上只有一个有界解; 进一步, 如果  $f(t)$  是周期函数, 那么这个有界解也是周期的。

**证明** 有界解一定是(可以)定义在  $\mathbb{R}$  上的。对于  $y(x) \in C^1(\mathbb{R})$  满足方程

$$\begin{aligned} &\iff \frac{d}{dt}(e^t x(t)) = e^t x(t) \\ &\iff x(t) = e^{-t} \left( C + \int_0^t e^s f(s) ds \right), \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$x(t)$  有界的必要条件是：当  $t \rightarrow -\infty$  时(容易验证下面的反常积分存在)，

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_0^t e^s f(s) ds = - \int_{-\infty}^0 e^s f(s) ds = -C$$

即

$$C = \int_{-\infty}^0 e^s f(s) ds.$$

实际上这个条件也是充分的：

$$|x(t)| \leq e^{-t} \int_{-\infty}^t e^s M ds = M.$$

故唯一的有界解就是

$$x(t) = e^{-t} \int_{-\infty}^t e^s f(s) ds.$$

如果  $f(t)$  以  $\omega$  为周期，那么

$$x(t + \omega) = e^{-t - \omega} \int_{-\infty}^{t + \omega} e^s f(s) ds = e^{-t - \omega} \int_{-\infty}^t e^{s + \omega} f(s) ds = x(t).$$

即上述有界解也以  $\omega$  为周期。

另外一种不解方程的做法是设  $x_1(t), x_2(t)$  是两个有界解，则  $x_1(t) - x_2(t)$  满足

$$\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} + (x_1 - x_2) = 0.$$

这个一阶线性方程的解要么恒为零，要么无界，于是  $x_1(t) = x_2(t)$ ，即有界解唯一。

当  $f(t)$  以  $\omega$  为周期时， $x(t + \omega)$  也是解，于是  $x(t + \omega) - x(t)$  也满足

$$\frac{d(x(t + \omega) - x(t))}{dt} + (x(t + \omega) - x(t)) = 0.$$

同样的论证表明  $x(t + \omega) = x(t)$ ，即上述有界解  $x(t)$  也以  $\omega$  为周期。

### 练习 2.6(P96 2) 求初值问题

$$\frac{dy}{dx} = x + y + 1, \quad y(0) = 0$$

的 Picard 序列，并由此取极限求解。

**解** 写出 Picard 序列，

$$y_0(x) = 0,$$

$$y_1(x) = \int_0^x s + 0 + 1 ds = x + \frac{x^2}{2},$$

$$y_2(x) = \int_0^x s + \left( s + \frac{s^2}{2} \right) + 1 ds = \left( x + \frac{x^2}{2} \right) + \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right),$$

$$y_3(x) = \int_0^x s + \left( s + \frac{s^2}{2} \right) + \left( \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6} \right) + 1 ds = \left( x + \frac{x^2}{2} \right) + \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right) + \left( \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right),$$

$$y_{n+1}(x) = \int_0^x s + y_n(s) + 1 ds.$$

于是我们可以归纳证明

$$\begin{aligned} y_n(x) &= \left( x + \frac{x^2}{2} \right) + \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right) + \left( \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right) + \cdots + \left( \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right) \\ &= 2 \left( 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right) - 2 - x + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

对于任意的紧区间  $[-M, M] \subset \mathbb{R}$ , 上式第一项一致收敛到  $2e^x$ , 最后一项一致收敛到 0, 即  $\{y_n\}_{n \geq 1} \subset C(\mathbb{R})$  紧一致收敛到  $y(x) = 2e^x - x - 2$ 。在 Picard 序列的定义式中取极限便可以验证  $y(x)$  是方程在  $[-M, M]$  上的解, 这里  $M > 0$  是任意的, 于是  $y(x)$  便是原方程在  $\mathbb{R}$  上的解。

**注** 你能够直接用 Picard 定理的结论来说明  $\{y_n\}_{n \geq 1}$  紧一致收敛到方程的解吗?

**练习 2.7(P96 3)** 在定理 3.1 中, 将函数  $f(x, y)$  的条件用下面的条件替代:

$$\begin{aligned} |f(x, y)| &\leq k(x)(1 + |y|), \\ |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &\leq k(x)|y_1 - y_2|, \end{aligned}$$

其中  $k(x)$  是可积函数。假设  $f(x, y)$  是连续函数。证明: 存在区间  $x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$ , 使得 Picard 序列一致收敛到 Cauchy 问题 (3.1), (3.2) 的解。

**证明** 区间的选取首先要使得 Picard 序列有定义。沿用定理 3.1 中的记号, 首先选取  $\alpha$  使得

$$\int_{x_0}^{x_0+\alpha} k(s) ds < \frac{b}{1 + |y_0| + b}.$$

下面我们来证明: 区间  $[x_0, x_0 + \alpha]$  上的 Picard 序列一定落在矩形区域当中。首先对于  $y_0(x) = y_0$  这是显然的。假设  $y_{n-1}$  在  $[x_0, x_0 + \alpha]$  上始终满足  $|y_{n-1}(x) - y_0| \leq b$ , 那么

$$|y_n(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^x |f(s, y_{n-1}(s))| ds \leq \int_{x_0}^x k(s)(1 + |y_0| + b) ds \leq b,$$

于是在区间  $[x_0, x_0 + \alpha]$  上, Picard 序列是良好定义的。

下面我们来证明 Picard 序列的一致收敛性。

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(x) - y_n(x)| &\leq \int_{x_0}^x |f(s, y_n(s)) - f(s, y_{n-1}(s))| ds \\ &\leq \int_{x_0}^x k(s)|y_n(s) - y_{n-1}(s)| ds \\ &\leq \int_{x_0}^x k(s) \int_{x_0}^s k(t)|y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| dt ds \\ &\leq \cdots \\ &\leq \int_{x_0}^x k(s_1) \int_{x_0}^{s_1} k(s_2) \cdots \int_{x_0}^{s_{n-1}} k(s_n) |y_1(s_n) - y_0| ds_n \cdots ds_2 ds_1 \\ &\leq \frac{b}{n!} \left( \int_{x_0}^{x_0+\alpha} k(s) ds \right)^n. \end{aligned}$$

于是

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|y_{n+1} - y_n\|_{L^\infty([x_0, x_0+\alpha])} < \infty,$$

从而根据  $(C([x_0, x_0 + \alpha]), \|\cdot\|_{L^\infty([x_0, x_0+\alpha])})$  的完备性,  $\{y_n\}_{n \geq 0}$  一致收敛, 且极限是初值问题的解(利用  $f(x, y)$  在紧集上的一致连续性)。

**注** (0) 题目中的“可积”指的是 Lebesgue 可积，而不是 Riemann 可积，从而  $k(x)$  不必(在任意小区间内)有界。Lebesgue 可积的定义是  $\int_{\mathbb{R}} |k(x)| ds < \infty$ ，事实上我们可以证明(利用 Borel-Cantelli 引理)Lebesgue 可积函数在小区间上的积分可以充分小，即对于任意的  $\varepsilon > 0$ ，存在  $\delta > 0$ ，使得对任意的  $x_0 \in \mathbb{R}$ ，我们有  $\int_{x_0}^{x_0+\delta} |k(x)| dx < \varepsilon$ 。Lebesgue 积分理论是一套与 Riemann 积分理论平行的理论，在这套理论下可以做积分操作的函数类更广，积分与极限之间的关系更和谐，并且保留了我们对积分的一些基本要求，比如积分算子  $\int$  仍然是一个连续线性泛函。此外，Lebesgue 积分理论相对 Riemann 积分理论的明显优势是在高维空间  $\mathbb{R}^n$  做积分时更加自由，而 Riemann 积分会被“集合的几何”所束缚住。此外，Lebesgue 积分可以容易地推广到一般的抽象测度空间(比如概率空间等等)以及在任意 Banach 空间中取值的测度(比如谱投影等等)，因此 Lebesgue 积分理论也被称作抽象积分理论。值得一提的是，这种对积分的推广并不是毫无意义的抽象游戏，利用积分的思想(来自于 Newton 时期对函数图像下方面积的计算)，我们可以解决更多的问题，比如我们可以在 Lebesgue 积分框架下把级数求和化归为一种积分，把某种分布频率的信息化为一种积分(一个例子是 Weyl 等分布定理，大家可以参考柳斌书的 8.4 节)，从而可以将积分里发展的技术(比如分部积分、微积分基本定理)迁移到其他的问题上。

(1) 如果你不想始终担心  $y_n$  是否会跑出  $f(x, y)$  的定义区域，也就是定理 3.1 中的矩形区域，可以将  $f$  延拓成  $[x_0 - a, x_0 + a] \times \mathbb{R}$  上的连续函数，

$$\bar{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y_0 + b), & y > b \\ f(x, y), & y_0 - b \leq y \leq y_0 + b \\ f(x, y_0 - b), & y < y_0 - b \end{cases}$$

这里延拓后的  $\bar{f}$  仍然满足 Lipschitz 或者是本题中的第二个条件(第一个条件在差一个常数倍下也满足)。这样我们就可以直接定义 Picard 序列，然后再去验证 Picard 序列是落在原来的矩形区域之中的。

(2) 由于这里题目中并没有要求区间的长度，我们有无穷多种放缩的方式。比如要求  $\int_{x_0}^{x_0+\alpha} k(s) ds < 1$ ，然后把所有的  $|y_n(s) - y_{n-1}(s)|$  放缩成  $\left(\int_{x_0}^{x_0+\alpha} k(s) ds\right)^n (1 + |y_0|)$ ，然后利用等比级数求和来完成一致收敛性的证明。

(3) 题目中的第一个条件是可以去掉的，这时我们直接用  $L^\infty$  范数做放缩

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \int_{x_0}^{x_0+\alpha} k(s) |y_n(s) - y_{n-1}(s)| ds \leq \left( \int_{x_0}^{x_0+\alpha} k(s) ds \right) \|y_n - y_{n-1}\|_{L^\infty([x_0, x_0+\alpha])},$$

选取  $\alpha$  使得  $\int_{x_0}^{x_0+\alpha} k(s) ds < 1$  即可。而且我们在上一次习题课中已经看到，这里区间长度的选取不是本质的，因为我们可以换一个“压缩范数”来弥补区间长度的不足。

(4) 如果  $k(s)$  不可积怎么办？可以参考下面关于 Rosenblatt 条件的例题。

## 2.2.2 补充习题

下面的 7 道例题中，1-3 题是基础题目的补充(1-2 题是作业题)，大家只需要掌握这些题目。第 4 题我们讨论椭圆方程的径向解，本质上是常微分方程问题，需要的主要技术来自数学分析，在后半学期学习 Laplace 方程的基本解时我们也会做类似的计算。第 5-6 题是常微分方程的有趣应用举例，其中第 6 题关于反函数定理的证明是标准的。第 7 题探究了常微分方程的解集结构，其中三小问的计算是基本的，注记里的内容仅供感兴趣的同学阅读。

### 问题 2.1(Rosenblatt 条件)

考虑初值问题

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = y_0,$$

其中函数  $f(x, y)$  在闭区域  $0 \leq x \leq a, -\infty < y < +\infty$  上连续，且满足

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq \frac{q}{x} |y - z|,$$

这里  $q$  ( $0 < q < 1$ ) 为常数。证明：该初值问题的解在区间  $[0, a]$  上是存在且唯一的。

**证明** 首先我们证明唯一性：假设存在两个  $[0, a]$  上的解  $y_1(x), y_2(x) \in C^1([0, a])$ ，我们要证明  $y_1(x) = y_2(x), x \in [0, a]$ 。

假设存在  $x_0 \in (0, a)$ ,  $y_1(x_0) \neq y_2(x_0)$ , 那么我们找到最后一次相遇的地方  $x_1 = \sup\{x \in [0, x_0] \mid y_1(x) = y_2(x)\}$ . 根据  $y_1(x), y_2(x)$  的连续性,  $0 \leq x_1 < x_0$ .  $x_1 > 0$  的情况很容易, 因为  $f(x, y)$  在远离  $x = 0$  的地方已经是 Lipschitz 了, 可以直接用 Picard 定理的唯一性部分导出矛盾, 细节留给大家完成。下面我们考虑  $x_1 = 0$  的情形, 也就是对任意的  $0 < x < x_0$ ,  $y_1(x) \neq y_2(x)$ 。

这里关键的观察是  $y_1(s) - y_2(s)$  在  $[0, a]$  上是  $C^1$  的且在 0 处为 0, 于是  $\frac{1}{s}(y_1(s) - y_2(s))$  也是  $[0, a]$  上的连续函数。于是根据方程, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{|y_1(x) - y_2(x)|}{x} &\leq \frac{1}{x} \int_0^x |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| ds \\ &\leq \frac{1}{x} \int_0^x q \frac{|y_1(s) - y_2(s)|}{s} ds \\ &\leq \frac{q}{x} \int_0^x \sup_{s \in [0, a]} \frac{|y_1(s) - y_2(s)|}{s} ds \\ &= q \sup_{s \in [0, a]} \frac{|y_1(s) - y_2(s)|}{s} \end{aligned}$$

再在左边取 sup, 就得到了

$$\sup_{x \in [0, a]} \frac{|y_1(x) - y_2(x)|}{x} \leq q \sup_{x \in [0, a]} \frac{|y_1(x) - y_2(x)|}{x},$$

由于  $q < 1$ , 这表明  $y_1(x)$  和  $y_2(x)$  在区间  $[0, a]$  上只能恒等!

有许多同学希望利用 Gronwall 不等式直接证明解的唯一性, 也就是

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq \int_0^x \frac{q}{s} |y_1(s) - y_2(s)| ds, \quad x \in [0, a]$$

然后直接用 Gronwall 不等式, 得到

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq 0 \cdot e^{\int_0^x \frac{1}{s} ds} = 0.$$

上面红色等号成立的原因是什么? (同学们可以尝试, 即使你在  $\delta > 0$  处截断去估计, 依旧证不出来为 0)。不过, 其实这里等于 0 的结论是对的, 但需要重新证明! 我们令

$$F(x) = \int_0^x \frac{q}{s} |y_1(s) - y_2(s)| ds,$$

于是得到微分不等式

$$F'(x) \leq \frac{q}{x} F(x), \quad x \in (0, a] \iff (x^{-q} F(x))' \leq 0, \quad x \in (0, a].$$

于是

$$x^{-q} F(x) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-q} \int_0^\varepsilon \frac{q}{s} |y_1(s) - y_2(s)| ds = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1-q} \left( \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \frac{q}{s} |y_1(s) - y_2(s)| ds \right) = 0.$$

注意最后一个等号用到了大括号里面是有界的并且  $q < 1$ ! 这样就说明了  $F(x) = 0, x \in [0, a]$ , 从而  $y_1(x) = y_2(x), x \in [0, a]$ 。

存在性的证明也有很多，首先上面的计算实际上表明了

$$T : B \rightarrow B, \quad y \mapsto (Ty)(x) = \int_0^x f(s, y(s)) \, ds$$

在范数  $\|y\| = \sup_{x \in [0, a]} |\frac{y(x)}{x}|$  下是压缩映射 (压缩系数是  $q < 1$ )，其中  $B = \{y \in C([0, a]) \mid \|y\| < \infty\}$ ，这是一个 Banach 空间 (请验证这一点！)。于是当  $y_0 = 0$  时，利用 Banach 不动点定理就得到了存在唯一性。这里要求  $y_0 = 0$  是因为  $B$  中的函数一定满足  $y(0) = 0$ ，对于一般的初值  $y_0 \in \mathbb{R}$ ，把  $f(x, y)$  替换成  $f(x, y_0 + y)$ ，再把得到的解  $y(x) \in B$  加上  $y_0$  就是原初值问题的解。

也可以使用解的延伸定理证明存在性。根据延伸定理 (实则糅合了 Peano 定理)，存在区间  $I \subset [0, a]$  上的解  $y(x)$ ，满足  $y(x)$  的图像

$$\Gamma(y) = \{(x, y) \in D = [0, a] \times \mathbb{R} \mid y = y(x)\}$$

不落在  $D$  的任意紧集之中。下面我们证明这个解的定义区间一定是全区间  $[0, a]$ 。

如若不然，假设这个解的定义区间是  $I = [0, x_0) \subset [0, a]$  (为什么我们不考虑  $I$  是闭区间的情况？)，我们要说明  $y(x)$  在这个区间上是有界的，从而  $\Gamma(y)$  落在  $D$  的一个紧集之中，与  $y(x)$  的选取矛盾。一般情况下我们要证明方程的解是有界/无界的，可以考虑使用 Gronwall 不等式控制解的增长。这里我们有

$$\begin{aligned} |y(x)| &\leq |y(\delta)| + \int_{\delta}^x |f(s, y(s))| \, ds \\ &\leq |y(\delta)| + \int_{\delta}^x |f(s, y(s)) - f(s, 0)| + \int_{\delta}^x |f(s, 0)| \, ds \\ &\leq \left( |y(\delta)| + \int_0^a |f(s, 0)| \, ds \right) + \int_0^x \frac{q}{\delta} |y(s)| \, ds \end{aligned}$$

其中  $0 < \delta < x_0$  是一个固定的数使得当  $x < \delta$  时  $|y(x)|$  是有界的 (注意上面的式子是在  $x \geq \delta$  时成立的)。利用 Gronwall 不等式，便得到了

$$|y(x)| \leq \left( |y(\delta)| + \int_0^a |f(s, 0)| \, ds \right) e^{\frac{q}{\delta} x}, \quad x \in [0, x_0]$$

从而就证明了  $y(x)$  在  $[0, x_0)$  是有界的。

**注** (1) 如果  $y(x)$  的存在区间是  $[0, a)$  怎么办？上面的证明有什么问题？

(2) 使用 Picard 迭代也可以证明  $[0, a]$  上解的存在性，请大家自行尝试。

## 问题 2.2(解从开区间到闭区间的延伸)

假设函数  $f(x, y)$  在闭区域  $0 \leq x \leq a, -\infty < y < +\infty$  上连续。记  $\phi(x, \xi)$  是微分方程  $y' = f(x, y)$  满足初始条件  $\phi(0, \xi) = \xi$  的解。进一步，假设  $\phi(x, \xi)$  在区间  $[0, \bar{x})$  上存在， $\bar{x} < a$ 。证明下列三个结论之一成立：

- (1)  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}-0} \phi(x, \xi)$  有限，此时解  $y = \phi(x, \xi)$  可以延伸至  $x = \bar{x}$ ；
- (2)  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}-0} \phi(x, \xi) = +\infty$ ；
- (3)  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}-0} \phi(x, \xi) = -\infty$ 。

**证明** 我们先考虑  $\phi$  在  $[0, \bar{x})$  上有界的情形，假设它的图像落在  $[0, \bar{x}] \times [-b, b]$  中，其中  $b$  是一个很大的正数，那么  $f(x, y)$  在上面是有界的，记

$$M = \sup_{(x,y) \in [0, \bar{x}] \times [-b, b]} |f(x, y)|.$$

于是,  $\phi$  在  $[0, \bar{x}]$  上是一致连续 (Lipschitz 连续) 的:

$$|\phi(x_1) - \phi(x_2)| \leq \int_{x_1}^{x_2} M dx = M|x_1 - x_2|.$$

于是极限  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} \phi(x)$  存在 (利用 Cauchy 收敛准则), 我们就把这个极限定义为  $\phi$  在  $\bar{x}$  处的值, 这样就把  $\phi$  延拓到了  $[0, \bar{x}]$  上。这样得到的延拓自然是连续的, 而且还是  $C^1$  的, 因为  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} \phi'(x) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x, \phi(x)) = f(\bar{x}, \phi(\bar{x}))$  极限存在 (你应该知道如何从此看出  $\phi$  在  $[0, \bar{x}]$  上是  $C^1$  的)。

下面我们证明, 如果当  $x \rightarrow \bar{x}^-$  时,  $\phi(x)$  既不趋于正无穷、也不趋于负无穷, 那么它是有界的。根据我们的假设, 存在  $B > 0$  使得  $\phi$  的图像会反复进入  $[0, \bar{x}] \times [-B, B]$  中, 仔细来说, 对于任意的  $\delta > 0$ , 存在  $x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x})$ , 使得  $\phi(x) \in [-B, B]$ 。我们记

$$M_{2B} = \sup_{(x,y) \in [0, \bar{x}] \times [-2B, 2B]} |f(x, y)|,$$

并且取  $\delta = \frac{B}{M_{2B}}$ , 我们找到这个  $x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x})$ , 使得  $\phi(x) \in [-B, B]$ 。但是对于任意的  $y \in (x, \bar{x})$ ,  $\phi(y) \in [-2B, 2B]$  (为什么? 请用反证法/比较定理写清楚), 这就说明  $\phi$  是有界的。

**注** 这道题不需要使用延伸定理。延伸定理的作用是给出了定义在极大 (当方程有局部唯一性的时候实际上是最大) 区间上解的特征, 也就是解的图像不会停留在定义域  $D$  的任意一个紧集之中 (黑话: 延伸到边界)。而定义在极大区间上的解的存在性是平凡的, 我们用 Zorn 引理构造就可以了 (当方程有局部唯一性的时候不需要 Zorn 引理)。

### 问题 2.3(22 赵班, mid)

考虑方程  $\frac{dx}{dt} = k(t) - x^2$ , 其中  $k(t)$  是  $\mathbb{R}$  上的连续函数, 且  $1 \leq k(t) \leq 2$ 。

(a) 证明: 若  $x(0) \geq 0$ , 则解在  $[0, +\infty)$  上存在。

(b) 若  $x_1(0) \geq 0$ ,  $x_2(0) \geq 0$ , 证明:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x_1(t) - x_2(t)| = 0.$$

**证明** (a) 根据解的延伸定理, 存在方程的解  $x(t)$  满足  $x(0) = 0$ , 并且它的图像不落在  $\mathbb{R}^2$  中的任何一个紧集之中。假设  $x(t)$  的存在区间是  $[0, a)$ , 其中  $a < +\infty$ 。我们等下证明: 存在  $M > 0$ , 使得在存在区间  $[0, a)$  上,  $0 \leq x(t) \leq M$ , 于是  $x(t)$  的图像落在了  $[0, a] \times [0, M]$  之中, 而这是一个  $\mathbb{R}^2$  中的紧集, 矛盾! 于是  $x(t)$  的存在区间是  $[0, +\infty)$ 。

现在我们证明可以取  $M = \max\{x(0) + 1, 2\}$ 。如果存在  $t_1 > 0$ , 使得  $x(t_1) > M$ , 令

$$t_2 = \inf\{t \in [0, t_1] \mid x(t) \geq M\},$$

很明显  $0 < t_2 < t_1$ ,  $x(t_2) = M$ , 并且当  $t < t_2$  时,  $x(t) \leq M$ , 于是

$$x'(t_2) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{x(t_2) - x(t_2 - h)}{h} \geq 0,$$

但是根据方程

$$x'(t_2) = k(t_2) - (x(t_2))^2 \leq 2 - 4 = -2,$$

这就得到了矛盾!  $x(t) \geq 0$  的证明也是类似的, 请同学们自行完成。

(b) 由于  $f(t, x) = k(t) - x^2$  在  $\mathbb{R}^2$  上有连续的对  $x$  偏导数, 于是方程的解具有唯一性, 所以我们不妨假设  $x_1(t) > x_2(t)$ , 对任意的  $t \geq 0$ 。此时我们观察  $x_1(t) - x_2(t)$  满足的方程

$$\frac{d}{dt}(x_1(t) - x_2(t)) = (x_2(t))^2 - (x_1(t))^2 = (x_1(t) + x_2(t))(x_2(t) - x_1(t)).$$

经过分析可以知道存在  $\varepsilon > 0$ , 使得对于充分大的  $t > 0$ , 有  $x_1(t) + x_2(t) > \varepsilon$ , 这就得到

$$\frac{d}{dt}(x_1(t) - x_2(t)) \leq -\varepsilon(x_1(t) - x_2(t)),$$

这就说明了  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x_1(t) - x_2(t)| = 0$ 。

## 2.3 补充内容

### 问题 2.4( $\mathbb{R}^n$ 中椭圆方程的径向解)

在这个题目中, 我们希望证明(非线性)椭圆方程在  $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq R\} \subset \mathbb{R}^n$  中的径向解是存在唯一的, 即存在唯一的径向函数  $u \in C^2(B_R)$  满足方程

$$\Delta u = f(|x|, u), \quad u(0) = u_0,$$

其中  $f(r, z)$  是定义在  $[0, R] \times \mathbb{R}$  上的连续函数, 并且对  $z \in \mathbb{R}$  满足 Lipschitz 条件。所谓  $u$  是径向函数指的是对任意的  $g \in \mathbf{O}(n)$  (一般正交群), 都有  $u(g \cdot x) = u(x)$ 。

(1) 证明: 对任意的  $x \in \mathbb{R}^n$ , 存在  $g \in \mathbf{O}(n)$ , 使得  $g \cdot x = (|x|, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ 。

(2) 证明: 对于  $B_R$  上的径向函数  $u$ , 存在唯一的  $[0, R]$  上的函数  $y$ , 使得  $u(x) = y(|x|)$ , 对任意的  $x \in B_R$ 。

于是我们要寻找的径向解  $u$  就与一个  $[0, R]$  上的函数  $y$  相对应, 下面我们还要对应它们的正则性。

(3) 证明: 对于  $B_R$  上  $C^2$  的径向函数  $u \in C^2(B_R)$ , 它对应的  $[0, R]$  上的函数也是  $C^2$  的, 即  $y \in C^2([0, R])$  且满足  $y'(0) = 0$ 。

(4) 证明: 对于  $[0, R]$  上的函数  $y \in C^2([0, R])$ , 如果  $y'(0) = 0$ , 那么它对应的径向函数  $u \in C^2(B_R)$ 。

于是我们要寻找的  $C^2$  径向解  $u \in C^2(B_R)$  就与一个  $[0, R]$  上的  $C^2$  函数  $y \in C^2([0, R])$  相对应, 下面我们还要对应它们满足的方程。

(5) 证明: 对于径向解  $u(x) = y(|x|)$ , 关于  $u \in C^2(B_R)$  的椭圆方程

$$\Delta u = f(|x|, u), \quad u(0) = u_0$$

等价于关于  $y \in C^2([0, R])$  的常微分方程(我们用  $r$  表示  $y$  的定义域  $[0, R]$  上的坐标)

$$y'' + \frac{n-1}{r}y' = f(r, y), \quad y'(0) = 0, \quad y(0) = u_0.$$

值得注意的是, 这是一个奇异初值问题, 也就是在  $r = 0$  处方程本身是没有定义的。

(6) 证明: 上面关于  $y \in C^2([0, R])$  的二阶常微分方程等价于一个关于  $y \in C([0, R])$  的如下形式的积分方程

$$y(r) = u_0 + \int_0^r k(r, s)f(s, y(s)) ds.$$

其中“核函数”  $k(r, s)$  是一个定义在三角形区域  $0 \leq s \leq r \leq R$  上的连续函数。

(7) 我们研究如下的 Volterra 积分方程。设  $K(r, s, z)$  是定义在  $0 \leq s \leq r \leq a$ ,  $z \in \mathbb{R}$  上的连续函数, 并且满足关于  $z \in \mathbb{R}$  的 Lipschitz 条件

$$|K(r, s, z_1) - K(r, s, z_2)| \leq L|z_1 - z_2|.$$

证明: Volterra 积分方程

$$y(r) = y_0 + \int_0^r K(r, s, y(s)) ds$$

存在唯一的定义在  $[0, a]$  上的解  $y \in C([0, a])$ 。

- (8) 验证 (6) 中得到的积分方程就是一个 Volterra 型方程，再利用 (7) 的结论，证明 (6) 中的积分方程存在唯一的解  $y \in C([0, R])$ ，进而完成证明。

### 证明

- (1) 这是显然的。(你需要利用一个线性代数的结论：一个模长为 1 的行向量可以被扩充成一个正交矩阵。)
- (2) 定义  $y(x) = u(x, 0)$ ，其中  $x \in [0, R]$ 。根据 (1)，对于任意的  $x \in B_R$ ， $y(|x|) = u(|x|, 0) = u(g \cdot x) = u(x)$ 。唯一性是显然的。
- (3)  $y \in C^2([0, R])$  是显然的。

$$y'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x, 0) - u(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(-x, 0) - u(0)}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x, 0) - u(0)}{-x}$$

其中最后一个等号处使用了  $u(x, 0) = u(-x, 0)$ 。于是  $y'(0) = 0$ 。

- (4) 注意到  $u$  在  $B_R$  上是  $x \mapsto \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  与  $y$  的复合，于是  $u \in C(B_R)$ ，并且  $u \in C^2(B_R - \{0\})$ 。下面我们要证明  $u \in C^2(B_R)$ 。在  $B_R - \{0\}$  上，我们有(用  $r$  表示  $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ )

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = y'(r) \frac{x_i}{r}.$$

可见当  $x \rightarrow 0$  时， $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \rightarrow 0$  (因为  $y'(0) = 0$ )。这就表明  $y \in C^1(B_R)$  (为什么?)。类似地，在  $B_R - \{0\}$  上，我们有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{y'(r)}{r} \delta_{ij} + \left( y''(r) - \frac{y'(r)}{r} \right) \frac{x_i x_j}{r^2}.$$

可见当  $x \rightarrow 0$  时， $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \rightarrow y''(0) \delta_{ij}$  (注意到根据  $y'(0) = 0$ ，我们有  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{y'(r)}{r} = y''(0)$ ，所以后面那项趋于 0)。这就表明  $y \in C^2(B_R)$  (为什么?)。

- (5) 如果  $u \in C^2(B_R)$  满足椭圆方程，且  $u(x) = y(|x|) = y(r)$ ，那么

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = y''(r) + \frac{y'(r)}{r} (n-1) = f(r, y(r)), \quad r \in (0, R]$$

$y(0) = u(0) = u_0$ ,  $y'(0) = 0$  已经在 (3) 中证过。

反之，如果  $y \in C^2([0, R])$  满足

$$y'' + \frac{n-1}{r} y' = f(r, y), \quad y'(0) = 0, \quad y(0) = u_0.$$

那么在  $x \in B_R - \{0\}$  上有  $\Delta u(x) = f(|x|, u(x))$  (还是上面的计算)。在  $x = 0$  处，我们对上面的计算式取  $x \rightarrow 0$  的极限即得

$$\Delta u(0) = f(0, u_0) = f(0, u(0)).$$

- (6) 如果  $y \in C^2([0, R])$  满足微分方程，那么

$$r^{1-n} (r^{n-1} y'(r))' = y''(r) + \frac{n-1}{r} y'(r) = f(r, y(r)).$$

于是积一次分可以得到

$$r^{n-1} y'(r) = \int_0^r s^{n-1} f(s, y(s)) ds,$$

其中我们利用了  $\lim_{r \rightarrow 0} r^{n-1} y'(r) = 0$ 。再积一次分得到

$$y(r) = u_0 + \int_0^r t^{1-n} \int_0^t s^{n-1} f(s, y(s)) ds dt,$$

其中我们利用了  $\left| t^{1-n} \int_0^t s^{n-1} f(s, y(s)) \right| \leq \int_0^t |f(s, y(s))| ds$  作为  $t$  的函数是有界的。下面我们交换积分次序，得到

$$y(r) = u_0 + \int_0^r s^{n-1} f(s, y(s)) \int_s^r t^{1-n} dt ds,$$

可见对应于  $k(r, s) = s^{n-1} \int_s^r t^{1-n} dt$  的 Volterra 积分方程（请大家自己验证  $k(r, s)$  是  $0 \leq s \leq r \leq R$  上的连续函数）。

反之，如果  $y \in C([0, R])$  满足积分方程，我们容易得到  $y \in C^2((0, R])$  以及  $y(0) = u_0$ ，下面的关键是证明  $y \in C^2([0, R])$  并且  $y'(0) = 0$ 。首先对积分方程求一次导得到

$$r^{n-1} y'(r) = \int_0^r s^{n-1} f(s, y(s)) ds, \quad r \in (0, R]$$

做换元  $s \mapsto rs$ ，得到

$$\frac{y'(r)}{r} = \int_0^1 s^{n-1} f(rs, y(rs)) ds.$$

可见当  $r \rightarrow 0$  时， $y'(r) \rightarrow 0$ ，从而  $y \in C^1([0, R])$ ， $y'(0) = 0$ ，而且  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{y'(r)}{r} = \frac{f(0, u_0)}{n}$ 。对积分方程求两次导得到对应的微分方程

$$y''(r) + \frac{y'(r)}{r} (n-1) = f(r, y(r)), \quad r \in (0, R]$$

令  $r \rightarrow 0$ ，得到

$$\lim_{r \rightarrow 0} y''(r) = \frac{f(0, u_0)}{n},$$

这就证明了  $y \in C^2([0, R])$  并且  $y''(0) = \frac{f(0, u_0)}{n}$ 。

(7) 在  $C([0, a])$  上赋予范数

$$\|y\| = \sup_{r \in [0, a]} |y(r)| e^{-2Lr},$$

于是  $(C([0, a]), \|\cdot\|)$  是一个 Banach 空间。考虑如下映射

$$T : C([0, a]) \rightarrow C([0, a]), \quad y \mapsto (Ty)(r) = y_0 + \int_0^r K(r, s, y(s)) ds.$$

这是一个压缩映射，因为

$$\begin{aligned} |(Ty_1)(r) - (Ty_2)(r)| &\leq \int_0^r |K(r, s, y_1(s)) - K(r, s, y_2(s))| ds \\ &\leq \int_0^r L |y_1(s) - y_2(s)| e^{-2Ls} e^{2Ls} ds \\ &\leq \|y_1 - y_2\| L \int_0^r e^{2Ls} ds \\ &\leq \|y_1 - y_2\| \frac{e^{2Lr}}{2}. \end{aligned}$$

于是

$$\|Ty_1 - Ty_2\| \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|.$$

利用 Banach 不动点定理，存在唯一的  $y \in C([0, a])$  使得  $Ty = y$ ，即

$$y(r) = y_0 + \int_0^r K(r, s, y(s)) ds.$$

(8) 在 (6) 中得到的积分方程对应于积分核为  $K(r, s, z) = k(r, s)f(s, z)$  的 Volterra 积分方程。其中 Lipschitz 条件来源于  $f(s, z)$  对  $z \in \mathbb{R}$  的 Lipschitz 条件以及  $k(r, s)$  的有界性。根据 (7)，这个关于

$y \in C([0, r])$  的积分方程的解是存在唯一的，于是关于  $y \in C^2([0, R])$  的微分方程的解是存在唯一的，最后关于  $u \in C^2(B_R)$  的椭圆方程的径向解是存在唯一的。

**注** (1) 一般的 Volterra 积分方程能够化为微分方程吗？乍一看来 Volterra 积分方程很不自然，因为积分核  $K$  以及积分限中都含有自变量  $x$ ，不过根据 (6) 中的计算我们知道，这里积分核中的  $x$  通常来源于将二阶微分方程化为积分方程过程中对二重积分的换序。

(2) 在 (6) 中利用 Picard 迭代也可以得到 Volterra 积分方程解的存在唯一性，请大家自行尝试。

(3) 如果我们去掉  $f(r, z)$  满足的 Lipschitz 条件，同时要求  $|f(r, z)| \leq L(r)(1 + |z|)$ ，其中  $L(r) \in C([0, a])$ ，那么利用 Peano 定理(的证明)我们也能得到  $B_R$  上径向解的存在性(要在第(7)步中用 Schauder 不动点定理代替 Banach 不动点定理)。

### 问题 2.5(利用常微分方程证明恒等式)

试证明恒等式：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \binom{2n}{n}} = \frac{\pi^2}{18}.$$

**证明** 我们把两个数相等视为两个函数在某点处的值相等，进而如果我们能证明这两个函数恒等，那么命题也就得证了。

我们令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2 \binom{2n}{n}},$$

简单的计算表明右端幂级数的收敛半径是 2，于是  $f(x)$  是一个  $B(0, 2)$  上定义的光滑函数。我们下面观察  $f(x)$  满足的微分方程。

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(2n-1)x^{2n-2}}{n^2 \binom{2n}{n} n! n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)! (n-1)! (n-1)!} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 x^{2m}}{m^2 \binom{2m}{m}}.$$

上面我们故意没有消去  $m^2$  是因为如果没有分子上的  $m^2$  那么右端就是  $1 + f(x)$  了！不过现在还差一点。我们观察到  $x \frac{d}{dx} x^{2m} = 2mx^{2m}$ ，于是

$$\left( x \frac{d}{dx} \right)^2 x^{2m} = 4m^2 x^{2m},$$

从而我们得到了  $f(x)$  满足的微分方程

$$f''(x) = 1 + \frac{1}{4} \left( x \frac{d}{dx} \right)^2 f(x) = 1 + \frac{1}{4} x^2 f''(x) + \frac{1}{4} x f'(x),$$

整理得

$$f''(x) + \frac{x}{x^2 - 4} f'(x) = \frac{4}{4 - x^2}.$$

这时一个关于  $f'(x)$  的一阶线性方程，此外初值条件是  $f'(0) = 0, f(0) = 0$ 。

直接求解这个方程，得到

$$f(x) = 2 \left( \arcsin \frac{x}{2} \right)^2,$$

代入  $x = 1$  即可。

**注** (1) 我们也可以把上面的所有函数视为  $\mathbb{C}$  上的函数，我们带入  $x = \sqrt{-1}$ ，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \binom{2n}{n}} = 2 \left( \arcsin \frac{\sqrt{-1}}{2} \right)^2 = \dots$$

你觉得这里到复数的推广有什么问题？

(2) 初值问题

$$f''(x) + \frac{x}{x^2 - 4} f'(x) = \frac{4}{4 - x^2}, \quad f'(0) = 0, \quad f(0) = 0$$

的解唯一吗？我们如何保证解出来的  $f(x)$  就是我们想要的  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2 \binom{2n}{n}}$ ？（事实上这个问题也许从复变函数的观点看会更容易回答。关于复变函数的常微分方程理论跟我们课堂上学习的基本是平行的，比如我们依然可以用相同的手段证明 Picard 存在唯一性定理，只不过要在全纯函数空间  $H(\Omega)$  上操作。等大家学习了复分析之后可以再来思考这个问题。）

(3) 我们也可以尝试用类似的方法证明 Bassel 恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

该如何定义函数  $f(x)$ ？计算过程中遇到什么问题？

### 问题 2.6(利用常微分方程证明反函数定理)

$\mathbb{R}^n$  中的反函数定理的陈述如下： $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  是一个非空开集， $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  是  $\Omega$  上的  $C^1$  映射。如果存在  $x_0 \in \Omega$  使得  $df(x_0)$  ( $f$  在  $x_0$  处的 Jacobi 矩阵) 可逆，那么存在  $x_0$  的开邻域  $U \subset \Omega$ ， $f(x_0)$  的开邻域  $V \subset \mathbb{R}^n$ ，使得  $f|_U : U \rightarrow V$  是  $C^1$  同胚。

本题中我们希望使用常微分方程的一般理论（初值问题解的存在性、唯一性、解对初值及参数的可微依赖性等）来给出反函数定理的证明。

(1) 证明： $f$  在  $x_0$  的某个邻域内是单射。

(2) 我们将映射  $f$  在  $x_0$  处局部写成（为了简化记号，我们就认为这个局部是  $\Omega$ ）

$$f(x) = y_0 + df(x_0)(x - x_0) + r(x), \quad x \in \Omega,$$

其中我们记  $f(x_0) = y_0$ 。证明： $r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  是  $C^1$  的映射， $r(x_0) = 0$ ，并且在  $x \in \Omega$  处的微分为

$$dr(x) = df(x) - df(x_0),$$

从而在  $x_0$  的附近， $dr(x)$  非常小。

(3) 证明： $r(x) = o(x - x_0)$ ，即对于任意的  $\varepsilon > 0$ ，存在  $x_0$  的邻域，使得  $r(x)$  在这个邻域上有

$$|r(x)| \leq \varepsilon |x - x_0|.$$

(4) 我们现在考虑一族函数  $\{f_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{t \in [0,1]}$ ，

$$f_t(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + t \cdot r(x), \quad x \in \Omega.$$

假设存在  $x_0$  的开邻域  $U \subset \Omega$ ， $f(x_0)$  的开邻域  $V \subset \mathbb{R}^n$ ，以及一族  $C^1$  的映射  $\{g_t : V \rightarrow U\}_{t \in [0,1]}$  使得  $f_t(g_t(y)) = y$  对任意的  $y \in V$ （也就是说  $g_t$  是相应  $f_t$  的反函数）。现在固定一个  $y \in V$ ，并且记  $g_t(y) = x(t)$ ，证明： $x(t)$  作为  $[0, 1]$  上的函数满足

$$y = y_0 + df(x_0)(x(t) - x_0) + t \cdot r(x(t)), \quad t \in [0, 1].$$

(5) 如果我们进一步假设 (4) 中的  $x(t)$  是  $C^1$  的，证明  $x(t)$  满足方程

$$(df(x_0) + t \cdot dr(x(t))) \cdot \frac{dx}{dt} = -r(x(t)), \quad x(0) = x_0 + (df(x_0))^{-1} \cdot (y - y_0).$$

根据(2)中的想法,  $dr(x(t))$  应当是很小的矩阵, 而  $df(x_0)$  是可逆的, 于是  $(df(x_0) + t \cdot dr(x(t)))$  也应该是可逆的, 从而上面的方程应该等价于

$$\frac{dx}{dt} = -(df(x_0) + t \cdot dr(x(t)))^{-1} \cdot r(x(t)), \quad x(0) = x_0 + (df(x_0))^{-1} \cdot (y - y_0).$$

至此, 我们从假设存在反函数(族)出发, 得到了不同  $t \in [0, 1]$  时  $f_t$  对应的反函数  $g_t$  在一个固定的  $y \in V$  处取值  $g_t(y) = x(t)$  应该满足的方程。下面我们希望证明这个方程的解的确在  $[0, 1]$  上是存在的, 从而得到要找的反函数。我们令

$$F(t, x) = -(df(x_0) + t \cdot dr(x))^{-1} \cdot r(x), \quad (t, x) \in [0, 1] \times U,$$

其中  $U \subset \mathbb{R}^n$  是  $x_0$  的一个开邻域, 使得对任意的  $t \in [0, 1]$ , 任意的  $x \in U$ ,  $(df(x_0) + t \cdot dr(x))$  是可逆的。

- (6) 证明: 存在  $y_0 = f(x_0)$  的邻域  $V$  使得上述初值问题对于任意的  $y \in V$  存在  $[0, 1]$  上的解  $x(t) \in C^1([0, 1])$ 。于是通过考虑  $y \mapsto x(1)$ , 我们便得到了  $f_1 = f$  的一个局部上的反函数。(提示: 利用(3)中对  $r(x)$  的估计, 通过缩小  $U$  和  $V$  使得 Peano 定理给出的存在区间能够包含  $[0, 1]$ 。)
- (7) 利用常微分方程解对初值的可微依赖性定理证明上面得到的反函数是  $C^1$  的, 于是便完成了反函数定理的证明。

### 证明

- (1) 通过考虑  $(df(x_0))^{-1}f(x)$ , 我们可以假设  $df(x_0) = \text{Id}$  (单位矩阵)。由于  $f$  是  $C^1$  的, 存在  $\delta > 0$  使得对于任意的  $x \in B(x_0, \delta)$ ,  $\|df(x) - \text{Id}\| \leq \frac{1}{2}$ 。于是对于任意的  $x_1, x_2 \in B(x_0, \delta)$ , 我们有

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2) - (x_1 - x_2)| &= \left| \int_0^1 (df((1-t)x_1 + tx_2) - \text{Id})(x_2 - x_1) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \|df((1-t)x_1 + tx_2) - \text{Id}\| |x_2 - x_1| dt \\ &\leq \frac{1}{2} |x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

另一方面

$$|f(x_1) - f(x_2) - (x_1 - x_2)| \geq |x_2 - x_1| - |f(x_1) - f(x_2)|,$$

于是

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geq \frac{1}{2} |x_1 - x_2|.$$

这就证明了  $f$  在  $B(x_0, \delta)$  上是单射。

- (2) 这是显然的。
- (3) 根据(2), 我们有

$$|r(x)| = \left| \int_0^1 dr((1-t)x_0 + tx)(x - x_0) dt \right| \leq \int_0^1 \|dr((1-t)x_0 + tx)\| |x - x_0| dt,$$

在  $x_0$  的附近  $\|dr((1-t)x_0 + tx)\|$  可以任意小。

- (4) 这是显然的。
- (5) 在(4)中得到的式子两边对  $t$  求导即可。
- (6) 总结一下, 现在我们要研究初值问题

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad x(0) = x_0 + (df(x_0))^{-1} \cdot (y - y_0)$$

我们要证明这个初值问题存在  $[0, 1]$  上的解。我们选取  $V$  比较小使得对于任意的  $y \in V$ ,

$$|x(0) - x_0| = |x_0 + (df(x_0))^{-1} \cdot (y - y_0)| \leq \frac{\delta}{2},$$

其中  $\delta > 0$  是一个待定的常数, 此外根据 (1), 我们可以假设  $f$  在  $B(x_0, \delta)$  上是单射。我们在矩形  $[0, 1] \times \overline{B(x_0, \delta)}$  上应用 Peano 定理, 得到存在  $[0, \min\{\frac{\delta}{2M}, 1\}]$  上的解, 其中

$$M = \sup_{(t,x) \in [0,1] \times \overline{B(x_0, \delta)}} |F(t, x)|.$$

根据 (3) 中的结果, 当  $\delta$  比较小时, 可以使得对于任意的  $(t, x) \in [0, 1] \times \overline{B(x_0, \delta)}$  有

$$\|df(x_0) + t \cdot dr(x)\| \leq \frac{\|df(x_0)\|}{2},$$

并且

$$|F(t, x)| = |(df(x_0) + t \cdot dr(x))^{-1} \cdot r(x)| \leq \frac{2|r(x)|}{\|df(x_0)\|} < \frac{\delta}{2}.$$

于是

$$\frac{\delta}{2M} > 1,$$

也就得到了在  $[0, 1]$  上解的存在性, 并且对任意的  $y \in V$ , 所得到的解  $x(t)$  在  $t = 1$  处的值  $x(1) \in B(x_0, \delta)$ 。我们最后选取  $U' = B(x_0, \delta) \cap f^{-1}(V)$ 。

至此我们已经构造了  $g_1 : V \rightarrow U'$  满足  $f(g_1(y)) = y$ , 对任意的  $y \in V$ 。再结合  $f$  在  $U'$  上是单射, 这就表明  $g_1$  是  $f$  的在  $U'$  上的反函数。

(7) 已经没有更多要说的了。

**注** 总结一下, 这里的核心想法是通过构造一族映射  $\{f_t\}_{t \in [0,1]}$  来将原始的  $f = f_1$  与简单的  $f_0$  (它是线性、可逆的!) 联系起来, 而且这种联系是“连续的”, 进而使用常微分方程的理论将  $t = 0$  时的结果“延伸到”  $t = 1$  时的结果 (对应于以  $t = 0$  时为初值, 定义在  $[0, 1]$  区间上的解)。这个想法在偏微分方程中也有重要应用 (连续性方法的雏形), 之后有机会可以再谈。

### 问题 2.7(常微分方程的解集结构)

在这个问题中, 我们希望探究一般的常微分方程的解集结构。所谓解集的“结构”指的是它作为集合以外附加的东西, 比如线性空间结构、拓扑结构、光滑结构等。

(1) 求解方程

$$y''' = 0,$$

证明它的解集等同于 3 维实线性空间  $\mathbb{R}^3$ 。

(2) 求解方程

$$\frac{y'}{\sqrt{1 - y^2}} = 1,$$

证明它的解集等同于圆圈  $S^1$ 。

(3) 求解方程

$$y'' + 3y'y + y^3 = 0,$$

证明它的解集等同于 (微分同胚) 二维实射影空间  $\mathbb{RP}^2$ 。(提示: 做如下的预设<sup>1</sup>,  $y(x) = \frac{P'(x)}{P(x)}$ 。为

<sup>1</sup>这里的“预设”对应于英文文献中的 ansatz。它的大意是当我们无法给出问题的全部答案时, 我们先考虑一定形式的特殊解 (比如幂级数解法、分离变量法等), 而且幸运的是, 很多情况下这些特殊解实际上给出了问题全部的解。

什么这个预设是合理的? )

### 证明

(1) 显然方程的解集是

$$\{P(x) = a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\},$$

即所有次数不超过 2 的实系数多项式, 这显然同构于  $\mathbb{R}^3$ 。

(2) 这个方程的解为

$$y(x) = \sin(x + C), \quad C \in \mathbb{R}$$

可见当  $C_1 - C_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$  时, 对应同一个解, 于是方程的解集是  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq \mathbf{S}^1$ 。

(3) 令  $y(x) = \frac{P'(x)}{P(x)}$ , 带入方程, 利用 Mathematica 计算得到 (请同学们动手计算一下)

$$y'' + 3y'y + y^3 = 0 \iff \frac{P'''(x)}{P(x)} = 0 \iff P'''(x) = 0.$$

根据 (1),  $P(x) = a + bx + cx^2$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$  不全为 0, 于是方程的解为

$$y(x) = \frac{b + 2cx}{a + bx + cx^2}.$$

由于  $a, b, c$  成比例放缩不改变解, 所以实际上方程的解定义在  $\mathbb{R}^3 - \{0\}/\sim$  上, 其中

$$(a_1, b_1, c_1) \sim (a_2, b_2, c_2) \iff \exists \lambda \neq 0, (a_1, b_1, c_1) = \lambda(a_2, b_2, c_2)$$

这就是  $\mathbb{RP}^2$ 。

这个预设是合理的, 因为我们可以从  $y(x) = \frac{P'(x)}{P(x)}$  中反解出  $P(x)$  (一阶线性方程)。

**注** (1) 我们简要说明一下上述方程是如何构造出来的。我们从  $y^{(n)} = 0$  出发, 这个方程的解空间是标准的  $\mathbb{R}^n$ , 也就是不超过  $n - 1$  次多项式的  $n - 1$  个独立的系数。如果我们希望方程的解在系数成比例放大或缩小时保持不变, 也就是定义在  $\mathbb{RP}^{n-1}$  上, 最自然的方式便是考虑使  $y(x) = \frac{P'(x)}{P(x)}$  作为方程的解, 其中  $P(x)$  就是  $y^{(n)} = 0$  的解。从这里反解出来  $y(x)$  并带入原来  $P(x)$  满足的方程便可以得到一个解集是  $\mathbb{RP}^{n-1}$  的方程 (同学们可以试一下 (3) 中的方程就是  $n = 3$  时这样构造的结果,  $n = 1, 2$  时太平凡,  $n > 3$  时又难以想象, 所以我也找不到其他更好的例子)。更一般的,  $\mathbb{RP}^{n-1}$  可以视为  $\mathbb{R}^\times$  作用在  $\mathbb{R}^n$  上得到的商空间 (对应解的系数成比例放缩保持解不变), 那么我们也可以尝试其他的群作用在  $\mathbb{R}^n$  上得到的商空间, 比如平移、旋转等等, 不过一般是很难和方程的解对应起来的 (你可以想象什么样的解是在系数的平移/正交变换下不变的?)。

(2) 之前有同学提问为什么书上关于“通解”的定义是

$$\det \left( \frac{\partial(y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))}{\partial(C_1, C_2, \dots, C_n)} \right) \neq 0, \quad x \in I$$

其中  $I \subset \mathbb{R}$  是方程解的定义区间。从上面的例子可以看出, 我们一般可以把一个  $n$  阶常微分方程的解集想象成一个  $n$  维的  $C^1$ -流形  $M$ , 我们姑且称作是“解流形”。 $M$  上通常有一族 (用  $I$  作为指标集) 天然的 (整体) 坐标卡, 我们就叫做“取值坐标卡”  $y \mapsto (y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$ 。而我们的通解  $(C_1, C_2, \dots, C_n) \mapsto y \in M$  也是一些坐标卡, 我们就叫做“通解坐标卡” (这些坐标卡通常不能单独覆盖整个解流形, 也就是一个通解一般给不出方程的所有解)。不难发现, 上面通解定义中的条件正是通解坐标卡与那些取值坐标卡之间的转移映射是 (局部)  $C^1$  同胚的条件 (反函数定理), 从而保证了这些坐标卡之间是相容的, 它们共同决定了解流形  $M$  上的一个微分结构。这就给出了一个关于通解定义的几何解释。(当然还有更朴素的解释, 也就是可以把  $C_1, C_2, \dots, C_n$  用  $y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)$  解出来,

可以参考书上的例 1.4, 例 1.5, 例 1.6。)

## 第3章 第三次习题课讲义

## 第4章 第四次、第六次习题课讲义

### 4.1 幂级数解法

写在前面：本部分会作为考试中计算部分的选考题之一，掌握了或许是多一种选择？

我们已经讨论了诸多方程的求解，如在第二章给出的一阶线性方程以及特殊的一阶方程，第五章给出的常矩阵高阶线性微分方程组、高阶常系数微分方程，我们已经给出了它们的一般算法以及显式解。但对于绝大部分的方程，并不存在如此普适的解法，也并不能做到给出显示解，我们在第一次习题课已经告诉大家，最简单的一阶非线性方程 Riccati 方程若未知一个特解，没有普适性的解法。这时我们希望退而求其次，给出它们的级数解。既然要将函数写为级数形式，自然避不开解析这一概念：

#### 定义 4.1 (解析)

设  $U$  为  $\mathbb{R}^n$  中区域， $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  为光滑函数。称  $f$  在  $p = (p_1, \dots, p_n) \in U$  处解析，是指在  $p$  的某个邻域内， $f$  可以展开成收敛幂级数

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n} \lambda_\alpha (x_1 - p_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n - p_n)^{\alpha_n}.$$



**注** 函数在某点解析，则必然光滑，这是由于幂级数在收敛半径内是内闭一致收敛的，一致收敛对于求导与无穷求和换序拥有良好的性质，而多项式显然是无穷可微的；反之未必，请看下面的例题 1.1。

**例题 4.1(光滑性与解析性)** 考虑函数  $f(x) = x^{-2}e^{-\frac{1}{x}} (x > 0), 0 (x \leq 0)$ ，则  $f(x)$  在  $x = 0$  处光滑但不解析，此时 (4.1.1) 的解为  $y(x) = e^{-\frac{1}{x}} (x > 0), 0 (x \leq 0)$ ，它在  $x = 0$  处也是光滑但不解析。该两个问题的证明可以参考史济怀老师《数学分析教程》上册 P206 类似的证明，思路为证明导数为  $P(\frac{1}{x})e^{-1/x}$  类似的形式，则 0 处光滑且任意阶的导数为 0。由于若该函数能展开为幂级数的形式，则一定为 Taylor 级数，故该级数不收敛于该函数，该函数不解析。

#### 4.1.1 Cauchy 定理

首先简要讨论 Cauchy 问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (4.1.1)$$

在  $(x_0, y_0)$  附近可以用幂级数法求解的条件。首先我们希望解保持解析的性质，那么方程的右端函数  $f(x, y)$  也应保证解析的性质，此时称微分方程也是解析的。例题 1.1 说明：如果  $f$  在某点附近不解析，即使  $f$  光滑，(4.1.1) 的解也可以不解析，也说明了我们确实需要  $f(x, y)$  的解析性。另一方面，如果  $f$  在  $(x_0, y_0)$  附近解析，我们自然希望初值问题 (4.1.1) 的解也能保持解析性质。

幸运的是，该结果确实是成立的，以下为 Cauchy 在 1840 年左右证明的理论。为了方便书写，此处考虑  $y$  为函数的情形，对于向量情形的证明类似。全过程的证明请大家参考课本 6.1 节详尽的证明。

#### 定理 4.1 (Cauchy 定理)

若 (4.1.1) 中的函数  $f(x, y)$  在区域  $R : |x - x_0| < \alpha, |y - y_0| < \beta$  上解析，则 Cauchy 问题 (4.1.1) 在  $x_0$  的附近存在唯一的解析解。



**证明** 证明的核心是引入“优函数”的概念：对于解析函数  $f(x, y) = \sum a_{ij}(x - x_0)^i(y - y_0)^j$ , 我们希望找到一个更易于控制和讨论的解析函数  $F(x, y) = \sum A_{ij}(x - x_0)^i(y - y_0)^j$ , 它比  $f(x, y)$  更“优”，即满足  $|a_{ij}| \leq |A_{ij}|$ . 我们现在需要做的工作是：

1. 找到满足上述的优函数  $F(x, y)$ . 一个合适的优函数为：

$$F(x, y) = \frac{M}{(1 - \frac{x-x_0}{a})(1 - \frac{y-y_0}{b})}.$$

其中  $M, a, b > 0$  为某常数, 且  $0 < a < \alpha, 0 < b < \beta$ .

则  $F(x, y)$  在区域  $|x - x_0| < a, |y - y_0| < b$  上优于  $f(x, y)$ .

证明：设  $f(x, y)$  在区域  $|x - x_0| < \alpha, |y - y_0| < \beta$  可以展开为

$$f(x, y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}(x - x_0)^i(y - y_0)^j.$$

则  $\forall 0 < a < \alpha, 0 < b < \beta$ , 均有数项级数

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} |a_{ij}| a^i b^j$$

收敛, 故存在常数  $M$ , 使得  $|a_{ij}| \leq \frac{M}{a^i b^j}, \forall i, j$ .

考虑级数

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{M}{a^i b^j} (x - x_0)^i (y - y_0)^j.$$

由于在区域  $|x - x_0| < a, |y - y_0| < b$  上,  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^i}{a^i}$  与  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(y-y_0)^j}{b^j}$  均绝对收敛, 由数项级数乘积收敛的 Cauchy 定理可知,

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{M}{a^i b^j} (x - x_0)^i (y - y_0)^j = M \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^i}{a^i} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(y-y_0)^j}{b^j} = \frac{M}{(1 - \frac{x-x_0}{a})(1 - \frac{y-y_0}{b})}.$$

因此

$$F(x, y) = \frac{M}{(1 - \frac{x-x_0}{a})(1 - \frac{y-y_0}{b})}$$

确实为  $f(x, y)$  的优函数.

2. 证明  $F(x, y)$  对应的 Cauchy 问题  $y' = F(x, y), y(x_0) = y_0$  在局部存在解析解, 具体而言, 在区间  $|x - x_0| < \rho$  上存在解析解  $y = y(x)$ , 常数  $\rho = a(1 - e^{-b/2aM})$ .

证明：注意到对于  $F(x, y)$  的方程为可分离变量的方程, 直接求初值问题的解, 对两边同时积分,

$$\int_{y_0}^y 1 - \frac{y - y_0}{b} dy = \int_{x_0}^x \frac{M}{1 - \frac{x-x_0}{a}} dx.$$

即

$$\frac{b}{2} \left(1 - \frac{y - y_0}{b}\right)^2 - \frac{b}{2} = aM \ln\left(1 - \frac{x - x_0}{a}\right).$$

进一步化简为

$$y = y_0 + b - b \left[1 + \frac{2aM}{b} \ln\left(1 - \frac{x - x_0}{a}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

由于  $|x - x_0| < \rho < a$ ,  $\ln\left(1 - \frac{x - x_0}{a}\right)$  可以展开为  $x - x_0$  的幂级数, 且

$$\left|\frac{2aM}{b} \ln\left(1 - \frac{x - x_0}{a}\right)\right| < 1,$$

而  $|s| < 1$  时,  $(1 + s)^{\frac{1}{2}}$  可以展开为幂级数, 因此  $y$  可以被展开为幂级数.

3. 给出 (4.1.1) 的形式解, 这里的形式解即为不考虑敛散性的前提下给出的级数解, 从形式解的构造即可说明解的唯一性. 并证明 (2) 中初值问题的解也是此时求出的形式解的优函数, 进而形式解确实是收敛的, 于是证明了存在性. 具体而言:

$f(x, y)$  已在  $R$  上展开为如下幂级数:

$$f(x, y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}(x - x_0)^i(y - y_0)^j.$$

做初值问题 (4.1.1) 的形式幂级数解:

$$y(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i(x - x_0)^i. \quad (4.1.2)$$

直接计算可知:

$$\begin{aligned} c_1 &= y'(x_0) = f(x_0, y_0) = a_{00}; \\ c_2 &= \frac{1}{2!} y^{(2)}(x_0) = \frac{1}{2!} (f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)y'(x_0)) = \frac{1}{2!} (a_{10} + a_{01}a_{00}). \end{aligned}$$

而考虑级数的一般项  $a_{ij}(x - x_0)^i(y - y_0)^j$ , 只有对  $x$  求  $i$  次导, 对  $y$  求  $j$  次导后在  $(x_0, y_0)$  处的导数非 0, 且为值  $i!j!a_{ij}$ , 因此可知  $c_k$  均可以被  $a_{ij}$  所表达, 按照如此的方式唯一确定了形式幂级数解 (4.1.2).

另一方面,  $c_m$  最终的形式应该为关于  $a_{ij}$  的多项式, 且多项式的系数为正数 (均由求导所得, 仅与标号有关!). 接下来考虑初值问题

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

$F(x, y)$  的定义见 (1), 且已经证明  $F(x, y)$  为  $f(x, y)$  的优函数, 将其展开为幂级数则有

$$F(x, y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} A_{ij}(x - x_0)^i(y - y_0)^j.$$

且  $|a_{ij}| \leq |A_{ij}|, \forall i, j$ . 做该初值问题的形式幂级数解:

$$y(x) = y_0 + \sum_{m=1}^{\infty} C_m(x - x_0)^m.$$

和初值问题 (4.1.1) 类似的分析,  $C_m$  最终的形式应该为关于  $A_{ij}$  的多项式, 且多项式的系数为正数, 因此  $|c_m| \leq |C_m| = C_m$ , 故  $\sum_{m=1}^{\infty} C_m(x - x_0)^m$  为  $\sum_{m=1}^{\infty} c_m(x - x_0)^m$  的优级数.

由 (2) 的结论, 该形式解在区间  $|x - x_0| < \rho$  上收敛, 因此该区域上  $\sum_{m=1}^{\infty} c_m(x - x_0)^m$  亦收敛, 形式解确实为初值问题 (4.1.1) 的解, 这样就证明了存在性, 则命题证毕.

上述定理完全可以推广到一阶方程组的情形, 这启发我们把幂级数解法推广至高阶方程. 我们知道: 首一的二阶线性方程  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  可以写为一阶方程组

$$\begin{cases} y'_1(x) = y_2 \\ y'_2(x) = -p(x)y_2 - q(x)y_1 \end{cases}$$

若  $p(x), q(x)$  在  $x_0$  附近解析, 则由 Cauchy 定理可得上述方程组在  $x_0$  附近也存在解析解, 这也就说明首一的二阶线性方程存在解析解. 因此根据定理 1.1(Cauchy 定理), 我们直接可以得到:

**定理 4.2 (首一二阶齐次方程解析解的存在唯一性)**

对于方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (4.1.3)$$

其中  $p(x), q(x)$  在区间  $|x - x_0| < r$  上解析, 则方程在区间  $|x - x_0| < r$  上有收敛的幂级数解

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n,$$

其中  $c_0, c_1$  为任意常数, 其由初始条件决定.



**注** 该定理的证明由定理 1.1 即得, 但是需要注意解的存在区间. 注意到该方程等价的微分方程组为

$$\begin{cases} y'_1(x) = y_2 \\ y'_2(x) = -p(x)y_2 - q(x)y_1 \end{cases}$$

其中函数  $y_1$  与  $y_2$  均在  $R$  上解析, 因此在定理 1.1 的推导过程中  $\beta$  为无穷, 可推出在  $|x - x_0| < r$  上均存在解析解.

**例题 4.2(20 宁班, mid)** 给出方程  $x'' + x \sin t = 0$  的  $O(t^6)$  的通解.

**解** 设方程的幂级数解为  $x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i t^i$ , 由于  $\sin t$  展开为 Taylor 级数为  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} t^{2j+1}$ , 代回原方程可得

$$\sum_{i=0}^{\infty} C_i i(i-1)t^{i-2} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} t^{2j+1} \sum_{i=0}^{\infty} C_i t^i = 0.$$

整理比较系数可得

$$C_{i+2}(i+1)(i+2) + \sum_{\substack{2j+1+k=i \\ j,k \geq 0}} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} C_k = 0.$$

写出前面几项系数的递归式如下:

$$C_2 = 0, \quad 6C_3 + C_0 = 0, \quad 12C_4 + C_1 = 0, \quad 20C_5 + C_2 - \frac{C_0}{6} = 0, \quad 30C_6 + C_3 - \frac{C_1}{6} = 0.$$

求解可得  $O(t^6)$  的通解

$$x(t) = C_0 + C_1 t - \frac{C_0}{6} t^3 - \frac{C_1}{12} t^4 + \frac{C_0}{120} t^5 + \frac{C_0 + C_1}{180} t^6 + o(t^6).$$

### 4.1.2 幂级数解法

更进一步, 对于方程  $A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0$ , 其中函数  $A(x), B(x), C(x)$  均在区间  $|x - x_0| < r$  上解析. 假定  $A(x)$  不为 0, 则方程两端同除以  $A(x)$ , 划归为已知的情形.

**注** 解析为点态的性质, 因此考察的实际为  $x_0$  点的邻域上面是否存在解析解, 因此此处的限制本质是考虑  $A(x_0)$  是否为 0; 同除以  $A(x)$  后仍应该确保  $\frac{B(x)}{A(x)}$  与  $\frac{C(x)}{A(x)}$  的解析性.

**例题 4.3(Hermite 方程)** 求解 Hermite 方程

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \quad (-\infty < x < +\infty).$$

其中  $\lambda$  为常数.

**解** 设该方程有幂级数解

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

带入方程即知

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

比较同幂次的系数有：

$$2c_2 + \lambda c_0 = 0;$$

$$6c_3 - 2c_1 + \lambda c_1 = 0;$$

$$n(n-1)c_n - 2(n-2)c_{n-2} + \lambda c_{n-2} = 0.$$

则

$$c_{n+2} = \frac{2n-\lambda}{(n+2)(n+1)} c_n \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

该表达式即给出了幂级数解的系数.

**注** 当  $\lambda$  为非负偶数后, 该幂级数解成为多项式, 称作 Hermite 多项式.

**例题 4.4(Legendre 方程)** 求解 Legendre 方程

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

其中  $n$  为常数.

**解**  $|x| < 1$  时,  $\frac{-2x}{1-x^2} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}$  与  $\frac{n(n+1)}{1-x^2}$  均为解析的, 因此  $|x| < 1$  区域上存在唯一的解析解.

之后的过程即为设出形式解, 根据方程求解系数的关系, 完整过程见课本 P228.

对于  $A(x)$  在  $x_0$  处值为 0 的情形, 考虑 1.1.3 中的广义幂级数解法.

### 4.1.3 二阶线性方程的广义幂级数解

上文中我们证明了某些二阶线性方程可以使用幂级数法求解. 但如果二阶线性方程

$$A(x)y''(x) + B(x)y'(x) + C(x)y(x) = 0 \quad (4.1.4)$$

无法化为首一且系数函数解析的形式时, 幂级数法可能失效. 我们考虑如下两个例子:

**例题 4.5** 考虑微分方程  $x^2y'' - 2y = 0$  的解在点  $x = 0$  附近的性态.

**解** 该方程为 Euler 方程, 这里只考虑  $x > 0$  时  $x = 0$  附近的性态, 令  $x = e^t$ , 则有  $\frac{d}{dt}(\frac{d}{dt}-1)y - 2y = 0$ . 该方程具有通解  $y = c_1e^{2t} + c_2e^{-t} = c_1x^2 + c_2\frac{1}{x}$ .

1. 一方面, 该方程在  $x \rightarrow 0$  的有界解为  $y = cx^2$ , 则  $y(0) = y'(0) = 0$ . 表明该方程不具有  $y(0) = 1, y'(0) = 0$  的解. Cauchy 问题不存在解! 这里的 1 可以替换为任意非 0 的数字.

2. 另一方面,  $\frac{1}{x}$  在  $x \rightarrow 0$  时无界, 因此在  $x = 0$  处也不能展开成收敛的幂级数.

**例题 4.6** 考虑微分方程  $x^2y'' + (3x-1)y' + y = 0$  的解在点  $x = 0$  附近的性态.

**解** 设它在  $x = 0$  附近存在非平凡的幂级数解  $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ , 代入可得

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i i(i-1)x^i + (3x-1) \sum_{i=0}^{\infty} c_i i x^{i-1} + \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} (c_i(i+1)^2 - c_{i+1}(i+1))x^i = 0.$$

由此可得  $c_{i+1} = (i+1)c_i$ , 因此  $c_i = i!c_0$ . 因此幂级数解为  $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_0 i! x^i$ . 若  $c_0 = 0$ , 即对应零解, 这是平凡的; 若  $c_0 \neq 0$ , 则幂级数的收敛半径为零, 即级数只在  $x = 0$  处收敛, 矛盾!

**例题 4.7** 求微分方程  $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$  的两个线性无关解.

**解** 令  $u(x) = y\sqrt{x}$ , 则  $u(x)$  满足:

1.  $u' = y'\sqrt{x} + y\frac{1}{2\sqrt{x}},$
2.  $u'' = y''\sqrt{x} + y'\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{4}y\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.$

因此  $u'' + u = 0$ . 该方程的线性无关解为  $u_1 = \cos x, u_2 = \sin x$ . 由此可知原方程的两个线性无关解为

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k-\frac{1}{2}},$$

$$y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+\frac{1}{2}}.$$

考察该形式，并不是普通意义上的幂级数. 我们本节的目标就是通过引入所谓广义幂级数来求解 (4.1.4) 在正则奇点  $x_0$  附近的解. 在幂级数的基础上，如上例我们对指数进行恰当的微操，得到

$$\sum_{i=0}^{\infty} C_i (x - x_0)^{i+\rho},$$

其中  $\rho$  为实常数，则上式称为广义幂级数.  $\rho$  称为指标.

### 定义 4.2 (正则奇点)

设 (4.1.4) 可以重写为

$$(x - x_0)^2 P(x)y'' + (x - x_0)Q(x)y' + R(x)y = 0. \quad (4.1.5)$$

其中  $P, Q, R$  在  $x_0$  附近是解析的，并且满足  $P(x_0) \neq 0, Q(x_0)^2 + R(x_0)^2 \neq 0$ ，则称  $x_0$  是 (4.1.4) 的一个正则奇点.



我们证明如下核心定理：

### 定理 4.3

(4.1.5) 给出的方程在正则奇点  $x_0$  附近存在收敛的广义幂级数解.



**证明** 与 Cauchy 定理的证明一样，我们仍旧先给出形式解，再验证形式解确实局部收敛. 设 (4.1.5) 在  $x_0$  附近的形式广义幂级数解为

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i (x - x_0)^{i+\rho}.$$

自然地要求  $C_0 \neq 0$ ，否则改变指标的定义. 方程 (4.1.5) 在局部可以写为

$$(x - x_0)^2 y''(x) + (x - x_0) \left( \sum_{i=0}^{\infty} q_i (x - x_0)^i \right) y'(x) + \left( \sum_{i=0}^{\infty} r_i (x - x_0)^i \right) y(x) = 0.$$

将广义幂级数代入，比较系数可得

$$C_i(i+\rho)(i+\rho-1) + \sum_{\substack{j+k=i \\ j,k \geq 0}} (r_j + (k+\rho)q_j) C_k = 0.$$

方便起见，令  $f_0(\rho) = \rho(\rho-1) + q_0\rho + r_0, f_j(\rho) = q_j\rho + r_j (j \geq 1)$ ，则上式可写为

$$C_0 f_0(\rho) = 0, \quad C_i f_0(\rho+i) + \sum_{k=0}^{i-1} C_k f_{i-k}(\rho+k) = 0.$$

为了便于确定系数，我们希望找到合适的  $\rho$  使得  $f_0(\rho) = 0$  且  $f_0(\rho+i) \neq 0 (i \geq 1)$ . 这是可以做到的，事实上，设二次方程  $f_0(\rho)$  的两个根为  $\rho_1, \rho_2$ . 若均为实根，则选取  $\rho = \max\{\rho_1, \rho_2\}$ ；若为共轭复根，则选取  $\rho = \rho_1$  或  $\rho_2$  均可. 在如此选取的  $\rho$  下，由递归式可以将  $C_1, \dots, C_i, \dots$  唯一地表示为有关  $C_0$  的形式，

为方便起见，以下不妨设  $C_0 = 1$ .

下面我们证明：上述得到的广义幂级数解在局部是收敛的。首先估计  $q_j, r_j$  的上界。设幂级数  $\sum q_j(x-x_0)^j$  和  $\sum r_j(x-x_0)^j$  在邻域  $|x-x_0| < h$  内收敛，任取  $R < h$ ，则存在常数  $M > 0$ ，使得

$$|q_j| \leq \frac{M}{R^j}, \quad |r_j| \leq \frac{M}{R^j}.$$

由于  $\rho$  已经给定，根据  $f$  的定义，不妨设  $M$  也使得  $|f_j(\rho)| \leq \frac{M}{R^j}$  ( $j \geq 1$ )。

其次估计  $f_0(\rho+i)$ 。设  $f_0(\rho)$  的另一个根是  $\rho'$ ，则  $\rho + \rho' = 1 - q_0$ 。将  $\rho$  的定义带入可得

$$f_0(\rho+i) = (\rho+i)(\rho+i-1) + q_0(\rho+i) + r_0 = 2i\rho + q_0i + i^2 - i = i(\rho - \rho') + i^2.$$

记  $d = (\rho - \rho') \geq 0$ ，则  $|f_0(\rho+i)| \geq i(i+d)$ 。

断言： $|C_i| \leq (\frac{M}{R})^i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  利用归纳法证明断言。

- 对于  $i=1$ ，我们有

$$|C_1| = \frac{|f_1(\rho)|}{|f_0(\rho+1)|} \leq \frac{M}{R(d+1)} \leq \frac{M}{R}.$$

- 设断言对于  $i-1$  ( $i \geq 2$ ) 成立，那么由递归式可得（一个马后炮，不妨设  $M > 2$ ）

$$\begin{aligned} |C_i| &\leq \sum_{k=0}^{i-1} |C_k| \frac{|f_{i-k}(\rho+k)|}{|f_0(\rho+i)|} \leq \sum_{k=0}^{i-1} \left(\frac{M}{R}\right)^k \frac{|f_{i-k}(\rho)| + k|q_{i-k}|}{i(i+d)} \\ &\leq \sum_{k=0}^{i-1} \frac{M^{k+1}}{R^i} \frac{k+1}{i(i+d)} \leq \frac{1}{R^i(i+d)} \sum_{k=1}^i M^j = \frac{M^i - 1}{R^i(i+d)} \frac{M}{M-1} \\ &\leq \frac{2(M^i - 1)}{R^i(i+d)} < \left(\frac{M}{R}\right)^i. \end{aligned}$$

断言证毕，因此广义幂级数解  $y(x) = \sum C_i(x-x_0)^{i+\rho}$  在  $x_0$  的一个邻域内收敛。

**注** 这个定理演示了估计系数以证明解析性的一般手法，此后在 PDE 部分的 Laplace 方程部分也可以利用类似的手法与梯度估计来证明调和函数的解析性。

下面演示如何利用广义幂级数解法求解变系数的二阶常微分方程。

**例题 4.8(赵班, 21mid)** 用(广义)幂级数方法求解方程

$$2xy'' + (1-2x)y' - y = 0.$$

**解** 设方程的广义幂级数解为  $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+\rho}$ ，则有

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(k+\rho)x^{k+\rho-1}, \quad y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(k+\rho)(k+\rho-1)x^{k+\rho-2}.$$

代入方程可得

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k(k+\rho)(2k+2\rho-1)x^{k+\rho-1} - \sum_{k=0}^{\infty} C_k(2k+2\rho+1)x^{k+\rho} = 0.$$

即有

$$C_0\rho(2\rho-1)x^{\rho-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2\rho+1)(C_{k+1}(k+\rho+1) - C_k)x^{k+\rho} = 0.$$

不妨设  $C_0 = 1$ 。考虑两种情况：

1.  $\rho = 0$ ，则  $C_{k+1}(k+1) = C_k(k \geq 0)$ 。因此  $C_k = \frac{1}{k!}$ ，故一个解为  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ 。
2.  $\rho = \frac{1}{2}$ ，则  $C_{k+1}(k+\frac{3}{2}) - C_k = 0$  ( $k \geq 0$ )。因此  $C_k = \frac{2^k}{(2k+1)!!}$ ，故一个解为  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(2k+1)!!} x^{k+\frac{1}{2}}$ 。

综上可得方程通解为

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(2k+1)!!} x^{k+\frac{1}{2}}.$$

## 4.2 习题讲解

### 4.2.1 作业部分

作业部分针对于国庆后三次课的作业，对应课本 5.1 与 5.2 节。

**练习 4.1(P173 5.1 T2)** 设当  $x \in (a, b)$  时，线性方程组  $\frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x)$  中的函数  $f(x)$  不恒为 0，证明该方程组有且至多有  $n+1$  个线性无关解。

#### 证明

1. 首先证明方程组存在  $n+1$  个线性无关解。

设该方程对应的齐次方程  $\frac{dy}{dx} = A(x)y$  的  $n$  个线性无关解为  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ ，方程  $\frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x)$  具有特解  $\varphi^*$ 。

claim:  $\varphi_1 + \varphi^*, \varphi_2 + \varphi^*, \dots, \varphi_n + \varphi^*, \varphi^*$  为  $n+1$  个线性无关的解。

考察方程

$$c_1(\varphi_1 + \varphi^*) + c_2(\varphi_2 + \varphi^*) + \dots + c_n(\varphi_n + \varphi^*) + c_{n+1}\varphi^* = 0.$$

即

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_n\varphi_n + \sum_{i=1}^{n+1} c_i\varphi^* = 0.$$

若  $\sum_{i=1}^{n+1} c_i \neq 0$ ,  $\varphi^* = \frac{-1}{\sum_{i=1}^{n+1} c_i} (c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_n\varphi_n)$ , 为齐次方程组  $\frac{dy}{dx} = A(x)y$  的解, 与  $f(x)$  不恒为 0 矛盾。故  $\sum_{i=1}^{n+1} c_i = 0$ , 进而  $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_n\varphi_n = 0$ . 由  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$  的线性无关性知  $c_i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$ . 故  $c_1 = c_2 = \dots = c_{n+1} = 0$ , 即  $\varphi_1 + \varphi^*, \varphi_2 + \varphi^*, \dots, \varphi_n + \varphi^*, \varphi^*$  线性无关, 且均为方程  $\frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x)$  的解。

2. 再证明不可能存在  $n+2$  个线性无关的解。

若  $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_{n+2}(x)$  为  $n+2$  个线性无关的解，则  $\phi_2 - \phi_1, \dots, \phi_{n+2} - \phi_1$  为方程  $\frac{dy}{dx} = A(x)y$  的  $n+1$  个解，下说明这  $n+1$  个解也是线性无关的：

考虑方程

$$d_1(\phi_2 - \phi_1) + \dots + d_{n+1}(\phi_{n+2} - \phi_1) = 0.$$

即

$$-\sum_{i=1}^{n+1} d_i \phi_1 + d_1 \phi_2 + \dots + d_{n+1} \phi_{n+2} = 0.$$

由  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n+2}$  的线性无关性，即知  $d_i = 0, i = 1, 2, \dots, n+1$ ，故  $\phi_2 - \phi_1, \dots, \phi_{n+2} - \phi_1$  线性无关。这与齐次方程  $\frac{dy}{dx} = A(x)y$  仅能有  $n$  个线性无关的解矛盾。

综合两点可说明该方程组有且至多有  $n+1$  个线性无关解。

#### 注

1. 部分同学只说明了 1、2 中的一点。

2. 本题中经典的错误是证明了  $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$  与  $\varphi^*$  的线性无关性, 即说明了结论, 然而  $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$  甚至不是非齐次方程的解.

**练习 4.2(P173 5.1 T3)** 证明: 向量组

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

不可能同时满足任何一个三阶齐次线性微分方程组.

**证明** 考虑方程

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

则

$$c_1 + c_2x + c_3x^2 = 0.$$

若  $c_1, c_2, c_3$  不全为 0, 该次数不超过 2 的方程在任意区间上不只有两个解, 矛盾. 因此该三个向量线性无关, 且均为三阶齐次方程的解, 故构成基本解组.

而

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

与该三个向量构成基本解组矛盾.

**注**

1. 部分同学的证明中出现了逻辑问题:  $W = 0$  不能推出向量组的线性相关性, 而定理 5.3 中  $W = 0$  可以推出线性相关性建立在该向量组构成一个齐次方程的基解矩阵上, 证明中也用到了 Liouville 定理. 而线性相关性推  $W = 0$  是容易的, 利用初等变换对矩阵行列式的改变即得. 我们来看下面的例子:

$$\begin{vmatrix} x^2 & x|x| \\ 2x & 2|x| \end{vmatrix} = 0.$$

但是

$$\begin{pmatrix} x^2 \\ 2x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x|x| \\ 2|x| \end{pmatrix}$$

在  $\mathbb{R}$  上不线性相关, 由于  $x > 0$  时,

$$\begin{pmatrix} x^2 \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x|x| \\ 2|x| \end{pmatrix}$$

而  $x < 0$  时,

$$\begin{pmatrix} x^2 \\ 2x \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x|x| \\ 2|x| \end{pmatrix}$$

这实际上是不同区间上线性相关系数不同所引起的.

2. 对于本题还有别的想法: 由于矩阵中 0 元素较多, 带入方程直接考察  $A(x)$  第一列的性质也可以

得出矛盾; 取方程初值为  $\mathbf{y}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  时, 对于该初值三个向量组均为满足该初值的解, 与解的存在唯一性矛盾.

**练习 4.3(P173 5.1 T4)** 求解微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{t}x + 1, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}x + y.$$

**解** 第一个方程为仅关于  $x$  的一阶线性方程, 可计算得

$$x = c_1 t^2 - t.$$

带入第二个方程, 有

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}(c_1 t^2 - t) + y.$$

可解得

$$y = -c_1 t - c_1 + 1 + c_2 e^t.$$

故方程的解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} t^2 \\ -t - 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**注**

1. 对于系数不为常数的方程, 请勿使用神奇的特征值法.
2. 考试中过程应尽量完善, 对于类似本题较为简单的题目, 就算是一阶方程也最好写一些求解的核心步骤, 以免答案错了痛失过程分! 考试中解方程过程分一定会占一定的比重, 不然每个题直接写结果, 然后带入验证方程成立就完了显然是不合情合理的. 如果直接写出了基解矩阵, 注意验证 Wronsky 的非 0.
3. 对于变系数的二阶线性方程组, 若已知对应齐次方程的一个特解, 可以利用 Liouville 方程求出另一个线性无关的特解, 即得到齐次方程的通解, 再用常数变易法求非齐次方程的特解, 进而给出该方程的通解. 如果特解不给的话需要根据方程的结构猜(樂).

**练习 4.4(P189 5.2 T1(4)(8))** 求解常系数矩阵线性齐次微分方程组

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A\mathbf{y}$$

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**解** 以下呈现了计算该类型方程必要的步骤, 考试中请不要省略.

$$1. \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 & 0 \\ -3 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 5).$$

该方程具有三个一重特征值  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1 + 2i, \lambda_3 = 1 - 2i$ .

(该两步务必不要算错, 有部分同学抄错了矩阵.)

$$\text{对应的特征向量为 } \xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{故基解矩阵为 } \begin{pmatrix} 0 & 2ie^{(1+2i)x} & -2ie^{(1-2i)x} \\ e^x & e^{(1+2i)x} & e^{(1-2i)x} \\ -e^x & 3e^{(1+2i)x} & 3e^{(1-2i)x} \end{pmatrix}.$$

写基解矩阵的时候不要忘记乘  $e$  的次幂!

$$\text{用实部虚部代替复值得到 } \Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 & -2e^x \sin 2x & 2e^x \cos 2x \\ e^x & e^x \cos 2x & e^x \sin 2x \\ -e^x & 3e^x \cos 2x & 3e^x \sin 2x \end{pmatrix}.$$

(该步转换对于非齐次方程有极好的简化计算效果, 最终呈现的一定需要为实矩阵! 此时还应该注意解被替换为实部列和虚部列, 不要错位.)

则方程的通解为  $\mathbf{y} = \Phi(x) \cdot \mathbf{c}$ .

其中  $\mathbf{c}$  为任意三维常值向量.

(该步骤也需要加上, 才算是完整给出了解的结构.)

$$2. \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & 1 \\ -2 & \lambda + 1 & 2 \\ 1 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^3.$$

该方程具有一个三重特征值  $\lambda = 1$ .

$$(A - I)^3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^3 = \mathbf{0}$$

$$\text{取 } (A - I)^3 X = 0 \text{ 的线性无关解为: } \xi_{10} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_{20} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_{30} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(这里的  $\xi_{i0}$  表示第  $i$  个向量  $\times 0$  次矩阵  $A - \lambda I$ .)

$$\text{则 } \xi_{11} = (A - I)\xi_{10} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \xi_{21} = (A - I)\xi_{20} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_{31} = (A - I)\xi_{30} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\xi_{12} = (A - I)^2 \xi_{10} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_{22} = (A - I)^2 \xi_{20} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_{32} = (A - I)^2 \xi_{30} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{故基解矩阵为 } \Phi(x) = e^x \begin{pmatrix} x+1 & -x & -x \\ 2x & -2x+1 & -2x \\ -x & x & x+1 \end{pmatrix}.$$

方程的通解为  $\mathbf{y} = \Phi(x) \cdot \mathbf{c}$ .

其中  $\mathbf{c}$  为任意三维常值向量.

**注** 请严格遵守该解法, 部分同学使用了 Jordan 型直接求解矩阵  $e^{Ax} = \mathbf{P}e^{Jx}\mathbf{P}^{-1}$ , 由于基解矩阵在列变换下仍然为基解矩阵, 因此  $\mathbf{P}^{-1}$  可以直接忽略, 但  $\mathbf{P}$  仍然是要算的. 该方法的计算量远大于定理 5.8 给出的算法, 且容易算错.

练习 4.5(P190 5.2 T2(1) T3(1)) 求解非齐次线性微分方程组

$$1. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = z + 2e^x, \\ \frac{dz}{dx} = y + e^x. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = z + \tan^2 x - 1, \\ \frac{dz}{dx} = -y + \tan x. \end{cases}$$

解

1. 我们给出两种解法, (a) 由于该方程的特殊性, (b) 的解法是标准的.

(a). 两个方程相加即得

$$\frac{d(y+z)}{dx} = y + z + 3e^x.$$

解得

$$y + z = (3x + c_1)e^x.$$

故

$$z = (3x + c_1)e^x - y.$$

带入方程 1, 即得

$$\frac{dy}{dx} = (3x + c_1)e^x - y + 2e^x.$$

可以解得

$$y = \frac{c_1}{2}e^x + c_2e^{-x} + \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^x.$$

则

$$z = \frac{c_1}{2}e^x - c_2e^{-x} + \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^x.$$

故方程的解可以表示为

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{c} + \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^x \\ \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^x \end{pmatrix}.$$

其中  $\mathbf{c}$  为任意二维向量.

(b). 考虑方程对应的齐次方程:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}.$$

记该矩阵为  $A$ .  $\det(\lambda I - A) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$ .

该方程具有两个一重特征值  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ .

对应的特征向量为  $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

故基解矩阵为  $\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{pmatrix}$ , 则  $\Phi^{-1}(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-x} \\ e^x & -e^x \end{pmatrix}$ .

则此方程组的一个特解为  $\Phi^* = \Phi(x) \int_0^x \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-s} & e^{-s} \\ e^s & -e^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^s \\ e^s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^x - \frac{1}{4}e^{-x} \\ \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^x + \frac{1}{4}e^{-x} \end{pmatrix}$ .

在这里其实就是常数变易法! 请思考与高阶线性方程有什么异同.

故方程的解可以表示为

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{c} + \begin{pmatrix} (\frac{3}{2}x + \frac{1}{4})e^x \\ (\frac{3}{2}x - \frac{1}{4})e^{-x} \end{pmatrix}.$$

其中  $\mathbf{c}$  为任意二维向量.

**在最后写解的时候也可以消去一些可以被基解消去的部分.**

2. 考虑方程对应的齐次方程:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}.$$

记该矩阵为  $A$ .  $\det(\lambda I - A) = (\lambda + i)(\lambda - i)$ .

该方程具有两个一重特征值  $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$ .

对应的特征向量为  $\xi_1 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \end{pmatrix}$ .

故复的基解矩阵为  $\Phi(x) = \begin{pmatrix} ie^{ix} & -ie^{-ix} \\ -e^{ix} & -e^{-ix} \end{pmatrix}$ .

实的基解矩阵为  $\Phi(x) = \begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix}$ .

**此处也可以对列乘某一个非零系数, 使其方便自己计算就行.**

则  $\Phi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix}$ .

则此方程组的一个特解为  $\Phi^* = \Phi(x) \int_0^x \begin{pmatrix} \sin s & \cos s \\ -\cos s & \sin s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tan^2 s - 1 \\ \tan s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \tan x \\ 2 \end{pmatrix}$ .

故方程的解可以表示为

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix} \cdot \mathbf{c} + \begin{pmatrix} \tan x \\ 2 \end{pmatrix}.$$

其中  $\mathbf{c}$  为任意二维向量.

**注** 对于给定初值的非齐次线性微分方程组的求解, 根据课本的定理 5.4, 此时通解的表达式为

$$\mathbf{y}(x) = \Phi(x) \left( \mathbf{c} + \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(s) \mathbf{f}(s) ds \right).$$

假设满足初值  $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ , 再上式中令  $x = x_0$ , 则发现

$$\mathbf{c} = \Phi^{-1}(x_0) \mathbf{y}_0.$$

因此此时方程的解为

$$\mathbf{y}(x) = \Phi(x) \left( \Phi^{-1}(x_0) \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(s) \mathbf{f}(s) ds \right).$$

## 4.2.2 补充习题

**问题 4.1(常系数线性微分方程组的周期性, 类似课本 P190 5.2 T4)** 证明常系数线性微分方程组  $\frac{dy}{dx} = A\mathbf{y}$  具有周期为  $\omega$  ( $\omega \neq 0$ ) 的非零周期解的充要条件是  $A$  具有形如  $\frac{2k\pi}{\omega}i$  的特征根, 其中  $k \in \mathbb{Z}$ .

**证明** 由于方程的通解为  $\mathbf{y} = e^{Ax}\mathbf{c}$ , 因此

$$\exists \text{ 周期为 } \omega \neq 0 \text{ 的非零解} \Leftrightarrow \exists \mathbf{C}_0 \neq \mathbf{0}, \text{ s.t. } e^{A(x+\omega)} \mathbf{C}_0 = e^{Ax} \mathbf{C}_0, \quad \forall x$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \exists \mathbf{C}_0 \neq \mathbf{0}, \text{ s.t. } e^{A\omega}(\mathbf{e}^{A\omega} - I)\mathbf{C}_0 = \mathbf{0}, \quad \forall x \\
&\Leftrightarrow \exists \mathbf{C}_0 \neq \mathbf{0}, \text{ s.t. } (\mathbf{e}^{A\omega} - I)\mathbf{C}_0 = \mathbf{0}, \quad \forall x \\
&\Leftrightarrow \det(\mathbf{e}^{A\omega} - I) = 0 \\
&\Leftrightarrow \mathbf{e}^{A\omega} - I \text{ 存在零特征值} \\
&\Leftrightarrow \mathbf{e}^{A\omega} \text{ 的某个特征值为 } 1.
\end{aligned}$$

设  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  为  $A\omega$  的特征值, 则存在可逆阵  $P$ , 使得  $A\omega = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$ . 由上三角阵的乘积仍为上三角阵可得  $e^{A\omega}$  的特征值为  $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$ . 所以

$$\begin{aligned}
\exists \text{ 周期为 } \omega \neq 0 \text{ 的非零解} &\Leftrightarrow \exists A\omega \text{ 的某一特征值 } \lambda_j \text{ s.t. } e^{\lambda_j} = 1 \\
&\Leftrightarrow \exists A \text{ 的某一特征值 } \tilde{\lambda}_j = \frac{2k\pi i}{\omega}.
\end{aligned}$$

**问题 4.2(基解矩阵完全决定齐次线性微分方程组)** 如果方程组  $\frac{dy}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}$  与  $\frac{dy}{dx} = \mathbf{B}(x)\mathbf{y}$  有一个相同的基解矩阵, 则  $\mathbf{A}(x) \equiv \mathbf{B}(x)$ .

**证明** 设这个相同的基解矩阵为  $\Phi(x)$ , 则

$$\frac{d\Phi}{dx} = \mathbf{A}(x)\Phi = \mathbf{B}(x)\Phi.$$

则

$$[\mathbf{A}(x) - \mathbf{B}(x)]\Phi \equiv 0.$$

由于  $\Phi$  为基解矩阵, 则对任意的  $x$ , 均有  $\Phi(x)$  非奇异, 故对该  $x$  均有  $\mathbf{A}(x) = \mathbf{B}(x)$ . 由于  $x$  的任意性, 有  $\mathbf{A}(x) \equiv \mathbf{B}(x)$ .

**问题 4.3(赵班, 20mid)** 已知  $y = x$  是方程  $y'' + \frac{x}{1+x^2}y' - \frac{y}{1+x^2} = 0$  的解, 求该方程的通解.  
解 这一类问题的解法是标准的.

设方程与  $y = x$  线性无关的一个特解为  $\varphi(x)$ , 则  $W(x) = \begin{vmatrix} x & \varphi \\ 1 & \varphi' \end{vmatrix} = c_1 e^{-\int_0^x \frac{s}{1+s^2} ds}$ .

即

$$x\varphi' - \varphi = \frac{c_1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

为关于  $\varphi$  的一阶线性方程,

可以解得

$$\varphi(x) = -c_1 \sqrt{1+x^2} + c_2 x.$$

**问题 4.4(赵班, 22mid)** 已知  $e^x$  为方程

$$y'' + \frac{x}{1-x}y' - \frac{1}{1-x}y = 0$$

的一个解, 利用常数变易法求方程

$$y'' + \frac{x}{1-x}y' - \frac{1}{1-x}y = x - 1$$

的通解.

**解** 对于求齐次方程解的过程正如上例题所示, 可以求得齐次方程的通解为

$$\hat{y} = c_1 x + c_2 e^x.$$

令  $y = y_1, y' = y_2$ , 则  $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$  与  $\begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix}$  为方程  $\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{1-x} & -\frac{x}{1-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x-1 \end{pmatrix}$  的解.

令该方程有一个特解为  $\varphi^* = \begin{pmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix}$ ,

带入方程有  $\begin{pmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x-1 \end{pmatrix}$ . 因此  $c'_1(x) = -1, c'_2(x) = \frac{x}{e^x}$ .

实际上用的是 cramer 法则.

则所求方程的解为  $\begin{pmatrix} x & e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x+c_1 \\ \frac{-x-1}{e^x}+c_2 \end{pmatrix} = c_1 x + c_2 e^x - x^2 - x - 1$ .

**问题 4.5(赵班, 20mid)** 考虑方程  $y'' + 4y' + 3y = f(x)$ , 其中  $f(x)$  在  $[a, \infty)$  上连续, 且满足  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

证明: 方程的任意解  $y(x)$  均成立  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ .

**证明** 齐次方程的线性无关解组为  $\{e^{-x}, e^{-3x}\}$ . 因此一个特解为

$$y(x) = \int_a^x \frac{e^{-s-3x} - e^{-x-3s}}{-2e^{-4s}} f(s) ds = \frac{1}{2} \int_a^x (e^{s-x} - e^{3(s-x)}) f(s) ds.$$

注意到齐次方程的任一解  $Ae^{-x} + Be^{-3x}$  在  $+\infty$  处的极限均为零, 因此只需证明特解  $y(x)$  满足  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ .

任取  $\varepsilon > 0$ , 则存在  $R > \max\{a, 0\}$ , 对任意  $x > R$ , 成立  $|f(x)| < \varepsilon$ ; 另一方面, 由题设可得  $|f(x)|$  在  $x \geq a$  上有界, 设  $M \geq 0$  为其上界. 由此可得  $x \geq R$  时

$$\begin{aligned} |y(x)| &\leq \frac{1}{2} \left( \int_a^R + \int_R^x \right) |e^{s-x} - e^{3(s-x)}| |f(s)| ds \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_a^R + \int_R^x \right) (e^{s-x} - e^{3(s-x)}) |f(s)| ds \\ &< \frac{1}{2} \left( e^{R-x} - e^{a-x} - \frac{1}{3} e^{3(R-x)} + \frac{1}{3} e^{3(a-x)} \right) M + \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} - e^{R-x} + \frac{1}{3} e^{3(R-x)} \right) \varepsilon \\ &< \frac{1}{2} \left( e^{R-x} - e^{a-x} - \frac{1}{3} e^{3(R-x)} + \frac{1}{3} e^{3(a-x)} \right) M + \frac{1}{3} \varepsilon. \end{aligned}$$

注意到  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{R-x} - e^{a-x} - \frac{1}{3} e^{3(R-x)} + \frac{1}{3} e^{3(a-x)}) = 0$ .

则存在  $x_0$ , 使得  $\forall x > x_0$ , 有  $(e^{R-x} - e^{a-x} - \frac{1}{3} e^{3(R-x)} + \frac{1}{3} e^{3(a-x)}) < \frac{4\varepsilon}{3M}$ .

对任意  $x > 2 \max\{x_0, R\}$ , 成立  $|y(x)| < \varepsilon$ . 因此  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ .

**问题 4.6(赵班, 21mid)** 考虑线性方程  $y'' + \alpha(t)y = 0$ , 其中  $\alpha(t)$  在  $\mathbb{R}$  上连续. 设  $\phi_1(t), \phi_2(t)$  是两个线性无关的解, 且

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (|\phi_1(t)| + |\phi_1'(t)|) = 0,$$

证明:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (|\phi_2(t)| + |\phi_2'(t)|) = +\infty.$$

**证明** 令  $z = \dot{y}$ , 则原线性方程化为一阶方程组

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \triangleq A(t) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}.$$

由  $\phi_1(t), \phi_2(t)$  线性无关知  $(\phi_1(t), \phi_1'(t))^T, (\phi_2(t), \phi_2'(t))^T$  是方程组的线性无关解.

由 Liouville 公式可得

$$W(t) = \phi_1(t)\phi_2'(t) - \phi_1'(t)\phi_2(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s)) ds} = W(t_0) \triangleq C \neq 0.$$

由此可得

$$(|\phi_1(t)| + |\phi'_1(t)|)(|\phi_2(t)| + |\phi'_2(t)|) \geq |W(t)| = |C| > 0.$$

结合  $|\phi_1(t)| + |\phi'_1(t)| \rightarrow 0$  可得  $|\phi_2(t)| + |\phi'_2(t)| \rightarrow +\infty (t \rightarrow +\infty)$ .

**问题 4.7(赵班, 21mid)** 求微分方程  $x^2y'' - xy' + 2y = x \ln x$  的通解.

**解** 这是 Euler 方程. 作变换  $t = \ln x$ , 则

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = x \frac{dy}{dx}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left( x \frac{dy}{dx} \right) = \frac{dx}{dt} \frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) = x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx}. \end{aligned}$$

代回方程可得

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} + 2y = te^t.$$

1. 齐次方程  $\frac{d^2y}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} + 2y = 0$  的通解为  $y = e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$ .

2. 非齐次方程的一个特解为  $te^t$ .

综上可得方程通解为

$$y = e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + te^t = x(C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x + \ln x).$$

**注** 欧拉方程的解法也是标准的, 令  $x = e^t$ , 规定  $D = \frac{d}{dt}$ , 则有

$$x^n y^{(n)} = D(D-1) \cdots (D-n+1)y.$$

即将方程转化为关于  $t$  的常系数高阶线性微分方程.

## 4.3 补充内容：扰动定理

### 定理 4.4 (扰动定理)

设  $n$  维向量值函数  $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$  在  $(x, \mathbf{y})$  空间内的某个开区域  $G$  上是连续的, 而且对  $\mathbf{y}$  满足局部 Lip-条件. 假设  $\mathbf{y} = \xi(x)$  是微分方程

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \quad (4.3.1)$$

的一个解, 令它的存在区间为  $J$ . 现在, 在区间  $J$  内任取一个有界闭区间  $a \leq x \leq b$ , 则存在常数  $\delta > 0$ , 使得对任何初值  $(x_0, \mathbf{y}_0)$ , 满足:

$$a \leq x_0 \leq b, |\mathbf{y}_0 - \xi(x_0)| \leq \delta,$$

柯西问题

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0. \end{cases}$$

的解  $\mathbf{y} = \varphi(x, x_0, \mathbf{y}_0)$  也至少在区间  $a \leq x \leq b$  上存在, 并且在闭区域

$$D_\delta : a \leq x \leq b, a \leq x_0 \leq b, |\mathbf{y}_0 - \xi(x_0)| \leq \delta$$

上是连续的.



**证明** 该定理在课本中利用 Picard 迭代证明, 本处采用另一种办法证明 (此证明中的  $y$  均表示向量, 打

起来方便一些) .

1. 设  $f$  在  $G$  上关于  $y$  全局 Lip.

设以  $(x_0, y_0)$  为初值的解为  $y = y(x)$ , 令  $\eta(x) = y(x) - \xi(x)$ , 则  $\eta(x)$  满足方程

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{dx} = \frac{dy}{dx} - \frac{d\xi}{dx} = f(x, y(x)) - f(x, \xi(x)) = f(x, \eta(x) + \xi(x)) - f(x, \xi(x)) =: g(x, \eta). \\ \eta(x_0) = y(x_0) - \xi(x_0) = y_0 - \xi(x_0). \end{cases} \quad (4.3.2)$$

$g(x, \eta)$  具有如下性质:

- (a). 在  $a \leq x \leq b$ ,  $|\eta - \xi(x)| \leq \delta$  上连续.
- (b).  $|g(x, \eta)| \leq L|\eta|$ . 由  $f$  的全局 Lip 条件即得.
- (c).  $g(x, \eta)$  关于  $\eta$  满足 Lip 条件, 由于

$$\begin{aligned} |g(x, \eta_1) - g(x, \eta_2)| &= |f(x, \eta_1(x) + \xi(x)) - f(x, \xi(x)) - f(x, \eta_2(x) + \xi(x)) + f(x, \xi(x))| \\ &\leq L|\eta_1(x) + \xi(x) - \eta_2(x) - \xi(x)| = L|\eta_1(x) - \eta_2(x)|. \end{aligned}$$

故以  $(x_0, y_0 - \xi(x_0))$  为初值的方程 (4.3.2) 存在唯一解.

由课本定理 3.6 结合性质 b 可知上述解可延拓到区间  $a \leq x \leq b$  上.

下面利用 Gronwall 的估计给出  $\delta$  的存在性. 考察  $\eta^2$  满足的方程:

$$\begin{cases} \frac{d\eta^2}{dx} = 2\eta \frac{d\eta}{dx} = 2\eta g(x, \eta) \leq 2L|\eta|^2. \\ \eta^2(x_0) = |y_0 - \xi(x_0)|^2. \end{cases} \quad (4.3.3)$$

对方程 (4.3.3) 利用 Gronwall 不等式即得

$$\eta^2(x) \leq e^{2L|x-x_0|} |y_0 - \xi(x_0)|^2 \leq e^{2L|b-a|} |y_0 - \xi(x_0)|^2.$$

故

$$|\eta(x)| \leq e^{L|b-a|} |y_0 - \xi(x_0)|.$$

对  $\forall \sigma > 0$ , 令  $\delta < e^{-L|b-a|} \frac{\sigma}{2}$ , 则当  $|y_0 - \xi(x_0)| \leq \delta$  时,

$$|\eta(x)| \leq e^{L|b-a|} |y_0 - \xi(x_0)| \leq e^{L|b-a|} \delta < \sigma.$$

下面说明解对初值的连续依赖性, 采用反证.

否则  $y = \varphi(x, x_0, y_0)$  关于  $(x_0, y_0)$  不连续, 即  $\exists \epsilon > 0$ ,  $\xi_i, \eta_i$ , 满足  $|(\xi_i, \eta_i) - (\xi_0, \eta_0)| < \frac{1}{i}$ .

且  $\exists a \leq x_i \leq b$ , 使得  $|\varphi(x_i, \xi_i, \eta_i) - \varphi(x_i, \xi_0, \eta_0)| \geq \epsilon$ .

取该点列的子列  $x_i$  收敛于  $\bar{x} \in [a, b]$ . (此处为了方便后面证明将子列用  $x_i$  表示.)

#### 引理 4.1 (Arzela-Ascoli)

$\{\varphi_i(x)\}$  为一列有界闭区间  $I$  上的连续函数, 满足:

- (a). 一致有界:  $|\varphi_i(x)| \leq k, \forall i, \forall x$
- (b). 等度连续:  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta$ , 对  $\forall x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| < \delta$  时, 有

$$|\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| \leq \epsilon, \forall i$$

则  $\exists \{\varphi_{i_j}(x)\}$  在  $I$  上一致收敛.



记  $\varphi(x, \xi_i, \eta_i)$  为  $\varphi_i(x)$ , 验证 Arzela-Ascoli 的条件:

(a).  $\varphi_i(x)$  满足微分方程，进而满足对应的积分方程

$$\varphi_i(x) = \eta_i + \int_{\xi_i}^x f(x, \varphi(x, \xi_i, \eta_i)) dx.$$

故

$$|\varphi_i(x)| \leq |\eta_i| + M|x - \xi_i| \leq |y_0| + 1 + M(b - a).$$

其中  $M = \max_{a \leq x \leq b, |y - \xi(x)| \leq \delta} f(x, y)$ . 故一致有界.

(b). 注意到

$$|\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \varphi(x, \xi_i, \eta_i)) dx \leq M|x_1 - x_2|.$$

故等度连续.

由引理 4.1，存在  $\{\varphi_i(x)\}$  的某个子列在  $I$  上一致收敛于  $\psi(x)$ ，满足：

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, \psi(x)) dx.$$

与  $|\varphi_i(x_i) - \varphi_0(x_i)| \geq \epsilon$  矛盾.

2. 回到  $f$  在  $G$  上局部 Lip 的情形.

**引理 4.2** (有界闭集合中局部 Lip 和全局 Lip 的等价性)

$G$  为有界闭集合，则连续函数  $f$  满足局部 Lip 条件等价于满足全局 Lip 条件.



**证明** 证明请见第一次习题课讲义.

回到原命题的证明.

1 部分在证明  $\delta$  的存在时，给出了对  $\forall \sigma > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 使得当  $|y_0 - \xi(x_0)| \leq \delta$  时，有  $|y(x) - \xi(x)| \leq \sigma \cdot y(x)$  为初值为  $y_0$  的方程的解. 该表述表明，对任意的管状区域  $\Sigma_\sigma$ ，存在  $\delta$  使得初值  $y_0$  与最初给定的解曲线在  $x_0$  处的差距小于  $\delta$  时，可以使以  $y_0$  为初值的解曲线完全落入该管状区域  $\Sigma_\sigma$  内. 下图为直观的展示. 黄色区域代表管状区域  $\Sigma_\sigma$ .

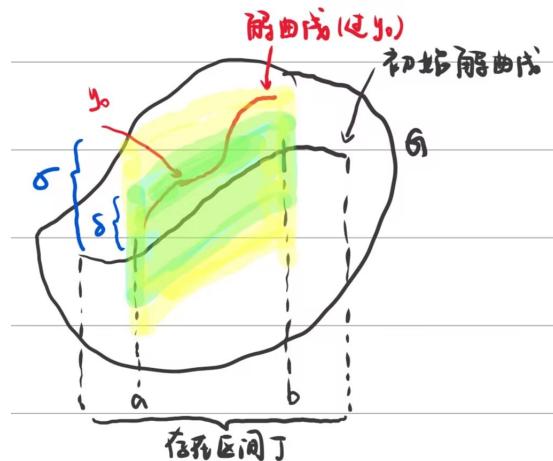


图 4.1: 扰动定理的直观图示

在给定  $\sigma$  与  $a, b$  的条件下，管状区域为一个紧集，在该紧集上满足局部 Lip 条件，由引理 2.2 知满足全局 Lip 条件，由 1 即完成命题的证明.

**注** 本证明中有几点耐人寻味：

1. ” $\sigma - \delta$ ” 语言的使用，是本证明中较难理解的地方.

2. 在证明  $\delta$  存在性时考虑  $\eta^2$  作为估计对象：由于我们只有对  $|\eta|$  的估计，求导与绝对值不可换序。

# 第5章 第五次习题课讲义

## 5.1 习题讲解

### 5.1.1 作业部分

练习 5.1(P210 1 (4)) 求解微分方程  $y'' + y = 4 \sin x$ 。

解 这是一个常系数二阶线性非齐次微分方程，首先求出齐次方程的通解（齐次方程的解集构成  $\mathbb{R}^2$ ）。为此，写出特征方程

$$\lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda = \pm i$$

于是齐次方程的通解是

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

我们再求非齐次方程的一个特解。为此，猜测特解具有如下的形式

$$\phi(x) = x(a \cos x + b \sin x),$$

其中  $a, b \in \mathbb{R}$  是待定的。将  $\phi(x)$  带入原方程，注意到  $\phi(x)$  中的后一项  $(a \cos x + b \sin x)$  就是齐次方程的通解，根据 Leibniz 法则， $\frac{d^2}{dx^2}$  作用在  $(a \cos x + b \sin x)$  身上二阶导与 1 作用在  $\phi(x)$  上得到的这两项一定消掉，而且对  $x$  求两次导为 0，所以只剩下对  $x$  和  $(a \cos x + b \sin x)$  分别求一次导那一项，

$$2 \cdot (-a \sin x + b \cos x) = 4 \sin x \implies a = -2, b = 0$$

于是得到特解  $\phi(x) = -2x \cos x$ 。综上，原方程的解为

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2x \cos x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

练习 5.2(P210 1 (6)) 求解微分方程  $y'' - 2y' + y = 6xe^x$ 。

解 这是一个常系数二阶线性非齐次微分方程，首先求出齐次方程的通解。为此，写出特征方程

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \implies \lambda = 1, 1$$

于是齐次方程的通解是

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^x.$$

我们再求非齐次方程的一个特解。为此，猜测特解具有如下的形式

$$\phi(x) = x^2(a + bx)e^x,$$

其中  $a, b \in \mathbb{R}$  是待定的。将  $\phi(x)$  带入原方程，注意到  $\phi(x)$  中的后一项  $(a + bx)e^x$  就是齐次方程的通解，根据 Leibniz 法则， $\frac{d^2}{dx^2}$  作用在  $(a + bx)e^x$  上二阶导、 $-2\frac{d}{dx}$  作用在  $(a + bx)e^x$  上一阶导与 1 作用在  $\phi(x)$  上得到的这三项一定消掉，于是只剩下

$$2(a + bx)e^x + 2 \cdot 2x(e^x(a + bx + b)) - 2 \cdot 2x(a + bx)e^x = 6xe^x,$$

化简一下得到

$$(2a + 6bx)e^x = 6xe^x \implies a = 0, b = 1$$

于是得到特解  $\phi(x) = x^3 e^x$ 。综上，原方程的解为

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^x + x^3 e^x.$$

**注** (1) 能猜则猜，常数变易得到的解长得不一样。

(2) 不要化为方程组求解，正如计算  $2 \times (-\sqrt{2})$  不要回到 Dedekind 分割。

(3) 如果解中含有过多的参量，比如同时含有  $C_1, C_2, x_0$ ，则这个解不是通解，会被判定为错误。

(4) 练习：考虑方程  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$ , 其中  $f$  是  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$  上的实值连续函数,  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ , 证明：若  $y(x)$  是方程的解，那么  $y(x)$  是实值函数。

✎ **练习 5.3(P210 2 (3))** 利用常数变易法求解微分方程  $y'' - y = x^{-1} - 2x^{-3}$ 。

**解** 这是一个常系数二阶线性非齐次微分方程，首先求出齐次方程的通解。为此，写出特征方程

$$\lambda^2 - 1 = 0 \implies \lambda = \pm 1$$

于是齐次方程的通解是

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

我们再求非齐次方程的一个特解。为此，我们使用常数变易法，设特解具有如下的形式

$$\phi(x) = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x},$$

其中  $C_1(x), C_2(x)$  是两个待定的  $C^2$  函数。对  $\phi(x)$  求一次导数，得到

$$\phi'(x) = C_1(x) e^x - C_2(x) e^{-x} + C'_1(x) e^x + C'_2(x) e^{-x}.$$

我们令

$$C'_1(x) e^x + C'_2(x) e^{-x} = 0. \quad (5.1.1)$$

于是

$$\phi''(x) = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x} + C'_1(x) e^x - C'_2(x) e^{-x}.$$

带入方程，得到

$$C'_1(x) e^x - C'_2(x) e^{-x} = x^{-1} - 2x^{-3}. \quad (5.1.2)$$

联立 (1) 和 (2) 得到下面的方程组

$$\begin{cases} C'_1(x) e^x + C'_2(x) e^{-x} = 0, \\ C'_1(x) e^x - C'_2(x) e^{-x} = x^{-1} - 2x^{-3}. \end{cases}$$

整理一下得到

$$\begin{cases} C'_1(x) = \frac{1}{2} e^{-x} (x^{-1} - 2x^{-3}), \\ C'_2(x) = \frac{1}{2} e^x (2x^{-3} - x^{-1}). \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} C_1(x) = c_1 + \int_{+\infty}^x \frac{1}{2} e^{-s} (s^{-1} - 2s^{-3}) ds = c_1 + \frac{1}{2} e^{-x} (-x^{-1} + x^{-2})|_{\infty}^x = c_1 + \frac{1}{2} e^{-x} (-x^{-1} + x^{-2}), \\ C_2(x) = c_2 + \int_{+\infty}^x \frac{1}{2} e^s (2s^{-3} - s^{-1}) ds = c_2 - \frac{1}{2} e^x (x^{-1} + x^{-2})|_{\infty}^x = c_2 - \frac{1}{2} e^x (x^{-1} + x^{-2}). \end{cases}$$

综上，原方程的解为

$$\begin{aligned}y(x) &= c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2}(-x^{-1} + x^{-2}) - \frac{1}{2}(x^{-1} + x^{-2}) \\&= c_1 e^x + c_2 e^{-x} - x^{-1}.\end{aligned}$$

**练习 5.4(P211 5)** 考虑微分方程  $y'' + y = 0$ 。设  $y = c(x)$  和  $y = s(x)$  分别是该方程满足初始条件

$$c(0) = 1, \quad c'(0) = 0$$

和

$$s(0) = 0, \quad s'(0) = 1$$

的解。不求解微分方程，请证明：

- (1)  $c(x)$  是偶函数， $s(x)$  是奇函数；
- (2)  $s^2(x) + c^2(x) \equiv 1$ ；
- (3)  $s(\alpha + \beta) = s(\alpha)c(\beta) + s(\beta)c(\alpha)$ ；
- (4) 如果  $\tau$  是  $c(x)$  在  $x > 0$  上的第一个零点，则  $c(x)$  和  $s(x)$  均是以  $4\tau$  为周期的。

**证明** (1) 显然如果  $y(x)$  是方程的解，那么  $y(-x)$  也是，再根据线性就知道  $y(x) \pm y(-x)$  也是方程的解。特别的  $c(x) - c(-x)$  是初值为  $c(0) - c(-0) = 0$ ，导数初值为  $c'(0) - c'(-0) = 0$  的解，根据唯一性定理， $c(x) - c(-x) \equiv 0$ ，即  $c(x)$  是偶函数。类似地， $s(x) + s(-x)$  是初值为  $s(0) + s(-0) = 0$ ，导数初值为  $s'(0) - s'(-0) = 0$  的解，根据唯一性定理， $s(x) + s(-x) \equiv 0$ ，即  $s(x)$  是奇函数。

(2) 我们证明下面关键的两件事

$$c'(x) = -s(x), \quad s'(x) = c(x).$$

这是因为首先方程  $y'' + y = 0$  的解  $y(x)$  一定是光滑的，在方程两边求导便知道  $y'(x)$  也是方程的解。特别的， $-c'(x)$  是初值为  $-c'(0) = 0$ ，导数初值为  $-c''(0) = c(0) = 1$  的解，根据唯一性定理  $-c'(x) = s(x)$ 。另一个式子是类似的。

回到原题，我们令  $e(x) = s^2(x) + c^2(x)$ 。计算导数  $e'(x) = 2(s(x)s'(x) + c(x)c'(x)) = 2(s(x)c(x) - c(x)s(x)) = 0$ ，再结合  $e(0) = s^2(0) + c^2(0) = 1$  便得到  $e(x) \equiv 1$ 。

(3) 注意到  $s(x + \beta)$  也是方程的解，初值为  $s(0 + \beta) = s(\beta)$ ，导数初值为  $s'(0 + \beta) = c(\beta)$ 。根据线性， $s(x)c(\beta) + s(\beta)c(x)$  也是方程的解，初值为  $s(0)c(\beta) + s(\beta)c(0) = s(\beta)$ ，导数初值为  $s'(0)c(\beta) + s(\beta)c'(0) = c(0)c(\beta) - s(\beta)s(0) = c(\beta)$ ，根据唯一性定理  $s(x + \beta) = s(x)c(\beta) + s(\beta)c(x)$ ，把  $x$  改写成  $\alpha$  就得到了想要的结果。

(4) 在 (3) 中得到了  $s(x + \beta) = s(x)c(\beta) + s(\beta)c(x)$ ，求导数并把  $x$  改写为  $\alpha$  便得到  $c(\alpha + \beta) = c(\alpha)c(\beta) - s(\beta)s(\alpha)$ 。于是可以计算  $c(x + \tau) = c(x)c(\tau) - s(x)s(\tau) = -s(x)s(\tau)$ ，接着算  $c(x + 2\tau) = -s(x + \tau)s(\tau) = -c(x)s^2(\tau) = -c(x)$ ，于是便得到了  $c(x + 4\tau) = c(x)$ ，即  $c(x)$  以  $4\tau$  为周期。再注意到  $s(x) = -c'(x)$  就知道  $s(x)$  也以  $4\tau$  为周期。

**注** (1) 光滑函数的 Taylor 展开未必收敛到原函数，经典反例是  $e^{-1/x^2}$ 。但是在不求解方程的前提下我们能够知道  $y'' + y = 0$  的解是解析的（可以尝试证明这一点），于是如果  $y(0) = y'(0) = 0$ ，那么根据  $y'' = -y \in C^2(\mathbb{R})$  易知  $y^{(n)}(0) = 0$ ，所以  $y(x) \equiv 0$ 。不过，我们没有必要走到解析的范畴里，因为在光滑范畴里利用唯一性定理就可以了。

(2) 不求解微分方程，请证明：(4) 中所述的  $\tau$  是存在的。于是我们可以定义

**定义 5.1**

我们定义圆周率为微分方程  $y'' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$  的唯一解  $c(x)$  在  $x > 0$  上的第一个零点  $\tau$  的两倍，记为  $\pi$ ，即  $\pi = 2\tau$ 。



下面是一些有趣/无聊的小练习，感兴趣的同学可以完成。

**证明：**在 Lebesgue 测度下， $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$  的测度为  $\pi$ 。

**证明：** $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$  的子流形测度为  $2\pi$ 。

从这里我们可以大致看到，即便是圆周率这样的小学生都习以为常的概念在现代分析学中也不是平凡的，甚至从某种另类的意义上讲，微积分理论的发展的一个目的就是证明“圆周率是  $\pi$ ”。

**练习 5.5(P331 6)** 证明：如果齐次线性微分方程组  $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$  的每个解当  $t \rightarrow +\infty$  时都有界，则其零解是 Lyapunov 正向稳定的；如果每个解在  $t \rightarrow +\infty$  趋向于零，则其零解是 Lyapunov 正向渐进稳定的。

**证明** 设方程的基解矩阵为  $\Phi(t)$ ，不妨假设  $\Phi(0) = \mathbf{I}$ 。根据题意，存在  $M > 0$  使得  $\|\Phi(t)\| \leq M$ ，对任意的  $t \geq 0$ 。于是以  $\mathbf{x}_0$  出发的解为  $\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0$ ，满足  $|\mathbf{x}(t)| \leq \|\Phi(t)\||\mathbf{x}_0| \leq M\mathbf{x}_0$ ，对任意的  $t \geq 0$ 。可见零解是正向稳定的。倘若更进一步，每个解都在  $t \rightarrow +\infty$  时趋于零，那么  $\|\Phi(t)\| \rightarrow 0$ ，于是  $|\mathbf{x}(t)| \rightarrow 0$ ，可见零解是正向渐进稳定的。

**练习 5.6(P331 7)** 证明：如果齐次线性微分方程组  $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$  至少有一个当  $t \rightarrow +\infty$  时无界的解，则其零解不是 Lyapunov 正向稳定的。

**证明** 假设那个当  $t \rightarrow +\infty$  时无界的解为  $\mathbf{x}(t)$ ，我们有  $|\mathbf{x}(t)| \rightarrow \infty$ ，当  $t \rightarrow +\infty$ 。根据线性，对任意的  $\lambda \in \mathbb{R}$ ， $\lambda\mathbf{x}(t)$  也是方程的当  $t \rightarrow +\infty$  时无界的解，取  $\lambda$  非常小，可见零解不是 Lyapunov 正向稳定的。

**练习 5.7(P331 8)** 考虑微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}(t)x + a_{12}(t)y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}(t)x + a_{22}(t)y. \end{cases}$$

假设

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (a_{11}(t) + a_{12}(t)) = b > 0.$$

证明：该方程的零解不是 Lyapunov 正向稳定的。

**证明** 设方程的一组基解是  $\phi_1(t), \phi_2(t)$ ，则 Wronsky 行列式  $W(\phi_1, \phi_2)(0) \neq 0$ 。根据 Liouville 公式，得到

$$W(\phi_1, \phi_2)(t) = W(\phi_1, \phi_2)(0)e^{\int_0^t a_{11}(s) + a_{22}(s) ds} \rightarrow \infty,$$

说明至少  $\phi_1(t), \phi_2(t)$  中的一个是当  $t \rightarrow +\infty$  时无界的，根据上一题知零解不是 Lyapunov 正向稳定的。

**注** (1) 总结一下，对于有限维的线性方程组，我们有

零解稳定  $\iff$  每个解都有界  $\iff$  一组基解有界，

零解渐近稳定  $\iff$  每个解都趋于 0  $\iff$  一组基解趋于 0。

(2) 什么样的方程组是“无限维”的？对于无限维的情形上面的结论还对吗？

(3) 如果方程线性部分的矩阵  $\mathbf{A}(t)$  与  $t$  有关, 则不能使用特征值来判断稳定性。非自治系统不能使用 Lyapunov 第二方法。

#### 练习 5.8P331 4 研究微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -1 + x^2 \end{cases}$$

的奇点的 Lyapunov 稳定性。

**解** 首先计算奇点, 令  $y = 0$  且  $-1 + x^2 = 0$ , 得到两个奇点  $(\pm 1, 0)$ , 下面分别讨论他们的稳定性。

对于奇点  $(1, 0)$ , 做换元  $\tilde{x} = x - 1$ ,  $\tilde{y} = y$ , 原方程化为

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{y}, \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} = \tilde{x}^2 + 2\tilde{x}. \end{cases}$$

这样我们只要考虑零解的稳定性。线性化后得到的矩阵是常数矩阵, 特征值是  $\pm\sqrt{2}$ , 于是原方程  $(1, 0)$  这个奇点是不稳定的。

对于奇点  $(-1, 0)$ , 做换元  $\tilde{x} = x + 1$ ,  $\tilde{y} = y$ , 原方程化为

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{y}, \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} = \tilde{x}^2 - 2\tilde{x}. \end{cases}$$

这样我们只要考虑零解的稳定性。线性化后得到的矩阵是常数矩阵, 特征值是  $\pm\sqrt{2}i$ , 即使这两个特征值对应 Jordan 块是 1 阶的也无法判断原方程的稳定性! 下面考虑使用 Lyapunov 第二方法。首先把方程化为二阶方程

$$\tilde{x}'' = \tilde{x}^2 - 2\tilde{x},$$

在方程两边乘上  $\tilde{x}'$ , 得到

$$\tilde{x}'\tilde{x}'' = \tilde{x}^2\tilde{x}' - 2\tilde{x}\tilde{x}',$$

注意到  $\tilde{x}'\tilde{x}'' = (\frac{1}{2}(\tilde{x}')^2)'$ ,  $\tilde{x}^2\tilde{x}' = (\frac{1}{3}\tilde{x}^3)'$ , 以及  $2\tilde{x}\tilde{x}' = (\tilde{x}^2)'$ , 上式化为

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}(\tilde{x}')^2 - \frac{1}{3}\tilde{x}^3 + \tilde{x}^2 \right) = 0,$$

这表明  $\frac{1}{2}(\tilde{x}')^2 - \frac{1}{3}\tilde{x}^3 + \tilde{x}^2$  应该是我们追寻的 Lyapunov 函数。转化到原方程, 我们令

$$V(x, y) = \frac{1}{2}\tilde{y}^2 - \frac{1}{3}\tilde{x}^3 + \tilde{x}^2,$$

它在  $(0, 0)$  的某个邻域中正定(因为三次方项是高阶无穷小), 并且  $V^*(x, y) = \tilde{y}(\tilde{x}^2 - 2\tilde{x}) - \tilde{x}^2\tilde{y} + 2\tilde{x}\tilde{y} = 0$ , 这说明零解是正向稳定的。同时这也说明零解不是正向渐近稳定的, 这是因为对于从任意的  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$  出发的解  $\phi(t)$ ,  $V(\phi(t))$  保持不变且不为 0, 所以  $\phi(t)$  不会趋于  $(0, 0)$ 。

**注** (1) 这样转化为二阶方程, 并且在方程两边乘上某个东西再化为全微分的方法只在特定的情况下奏效, 不过在偏微分方程中我们也会用类似的技巧来构造一个偏微分方程的能量。

(2) 如果只能判断出  $V^*$  在零点的一个空心邻域内  $\leq 0$ , 则不能说明渐近稳定。如果  $V^*$  在零点的任意一个空心邻域内都有零点也不能说明零解不是渐近稳定。

(3) 如果没有特别说明, 稳定性一定要判断到是否渐进稳定。

练习 5.9(P331 5 (1)) 讨论以下微分方程组的零解的 Lyapunov 稳定性:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x - x^4y. \end{cases}$$

解 线性化后得到的线性部分矩阵特征值为  $\pm i$ , 所以无法判断原方程零解的稳定性。下面考虑 Lyapunov 第二方法。令

$$V(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2,$$

它在零点的邻域内正定, 并且  $V^*(x, y) = x(-y - xy^2) + y(x - x^4y) = -x^2y^2 - x^4y^2$  在零点的空心邻域内  $\leq 0$ , 于是零解是正向稳定的。

下面我们证明, 零解还是正向渐近稳定的, 事实上我们证明下面这个更强的结论: 对于任意的  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , 从  $(x_0, y_0)$  出发的解  $\phi(t; x_0, y_0) \rightarrow 0$ , 当  $t \rightarrow +\infty$ 。我们用反证法, 假设  $\phi(t; x_0, y_0)$  不趋于零, 由于  $V^*(\phi(t; x_0, y_0)) \leq 0$ ,  $|\phi(t; x_0, y_0)| \leq |\phi(0; x_0, y_0)|$ , 对任意的  $t \geq 0$ 。我们记  $r = |(x_0, y_0)|$ , 那么一定存在  $(x_1, y_1) \in \overline{B(0, r)} - \{0\}$ , 以及一个递增的时间序列  $\{t_n\}_{n \geq 1}$ , 使得  $t_n \rightarrow +\infty$  并且  $\phi(t_n; x_0, y_0) \rightarrow (x_1, y_1)$  (这里利用了  $\overline{B(0, r)}$  的紧性)。根据连续性可知  $V(\phi(t_n; x_0, y_0)) \rightarrow V(x_1, y_1)$ 。考虑到  $V(\phi(t; x_0, y_0))$  是单调递减的, 实际上可以得到  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\phi(t; x_0, y_0)) = V(x_1, y_1)$ 。下面我们声称: 从  $(x_1, y_1)$  出发的解  $\phi(t; x_1, y_1) = (x(t), y(t))$  满足  $V(\phi(t; x_1, y_1)) \equiv V(x_1, y_1)$ , 即沿着解  $V$  是常数。事实上, 由于  $\phi(t_n; x_0, y_0) \rightarrow (x_1, y_1) = \phi(0; x_1, y_1)$ , 根据解对初值的连续依赖性, 我们得到对于任意的  $t \geq 0$ ,  $\phi(t_n + t; x_0, y_0) \rightarrow \phi(t; x_1, y_1)$ , 于是  $V(\phi(t; x_1, y_1)) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(\phi(t_n + t; x_0, y_0)) = V(x_1, y_1)$ 。然而这表明  $V^*(\phi(t; x_1, y_1)) = -x^2(t)y^2(t)(1 + x^2(t)) \equiv 0$ , 即  $x(t)y(t) \equiv 0$ 。对这个式子求导, 得到

$$x'(t)y(t) + x(t)y'(t) = -y^2(t) - x(t)y^3(t) + x^2(t) - x^5(t)y(t) \equiv 0,$$

于是  $x^2(t) - y^2(t) \equiv 0$ , 再结合  $x(t)y(t) \equiv 0$  就得到  $(x(t), y(t)) \equiv (0, 0)$ , 而这与假设  $(x(0), y(0)) = (x_1, y_1) \neq (0, 0)$  相矛盾! 综上, 该方程组的零解是渐近稳定的。

注 实际上我们证明了所谓 Lasalle 不变性原理, 使用的技巧主要是去分析解的极限点集合的行为。研究解的极限集是微分动力系统中很基本的技术, 值得一提的是, Poincare-Bendixson 定理事实上确定了平面动力系统的所有可能的极限性态, 感兴趣的同学可以学习。

## 5.1.2 补充习题

### 问题 5.1(自治系统的稳定性)

(1) (Lienard 方程) 设  $g(x)$  是  $\mathbb{R}$  上的  $C^1$  函数, 且  $g(0) = 0$ ,  $xg(x) > 0$ 。证明: 微分方程

$$x'' + x' + g(x) = 0$$

的零解是渐进稳定的。

**证明** 首先将方程化为方程组

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -g(x_1) - x_2 \end{cases}$$

自然先尝试构造

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} g(t)dt,$$

显然该函数在 0 的邻域内正定。下面计算

$$V^*(x_1, x_2) = g(x_1)x_2 + x_2(-g(x_1) - x_2) = -x_2^2 \leq 0,$$

于是零解是稳定的。不过上面的计算得不到渐近稳定的结论，我们改用如下的 Lyapunov 函数

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} g(t)dt + cg(x_1)x_2,$$

其中  $c > 0$  是一个待定的参数。(这种在原先  $\frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} g(t)dt$  的基础上补上一项“交叉项”)

$$\left(\frac{1}{2}x_2^2\right)' \left(\int_0^{x_1} g(t)dt\right)' = x_2g(x_1)$$

的方法是常用的。) 此时我们有

$$V(x_1, x_2) \geq \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} g(t)dt - \frac{c}{2}g(x_1)^2 - \frac{c}{2}x_2^2,$$

再考虑到

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)^2}{\int_0^x g(t)dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2g(x)g'(x)}{g(x)} = 2g'(0),$$

于是存在常数  $M > 0$ , 使得在 0 附近有  $|g'(x_1)| \leq M$ , 并且

$$g(x)^2 \leq M \int_0^x g(s)ds.$$

于是

$$V(x_1, x_2) \geq \frac{1-c}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} g(t)dt \left(1 - \frac{c}{2}M\right),$$

为了使得  $V$  在 0 附近正定, 只需要  $0 < c < \min\{1, \frac{2}{M}\}$ 。下面计算

$$\begin{aligned} V^*(x_1, x_2) &= (g(x_1) + cg'(x_1)x_2)x_2 + (x_2 + cg(x_1))(-g(x_1) - x_2) \\ &= (-1 + cg'(x_1))x_2^2 - cg^2(x_1) - cg(x_1)x_2 \\ &\leq (-1 + cM)x_2^2 - cg^2(x_1) - cg(x_1)x_2 \\ &\leq (-1 + cM)x_2^2 - cg^2(x_1) + \frac{c}{2}g^2(x_1) + \frac{c}{2}x_2^2 \\ &= \left(-1 + cM + \frac{c}{2}\right)x_2^2 - \frac{c}{2}g^2(x_1). \end{aligned}$$

于是取  $c > 0$  使得  $cM + \frac{c}{2} < 1$  即可使得

$$V^*(x_1, x_2) < 0, (x_1, x_2) \neq (0, 0),$$

可见零解是渐近稳定的。

**注** 历史上, Lienard 方程是在研究 RLC 电路的震荡现象时写出的方程, 其形式如下

$$\begin{cases} x' = y - F(x) \\ y' = -x. \end{cases}$$

这里的  $F(x)$  就对应于题目中  $f(x)$  的积分, 而且  $g(x) = x$ 。我们可以对这种情形(指  $g(x) = x$ )作一个物理上的解释。

考虑单回路的 RLC 电路, 我们设  $L = C = 1$ , 这里的电阻  $R$  是非线性的, 对应的 Ome 定律为

$U = F(I)$ 。设  $x$  为回路中的电流，设  $y$  为电容上的电压降，那么根据 Kirchhoff 定律有

$$\frac{dx}{dt} - y + F(x) = 0,$$

此外根据电容的性质

$$y' = -x,$$

(由于  $C = 1$ ,  $y$  就是电容储存的电荷，从而导数就是通过电容的电流。) 整理一下就发现此时的 Kirchhoff 方程就是 Lienard 方程。同时这也提醒了我们这个系统(电路)的能量函数应该是

$$E(x, y) = E(I, U_C) = \frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}CU_C^2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2,$$

这跟我们上面(当  $g(x) = x$  时)构造的  $V(x, y)$  一致。

(2) (赵班, 22mid) 通过构造 Lyapunov 函数讨论方程

$$y'' + y' + y^3 = 0$$

的零解的稳定性。

**解** 在上一题中取  $g(y) = y^3$  即可。

(3) (赵班, 21mid) 分析系统

$$\begin{cases} x' = -y - x^3 \\ y' = x - y^3 \end{cases}$$

的零解的稳定性。

**解** 考虑  $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  即可。

(4) (赵班, 20mid) 讨论方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = (\varepsilon x + 4y)(z + 1) \\ \dot{y} = (-x + \varepsilon y)(z + 1) \\ \dot{z} = -z^3 \end{cases}$$

零解的稳定性。

**解** 首先尝试线性近似，近似后的方程是

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon x + 4y \\ \dot{y} = -x + \varepsilon y \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

对应矩阵的特征值是  $\varepsilon + 2i, \varepsilon - 2i, 0$ 。于是如果  $\varepsilon > 0$ ，零解是不稳定的。

对于  $\varepsilon \leq 0$  的情况，线性近似就没用了，于是考虑 Lyapunov 第二方法，我们待定如下形式的的 Lyapunov 函数

$$V(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2,$$

取  $a, b, c > 0$  即可保证正定性。下面计算

$$\begin{aligned} V^*(x, y, z) &= 2ax(\varepsilon x + 4y)(z + 1) + 2by(-x + \varepsilon y)(z + 1) + 2cz(-z^3) \\ &= 2a\varepsilon(z + 1)x^2 + 2b\varepsilon(z + 1)y^2 - 2cz^4 + (8a - 2b)xy(z + 1). \end{aligned}$$

可见如果  $\varepsilon < 0$ , 并且取  $8a = 2b$ , 就使得  $V^*$  在 0 的空心邻域  $\{z > -1\} - \{0\}$  内小于 0, 于是零解是渐近稳定的。

最后对于  $\varepsilon = 0$  的情况, 上面的计算只能告诉我们零解是稳定的, 而无法判断是否渐近稳定, 我们要单独处理。重写方程如下

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y(z+1) \\ \dot{y} = -x(z+1) \\ \dot{z} = -z^3 \end{cases}$$

于是考虑如下的函数

$$V(x, y, z) = x^2 + 4y^2.$$

虽然它不满足在 0 附近正定, 但也没关系, 因为

$$V^*(x, y, z) = 2x \cdot 4y(z+1) + 8y \cdot (-x(z+1)) = 0,$$

所以从任意  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$  出发的解都不会趋于 0, 从而此时零解不是渐近稳定的。

### 问题 5.2(非自治系统的稳定性)

- (1) (赵班, 22mid) 设常数  $a > 0$ ,  $f(t, y)$  和  $\partial f / \partial y$  关于  $(t, y)$  在  $0 \leq t < \infty, |y| < k$  上是连续的,  $k$  是一个常数。并且  $f$  关于  $0 \leq t < \infty$  一致成立下列极限

$$\lim_{|y| \rightarrow 0} \frac{|f(t, y)|}{|y|} = 0.$$

设  $b(t)$  关于  $0 \leq t < \infty$  连续, 并且  $\lim_{t \rightarrow \infty} b(t) = 0$ , 如果  $t_0$  充分大, 证明: 存在  $\delta > 0$ , 使得对任意的  $|y_0| < \delta$ , 微分方程

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b(t)y + f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

的解  $y = y(t)$  在  $[t_0, \infty)$  上存在, 并且始终满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = 0.$$

**证明** 取充分大的  $t_0$ , 使得对于任意的  $t \geq t_0$ ,  $|b(t)| < \frac{a}{3}$ 。由于  $\lim_{|y| \rightarrow 0} \frac{|f(t, y)|}{|y|} = 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得对任意的  $|y| < \delta$ , 以及任意的  $t \geq 0$ , 有  $|f(t, y)| \leq \frac{a}{3}|y|$ 。现在考虑方程以  $y(t_0) = y_0$  (其中  $|y_0| < \delta$ ) 为初值的解  $y = y(t)$ , 在存在区间 (且  $|y(t)| < \delta$  的时间) 上, 它满足

$$\frac{dy}{dt} = -ay(t) + b(t)y(t) + f(t, y(t)),$$

与之等价的是

$$e^{at}y(t) = e^{at_0}y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{as} (b(s)y(s) + f(s, y(s))) ds,$$

于是

$$e^{at}|y(t)| \leq e^{at_0}|y_0| + \int_{t_0}^t e^{as} \left( \frac{a}{3}|y(s)| + \frac{a}{3}|y(s)| \right) ds,$$

根据 Gronwall 不等式,

$$e^{at}|y(t)| \leq e^{at_0}|y_0|e^{\frac{2}{3}a(t-t_0)},$$

即

$$|y(t)| \leq e^{a(t_0-t)} |y_0| e^{\frac{2}{3}a(t-t_0)} = |y_0| e^{\frac{1}{3}a(t_0-t)}.$$

由此可见  $y(t)$  实际上在  $[t_0, \infty)$  上存在，并且始终满足  $|y(t)| < \delta$ 。

- (2) 设  $n$  阶常数矩阵  $A$  的所有特征值的实部都小于  $\alpha$ ，设  $\mathbf{g}(t, \mathbf{y})$  是一个  $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$  上的(向量值)连续函数，并且满足

$$|\mathbf{g}(t, \mathbf{y})| \leq h(t) |\mathbf{y}|,$$

其中  $h(t)$  是一个  $[0, \infty)$  上的连续函数。证明：方程

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{g}(t, \mathbf{y})$$

的任一解  $\mathbf{y}(t)$  满足估计

$$|\mathbf{y}(t)| \leq C |\mathbf{y}(0)| e^{\alpha t + CH(t)},$$

其中  $H(t) = \int_0^t h(s) ds$ ,  $C > 0$  是一个与解  $\mathbf{y}(t)$  无关的常数。

**证明** 首先，由于  $A$  的所有特征值都小于  $\alpha$ ，所以存在  $C > 0$ ，使得对任意的  $t \geq 0$ ，有

$$\|\mathbf{e}^{At}\| \leq C e^{\alpha t}.$$

接下来我们的目标还是把方程转化为积分方程之后使用绝对值不等式做估计，然后用 Gronwall 不等式得到结果。

$$(\mathbf{e}^{-At}\mathbf{y})' = \mathbf{e}^{-At}(\mathbf{y}' - A\mathbf{y}) = \mathbf{e}^{-At}\mathbf{g}(t, \mathbf{y}),$$

于是化为积分方程

$$\mathbf{e}^{-At}\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(0) + \int_0^t \mathbf{e}^{-As}\mathbf{g}(s, \mathbf{y}(s))ds.$$

注意我们不能直接在这一步取绝对值(为什么？可以参考最后一小问)，要先化为

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{e}^{At}\mathbf{y}(0) + \int_0^t \mathbf{e}^{A(t-s)}\mathbf{g}(s, \mathbf{y}(s))ds.$$

利用绝对值不等式，得到

$$|\mathbf{y}(t)| \leq C e^{\alpha t} |\mathbf{y}(0)| + \int_0^t C e^{\alpha(t-s)} h(s) |\mathbf{y}(s)| ds.$$

为了利用 Gronwall 不等式，把  $e^{\alpha t}$  除到等式左边，得到

$$e^{-\alpha t} |\mathbf{y}(t)| \leq C |\mathbf{y}(0)| + \int_0^t C h(s) (e^{-\alpha s} |\mathbf{y}(s)|) ds.$$

使用 Gronwall 不等式，得到

$$e^{-\alpha t} |\mathbf{y}(t)| \leq C |\mathbf{y}(0)| e^{CH(t)},$$

即

$$|\mathbf{y}(t)| \leq C |\mathbf{y}(0)| e^{\alpha t + CH(t)}.$$

- (3) (赵班, 21mid) 设  $n$  阶常数矩阵  $A$  的所有特征值都有负的实部， $n$  阶矩阵  $B(t)$  在  $[0, \infty)$  上连续，且满足

$$\int_0^\infty \|B(t) - A\| dt < \infty.$$

证明：方程组

$$\frac{dx}{dt} = B(t)x$$

的零解是渐近稳定的。

**证明** 取  $g(t, x) = (B(t) - A)x$ ,  $h(t) = \|B(t) - A\|$ , 利用上一题的结果得到

$$|x(t)| \leq C|x(0)|e^{\alpha t + CH(t)}.$$

注意到  $\alpha < 0$  并且  $H(t)$  是有界的, 所以  $x(t) \rightarrow 0$ 。

(4) (赵班, 21mid, again) 以下是本题的另一解答, 请找出其中的错误。

**解** 把方程改写为 (假设初值为  $x_0$ )

$$\frac{dx}{dt} = Ax + (B(t) - A)x, \quad x(0) = x_0,$$

这等价于

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}(B(s) - A)x(s)ds.$$

由于  $A$  的特征值实部均为负, 存在  $\alpha > 0$ ,  $M > 0$ , 使得

$$\|e^{At}\| \leq M e^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0.$$

令  $y(t) = e^{-At}x(t)$ , 则根据 Gronwall 不等式,

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq |x_0| + \int_0^t \|B(s) - A\| |y(s)| ds \\ &\leq |x_0| e^{\int_0^t \|B(s) - A\| ds} \\ &\leq |x_0| e^{\int_0^\infty \|B(s) - A\| ds} \triangleq N. \end{aligned}$$

于是

$$|x(t)| \leq \|e^{At}\| |y(t)| \leq M N e^{-\alpha t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty.$$

从而零解是渐近稳定的。

## 5.2 补充内容：平面线性系统的动力学分类

### 问题 5.3 平面线性系统的动力学分类

本题中, 我们考虑的方程为  $\mathbb{R}^2$  上的线性方程

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

其中  $A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$  是一个常数矩阵, 我们一般简记为  $X' = AX$ 。根据常微分方程的基本理论, 我们知道这样方程 Cauchy 问题的解在  $\mathbb{R}$  上存在唯一(换句话说, 向量场  $X(p) = A \cdot p$  是完备的), 并且它的流

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (t, p) \mapsto \Phi(t, p) = \phi_t(p)$$

是光滑映射。

为了对所有这样的系统进行分类, 我们要指明容许的变换, 为此引入下面的定义。

**定义 5.2**

设  $A, B$  是两个平面(自治)动力系统,  $\Phi^A, \Phi^B$  是他们对应的流, 如果存在  $\mathbb{R}^2$  的自同胚  $h$ , 使得对任意的  $p \in \mathbb{R}^2$  和  $t \in \mathbb{R}$  有

$$h(\Phi^A(t, p)) = \Phi^B(t, h(p)),$$

那么则称  $A, B$  是(拓扑)共轭的, 称上面的  $h$  为从  $\mathbf{A}$  到  $\mathbf{B}$  的共轭。



很明显, 如果  $h$  是从  $A$  到  $B$  的共轭, 那么  $h^{-1}$  是从  $B$  到  $A$  的共轭。共轭是所有平面动力系统上的一个等价关系, 从而它们可以被分为若干共轭类。请注意, 我们这里只是要求  $h$  是同胚, 而不是微分同胚, 否则我们将会看到, 在微分同胚下的共轭类太多(比如星形节点与两项节点不是微分同胚的, 而星形节点与焦点是同胚的!) )

- (1) 证明: 对于某个系统  $A$ ,  $\phi_t^A$  是一个从  $A$  到  $A$  的共轭。
- (2) 证明: 如果  $h$  是从  $A$  到  $B$  的共轭, 那么  $h^{-1}$  是从  $B$  到  $A$  的共轭。
- (3) 证明: 共轭是所有平面动力系统上的一个等价关系。
- (4) 考虑两个一维的系统

$$x' = \lambda_1 x, \quad x' = \lambda_2 x,$$

记它们对应的流为  $\Phi^1$  和  $\Phi^2$ 。证明: 如果  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  同号且非零, 那么这两个系统是共轭的。

- (5) 证明: 对于两个矩阵  $A, B \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ , 如果存在  $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ , 使得  $PAP^{-1} = B$ , 那么系统  $X' = AX$  和  $X' = BX$  是共轭的。
- (6) 证明: 如果  $A, B \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$  的特征值均一正一负, 那么系统  $X' = AX$  和  $X' = BX$  是共轭的。  
(提示: 根据(5)的结论, 我们可以化到实相似标准型上考虑。)
- (7) 证明: 如果矩阵  $A$  有两个实部为负的特征值, 那么  $A$  必然(实)相似于如下三种(实)矩阵之一

$$(a) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

其中,  $\alpha, \lambda, \mu < 0$ 。

接下来, 我们首先证明(a), (b)两种情形都是共轭的。为此, 令

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

我们证明(a), (b)两种情况均与系统  $X' = BX$  共轭, 而且它们之间也共轭。

- (8) 设  $n(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$  是单位圆  $\mathbf{S}^1$  上的外法向量场。证明: 当  $A$  为(a), (b)两种情形时, 向量场  $X(p) = A \cdot p$  在  $\mathbf{S}^1$  上均是指向单位圆内的, 即  $X(p) \cdot n(p) < 0$  对任意的  $p \in \mathbf{S}^1$ 。
- (9) 证明: 当  $A$  为(a), (b)两种情形时, 对任意的初始位置  $p \in \mathbb{R}^2$ , 存在唯一的  $t \in \mathbb{R}$ , 使得

$$\phi_t^A(p) \in \mathbf{S}^1.$$

- (10) 令  $A$  为(a), (b)两种情形之一, 对于系统  $X' = AX$ , 定义

$$\tau^A : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \tau^A(x, y),$$

其中  $\tau^A(x, y)$  是从  $(x, y)$  出发到达  $\mathbf{S}^1$  的时间, 即唯一的那个  $t \in \mathbb{R}$  使得  $\phi_t^A \in \mathbf{S}^1$ 。证明:  $\tau^A$  是连续的。(提示: 使用隐函数定理。)

有了上面的准备, 下面我们具体构造从系统  $X' = AX$  到  $X' = BX$  的共轭。

(11) 定义如下的映射

$$H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \phi_{-\tau^A(x,y)}^B(\phi_{\tau^A(x,y)}^A(x, y)),$$

当然, 这里的定义要求  $(x, y) \neq (0, 0)$ , 我们补充定义  $H(0, 0) = (0, 0)$ 。证明:  $H$  是从系统  $X' = AX$  到  $X' = BX$  的共轭。

(12) 如果  $A$  是情形 (c) 中的矩阵, 证明: 对任意的  $\varepsilon > 0$ ,  $A$  实相似于

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(13) 证明: 对于充分小的  $\varepsilon > 0$ , 向量场

$$X(p) = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot p$$

在  $\mathbf{S}^1$  上也指向单位圆的内部, 从而证明如果  $A$  实相似于情形 (c) 中的矩阵, 那么  $X' = AX$  也与  $X' = BX$  共轭。

通过在方程两边同时加负号, 以上的证明过程对于  $A$  具有两个正实部特征值的情形同样成立。于是, 我们证明了: 具有两个正实部的特征值的平面线性系统相互共轭、具有两个负实部的特征值的平面线性系统相互共轭、具有一正一负特征值的平面线性系统相互共轭。下面我们继续考察当  $A$  有实部为 0 的特征值时的分类问题。

- (14) 设两个平面线性系统的特征值分别是  $\pm \beta i$  和  $\pm \gamma i$ , 其中  $\beta, \gamma > 0$  是正的实数。证明: 如果  $\beta = \gamma$ , 那么它们是共轭的; 如果  $\beta \neq \gamma$ , 那么它们不共轭。
- (15) 证明: 如果两个平面线性系统的都具有一个零特征值, 另一个特征值非零且同号, 那么它们是共轭的。
- (16) 证明: 如果两个平面线性系统都具有两个零特征值, 那么它们是共轭的。
- (17) 证明: 完成平面线性系统的动力学分类, 其中要证明不同类的是不共轭的。

### 证明

(1) 根据流的群性质, 我们有对任意的  $p$  和  $t$

$$\phi_t^A(\phi_s^A(p)) = \phi_s^A(\phi_t^A(p)),$$

此外  $\phi_t^A$  自然是同胚, 其逆映射是  $\phi_{-t}^A$ 。

(2) 由题意, 对任意的  $p$  和  $t$ , 我们有

$$h(\phi_t^A(p)) = \phi_t^B(h(p)),$$

在上式两边同时作用  $h^{-1}$  并且把  $p$  改写成  $h^{-1}(p)$  即得

$$\phi_t^A(h^{-1}(p)) = h^{-1}(\phi_t^B(p)).$$

(3) 自己与自己共轭是显然的, 对称性由 (2) 得到, 假设  $h$  是从系统  $A$  到  $B$  的共轭,  $g$  是从系统  $B$  到  $C$  的共轭, 那么对任意的  $p$  和  $t$ , 有

$$g \circ h(\phi_t^A(p)) = g(\phi_t^B(h(p))) = \phi_t^C(g \circ h(p)).$$

(4) 这种简单的情况可以直接解出来解,

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} x_0, \quad x_2(t) = e^{\lambda_2 t} x_0.$$

令

$$h(x) = \begin{cases} x^{\lambda_2/\lambda_1}, & x \geq 0 \\ -(-x)^{\lambda_2/\lambda_1}, & x < 0 \end{cases}$$

这是一个同胚。当  $x_0 \geq 0$  时，

$$h(x_1(t)) = x_0^{\lambda_2/\lambda_1} e^{\lambda_2 t} = h(x_0) e^{\lambda_2 t}.$$

当  $x_0 < 0$  时类似的计算表明  $h$  是两个系统的共轭。

(5) 映射

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad X \mapsto PX$$

显然是一个同胚，并且

$$h(e^{At} X_0) = PP^{-1} e^{Bt} P X_0 = e^{Bt} h(X_0),$$

这表明  $h$  是从系统  $X' = AX$  到  $X' = BX$  的一个共轭。

(6) 根据 (5)，我们可以假设

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \mu_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix},$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \mu_1, \mu_2 < 0$ 。那么容易验证映射

$$H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (h_1(x), h_2(y))$$

是从  $X' = AX$  到  $X' = BX$  的共轭，其中

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \begin{cases} x^{\lambda_2/\lambda_1}, & x \geq 0 \\ -(-x)^{\lambda_2/\lambda_1}, & x < 0 \end{cases} \\ h_2(y) &= \begin{cases} y^{\mu_2/\mu_1}, & y \geq 0 \\ -(-y)^{\mu_2/\mu_1}, & y < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(7) 这是线性代数的结论。

(8) 先考虑 (a) 的情形。对任意的  $p = (\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbf{S}^1$ ，我们有

$$X(p) \cdot n(p) = \begin{pmatrix} \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta \\ -\beta \cos \theta + \alpha \sin \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \alpha(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \alpha < 0.$$

对于 (b) 的情形，类似的计算得到

$$X(p) \cdot n(p) = \begin{pmatrix} \lambda \cos \theta \\ \mu \sin \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \lambda \cos^2 \theta + \mu \sin^2 \theta < 0.$$

(9) 存在性是显然的。如果不唯一的话，我们考虑“前两次”到达  $\mathbf{S}^1$  的时刻（请严格写出“前两次”的定义！），设为  $t_1$  和  $t_2$ ，其中对任意的  $t_1 < t < t_2$ ， $|\phi_t^A(p)| \leq 1$ ，于是

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_2} |\phi_t^A(p)|^2 = 2\phi_{t_2}^A(p) \cdot X(\phi_{t_2}^A(p)) = 2\phi_{t_2}^A(p) \cdot n(\phi_{t_2}^A(p)) < 0.$$

但是用左导数计算可得

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_2} |\phi_t^A(p)|^2 \geq 0,$$

这是个矛盾！

(10) 考虑流映射

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, x, y) \mapsto |\phi_t^A(x, y)|^2,$$

这是一个光滑的映射。并且对于  $(t, x, y)$  满足  $F(t, x, y) = 1$ , 即  $\phi_t^A(x, y) \in \mathbf{S}^1$ , 有

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x, y) = 2\phi_t^A(x, y) \cdot X(\phi_t^A(x, y)) = 2n(x, y) \cdot X(\phi_t^A(x, y)) < 0,$$

于是根据隐函数定理,  $\tau$  在每个  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  附近是光滑的, 特别的,  $\tau$  是连续的。

(11) 根据  $\tau$  在  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  上的连续性以及  $\phi^A, \phi^B$  的连续性, 我们得到  $H$  在  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  上是连续的。

当  $(x, y)$  非常靠近  $(0, 0)$  时,  $\tau^A(x, y)$  是一个很负的数, 从而  $-\tau^A(x, y)$  是一个很大的正数, 从而  $\phi_{-\tau^A(x, y)}^B$  离  $(0, 0)$  很近, 这就证明了  $H$  在  $(0, 0)$  处的连续性。 $H$  的逆映射就是将  $H$  表达式中的  $A, B$  相交换得到的, 其连续性的证明也是类似的。最后我们证明  $H$  是共轭。首先注意到

$$\phi_{\tau^A(x, y)-t}^A(\phi_t^A(x, y)) = \phi_{\tau^A(x, y)}^A(x, y),$$

于是

$$\tau^A(\phi_t^A(x, y)) = \tau^A(x, y) - t.$$

从而

$$H(\phi_t^A(x, y)) = \phi_{-\tau^A(\phi_t^A(x, y))}^B(\phi_{\tau^A(\phi_t^A(x, y))}^A(\phi_t^A(x, y))) = \phi_t^B \circ \phi_{-\tau^A(x, y)}^B \circ \phi_{\tau^A(x, y)}^A(x, y) = \phi_t^B(H(x, y)).$$

(12)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

(13) 对任意的  $p = (\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbf{S}^1$ , 我们有

$$X(p) \cdot n(p) = \begin{pmatrix} \lambda \cos \theta + \varepsilon \sin \theta \\ \lambda \sin \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \lambda(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \varepsilon \sin \theta \cos \theta,$$

当  $\varepsilon$  非常小时, 上式是小于 0 的。其余证明过程仿照上面即可。

(14) 注意到此时两个系统都是具有周期的, 它们共轭的一个必要条件是周期相等, 即  $\beta = \gamma$ 。另外当  $\beta = \gamma$  时它们显然是共轭的。

(15) 通过(4)中  $\mathbb{R}$  的自同胚构造即可。

(16) 显然。

(17) 留作习题答案略, 读者自证不难。

# 第6章 第七次习题课讲义

本次习题课带大家复习常微分方程部分的内容，回顾重要的定理结论和典型例题作业，并指出在解答问题时需要注意的要点。

## 6.1 解一阶微分方程

此章节对应教材第二章的内容，主要有三点：1. 恰当方程的求解；2. 一阶线性微分方程的解的表达式；通过换元解的微分方程。

### 6.1.1 恰当方程

回顾恰当方程的定义：若方程  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  满足存在  $\Phi(x, y)$  使得  $d\Phi(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ ，则称此方程为恰当方程。方程的解为  $\Phi(x, y) = C$ ， $C$  为常数。

很多时候，题目给的方程并不是恰当方程，但是可以在式子两边乘上一个积分因子将其变成恰当方程，因此如何找到积分因子是重要的。我们有如下定理：

#### 定理 6.1

若方程  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  满足  $\frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x})$  与  $y$  无关，记作  $G(x)$ ，那么  $\mu = \exp \int G dx$  是积分因子。

对称地，若  $\frac{1}{P}(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})$  与  $x$  无关，记作  $H(y)$ ，那么  $\mu = \exp \int H(y) dy$  是积分因子。



我们看一个例子：求解方程

$$y(1+xy)dx - xdy = 0$$

计算得  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2(1+xy)$ ，于是  $H(y) = -\frac{2}{y}$ ，那么取积分因子  $\mu = \frac{1}{y^2}$ ，方程转化为

$$(\frac{1}{y} + x)dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$$

解得  $\frac{x}{y} + \frac{1}{2}x^2 = C$ ， $C$  为常数。

对于一阶线性微分方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

我们有公式

$$y = e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt} (C + \int_{x_0}^x e^{\int_{x_0}^s p(t) dt} q(s) ds) = Ce^{-\int_{x_0}^x p(t) dt} + \int_{x_0}^x e^{-\int_s^x p(t) dt} q(s) ds$$

注意：在具体计算时，需要把  $x_0$  取成某个具体的数，最终答案不能既有  $x_0$  又有  $C$ ！最好不要把  $x_0$  取成  $\infty$ ，因为积分可能是无穷大。

怎么从一族解中找到某个特定的解（在无穷远处衰减、在某点附近有界……）

作业 P32 2,4,5

通过换元求解的方程有一些固定套路，但没有通法，需要靠同学们的经验。比如对于

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

当  $f$  是齐次的，或者有分式线性函数的形式时，我们有办法化简。我们看一个例子。求解方程

$$\frac{dy}{dx} = x^3y^3 - xy$$

这里注意到右边都是  $x/y$  的奇数次幂，如果两边同乘或除  $x/y$  并把变量换成  $x^2/y^2$  就可以化简：

$$\frac{ydy}{xdx} = x^2y^4 - y^2$$

令  $t = y^2, s = x^2$

$$\frac{dt}{ds} = st^2 - t$$

两边除以  $t^2$ ，令  $z = -\frac{1}{t}$

$$\frac{dz}{ds} = s + z$$

解得

$$z = -\frac{1}{Ce^s + se^s}$$

带回  $x/y$ ，得到

$$y = \pm \left( -\frac{1}{Ce^{x^2} + x^2 e^{x^2}} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

注意：1. 考虑每一步换元有没有漏掉解；2. 算出结果后，可以带入检验是否正确，也可以反过来，如果原方程有容易看出来的解，检验你是不是包含在结果内；3. 题目不会特别复杂，如果换元越换越复杂，可以考虑换个方向。

更多例子：参见第一次习题课补充题目（第七页）。

## 6.2 存在唯一性

这部分对应教材第三章的内容，定性理论较多。对于

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Peano 定理告诉我们当  $f$  是连续函数的时候，方程一定存在解；如果  $f$  还对  $y$  是局部 Lipschitz 的，那么还有唯一性。延伸定理说的是任何一条解曲线一定会达到区域  $G$  的任何紧子集以外。比较定理的结果是如果两个方程可以比较大小，那么初值给在同一点的对应的两个解也有大小关系。

### 定理 6.2

设  $f(x, y), F(x, y)$  在区域  $G$  内连续，且  $f(x, y) < G(x, y)$ 。设  $\phi(x), \Phi(x)$  分别是

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解，那么  $\phi(x) < \Phi(x)$  当  $x > x_0$ ,  $\phi(x) > \Phi(x)$  当  $x < x_0$ 。



### 定理 6.3

设  $f(x, y), F(x, y)$  在区域  $G$  内连续，且  $f(x, y) \leq G(x, y)$ 。设  $\phi(x), \Phi(x)$  分别是

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的右侧最小解、左侧最大解和

$$\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解，那么  $\phi(x) < \Phi(x)$  当  $x > x_0$ ,  $\phi(x) > \Phi(x)$  当  $x < x_0$ 。



应用方面，存在唯一性定理和延伸定理会用来判断某个方程的解是整体存在或者只有有限存在区间；比较定理可以用来估计存在区间的长度。理论方面，同学们应该要掌握 Picard 定理的迭代构造逼近解的方法，比较定理中最大最小解存在性的证明，特别要掌握怎么用 Arzela-Ascoli 定理得到一族逼近解。

注：我认为大家对于存在唯一性定理比较熟悉，这里没有贴具体定理的陈述。但是往年试题看在这里考证明题的概率非常大，如果有不懂的地方一定要弄明白。

注意：请留意延伸定理的结论，这个定理不能得到一些奇奇怪怪的结果。

例：证明初值问题

$$\begin{cases} y' = x^3 - y^3 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解在  $[x_0, +\infty)$  上存在。

这类题目需要严格叙述解曲线是如何延伸的。见第三次习题课。

例：设  $f(x, y)$  在矩形区域  $0 \leq x \leq a, |y| \leq b$  上连续，且对  $y$  是递增的，且  $f(x, 0) > 0 \forall x$ 。构造皮卡序列证明

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(0) = y \end{cases}$$

在  $[0, h]$  上存在解，其中  $h = \min\{a, \frac{b}{\max|f|}\}$

提示：这道题比 Peano 定理的证明简单。尝试证明构造的 Picard 序列是递增的！

## 6.3 解对初值连续依赖可微

当方程右边的  $f$  对参数连续可微时，解对参数也是连续可微的。出题通常是计算在某点或者某条曲线上解对参数的偏导数。

解法是固定的三步：写成积分方程、求变分、解微分方程。

注意：第二步求变分时复合函数求导要小心，注意哪些会出现对参数的偏导数，哪些会消失。第三步需要解出解曲线带入。

例：考虑

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2x + \mu y^2 \\ y(0) = \mu - 1 \end{cases}$$

求  $\frac{\partial y}{\partial \mu}|_{\mu=0}$

见第三次习题课。

例：证明存在  $\lambda = \lambda_0$  使方程

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \lambda(1 + \sin x^2 + \sin y^2) + x \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

有解。

考虑  $\lambda = 0, y(0) = 0$  的解，有  $y(1) = \frac{1}{2}$ 。考虑  $\lambda = -1, y(0) = 0$  的解，有  $y(1) < 0$ 。由解对参数连续依赖性。

## 6.4 一阶线性微分方程组

主要分为两部分：一部分是常系数方程组的求解，一部分是变系数方程组的理论。

对于常系数方程组  $\frac{dy}{dt} = Ay$ ，我们这么理解方程的求解：首先系数矩阵可以经过相似变换变成 Jordan 标准型。如果是可对角化的，那么方程组彼此独立，解无非是把  $e^{\lambda_i t}$  放到一起。对于 Jordan 块阶数大于 1 的情况， $e^A$  会产生多项式乘  $e^{\lambda_i t}$  的形式。因此对于一般的  $A$ ，解的形式是容易理解的：无非是把 Jordan 标准型的解向量的标准单位向量换成特征向量。若矩阵是可对角化的，那么方程的解是  $e^{\lambda_i t} r_i$ ，当 Jordan 块有大于 1 阶时，有  $e^{\lambda_i t}(r_i + tr')$ ，其中  $r' = (A - \lambda_i I)r_i$ 。

注意：计算题不要真化成标准型、算过渡矩阵，你没那么多时间的！理论推导才这么干。高阶常系数线性方程是一阶线性方程组的推论，当非齐次项有特殊的形式时我们有经验解法，这也是要求大家掌握的，比起一般解法会节省非常多时间。

例：解方程  $\frac{dy}{dt} = Ay$  其中  $A =$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

计算得到三个特征值均为 3。取特征向量  $r_1 = (1, 0, 0)$ ,  $r_2 = (0, 1, 0)$ ,  $r_3 = (0, 0, 1)$ 。用  $A - 3I$  作用这三个向量，得到  $r_{11} = 0, r_{21} = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}), r_{31} = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ，用  $(A - 3I)^2$  作用均为 0。那么得到的基解矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3}x & -\frac{2}{3}x \\ 0 & 1 - \frac{1}{3}x & \frac{1}{3}x \\ 0 & -\frac{1}{3}x & 1 + \frac{1}{3}x \end{pmatrix}$$

一般理论：方程的解空间是线性空间，维数等于方程个数。任何  $n$  个线性无关的解构成基解矩阵，每个解均可表示为基解矩阵乘某个向量。类似一阶线性方程，我们也可以从齐次方程的解得到非齐次方程的解：对于  $\frac{dy}{dt} = Ay + f$ ，如果已知基解矩阵  $\Phi$ ，则非齐次方程的解为

$$y(t) = \Phi(t)(c + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)f(s) ds)$$

作业：P190

这部分习题见第四次讲义。

Wronski 行列式也是一个重要的工具，对于给定解矩阵，其行列式满足

$$\frac{dW}{dt} = e^{trA}W$$

注意：变系数方程组不能用特征值说明解的行为！

例：考虑方程  $y'' + \alpha(t)y = 0$ ，设  $\phi_1(t), \phi_2(t)$  是两个线性无关的解，若  $|\phi_1(t)| + |\phi'_1(t)| \rightarrow 0$ ，证明  $|\phi_2(t)| + |\phi'_2(t)| \rightarrow \infty$ .

## 6.5 定性理论

动机：考虑方程  $\frac{dx}{dt} = f(x)$ ，在  $f$  的零点处，解会停留在此一点。我们想研究解在这点附近的行为。(不考虑含时的情况)

不妨假设要考虑的零点就是 0。通常， $f$  可以在零点做线性化： $f(x) = Ax + N(x)$ ，其中  $N(x) = o(|x|)$ 。此时零解的稳定性由线性方程决定。我们有

### 定理 6.4

对于  $\frac{dx}{dt} = Ax$ ，零解是渐近稳定的，当且仅当所有特征值实部为负；零解是稳定的，当且仅当所有特征值实部非正，且实部为零的特征值对应 Jordan 块都是一阶的；否则零解是不稳定的。



注：特征值实部不等于零时，线性项占主导作用，所以所有特征值实部为负可以得到非线性方程零解稳定性，而存在实部为正的特征值可以导出非线性方程零解不稳定性；但是对于实部为零的特征值，相当于线性项不起作用，非线性项起主要作用，会有很多种复杂的情况。

第二方法 (Lyapunov 泛函)：如果能够找到这样的函数  $V(x)$ ：

1.  $V(x) \geq 0$ ，且  $V(x) = 0$  当且仅当  $x = 0$ ；

2.  $V$  沿方程的导数非正， $\nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0$  那么零解是稳定。如果 2 中不等号是严格的，那么零解是渐近稳定的。往往能出题的 Lyapunov 函数并不多，做题时常见的比如  $x^2 + y^2$  这种都可以试试。例：考虑系统

$$\begin{cases} x' = -y - x^3 \\ y' = x - y^3 \end{cases}$$

的零解的稳定性。取  $V = x^2 + y^2$ ，计算得  $\frac{dV}{dt} = -x^4 - y^4 < 0$ 。于是零解是渐近稳定的。

更多例题见第五次讲义。

另一方面，在二维的情况下，我们希望画出奇点附近的相图。根据线性化矩阵  $A$  的特征值，可以

分为几类：

### 定理 6.5

记  $T = \text{Tr}A, D = \det A$ , 则

1.  $D < 0$  时, 奇点是鞍点;
2.  $D > 0, T^2 > 4D$  时, 奇点是双向结点;
3.  $D > 0, T^2 = 4D$  时, 奇点为单向结点或星形结点;
4.  $D > 0, 0 < T^2 < 4D$  时, 奇点是焦点;
5.  $D > 0, T = 0$  时, 奇点是中心。



例：考虑方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 5y - 2x + x^3 \end{cases}$$

在  $(0, 0)$  的类型。

线性化, 得到矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

得到  $\text{tr}A = 6 \det A = 9$ , 对应单向结点或者星形结点。设特殊方向为  $y = kx$ , 带入线性化方程, 只有一解  $k = 1$ , 因此是单向结点。

注意：画相图时，要标注轨线的方向，比如对于奇点是中心的情况，要标注轨线是顺时针还是逆时针旋转的。判断方向只要在特定点取值即可。

## 6.6 Sturm-Liouville 边值理论

考虑边值问题

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + (\lambda r(x) + q(x))y = 0 \\ y(0)\cos\alpha - y'(0)\sin\alpha = 0 \\ y(1)\cos\beta - y'(1)\sin\beta = 0 \end{cases}$$

其中  $r(x) > 0$ 。对于这个二阶线性方程, 我们提了两个边值条件, 显然对于大多数  $\lambda$  这个问题只有零解, 我们把使得问题有非零解的  $\lambda$  叫做特征值, 对应非零解叫做特征函数。主要结果是:

### 定理 6.6

上述问题有无穷多个特征值  $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots, \lambda_n \rightarrow +\infty$ , 且每个特征值  $\lambda_n$  对应的解空间是一维的, 特征函数在  $(0, 1)$  上恰有  $n$  个零点。



如同 Fourier 级数, 这些特征函数也有相似的性质:

$$\int_0^1 r(x)\phi_m(x)\phi_n(x) = \delta_{mn}$$

特征函数张成  $L^2([0, 1])$

例：考虑非齐次线性方程的 Sturm-Liouville 边值问题

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + (\lambda r(x) + q(x))y = 0 \\ y(0)\cos\alpha - y'(0)\sin\alpha = 0 \\ y(1)\cos\beta - y'(1)\sin\beta = 0 \end{cases}$$

其中  $r(x) > 0$ 。证明： $\lambda$  不为对应齐次 Sturm-Liouville 边值问题的特征值时，方程有且仅有一解；当  $\lambda = \lambda_m$  时，方程有解的充要条件是  $\int_0^1 f(s)\phi_m(s) ds = 0$  对方程做正交分解，设  $y = \sum_n y_n \phi_n(x)$ ，那么

$$\sum_n y_n(\lambda - \lambda_n)\phi_n(x) = f(x)$$

两边与  $\phi_n$  做内积

$$y_n(\lambda - \lambda_n) = \int_0^1 f(s)\phi_n(s) ds$$

于是  $y_n = \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \int_0^1 f(s)\phi_n(s) ds$ ，由  $f \in L^2([0, 1])$  以及  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  知  $\sum_n y_n^2 < \infty$ ，即找到了非齐次方程的解。同时也看到，当  $\lambda = \lambda_m$  时，必须要  $\int_0^1 f(s)\phi_m(s) ds = 0$  才能使表达式有意义。

另解：当  $\lambda$  不为特征值时，先任取此二阶非齐次线性方程的特解  $\phi(x)$ ，以及二阶齐次线性方程的两个线性无关的解  $a(x), b(x)$ （我们知道这一定是存在的），那么  $\phi(x) + c_1a(x) + c_2b(x)$  也是非齐次方程的解。然后设  $\phi$  的边值  $\delta = \phi(0)\cos\alpha - \phi'(0)\sin\alpha, \eta = \phi(1)\cos\beta - \phi'(1)\sin\beta$ ，那么我们只要说明可以选取  $c_1, c_2$  消掉边值，也就是矩阵

$$\begin{Bmatrix} a(0)\cos\alpha - b'(0)\sin\alpha & a(1)\cos\beta - a'(1)\sin\beta \\ b(0)\cos\alpha - b'(0)\sin\alpha & b(1)\cos\beta - b'(1)\sin\beta \end{Bmatrix}$$

是满秩的。若不然，即存在  $a, b$  的线性组合（非零）使得  $c_1a(x) + c_2b(x)$  满足零边值条件，与  $\lambda$  不是特征值矛盾。

另一方面，当  $\lambda = \lambda_m$  时，方程两边乘特征函数  $\phi_m$  积分，

$$\int_0^1 (y'' + (\lambda r(x) + q(x))y)\phi_m(x) dx = \int_0^1 f(x)\phi_m(x) dx$$

分部积分，左边化为

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\lambda r(x) + q(x))y\phi_m(x) + y\phi_m''(x) dx + y'(1)\phi_m(1) - y'(0)\phi_m(0) - y(1)\phi_m'(1) + y(0)\phi_m'(0) \\ = y'(1)\phi_m(1) - y'(0)\phi_m(0) - y(1)\phi_m'(1) + y(0)\phi_m'(0) \end{aligned}$$

那么一方面，当  $\int_0^1 f(x)\phi_m(x) dx = 0$  时，取  $y$  是在  $x = 0$  处满足边值条件的解，则  $y(0)\phi_m'(0) - y'(0)\phi_m(0) = 0$ ，因此  $y'(1)\phi_m(1) - y(1)\phi_m'(1) = 0$ ，在  $x = 1$  处也满足边值条件。另一方面，若  $y$  满足边值条件，则  $\int_0^1 f(x)\phi_m(x) dx = 0$ 。

祝同学们考试顺利！

## 第7章 番外篇：常微分方程部分思考题

常微分方程部分的学习就告一段落了，接下来我们会迎来偏微分方程部分的学习。为了给对常微分方程感兴趣的同學一些思考的空间，我们准备了一些思考题。

Student: Dr. Einstein, aren't these the same questions as last year's [physics] final exam?

Dr. Einstein: Yes; But this year the answers are different.

[As with many of Einstein's quotes, this narration may be fabricated.]

### NOT REQUIRED

#### 练习 7.1(延伸定理的简单应用)

1.  $f \in C(D)$ ,  $D := (a, b) \times (-\infty, +\infty)$ , 且在  $D$  上关于  $y$  满足 Lipschitz 条件, 则微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

的每个解的最大存在区间为  $(a, b)$ .

2. 讨论初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \sin \frac{y}{x}, & x > 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解的最大存在区间.

3.  $f \in C(D)$ ,  $D := (a, b) \times (-\infty, +\infty)$ , 存在  $(a, b)$  上的非负连续函数  $g(x)$  以及  $[0, +\infty)$  上的正连续函数  $h(r)$ , 且存在非负常数  $\delta$ , 满足

$$|f(x, y)| \leq g(x)h(|y|), \int_{\delta}^{+\infty} \frac{dr}{h(r)} = +\infty.$$

则初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解的最大存在区间为  $(a, b)$ .

#### 练习 7.2(Picard 迭代证明解的存在唯一性)

$f \in C([0, +\infty))$ ,  $K(x, s)$  在区域  $0 \leq s \leq x$  上连续, 试利用 Picard 迭代的方法证明方程

$$y = f(x) + \int_0^x K(x, s)y(s)ds$$

在  $x \geq 0$  上存在唯一解.

#### 练习 7.3(S-L 理论证明思想的应用)

设  $y(x)$  是微分方程  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  在区间  $[0, +\infty)$  上的非零解,  $p(x), q(x) \in C(\mathbb{R})$ .

(1) 假设  $y(x) = r(x)\sin \theta(x)$ ,  $y'(x) = r(x)\cos \theta(x)$ , 且  $r(x)$  与  $\theta(x)$  均为  $C^2$  的. 证明:

$$\frac{d\theta}{dx} = \cos \theta^2 + p(x) \cos \theta \sin \theta + q(x) \sin \theta^2.$$

(2) 假设  $p(x)$  在  $[0, +\infty)$  有界, 且存在  $m > 0$ , 使得

$$q(x) \geq \frac{p^2(x)}{4} + m, \forall x > 0$$

证明:  $y(x)$  在  $[0, +\infty)$  上有无穷多个零点.

### 问题 7.1(扰动定理)

设函数  $f(x, y)$  在  $(x, y)$  空间内的某个开区域  $G$  上是连续的, 而且对  $y$  满足局部 Lipschitz 条件. 假设  $y = \xi(x)$  是微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

的一个解, 令它的存在区间为  $J$ . 在区间  $J$  内任取一个有界闭区间  $a \leq x \leq b$ . 证明: 对  $\forall \sigma > 0$ , 存在常数  $\delta > 0$ , 使得对任何初值  $(x_0, y_0)$ , 满足:

$$a \leq x_0 \leq b, |y_0 - \xi(x_0)| \leq \delta,$$

初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解  $y = \varphi(x, x_0, y_0)$  也至少在区间  $a \leq x \leq b$  上存在, 且满足

$$|\varphi(x, x_0, y_0) - \xi(x)| < \sigma, \forall x \in [a, b].$$

### 问题 7.2(比较定理的算子形式)

给定区域  $D \subset \mathbb{R}^2$  上的二元函数  $f(x, y)$ , 对  $y$  满足局部 Lipschitz 条件, 并取定  $(x_0, y_0) \in D$ . 假设  $\phi$  与  $\psi$  为  $[x_0, x_0 + a]$  上的  $C^1$  函数,  $(x, \phi(x)), (x, \psi(x)) \in D$ , 且满足:

1.  $\phi(x_0) \leq \psi(x_0)$
2.  $\phi'(x) - f(x, \phi(x)) \leq \psi'(x) - f(x, \psi(x)), \forall x \in [x_0, x_0 + a].$

则必有以下两者之一成立:

1.  $\phi(x) < \psi(x), \forall x \in [x_0, x_0 + a];$
2. 存在  $c \in [0, a]$  满足

$$\begin{cases} \phi(x) = \psi(x), \forall x \in [x_0, x_0 + c]; \\ \phi(x) < \psi(x), \forall x \in (x_0 + c, x_0 + a]. \end{cases}$$

### 问题 7.3 (非齐次 Sturm-Liouville 边值问题)

考虑如下的非齐次 Sturm-Liouville 边值问题,

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + (\lambda r(x) + q(x))y = f(x), \\ y(0)\cos\alpha - y'(0)\sin\alpha = \eta_0, \\ y(1)\cos\beta - y'(1)\sin\beta = \eta_1, \end{cases}$$

其中函数  $r(x), q(x), f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上连续,  $r(x) > 0$ ,  $\alpha, \beta, \eta_0, \eta_1$  是常数, 并且  $\alpha, \beta$  满足

$$0 \leq \alpha < \pi, \quad 0 < \beta \leq \pi.$$

它对应的齐次 Sturm-Liouville 边值问题为

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + (\lambda r(x) + q(x))y = 0, \\ y(0)\cos\alpha - y'(0)\sin\alpha = 0, \\ y(1)\cos\beta - y'(1)\sin\beta = 0. \end{cases}$$

证明: 非齐次 Sturm-Liouville 边值问题存在唯一解当且仅当  $\lambda$  不是对应的齐次 Sturm-Liouville 边

值问题的特征值。

#### 问题 7.4 (Liouville 定理——相流保持相空间的体积元)

设  $F(x, y, t), G(x, y, t)$  是  $\mathbb{R}^{2+1}$  上的两个光滑函数，考虑如下平面上的方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y, t), \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y, t). \end{cases}$$

假设对于任意的初值  $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ，方程组的解  $(x(t), y(t))$  在  $t \in \mathbb{R}$  上存在。考虑它对应的流映射

$$\phi_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x(0), y(0)) \mapsto (x(t), y(t)).$$

我们知道，对于任意的  $t \in \mathbb{R}$ ， $\phi_t$  是一个微分同胚。

(1) 假设存在  $\mathbb{R}^{2+1}$  上的光滑函数  $H(x, y, t)$ ，使得

$$F = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad G = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

(此时我们称该方程组是一个 Hamilton 系统) 证明：对于平面中任意的有界区域  $D \subset \mathbb{R}^2$ ，有

$$\text{Area}(\phi_t(D)) = \text{Area}(D), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(2) 在上一问的假设下，证明：对于平面中任意光滑曲线

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t),$$

其中  $\gamma$  是一个光滑函数，有

$$\text{Length}(\phi_t \circ \gamma) = \text{Length}(\gamma), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(注记：推广到一般情形  $2n$  维的相空间，相流保持了任意维数子流形的测度。)

(3) 现在我们不对  $F, G$  做额外的假设，证明：存在  $\mathbb{R}^{2+1}$  上的光滑函数  $W(x, y, t)$ ，使得对于平面中任意的有界区域  $D \subset \mathbb{R}^2$ ，有

$$\int_{\phi_t(D)} e^{-W(x, y, t)} dx dy = \int_D e^{-W(x, y, 0)} dx dy, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(注记：我们通常记  $\sqrt{g(x, y, t)} = e^{-W(x, y, t)}$ ，从而非 Hamilton 系统的相空间应该被视为带有某个特殊的 Riemann 度量。)

(4) (柳彬 P162 习题 4) 考虑二阶微分方程

$$x''(t) + cx'(t) + g(x) = p(t),$$

其中  $g, p$  均是  $\mathbb{R}$  上的光滑函数， $c$  是常数。假设该方程的解在  $t \in \mathbb{R}$  上存在。考虑  $(x, x')$ -平面上的变换

$$\Phi_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x(0), x'(0)) \mapsto (x(t), x'(t)).$$

证明：对于  $(x, x')$ -平面中任意的有界区域  $D \subset \mathbb{R}^2$ ，有

$$\text{Area}(\Phi_t(D)) = e^{-ct} \text{Area}(D), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

#### 问题 7.5 (紧支向量场是完备的)

假设  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  是光滑紧支的，证明：对于任意的  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ，初值问题

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

存在整体解。

### 问题 7.6 (柳彬 P248 习题 8, 2023 丘赛)

设  $f(t, x, y)$  是一个  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  上的  $C^1$  函数,  $\varphi$  是二阶微分方程

$$(\star) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = f(t, x, \frac{dx}{dt}), \quad t \in [0, 1]$$

的满足  $\varphi(0) = a, \varphi(1) = b$  的一个解, 其中  $a, b$  是两个给定的实数。假设  $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x, y) > 0$ , 对任意的  $(t, x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2$ 。证明: 对于使得  $|\beta - b|$  充分小的  $\beta \in \mathbb{R}$ , 存在  $(\star)$  的一个解  $\psi$ , 满足  $\psi(0) = a, \psi(1) = \beta$ 。

### 问题 7.7 (2022 丘赛)

令  $f(x, y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ , 假设存在  $C > 0$  使得对任意的  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , 有  $|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)| \leq C$ 。证明: 对于任意的  $y_0 \in \mathbb{R}$ , 如下的 ODE 存在整体解:

$$(\star) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y(x)), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

此外, 我们假设  $f$  关于  $x$  是以 1 为周期的, 即对任意的  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , 有  $f(x+1, y) = f(x, y)$ 。证明: 如果  $(\star)$  有一个整体定义的有界解, 那么  $(\star)$  有一个周期解。

### 问题 7.8 (Riccati 方程解的爆破时间)

本题考虑 Riccati 方程初值问题

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = \alpha$$

的解  $y_\alpha$ 。我们的目标是证明下面的结果:

对于任意的  $\alpha \in \mathbb{R}$ , 均存在  $b_\alpha > 0$ , 使得  $y_\alpha$  在  $[0, b_\alpha)$  上存在, 并且满足

$$\lim_{x \rightarrow b_\alpha^-} y_\alpha(x) = +\infty.$$

此外,  $b_\alpha$  关于  $\alpha \in \mathbb{R}$  是严格递减的。

$\alpha > 0$  的情形是简单的。对于  $\alpha \leq 0$  的情形, 我们将借助 Sturm-Liouville 边值问题证明背后的想法。

(1) 证明: 对于任意的  $\alpha > 0$ , 存在  $b_\alpha > 0$ , 使得上述初值问题的解  $y_\alpha$  在  $[0, b_\alpha)$  上存在, 并且满足

$$\lim_{x \rightarrow b_\alpha^-} y_\alpha(x) = +\infty.$$

(提示: 使用比较定理。)

(2) 证明:  $\frac{\pi}{4} \leq b_1 \leq 1$ 。

(3) 证明:  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} b_\alpha = 0$ 。

(4) 现在考虑如下方程

$$u'' + x^2 u = 0.$$

假设  $u(x) \in C^2(\mathbb{R})$  是方程的解且满足  $(u(0), u'(0)) \neq (0, 0)$ , 那么存在相空间上的极坐标表示,

即存在  $\rho(x) \in C^2(\mathbb{R})$  以及  $\theta(x) \in C^2(\mathbb{R})$  使得

$$u(x) = \rho(x) \sin \theta(x), \quad u'(x) = \rho(x) \cos \theta(x),$$

并且  $\theta(0) \in [0, \pi)$  (你不需要证明这个事实)。证明:  $\theta(x)$  满足方程

$$\theta' = 1 + (x^2 - 1) \sin^2 \theta.$$

(5) 证明: 对于任意的  $\theta_0 \in [0, \pi)$ , 初值问题

$$\theta' = 1 + (x^2 - 1) \sin^2 \theta, \quad \theta(0) = \theta_0$$

的解在  $[0, +\infty)$  上存在。并且对于任意的  $A > \theta_0$ , 存在  $x > 0$ , 使得  $\theta(x) = A$ 。

(6) 假设  $\theta_1(x)$  和  $\theta_2(x)$  分别是方程的解, 且初值满足  $0 \leq \theta_1(0) < \theta_2(0) < \pi$ 。记它们第一次到达  $\pi$  的时间分别为  $x_1$  和  $x_2$ , 即

$$x_i = \inf\{x > 0 \mid \theta_i(x) = \pi\}, \quad i = 1, 2.$$

证明:  $x_1 > x_2$ 。

(7) 对于  $\alpha \in \mathbb{R}$ , 记  $u_\alpha(x)$  为初值问题

$$u'' + x^2 u = 0, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = -\alpha$$

的解。并且记

$$x_\alpha = \inf\{x > 0 \mid u_\alpha(x) = 0\},$$

为  $u_\alpha(x)$  在  $\mathbb{R}_{>0}$  上的第一个零点。证明:  $x_\alpha < +\infty$ 。(提示:  $u(x) = 0$  当且仅当  $\theta(x) = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ 。)

(8) 证明: 如果  $\alpha_1 < \alpha_2$ , 那么  $x_{\alpha_1} > x_{\alpha_2}$ 。

(9) 证明:  $-\frac{u'_\alpha(x)}{u_\alpha(x)}$  是初值问题

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = \alpha$$

的解。即当  $0 \leq x < x_\alpha$  时,  $y_\alpha(x) = -\frac{u'_\alpha(x)}{u_\alpha(x)}$ 。

(10) 完成题目开头方框内结果的证明。

(11) 设  $w(x)$  是初值问题

$$u'' + x^2 u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1$$

的解, 记

$$c = \inf\{x > 0 \mid u_\alpha(x) = 0\}$$

为  $w(x)$  在  $\mathbb{R}_{>0}$  上的第一个零点。证明:  $0 < c < +\infty$ , 并且

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} b_\alpha = c.$$

(提示: 使用解对初值的连续依赖性。)

## 第二部分

# 偏微分方程

## 第8章 第八次习题课讲义

2023年12月18日早晨，醒来后发现合肥迎来了久违的初雪，甚为惊喜，希望与同志们分享这首小词。

### 清平乐 · 画堂晨起

李白

画堂晨起，来报雪花坠。高卷帘栊看佳瑞，皓色远迷庭砌。  
盛气光引炉烟，素草寒生玉佩。应是天仙狂醉，乱把白云揉碎。

## 8.1 习题讲解

### 8.1.1 作业部分

练习 8.1 第二章习题 6 若  $v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  满足

$$-\Delta v \leq 0, \quad x \in \Omega,$$

则称  $v$  在  $\Omega$  上是下调和的。

(1) 证明：对于任意球  $B(x, r) \subset \Omega$ , 成立

$$v(x) \leq \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} v(y) dy.$$

(2) 证明： $\max_{\bar{\Omega}} v(x) = \max_{\partial\Omega} v(x)$ 。

(3) 设  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是光滑凸函数，且  $u$  是  $\Omega$  上的调和函数。证明： $v = \phi(u)$  是  $\Omega$  上的下调和函数。

(4) 设  $u$  是  $\Omega$  上的调和函数。证明： $v = |\nabla u|^2$  是  $\Omega$  上的下调和函数。

### 解

(1) 我们先证明  $v(x)$  小于等于球面平均。为此，令

$$\varphi(r) = \frac{1}{|\mathbf{S}^{n-1}|} \int_{\mathbf{S}^{n-1}} v(x + r \cdot \omega) d\sigma_{\mathbf{S}^{n-1}}(\omega),$$

其中  $d\sigma_{\mathbf{S}^{n-1}}$  是  $\mathbf{S}^{n-1}$  的球面测度。现在我们计算

$$\begin{aligned} \varphi'(r) &= \frac{1}{|\mathbf{S}^{n-1}|} \int_{\mathbf{S}^{n-1}} \omega \cdot (\nabla v)(x + r \cdot \omega) d\sigma(\omega) \\ &= \frac{1}{|\mathbf{S}^{n-1}|} \int_{\mathbf{S}^{n-1}} \nu(\omega) \cdot (\nabla v)(x + r \cdot \omega) d\sigma(\omega) \\ &= \frac{r}{|\mathbf{S}^{n-1}|} \int_{B(0,1)} (\Delta v)(x + r \cdot y) dy \geq 0 \end{aligned}$$

其中我们用  $\nu$  表示单位球面  $\mathbf{S}^{n-1}$  上的外法向量场。于是，我们有

$$\varphi(r) \geq \varphi(0) = v(x).$$

最后

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} v(y) dy &= \frac{1}{|B(x, r)|} \int_0^r \left( \int_{\mathbf{S}^{n-1}} v(x + \rho \cdot \omega) d\sigma_{\mathbf{S}^{n-1}}(\omega) \right) \rho^{n-1} d\rho \\
 &= \frac{1}{|B(x, r)|} \int_0^r |\mathbf{S}^{n-1}| \varphi(\rho) \rho^{n-1} d\rho \\
 &\geq \frac{|\mathbf{S}^{n-1}|}{|B(x, r)|} \int_0^r v(x) \rho^{n-1} d\rho \\
 &= \frac{|\mathbf{S}^{n-1}|}{|B(x, r)|} \frac{r^n}{n} v(x) \\
 &= v(x)
 \end{aligned}$$

(2) 如果  $v$  在  $\bar{\Omega}$  内的最大值在  $\partial\Omega$  上取到, 那么就证完了。如果  $v$  在  $\bar{\Omega}$  内的最大值在某个  $x_0 \in \Omega$  上取到, 那么根据 (1), 对于足够小的球  $B(x_0, r) \subset \Omega$ , 有

$$\frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0, r)} v(y) dy \geq v(x_0),$$

从而  $v(y) \equiv v(x_0)$ , 对任意的  $y \in B(x_0, r)$ 。这说明  $v$  的  $v(x_0)$ -水平集

$$\{x \in \Omega \mid v(x) = v(x_0)\} \subset \Omega$$

是  $\Omega$  中的非空开集。另一方面根据  $v \in C(\Omega)$  知这是  $\Omega$  中的闭集, 从而根据  $\Omega$  的连通性,

$$\{x \in \Omega \mid v(x) = v(x_0)\} = \Omega.$$

最后再利用连续性就知道  $v$  在  $\bar{\Omega}$  上恒等于  $v(x_0)$ , 从而  $v$  的最大值也在  $\partial\Omega$  上取到。

(3) 直接计算即可,

$$\partial_i \phi(u) = \phi'(u) \partial_i u,$$

$$\partial_i^2 \phi(u) = \phi''(u) (\partial_i u)^2 + \phi'(u) \partial_i^2 u,$$

于是

$$\Delta \phi(u) = \phi''(u) |\nabla u|^2 + \phi'(u) \Delta u = \phi''(u) |\nabla u|^2 \geq 0,$$

所以  $v = \phi(u)$  是下调和函数。

(4) 注意到  $u \in C^\infty(\Omega)$ ,  $\partial_i u$  也是调和函数, 而  $\phi(x) = x^2$  是光滑的凸函数, 所以根据 (3), 每个  $(\partial_i u)^2$  是下调和的, 它们加起来  $|\nabla u|^2$  也是下调和的。

**练习 8.2 第二章习题 7** 假设  $\{u_n\} \subset C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  是  $\Omega$  上的调和函数列。如果  $\{u_n\}$  在  $\partial\Omega$  上一致收敛, 则  $\{u_n\}$  在  $\bar{\Omega}$  上一致收敛, 且收敛与一个调和函数。

解

由于  $u_n - u_m \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  是  $\Omega$  上的调和函数, 于是根据极值原理,

$$\|u_n - u_m\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} = \|u_n - u_m\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty$$

根据 Cauchy 收敛准则知  $\{u_n\}$  在  $\bar{\Omega}$  上一致收敛到某个  $u \in C(\bar{\Omega})$ 。为了证明  $u$  是调和的, 我们借助平均值公式, 而不用直接去估计导数的收敛性。对于任意的  $x \in \Omega$  以及球  $B(x, r) \subset \Omega$ , 我们有

$$u_n(x) = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} u_n(y) dy,$$

在等式两边取  $n \rightarrow \infty$  的极限, 得到

$$u(x) = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} u(y) dy,$$

所以  $u \in C^2(\Omega)$  并且是调和的。

**练习 8.3 第二章习题 12** 设  $u(x)$  是球  $B(0, R_0)$  上的调和函数, 对于  $R \in (0, R_0]$  记

$$\omega(R) = \sup_{B(0, R)} u - \inf_{B(0, R)} u.$$

(1) 利用 Harnack 不等式证明: 存在  $\eta \in (0, 1)$ , 使得

$$\omega\left(\frac{R}{2}\right) \leq \eta \omega(R).$$

(2) 如果  $\sup_{B(0, R_0)} |u(x)| \leq M_0$ , 则存在常数  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $C > 0$ , 使得

$$\omega(R) \leq C(M_0 + 1) \left(\frac{R}{R_0}\right)^\alpha, \quad R \in (0, R_0].$$

解

(1) 我们假设  $B(0, R_0/2)$  上 Harnack 不等式的系数是  $C > 1$ , 事实上, 这个  $C$  对于  $R \leq R_0$  均适用。

于是对于任意的  $R < R_0$ , 在  $B(0, R/2)$  上对函数  $w(x) = u(x) - \inf_{B(0, R)} u$  使用 Harnack 不等式, 得到

$$\sup_{B(0, R/2)} u - \inf_{B(0, R)} u = \sup_{B(0, R/2)} w \leq C \inf_{B(0, R/2)} w = C \inf_{B(0, R/2)} u - C \inf_{B(0, R)} u,$$

整理一下得到,

$$\begin{aligned} C \left( \sup_{B(0, R/2)} u - \inf_{B(0, R/2)} u \right) &\leq (C-1) \left( \sup_{B(0, R/2)} u - \inf_{B(0, R)} u \right) \\ &\leq (C-1) \left( \sup_{B(0, R)} u - \inf_{B(0, R)} u \right) \end{aligned}$$

即

$$\omega\left(\frac{R}{2}\right) \leq \left(1 - \frac{1}{C}\right) \omega(R).$$

如果  $\inf_{B(0, R_0)} u$  是有限的, 那么上面的计算也可以适用在  $R = R_0$  的情形。如果  $\inf_{B(0, R_0)} u = \pm\infty$ , 就不能使用上面的计算了, 但是此时一定存在  $\eta_0 \in (0, 1)$  使得

$$\omega\left(\frac{R}{2}\right) = \eta_0 \omega(R),$$

否则

$$\sup_{B(0, R)} u = \sup_{B(0, R/2)} u, \quad \inf_{B(0, R)} u = \inf_{B(0, R/2)} u,$$

这与  $\inf_{B(0, R_0)} u = \pm\infty$  相矛盾。这时我们只要把  $\eta$  更改成原先的  $1 - \frac{1}{C}$  与  $\eta_0$  中较大的那个即可。

(2) 我们先找到  $R$  在哪一层, 即找到  $i \geq 1$ , 使得

$$\frac{1}{2^i} \leq \frac{R}{R_0} < \frac{1}{2^{i-1}}.$$

于是根据 (1),

$$\begin{aligned}\omega(R) &\leq \omega\left(\frac{R_0}{2^{i-1}}\right) \\ &\leq \eta^{i-1} \omega(R_0) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{(i-1)\log_{1/2}\eta} \omega(R_0) \\ &= 2^{\log_{1/2}\eta} \left(\frac{1}{2^i}\right)^{\log_{1/2}\eta} \omega(R_0) \\ &\leq 2M_0 2^{\log_{1/2}\eta} \left(\frac{R}{R_0}\right)^{\log_{1/2}\eta}\end{aligned}$$

实际上这里的指数  $\log_{1/2}\eta > 0$  如果不落在  $(0, 1)$  中, 可以把它放小一点。

### 练习 8.4 第二章习题 18 求边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g(x, y) \end{cases}$$

的 Green 函数, 其中

- (1)  $\Omega$  是上半平面;
- (2)  $\Omega$  是第一象限;
- (3)  $\Omega$  是带形区域  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}, 0 < y < l\}$ , 其中  $l$  为正常数。

### 解

(1) 我们用  $x, y$  表示  $\mathbb{R}^2$  中的点, 用  $\tilde{x}$  表示  $x$  关于  $\partial\mathbb{R}_+^2$  的反射点, 那么通过在  $\tilde{x}$  的位置放上一个负的单位电荷, 即可保证区域的边界电势为 0。于是 Green 函数为

$$G(x, y) = \Gamma(y - x) - \Gamma(y - \tilde{x}).$$

(2) 我们用  $x_2, x_3, x_4$  分别表示  $x$  关于  $y$ -轴,  $x$ -轴, 原点的对称点, 通过在  $x_2, x_4$  处放上单位负电荷, 在  $x_3$  处放上单位正电荷, 即可保证区域的边界电势为 0。于是 Green 函数为

$$G(x, y) = \Gamma(y - x) - \Gamma(y - x_2) + \Gamma(y - x_3) - \Gamma(y - x_4).$$

(3) 我们记  $x_n^- = \tilde{x} + (0, 2nl)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , 以及  $x_n^+ = x + (0, 2nl)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ 。于是通过在  $x_n^-, x_n^+$  上分别放上负、正电荷, 即可保证区域边界  $\mathbb{R} \times \{0, l\}$  的电势为 0。于是 Green 函数为

$$G(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Gamma(y - x_n^+) - \Gamma(y - x_n^-).$$

写出这个表达式后, 我们还要验证级数是收敛的以及验证  $G(x, y)$  的正则性, 不过这点我们不做要求。

### 8.1.2 补充习题

#### 问题 8.1 二阶常微分方程的基础解系

考虑如下的二阶常微分方程

$$u''(r) + \frac{2}{r}u'(r) + 5W^4(r) = 0,$$

其中  $W(r) = (1 + r^2/3)^{-1/2}$ 。求出这个方程的一个基础解系。(提示: 注意到  $W(r)$  是方程  $u''(r) + \frac{2}{r}u'(r) + u^5(r) = 0$  的解, 并且对任意的  $\lambda > 0$ ,  $\lambda^{1/2}W(\lambda r)$  也是这个方程的解。)

**解** 这是一个有趣的小问题，通过利用关于  $\lambda$  的伸缩不变性，我们在  $\lambda^{1/2}W(\lambda r)$  满足的方程两边对  $\lambda$  求导数，并且取  $\lambda = 1$  就得到了一个解。另一个解可以通过标准的“买一送一”技巧得到。这样做可行的原因是乘法算子  $u \mapsto 5W^4(r)u$  恰好是  $u \mapsto u^5$  在  $W(r)$  处的线性化算子。

## 8.2 数学分析拾遗之子流形上的积分

To discover something in mathematics is to overcome an inhibition and a tradition. You cannot move forward if you are not subversive.

——Laurent Schwartz

### 8.2.1 测度与积分

为了用更干净地的语言叙述子流形上的积分理论，我们要铺垫一些测度论的知识，核心是集合的测度与函数的积分之间的对应关系。这一小节中较为繁琐的细节将被省略，感兴趣的同學可以参考任意一本实分析教材。[懒得看的或许可以直接跳过本小节](#)。

在  $\mathbb{R}^n$  中，我们用测度这个概念刻画一个集合的大小/体积/面积/长度，比如说，我们愿意接受  $[0, 1]^n$  的测度是 1、 $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^3$  的测度是  $\frac{4\pi}{3}$  的事实。抽象地来看，如果有一个空间  $X$  (类比于  $\mathbb{R}^n$ )，配上一族  $X$  的子集组成的集合  $\mathcal{A}$  (在  $X = \mathbb{R}^n$  的情形下它包含诸如  $[0, 1]^n$ ,  $B(0, 1)$  这样的集合)，我们把  $\mathcal{A}$  中的集合成为**可测集**，再配上一个从  $\mathcal{A}$  到  $[0, \infty]$  的函数  $\mu$ ，被称为**测度** (即输入一个集合，输出这个集合的大小)，那么我们把这个三元组  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  称为一个**测度空间**。当然，我们这里的测度函数，不能任意假定，它需要满足一些基本的类似于体积的性质，比如对于两个不交的集合，它们的并集的测度应该等于分别的测度之和。

在  $\mathbb{R}^n$  上我们有标准的**Borel 可测集族**  $\mathcal{B}$  (它包含了所有的开集，闭集，以及可数个开集的交，可数个闭集的并等等)，还有标准的**Lebesgue 测度**，通常记为  $m = m_n$ ，它满足  $m([0, 1]^n) = 1$ ，并且具有**平移不变性**，即对任意的可测集  $A \in \mathcal{B}$  以及任意的  $a \in \mathbb{R}^n$ ，我们有  $m(a + A) = m(A)$ 。可以证明，Lebesgue 测度是  $\mathbb{R}^n$  上唯一满足上述性质的  $\sigma$ -有限 Borel 测度。此外，根据平移不变性还可以推出**旋转不变性**，即对任意的正交矩阵  $O \in \mathbf{O}(n)$  和任意的可测集  $A \in \mathcal{B}$ ，我们有  $O(A) \in \mathcal{B}$ ，并且  $m(O(A)) = m(A)$  (这是一个有趣的练习)。

现在我们已经可以对测度空间  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  中的一个可测子集  $A \in \mathcal{A}$  谈论测度，即它的大小了，如此从此过渡到一个  $X$  上函数的积分呢？关键是使用**特征函数**来联系集合与函数。对于  $X$  中的可测子集  $A \in \mathcal{A}$ ，我们定义它的特征函数  $\mathbf{1}_A$  为

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

我们定义  $\mathbf{1}_A$  的积分为

$$\int_X \mathbf{1}_A d\mu = \mu(A).$$

立即地，我们可以对有限个特征函数的线性组合，即**简单函数**  $f = \sum_{i=1}^m c_i \mathbf{1}_{A_i}$  定义积分为

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^m c_i \mu(A_i).$$

当然作为例行公事，我们需要验证上面是良好定义的，即这个积分值不依赖于具体的把  $f$  写成特征函数线性组合的方式，不过我们省略这些没有启发性的细节。接下来，对于一般的函数  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ ，它

不是简单函数，怎么去定义它的积分呢？答案是：**逼近！**我们可以用一列简单函数  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  去逼近（大家先不用细究是在什么意义下逼近）一般的函数  $f$ ，并且用  $f_n$  积分的极限去定义  $f$  的积分，即定义

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

我们把能够被一列简单函数所逼近的函数（还要要求简单函数列的积分极限存在） $f$  称为**可积函数**，并把可积函数组成的集合记为  $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ 。可以验证，可积函数的积分是良好定义的，并且积分算子

$$\int_X \cdot d\mu: L^1(X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{C}, \quad f \mapsto \int_X f d\mu$$

是一个线性算子。

作为最重要的例子，我们把在  $(X \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{B}, m)$  上的积分简写为 ( $dx$  就代表 Lebesgue 测度)

$$\int_X f(x) dx.$$

从范畴论的角度来讲，我们研究了一个测度空间的结构后，还要去研究不同测度空间之间的映射。类似于在线性代数中学习的线性映射、点集拓扑/数学分析中学习的连续/光滑映射，我们定义两个测度空间  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  和  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  之间的**可测映射**是满足如下条件的映射  $\Phi: X \rightarrow Y$

对任意的  $Y$  中的可测集  $B \in \mathcal{B}$ ，有  $\Phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ ，即可测集在  $\Phi$  下的原像是可测集。

实际上，利用可测映射，我们可以将一个空间中的测度结构迁移到另一个空间上。即假设  $\Phi$  是两个空间  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  和  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  之间的可测映射（注意第二个空间现在没有测度！），我们定义测度  $\mu$  在  $\Phi$  下的**推出测度**  $\Phi_*\mu$  是  $(Y, \mathcal{B})$  上的满足对任意的  $B \in \mathcal{B}$ ， $(\Phi_*\mu)(B) = \mu(\Phi^{-1}(B))$  的测度。

作为例子，我们考虑  $\mathbb{R}^n$  上的仿射变换  $\Phi(x) = Ax + b$ ，其中  $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ ， $\Phi$  是  $\mathbb{R}^n$  这个 Lebesgue 测度空间之间的可测映射，并且对任意的  $B \in \mathcal{B}$ ，我们有

$$(\Phi_*m)(B) = m(\Phi^{-1}(B)) = m(A^{-1} \cdot (B - b)) = |\det(A)|^{-1}m((B)).$$

用一种更有启发性的方式来写，我们有

$$(\Phi_*(|\det(A)|m))(B) = m(B), \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

从而  $\Phi_*(|\det(A)|m) = m$  作为测度相等。

最后我们介绍一下**换元积分公式**。假设  $\Phi: (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (Y, \mathcal{B}, \nu)$  是可测映射，并且  $\Phi_*\mu = \nu$ 。那么对于任意的  $f \in L^1(Y, \mathcal{B}, \nu)$ ，我们有  $f \circ \Phi \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ ，并且

$$\int_Y f d\nu = \int_X f \circ \Phi d\mu.$$

回忆欧式空间开集之间的换元积分公式：假设  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  是两个开集， $\Phi: U \rightarrow V$  是微分同胚（即光滑双射，并且逆映射也光滑），那么对于  $V$  上的光滑函数  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ ，我们有

$$\int_V f(y) dy = \int_U (f \circ \Phi)(x) |\det(d\Phi(x))| dx.$$

可见，用推出测度的语言来说，欧式空间开集之间的换元积分公式等价于

$$dy = \Phi_*(|\det(d\Phi(x))| dx),$$

其中  $|\det(d\Phi(x))| dx$  代表以  $|\det(d\Phi(x))|$  为密度的测度（也叫**绝对连续测度**），它满足对任意的可测集  $A \subset U$ ，有

$$(|\det(d\Phi(x))| dx)(A) = \int_A |\det(d\Phi(x))| dx.$$

## 8.2.2 $\mathbb{R}^n$ 中的子流形

我们主要复习多变量微积分中的积分理论，特别是在  $\mathbb{R}^n$  中子流形上的积分。这里我们不得不引入子流形的概念，因为我们要处理的对象不只是二、三维空间中的曲线和曲面，还包括任意维数空间  $\mathbb{R}^n$  中的超曲面。

### 定义 8.1

我们称  $\mathbb{R}^n$  中的一个子集  $M$  为一个  $d$  维光滑子流形 ( $d \leq n$ )，如果对任意的  $x \in M$ ，存在  $\mathbb{R}^n$  中的开集  $U, V$ ，以及微分同胚  $\Phi: U \rightarrow V$ ，使得

$$\Phi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}).$$



直观上看，一个  $d$  维子流形是局部上可以通过一个微分同胚“拉平”的东西。一个常用的生成子流形的方式是利用**隐函数定理**，即如果  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  是光滑映射，并且存在  $c \in \mathbb{R}^m$ ，使得对于任意的  $x \in f^{-1}(c)$ ，都有

$$\text{rank}(df(x)) = m,$$

那么  $f^{-1}(c)$  是一个余维数 (= 背景空间维数-自己作为子流形的维数) 为  $m$  的光滑子流形。

作为例子，我们可以考虑  $\mathbb{R}^n$  上的光滑函数  $f(x) = |x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ ，那么对于任意的  $x \in f^{-1}(1) = \mathbf{S}^{n-1}$ ，有

$$df(x) = (2x_1, \dots, 2x_n) = 2x \neq 0, \quad \Rightarrow \quad \text{rank}(df(x)) = 1,$$

于是球面  $\mathbf{S}^{n-1}$  就是  $\mathbb{R}^n$  中的余维数为 1 的光滑子流形(超曲面)。

不过，对于我们来说最重要的是下面的等式

**$d$  维子流形 = 局部上可以被一个从  $\mathbb{R}^d$  中开集  $U$  到  $\mathbb{R}^n$  的映射参数化的东西。**

## 8.2.3 子流形上的积分支

根据测度与积分对应的观点，我们要对一个子流形  $M \subset \mathbb{R}^n$  上的函数  $f: M \rightarrow \mathbb{C}$  定义积分，只要赋予可测空间  $(M, \mathcal{B}(M))$  一个 ( $\sigma$  有限的) 测度，其中  $\mathcal{B}(M)$  是从  $\mathbb{R}^n$  中继承的子  $\sigma$ -代数。

注意到，一个  $d$  维子流形在每个局部上都可以被一个  $\mathbb{R}^d$  中的开集(正则)参数化，即对任意的  $x \in M$ ，存在  $\mathbb{R}^n$  中的开集  $U$ ， $x \in U$ ， $\mathbb{R}^d$  中的开集  $V$  以及微分同胚  $\Phi: V \rightarrow M \cap U$ ，这个  $\Phi$  就是  $M$  的一个局部的参数化。通过  $\Phi$ ，我们可以把  $V \subset \mathbb{R}^d$  上的 Lebesgue 测度推出到  $M \cap U$  上，得到  $M \cap U$  上的测度  $\Phi_*(m_d)$ 。这里有两个问题，第一个问题是，这里只是得到了  $M \cap U$  上的一个测度，并没有得到整个  $M$  上的测度。如果我们想要把每个局部上这样得到的测度“粘”成整个  $M$  上的一个测度，我们需要一般形式的单位分解这个工具。为了避免这种情况发生，我们将总是考虑能够“几乎”被单个映射参数化的子流形  $M$ ，这里的“几乎”是说  $M$  虽然可能不能被单个映射参数化，但没有被参数化到的部分是“零测集”(也就是手动把它令为零测度)，从而不会对积分理论产生什么影响。第二个问题是，这里选用不同的参数化所得到的  $M$  上的测度可能是不同的，我们下面用一个例子说明。

我们考虑  $\mathbb{R}^2$  中的一条直线段  $L$ ，

$$\gamma_1: [0, 1] \rightarrow L \subset \mathbb{R}^2, \quad \gamma_1(t) = (t, t).$$

作为  $\mathbb{R}^2$  的子集，这条线段是  $L = \{(t, t) \mid t \in [0, 1]\} = \text{Im}(\gamma_1)$ ，但是也有其他参数化它的方式，比如

$$\gamma_2: [0, 1/2] \rightarrow L \subset \mathbb{R}^2, \quad \gamma_2(t) = (t/2, t/2).$$

我们用  $dx$  表示  $[0, 1]$  上的 Lebesgue 测度，那么在第一个参数化下， $\gamma_{1*}(dx)(L) = dx([0, 1]) = 1$ ，但是使用第二个参数化得到的  $L$  的测度是  $\gamma_{2*}(dx)(L) = dx([0, 1/2]) = 1/2$ ，它们是不相等的。

下面我们着手解决第二个问题，事实上，这可以用参数化映射  $\Phi$  自身的信息来修正。

### 定义 8.2

设  $d \leq n$ ，对于从  $\mathbb{R}^d$  中开集  $U$  到  $\mathbb{R}^n$  的光滑映射  $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ，我们用  $d\Phi$  表示映射  $\Phi$  (在某点处) 的 Jacobi 矩阵 (这是一个  $n \times d$  的矩阵)，称  $g_\Phi = (d\Phi)^T(d\Phi)$  为  $\Phi$  (在某点处的) 度量矩阵，或者 **Gram** 矩阵 (这是一个  $d \times d$  的矩阵)。



### 定理 8.1

假设  $\Phi: U \rightarrow M$  和  $\Psi: V \rightarrow M$  是  $d$  维子流形  $M \subset \mathbb{R}^n$  的两个参数化，其中  $U, V \subset \mathbb{R}^d$  是开集。那么我们有

$$\Phi_*(|\det(g_\Phi)|^{\frac{1}{2}}m_d) = \Psi_*(|\det(g_\Psi)|^{\frac{1}{2}}m_d),$$

换而言之，对于  $M$  上任意的 Borel 集  $A \subset M$ ，我们有

$$\int_{\Phi^{-1}(A)} |\det(g_\Phi(x))|^{\frac{1}{2}} dx = \int_{\Psi^{-1}(A)} |\det(g_\Psi(y))|^{\frac{1}{2}} dy,$$

再换而言之，对于  $M$  上任意的连续函数  $f \in C(M)$ ，我们有

$$\int_U (f \circ \Phi)(x) |\det(g_\Phi(x))|^{\frac{1}{2}} dx = \int_V (f \circ \Psi)(y) |\det(g_\Psi(y))|^{\frac{1}{2}} dy.$$



**证明** 由于  $\Phi$  和  $\Psi$  都是微分同胚，存在  $U$  和  $V$  之间的微分同胚  $L = \Psi^{-1} \circ \Phi$  使得  $\Phi = \Psi \circ L$ 。根据链式法则，我们有

$$d\Phi(x) = d\Psi(L(x)) \circ dL(x), \quad x \in U$$

于是

$$g_\Phi(x) = (d\Phi(x))^T(d\Phi(x)) = (dL(x))^T(d\Psi(L(x)))^T(d\Psi(L(x)))(dL(x)) = (dL(x))^T g_\Psi(L(x))(dL(x)),$$

取行列式就得到

$$|\det(g_\Phi(x))|^{\frac{1}{2}} = |\det(dL(x))| \cdot |\det(g_\Psi(L(x)))|^{\frac{1}{2}}.$$

利用上面的计算，对于任意的 Borel 集  $A \subset M$ ，有

$$\begin{aligned} \int_{\Phi^{-1}(A)} |\det(g_\Phi(x))|^{\frac{1}{2}} dx &= \int_{\Phi^{-1}(A)} |\det(dL(x))| \cdot |\det(g_\Psi(L(x)))|^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \int_{L(\Phi^{-1}(A))} |\det(g_\Psi(y))|^{\frac{1}{2}} dy \\ &= \int_{\Psi^{-1}(A)} |\det(g_\Psi(y))|^{\frac{1}{2}} dy \end{aligned}$$

其中第二个等号处我们利用了关于  $L: U \rightarrow V$  的换元积分公式，这就完成了证明。

**注** 从上述证明中可以看出，我们额外乘上的因子  $|\det(g_\Phi)|^{\frac{1}{2}}$  在参数变换下多出来的因子正好和换元积分公式中的因子一致，从而使得在  $\Phi, \Psi$  两个参数化下的积分结果一致。

上面这个定理说明，虽然  $\Phi_*(m_d)$  可能依赖于参数化  $\Phi$  的选取，但是利用  $\Phi$  的度量矩阵可以修正这个问题，也即  $\Phi_*(|\det(g_\Phi)|^{\frac{1}{2}}m_d)$  是不依赖于  $\Phi$  的选取的！从而我们可以引入以下的定义。

### 定义 8.3

设  $d \leq n$ , 设  $\Phi: U \rightarrow M$  是子流形  $M \subset \mathbb{R}^n$  的(任一个)参数化, 我们把测度  $\sigma = \Phi_*(m_d)$  称为  $M$  上的子流形测度, 它满足对于任意的 Borel 集  $A \subset M$ , 有

$$\sigma(A) = \int_{\Phi^{-1}(A)} |\det(g_\Phi(x))|^{\frac{1}{2}} dx,$$

或者等价地说, 对于任意的  $f \in C(M)$ , 有

$$\int_M f d\sigma = \int_U (f \circ \Phi)(x) |\det(g_\Phi(x))|^{\frac{1}{2}} dx.$$



**注** 实际上我们这里通过参数化构造的子流形  $M^d$  上的测度就对应于从  $\mathbb{R}^n$  上的标准 Riemann 度量  $g_{\mathbb{R}^n}$  继承而来的度量对应的体积形式, 即度量  $\iota^* g_{\mathbb{R}^n}$  对应的体积形式  $\sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d$ 。上面不同参数化下的  $g_\Phi$  就是不同局部坐标下度量矩阵  $(g_{ij})$  的不同形式。

一个潜在的问题是, 我们怎么知道上面定义的子流形测度和我们在欧氏几何中的想法一致? 我们可以通过几个例子说明。比如说, 在欧氏几何中, 我们希望一个几何对象的长度/面积/体积是在正交变换下不变的, 这对于我们定义的子流形测度也对。假设参数化映射是  $\Phi: U \rightarrow M$ , 那么  $M$  在正交变换  $O \in \mathbf{O}(n)$  下变为  $O(M)$ , 它仍然是  $\mathbb{R}^n$  中的子流形, 并且具有参数化  $O \circ \Phi: U \rightarrow O(M)$ , 在这个参数化下计算  $M$  的子流形测度得到

$$\sigma(O(M)) = \int_U |\det((d\Phi)^T O^T O(d\Phi))|^{\frac{1}{2}} dx = \int_U |\det((d\Phi)^T (d\Phi))|^{\frac{1}{2}} dx = \sigma(M).$$

再比如, 我们希望这个子流形测度能够和  $\mathbb{R}^n$  本身的 Lebesgue 测度相容。粗略地来说, 我们可以验证, 假设  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  是一张超平面( $=$ 余 1 维仿射子流形),  $A \subset \Sigma$  是一个可测集。我们考虑“无穷多个” $A$  沿着  $\Sigma$  的法向  $n$  “堆叠”而成的一个高度为  $h$  的柱子, 即  $A_h = \{a + t \cdot n \in \mathbb{R}^n \mid a \in A, t \in [0, h]\}$ , 这是一个  $\mathbb{R}^n$  中的可测集, 根据 Lebesgue 测度的旋转不变性, 我们可以通过某个正交变换  $O \in \mathbf{O}(n)$  把  $A_h$  变成  $O(A) \times [0, h]$ , 其中  $O(A) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ , 于是  $m_n(A_h) = m_n(O(A) \times [0, h]) = m_{n-1}(O(A)) \times h$ 。而  $A \subset \Sigma$  的子流形测度也在正交变换下不变, 从而  $\sigma(A) = m_{n-1}(O(A))$ , 于是我们就证明了  $m_n(A_1) = \sigma(A) \times h$ 。这个相容性的更加精确表述由所谓的余面积公式刻画。

下面我们讨论几个最常见的例子, 它们包括  $\mathbb{R}^n$  中的曲线、作为函数图像的超曲面、球面, 对于这些对象, 我们总是选取最常用的参数化。

### 第一个例子: 曲线

我们用  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  表示  $\mathbb{R}^n$  中的一条参数曲线  $L$ 。按照子流形测度的定义,  $L$  上的子流形测度是  $\gamma_*(m_1)$ , 其中  $m_1$  是区间  $[a, b]$  上的 Lebesgue 测度。这里参数化  $\gamma$  对应的度量矩阵是

$$g_\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) & \cdots & \gamma'_n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \cdots \\ \gamma'_n(t) \end{pmatrix} = |\gamma'(t)|^2, \quad t \in [a, b]$$

于是  $L$  的长度是

$$\text{Length}(L) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

对于曲线  $L$  上的连续函数  $f \in C(L)$ , 它的曲线积分是

$$\int_L f d\sigma = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

作为具体的例子，我们可以考虑平面上的圆圈  $\mathbf{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ 。为了得到它的一个参数化，我们回忆三角函数的定义，

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

它们都是  $\mathbb{R}$  上的光滑函数，并且满足  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ，对任意的  $x \in \mathbb{R}$ 。再回忆我们把  $\pi$  定义为  $\sin$  函数在  $\mathbb{R}_{>0}$  上的第一个零点（在第五次习题课讲义中，我们的定义是  $\cos$  函数在  $\mathbb{R}_{>0}$  上第一个零点的两倍，这两者是等价的）。对于任意的  $(x, y) \in \mathbf{S}^1$ ,  $x, y \in [-1, 1]$ ，根据介值定理，存在  $\theta \in [0, 2\pi)$ ，使得  $x = \cos \theta$ ，此时  $y^2 = 1 - x^2 = \sin^2 \theta$ ，那么通过对  $\theta$  加上或者减去一个  $\pi$ ，可以使得  $y = \sin \theta$ ，也即  $(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$ 。综上，我们得到了  $\mathbf{S}^1$  的一个标准的参数化

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{S}^1, \quad \theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta).$$

现在我们可以计算圆的周长，

$$\text{Length}(\mathbf{S}^1) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)| dt = 2\pi.$$

这样我们就证明了单位圆的周长是  $2\pi$ 。同样道理，对于圆周  $\mathbf{S}^1$  上的连续函数  $f \in C(\mathbf{S}^1)$ ，它的积分是

$$\int_{\mathbf{S}^1} f d\sigma_{\mathbf{S}^1} = \int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta.$$

值得一提的是，我们在数学分析 A3/B2 中学习的 Fourier 级数理论就是在  $L^2(\mathbf{S}^1)$  上发展的（习惯上我们把  $\mathbf{S}^1$  写成  $\mathbf{T}$ ，因为在高维情形 Fourier 级数是在  $L^2(\mathbf{T}^n)$  上发展的）。这个理论的一个基本结果是在测度  $\frac{1}{2\pi} d\sigma_{\mathbf{S}^1}$  下， $\{e^{ikx} \mid k \in \mathbb{Z}\}$  构成了  $L^2(\mathbf{S}^1)$  的一组标准正交基（Hilbert 基）。高维的情形也是类似的，即在测度  $\frac{1}{(2\pi)^n} (d\sigma_{\mathbf{S}^1})^{\otimes n}$  下（这是一个乘积测度）， $\{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \mid \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n\}$  构成了  $L^2(\mathbf{T}^n)$  的一组标准正交基。老师上课提到过，如果我们考虑  $\mathbf{S}^2$  而不是  $\mathbf{T}^2$  去作为  $\mathbf{S}^1$  上 Fourier 级数的高维推广，那么在测度  $\frac{1}{4\pi} d\sigma_{\mathbf{S}^2}$  下，球调和函数  $\{Y_{l,m}(\theta, \varphi) \mid l \in \mathbb{N}, -l \leq m \leq l\}$  构成了  $L^2(\mathbf{S}^2)$  的一组标准正交基。

## 第二个例子：作为函数图像的超曲面

我们考虑  $\mathbb{R}^{n-1}$  中开集  $U$  上的光滑函数  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  的图像

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid x \in U\} \subset \mathbb{R}^n.$$

这自然是  $\mathbb{R}^n$  的一个余一维的光滑子流形，即一张超曲面，并且有自然的参数化

$$\Phi: U \rightarrow \Gamma(f), \quad x \mapsto (x, f(x))$$

从几何上看，这个参数化就是将  $f$  定义域中的点  $x \in U$  向上“提升”到它的图像  $\Gamma(f)$  上去。在这个标准的参数化下，我们可以计算  $\Gamma(f)$  的子流形测度。首先我们有

$$d\Phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n-1} \\ \nabla f(x) \end{pmatrix},$$

于是

$$g_\Phi(x) = (d\Phi(x))^T (d\Phi(x)) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) & \cdots & 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix} = \mathbf{I}_{n-1} + \nabla f(x) \otimes \nabla f(x),$$

根据众所周知的行列式计算技巧，我们得到

$$\det(g_\Phi(x)) = 1 + |\nabla f(x)|^2,$$

于是  $\Gamma(f)$  的子流形测度是  $\sigma = \Phi_*(\sqrt{1 + |\nabla f|^2} m_{n-1})$ . 据此，我们可以计算这张超曲面的面积

$$\sigma(\Gamma(f)) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2} dx.$$

同样道理，对于任意的  $\Gamma(f)$  上的连续函数  $g \in C(\Gamma(f))$ ，它的曲面积分是

$$\int_{\Gamma(f)} g d\sigma = \int_U g(x, f(x)) \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2} dx.$$

作为具体的例子，我们可以考虑  $n$  维球面  $\mathbf{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 。它虽然不是一个函数的图像(尝试证明这一点！)，但是它可以“差不多”写成 2 个函数图像的并，比如说

$$\mathbf{S}^n = \mathbf{S}_{>0}^n \cup \mathbf{S}_{<0}^n \cup \mathbf{S}_{=0}^n,$$

其中

$$\mathbf{S}_{>0}^n = \{x = (x', x_{n+1}) \in \mathbf{S}^n \mid x_{n+1} > 0\},$$

$\mathbf{S}_{<0}^n$  和  $\mathbf{S}_{=0}^n$  是类似定义的。注意到  $\mathbf{S}_{=0}^n$  是一个“零测集”，我们可以只用  $x \mapsto (x, \pm\sqrt{1 - |x|^2})$  去参数化  $\mathbf{S}_{>0}^n$  和  $\mathbf{S}_{<0}^n$  而忽略掉  $\mathbf{S}_{=0}^n$ 。现在我们可以计算  $\mathbf{S}^n$  的面积，

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{S}^n) &= 2\sigma(\mathbf{S}_{>0}^n) \\ &= 2 \int_{B^n(0,1)} \sqrt{1 + \frac{|x|^2}{1 - |x|^2}} dx \\ &= 2 \int_{B^n(0,1)} \frac{1}{\sqrt{1 - |x|^2}} dx \\ &= 2 \int_0^1 \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1 - r^2}} \sigma(\mathbf{S}^{n-1}) dr \\ &= 2\sigma(\mathbf{S}^{n-1}) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} \theta d\theta \\ &= 2\sigma(\mathbf{S}^{n-1}) \cdot \begin{cases} \frac{(n-2)!!}{(n-1)!!}, & n \text{ is even} \\ \frac{(n-2)!!}{(n-1)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ is odd} \end{cases} \end{aligned}$$

其中我们利用了 Wallis 公式。特别地，如果取  $n = 2$ ，那么我们就证明了单位球面的表面积是  $4\pi$ 。

### 第三个例子：二维球面

对于 2 维球面，我们想谈的更多。另一个标准的参数化是所谓球面坐标，即

$$\Phi: (0, \pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbf{S}^2, \quad (\theta, \varphi) \mapsto (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

如果你愿意，也可以按照类似于  $\mathbf{S}^1$  参数化的做法严格证明这确实是  $\mathbf{S}^2$  的一个参数化，只不过无法覆

盖住一个半圆弧。在这个参数化下，我们计算  $\mathbf{S}^2$  的子流形测度。

$$d\Phi(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \cos \varphi \\ -\sin \theta & 0 \end{pmatrix},$$

于是

$$g_\Phi(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

从而  $\mathbf{S}^2$  上的子流形测度是

$$\sigma_{\mathbf{S}^2} = \Phi_*(\sin \theta m_2) = \Phi_*(\sin \theta d\theta d\varphi).$$

换而言之，对于任意的  $\mathbf{S}^2$  上的连续函数  $f \in C(\mathbf{S}^2)$ ，它在球面上的积分是

$$\int_{\mathbf{S}^2} f d\sigma_{\mathbf{S}^2} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \sin \theta d\theta d\varphi.$$

#### 第四个例子：光锥表面

最后一个例子我们考虑时空  $\mathbb{R}_{x,t}^{n+1} = \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$  中的正向光锥表面，即

$$\hat{C} = \{(x, t) \in \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_{t>0} \mid t = |x|\}.$$

这是一个  $\mathbb{R}^{n+1}$  中的光滑子流形，因为它是  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  上光滑函数  $x \mapsto |x|$  的图像（注意我们扣掉了光锥的尖点）。我们用标准的参数化

$$\Phi: \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \hat{C}, \quad x \mapsto (x, |x|) = (x, F(x))$$

来计算  $\hat{C}$  的子流形测度  $\sigma_{\hat{C}}$ 。

$$\nabla F(x) = \frac{x}{|x|}$$

于是  $\det(g_\Phi(x)) = 1 + |\nabla F(x)|^2 = 2$ ，从而

$$\sigma_{\hat{C}} = \Phi_*(\sqrt{2}m_n) = \Phi_*(\sqrt{2}dx).$$

换而言之，对于任意的连续函数  $f \in C(\hat{C})$ ，它在光锥表面的积分是

$$\int_{\hat{C}} f d\sigma_{\hat{C}} = \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} f(x, |x|) \sqrt{2} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, |x|) \sqrt{2} dx.$$

作为应用，我们考虑  $n = 3$  的情形（更加具有物理意义，对于一般的  $n$  会变复杂一点）。对任意的光滑紧支函数  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{3+1})$ ，它限制在  $\hat{C}$  上就成为了  $\hat{C}$  上的光滑函数，我们计算  $-\frac{(\square\varphi)(x, t)}{4\pi\sqrt{|x|^2 + t^2}}$  在  $\hat{C}$  上的积分，其中  $\square = -\partial_t^2 + \Delta$  是波动算子。（建议大家仔细搞清楚这里的计算，并和课堂上解三维波方程的过程相比较）

$$\begin{aligned} \int_{\hat{C}} -\frac{(\square\varphi)(x, t)}{4\pi\sqrt{|x|^2 + t^2}} d\sigma_{\hat{C}} &= \int_{\mathbb{R}^3} -\frac{(\square\varphi)(x, |x|)}{4\pi\sqrt{|x|^2 + |x|^2}} \sqrt{2} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} -\frac{(\square\varphi)(x, |x|)}{4\pi|x|} dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty r \int_{\mathbf{S}^2} \left( \partial_t^2 \varphi - \partial_r^2 \varphi - \frac{2\partial_r \varphi}{r} - \frac{1}{r^2} \Delta_{\mathbf{S}^2} \varphi \right) (r, \omega, r) d\sigma_{\mathbf{S}^2}(\omega) dr \end{aligned}$$

其中我们利用了  $\Delta$  在球坐标下的展开

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\mathbf{S}^2}.$$

这个式子的**准确含义**是：如果我们记球坐标变换是

$$\Phi: (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (r, \theta, \varphi) \mapsto (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$$

那么我们有对任意的光滑函数  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ ,

$$\left( \partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\mathbf{S}^2} \right) (f \circ \Phi) = (\Delta f) \circ \Phi.$$

根据课上提到的球面上的散度定理，我们有

$$\int_{\mathbf{S}^2} (\Delta_{\mathbf{S}^2} \varphi)(r, \omega, r) d\sigma_{\mathbf{S}^2}(\omega) = 0, \quad \forall r > 0.$$

(这件事情的另一个理解是  $\Delta_{\mathbf{S}^2}$  是  $C^2(\mathbf{S}^2)$  上的一个对称算子，即对任意的  $f, g \in C^2(\mathbf{S}^2)$ ，有  $(\Delta_{\mathbf{S}^2} f, g) = (f, \Delta_{\mathbf{S}^2} g)$ ，这里内积是乘积后在  $\mathbf{S}^2$  上用球面测度  $\sigma_{\mathbf{S}^2}$  积分) 我们接着计算，

$$\int_{\widehat{C}} -\frac{(\square \varphi)(x, t)}{4\pi \sqrt{|x|^2 + t^2}} d\sigma_{\widehat{C}} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \int_{\mathbf{S}^2} (r \partial_t^2 \varphi - r \partial_r^2 \varphi - 2\partial_r \varphi) (r, \omega, r) d\sigma_{\mathbf{S}^2}(\omega) dr$$

下面需要如下的观察

$$r \partial_t^2 \varphi - r \partial_r^2 \varphi - 2\partial_r \varphi = (\partial_t + \partial_r)((\partial_t - \partial_r)(r\varphi)),$$

并且注意到对于任意的光滑函数  $g \in \mathbb{R}^{3+1}$  以及任意固定的  $\omega \in \mathbf{S}^2$

$$\frac{d}{dr}(g(r, \omega, r)) = ((\partial_t + \partial_r)g)(r, \omega, r).$$

于是可以接着算

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{C}} -\frac{(\square \varphi)(x, t)}{4\pi \sqrt{|x|^2 + t^2}} d\sigma_{\widehat{C}} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \int_{\mathbf{S}^2} (\partial_t + \partial_r)((\partial_t - \partial_r)(r\varphi))(r, \omega, r) d\sigma_{\mathbf{S}^2}(\omega) dr \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \int_{\mathbf{S}^2} \frac{d}{dr}(((\partial_t - \partial_r)(r\varphi))(r, \omega, r)) d\sigma_{\mathbf{S}^2}(\omega) dr \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d}{dr} \left( \int_{\mathbf{S}^2} ((\partial_t - \partial_r)(r\varphi))(r, \omega, r) d\sigma_{\mathbf{S}^2}(\omega) \right) dr \\ &= \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^\infty \frac{d}{dr} \left( \int_{\mathbf{S}^2} ((\partial_t - \partial_r)(r\varphi))(r, \omega, r) d\sigma_{\mathbf{S}^2}(\omega) \right) dr \\ &= -\frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbf{S}^2} ((\partial_t - \partial_r)(r\varphi))(\varepsilon, \omega, \varepsilon) d\sigma_{\mathbf{S}^2}(\omega) \\ &= -((\partial_t - \partial_r)(r\varphi))(0, 0) \end{aligned}$$

其中我们用到了  $\varphi$  在无穷远处消失和 Newton-Leibniz 公式。而

$$(\partial_t - \partial_r)(r\varphi) = r\partial_t \varphi - \varphi - r\partial_r \varphi,$$

最终我们得到了

$$\left\langle -\frac{d\sigma_{\widehat{C}}}{4\pi \sqrt{|x|^2 + t^2}}, \square \varphi \right\rangle = \int_{\widehat{C}} -\frac{(\square \varphi)(x, t)}{4\pi \sqrt{|x|^2 + t^2}} d\sigma_{\widehat{C}} = \varphi(0, 0).$$

如果我们将上述结果与位势方程  $\Delta u = 0$  的基本解  $\Gamma(x)$  相比较：我们知道，对于任意的  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ，有

$$\langle \Gamma, \Delta \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma \Delta \varphi dx = \varphi(0).$$

于是我们可以说  $-\frac{d\sigma_{\widehat{C}}}{4\pi \sqrt{|x|^2 + t^2}}$  是 3 维波动方程  $\square u = -\partial_t^2 u + \Delta u = 0$  的**基本解**。这个解压根就不是一个  $\mathbb{R}^{3+1}$  上的函数，而是光锥表面的一个测度，可见基本解只是一种**弱解**。我们在这里写下基本解的真正含义，感兴趣的同志可以在高等实分析课程中学习。

**定义 8.4**

假设  $P$  是  $\mathbb{R}^n$  上的一个  $m$  阶微分算子，其中  $n \geq 1$ ，即存在  $\mathbb{R}^n$  上的一堆光滑函数  $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ，使得（其中  $P^*$  称为  $P$  的伴随算子）

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha, \quad P^* = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \partial^\alpha,$$

并且至少有一个多重指标  $|\alpha| = m$  使得  $a_\alpha \neq 0$ 。如果  $\mathbb{R}^n$  上的分布  $E$  满足对任意的  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ，都有

$$\langle E, P^* \varphi \rangle = \varphi(0),$$

那么我们称  $E$  是方程  $Pu = 0$  的一个基本解。



最后是一个常用的公式。

**命题 8.1**

对于  $B(x_0, R)$  ( $R = \infty$  也可以) 上的连续函数（可积函数） $f$ ，我们有

$$\int_{B(x_0, R)} f(x) dx = \int_0^R r^{n-1} \left( \int_{\mathbf{S}^{n-1}} f(x_0 + r \cdot \omega) d\sigma_{\mathbf{S}^{n-1}}(\omega) \right) dr.$$



**证明** 我们只对  $n = 3$  的情形给出证明，任意  $n$  的证明需要具体写出  $\mathbf{S}^{n-1}$  的一个参数化，留给读者思考。按照定义，

$$\int_{\mathbf{S}^2} f(x_0 + r \cdot \omega) d\sigma_{\mathbf{S}^2}(\omega) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(x_0^1 + r \sin \theta \cos \varphi, x_0^2 + r \sin \theta \sin \varphi, x_0^3 + r \cos \theta) \sin \theta d\theta d\varphi.$$

于是等式右端等于

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(x_0^1 + r \sin \theta \cos \varphi, x_0^2 + r \sin \theta \sin \varphi, x_0^3 + r \cos \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr.$$

另一方面，利用球坐标换元

$$\Phi: (0, R) \times (0, \pi) \times (0, \pi) \rightarrow B(x_0, R), \quad (r, \theta, \varphi) \mapsto (x_0^1 + r \sin \theta \cos \varphi, x_0^2 + r \sin \theta \sin \varphi, x_0^3 + r \cos \theta)$$

我们可以计算等式左边的积分

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0, R)} f(x) dx &= \int_{(0, R) \times (0, \pi) \times (0, \pi)} (f \circ \Phi)(r, \theta, \varphi) |\det(d\Phi)(r, \theta, \varphi)| dr d\theta d\varphi \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(x_0^1 + r \sin \theta \cos \varphi, x_0^2 + r \sin \theta \sin \varphi, x_0^3 + r \cos \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr. \end{aligned}$$

这就完成了证明。而且实际上上面的公式对于  $R = \infty$  也对。

**注** 当然，一个更加自然的写法是，

$$\int_{B(x_0, R)} f(x) dx = \int_0^R \left( \int_{\partial B(x_0, r)} f(y) d\sigma_{\partial B(x_0, r)}(y) \right) dr.$$

这两种写法是自然等价的，但我们想要强调的是，上面命题陈述中的写法更便于处理。实际上我们把  $f(x_0 + r \cdot \omega)$  视为  $[0, R] \times \mathbf{S}^{n-1}$  上的关于  $(r, \omega)$  的函数，第一层积分就是固定  $r \in [0, R]$  对  $\omega$  在  $\mathbf{S}^{n-1}$  上积分，这里的测度和积分的区域不随  $r$  改变，从而可以看作是  $f(x_0 + r \cdot \omega)$  的一个二重积分。而在后一种写法中，积分的区域  $\partial B(x_0, r)$  和测度  $\sigma_{\partial B(x_0, r)}$  都在随  $r$  改变，换言之，我们要把第一层积分整个视为  $[0, R]$  上的函数，而不能视为某个函数的多重积分。

以下的余面积公式（一种“弯曲”的 Fubini 定理）可以视为上述命题的推广，证明不做要求。

**定理 8.2 (余面积公式)**

假设  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  是一个开区域,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  是光滑函数, 并且存在  $a < b$  使得对于任意的  $x \in f^{-1}([a, b])$ ,  $df(x) \neq 0$  (从而  $f^{-1}(t)$  是余 1 维的子流形)。那么对于任意的  $f^{-1}([a, b])$  上的连续函数  $g$ ,

$$\int_{f^{-1}([a,b])} g(x) dx = \int_a^b \left( \int_{f^{-1}(t)} \frac{g}{|\nabla f|} d\sigma_t \right) dt,$$

其中  $\sigma_t$  表示  $f^{-1}(t)$  的子流形测度。



这个公式在构造相空间  $T^*M$  上的 Liouville 测度时很有用。

# 第9章 第九次习题课讲义

## 9.1 知识回顾与习题讲解

在椭圆方程的开头，我们学习了很多调和函数的性质，即方程

$$\Delta u = 0$$

的解，其中一条是调和函数不会在区域内部取到最大、最小值。我们研究更一般的椭圆方程：

$$\mathcal{L}u = -\Delta u + c(x)u = f, x \in \Omega.$$

事实上对于这类方程，我们有类似的结果，即极值原理：

### 定理 9.1 (弱极值原理)

设  $c \geq 0, f \leq 0, u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  是上述方程的解，那么  $u$  在边界达到非负最大值，即

$$\max_{\Omega} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+$$



### 作业题

1. 设  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  是定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = 0, & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

的一个解。

(1) 如果  $c(x) \geq c_0 > 0$ ，则

$$\max_{\bar{\Omega}} |u(x)| \leq \frac{1}{c_0} \sup_{\Omega} |f(x)|$$

(2) 如果  $c(x) \geq 0$ ，则

$$\max_{\bar{\Omega}} |u(x)| \leq M \sup_{\Omega} |f(x)|$$

其中  $M$  依赖于  $\Omega$  的直径。

(3) 如果  $c(x) < 0$ ，试举反例说明上述最大模估计一般不成立。

**证明** (1) 设  $u$  在  $x_0 \in \Omega$  取到最大值，即  $x_0$  是最大值点，那么  $\Delta u(x_0) \leq 0, u(x_0) \geq 0$ ，于是

$$f(x_0) = -\Delta u(x_0) + c(x_0)u(x_0) \geq c_0 u(x_0)$$

最小值点同理。

(2) 令  $w(x) = d^2 - |x|^2 + 1, d$  是  $\Omega$  的直径， $u(x) = w(x)v(x)$ 。得到  $v(x)$  满足的方程：

$$-(\Delta w(x)v(x) + 2\nabla w(x) \cdot \nabla v(x) + w(x)\Delta v(x)) + c(x)w(x)v(x) = f$$

即

$$-\Delta v(x) + \frac{2x \cdot \nabla v(x)}{d^2 - |x|^2 + 1} - \left( \frac{2n}{d^2 - |x|^2 + 1} + c(x) \right) v(x) = \frac{f}{d^2 - |x|^2 + 1}$$

在  $v(x)$  的最大值点  $x_0$  处，有  $\nabla v(x_0) = 0, \Delta v(x_0) \leq 0$ ，于是

$$\frac{2n}{d^2 + 1} v(x_0) \leq \left( \frac{2n}{d^2 - |x_0|^2 + 1} + c(x_0) \right) v(x_0) \leq \frac{|f(x_0)|}{d^2 - |x_0|^2 + 1} \leq |f(x_0)|$$

于是

$$v(x_0) \leq \frac{d^2 + 1}{2n} |f(x_0)|$$

最小值同理。

(3) 一个简单的例子是考虑立方体  $\Omega = [0, \pi]^n$ ,  $u(x) = \sin(x_1) \cdots \sin(x_n)$  满足方程

$$\begin{cases} -\Delta u - nu = 0, & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

2. 假设  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  是有界开集,  $u_i(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ,  $i = 1, 2$  满足定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u_i + c_i(x)u_i = 0, & x \in \Omega \\ u_i|_{\partial\Omega} = g_i \end{cases}$$

如果  $c_2(x) \geq c_1(x) \geq 0$ ,  $g_1(x) \geq g_2(x) \geq 0$ , 则

$$u_1(x) \geq u_2(x)$$

**证明**  $-u_i$  满足同样的方程, 由弱极值原理,  $-u_i$  在边界达到非负最大值, 而在  $-u_i|_{-\partial\Omega} = -g_i \leq 0$ , 得知  $-u_i$  在区域上非正, 即  $u_i$  非负。

再考虑  $u = u_2 - u_1$  满足的方程:

$$\begin{cases} -\Delta u + c_1(x)u = (c_1(x) - c_2(x))u_2(x) \leq 0 \\ u|_{\partial\Omega} = g_2 - g_1 \leq 0 \end{cases}$$

同上一步, 得到  $u = u_2 - u_1$  非正。

3. 假设  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  是有界开集,  $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  是定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u + u^3 - u = 0, & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g_i \end{cases}$$

的一个解。证明: 如果  $\max_{\partial\Omega} |g(x)| \leq 1$ , 则  $\max_{\partial\Omega} |u(x)| \leq 1$ 。

**证明** 假设在最大值点有  $u(x_0) > 1$ , 则  $\Delta u(x_0) \leq 0$ ,  $u^3(x_0) - u(x_0) \geq 0$  矛盾。最小值同理。

在证明极值原理, 以及 Hopf 引理的时候, 我们通过引入辅助函数, 合理选取参数得到一个  $\mathcal{L}u \geq 0$  的函数, 来得到最终结果, 这是研究椭圆函数的一个非常重要的方法。我们介绍一个更一般的椭圆方程的估计性定理, 从中体会这一思路。

### 定义 9.1

设  $\Omega$  是有界开集,  $\mathcal{L}u = a^{ij}u_{ij} + b^i u_i + cu$ , 这里省略了对  $i, j$  的求和符号,  $u$  的下标表示求偏导数。称  $\mathcal{L}$  是椭圆的, 如果系数矩阵  $(a_{ij}(x))$  是正定的, 即:

$$0 \leq \lambda(x)|\xi|^2 \leq a^{ij}\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2 \forall \xi \neq 0$$



**定理 9.2 (整体梯度估计)**

设  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  满足  $a^{ij}u_{ij} = f(x, u)$ ,  $a^{ij}, b^i \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $f \in C^1(\Omega \times \mathbf{R})$ , 则

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| \leq \sup_{\partial\Omega} |\nabla u| + C$$

其中  $C \sim \lambda, \text{diam}\Omega, |a^{ij}|_{C^1}, M = \|u\|_{L^\infty}, \|f\|_{C^1(\Omega \times [-M, M])}$ 。



**证明** 令  $\mathcal{L}u = a^{ij}u_{ij}$ , 则

$$\mathcal{L}(|\nabla u|^2) = 2a^{ij}u_{ik}u_{jk} + 2a^{ij}u_ku_{ijk}$$

求导次数越高的越要先处理, 即含  $u_{ijk}$ , 我们通过对原方程两边求导将其转化为低阶项:

$$a_k^{ij}u_{ij} + a^{ij}u_{ijk} = f_k(x, u) + f_u(x, u)u_k$$

两边乘  $u_k$ , 于是替换掉  $a^{ij}u_ku_{ijk}$ :

$$\mathcal{L}(|\nabla u|^2) = 2a^{ij}u_{ik}u_{jk} + 2f_ku_k + 2f_uu_k^2 - 2a_k^{ij}u_{ij}u_k$$

最后一项用均值不等式

$$|2a_k^{ij}u_ku_{ij}| \leq \frac{\lambda}{n}|u_{ij}|^2 + \frac{n}{\lambda}|u_k|^2|a_k^{ij}|^2$$

对指标求和, 得到

$$\Sigma|2a_k^{ij}u_ku_{ij}| \leq \lambda|\nabla^2 u|^2 + \frac{C}{\lambda}|\nabla u|^2$$

第一项利用椭圆性

$$|2a^{ij}u_{ik}u_{jk}| \geq \lambda|\nabla^2 u|^2$$

中间两项是容易处理的, 因为  $2f_ku_k \leq |\nabla u|^2 + |\nabla f|^2, f_uu_k^2 \leq C|\nabla u|^2$

因此, 我们得到

$$\mathcal{L}(|\nabla u|^2) \leq \lambda|\nabla^2 u|^2 - C|\nabla u|^2 - C$$

再引入辅助函数来消掉一阶导数的平方项:

$$\mathcal{L}(u^2) = 2a^{ij}u_{ij}u + 2a^{ij}u_iu_j = 2a^{ij}u_iu_j + 2uf \geq 2\lambda|\nabla u|^2 + C$$

这样一来就消去了一阶导数的平方项。我们还需要消除常数项, 为此再引入

$$\mathcal{L}(e^{\beta x_1}) = \beta^2 a^{11} e^{\beta x_1}$$

我们不妨假设  $\Omega$  落在条形区域  $0 \leq x_1 \leq d$  中, 那么  $\mathcal{L}(e^{\beta x_1})$  当  $\beta$  很大时可以充分大, 消去常数项。

因此, 我们有  $\mathcal{L}(|\nabla u|^2 + \alpha u^2 + e^{\beta x_1}) \geq 0$ , 由弱极值原理 (这个对一般椭圆方程也是对的)

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega} (|\nabla u|^2 + \alpha u^2 + e^{\beta x_1}) &\leq \sup_{\partial\Omega} (|\nabla u|^2 + \alpha u^2 + e^{\beta x_1}) \\ \sup_{\Omega} |\nabla u|^2 &\leq \sup_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 + C \end{aligned}$$

这就完成了证明。

在能量估计时, 我们用了在方程两边同时乘  $u$  积分, 应用不等式的方法。这在 PDE 的研究中也是

非常重要的方法，请同学们仔细阅读该定理的证明。

我们回顾波方程的内容。首先对于  $n \leq 3$  维的波方程，我们有具体的求解公式。波方程的解具有有限传播速度，由此我们有决定区域、影响区域的概念。分离变量法求解方程是必考的点。

### 作业题

1. 设  $\Phi(x) \in C^2(\mathbf{R})$ ,  $\alpha \in \mathbf{R}^n$ ,  $|\alpha| = 1$ , 则  $\Phi(\alpha \cdot x + at)$  满足波方程

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

### 证明

$$u(t, x) = \Phi(\alpha \cdot x + at)$$

$$\nabla u = \Phi'(\alpha \cdot x + at)\alpha, \Delta u = \Phi''(\alpha \cdot x + at)|\alpha|^2 = \Phi''(\alpha \cdot x + at)$$

$$u_{tt} = a^2 \Phi''(\alpha \cdot x + at)$$

2. 设  $u \in C^2(\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+)$  是初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & (x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbf{R} \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

其中  $\phi, \psi \in C_c(\mathbf{R})$ 。记动能和势能  $k(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} u_t^2(x, t) dx$ ,  $p(t) = \frac{a^2}{2} \int_{\mathbf{R}} u_x^2(x, t) dx$ , 证明: 1.  $k(t) + p(t)$  是与时间无关的常数; 2.  $t$  充分大时  $k(t) = p(t)$

### 证明 (1)

$$\frac{d}{dt}(k(t) + p(t)) = \int_{\mathbf{R}} u_t u_{tt} + a^2 u_x u_{tx} dx = \int_{\mathbf{R}} a^2 u_t u_{xx} - a^2 u_{xx} u_t dx = 0$$

### (2) 利用提示

$$u_t = aF'(x + at) - aG'(x - at), u_x = F'(x + at) + G'(x - at)$$

得到

$$k(t) - p(t) = a^2 \int_{\mathbf{R}} -2F'(x + at)G'(x - at) dx$$

$x \pm at$  的距离是  $2at$ , 当  $t$  充分大时, 因为初值是紧支的, 两点不会同时落在支集里, 因此被积函数为零。

3. 设  $u \in C^2(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}_+)$  满足初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}_+ \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbf{R}^3 \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbf{R}^3 \end{cases}$$

其中  $\phi, \psi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^3)$ 。证明存在常数  $C$  使得

$$|u(x, t)| \leq \frac{C}{t}$$

**证明** 由基尔霍夫公式

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \int_{\partial B_{at}(x)} \phi(y) + \nabla \phi(y) \cdot (y - x) + t \psi(y) dS$$

因为  $\phi, \psi$  是紧支的，所以尽管积分区域  $\partial B_{at}(x)$  很大，起作用的总是有限的。设支集的测度为  $M < \infty$ ，则

$$|u(x, t)| \leq \frac{1}{4\pi a^2 t^2} (|\phi|_{C^0} + |\phi|_{C^1} at + t|\psi|_{C^0}) M \leq \frac{C}{t}$$

这里  $|f|_{C^0} = \sup_x |f(x)|$ ,  $|f|_{C^1} = \sup_x |f(x)| + \sup_x |Df(x)|$

#### 4. 求解初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} + 2\alpha u_t = 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x) \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0 \end{cases}$$

**证明** 设  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , 带入方程

$$\frac{X''}{T''} = \frac{T'' + 2\alpha T'}{a^2 T} = -\lambda$$

则

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

$$T'' + 2\alpha T' + \lambda a^2 T = 0$$

我们知道关于  $x$  的方程有解当且仅当  $\lambda_n = \frac{n\pi^2}{l^2}, X_n = \sin \frac{n\pi}{l} x, n = 1, 2, \dots$

再来看关于  $t$  的方程

$$T''_n + 2\alpha T'_n + \lambda a^2 T_n = 0$$

由经验解法，我们知道

$$\begin{cases} T_n = e^{-\alpha t} (a_n e^{-\sqrt{\alpha^2 - \lambda_n a^2} t} + b_n e^{-\sqrt{\alpha^2 - \lambda_n a^2} t}), n < \frac{\alpha l}{a\pi} \\ T_n = e^{-\alpha t} (a_n + b_n t), n = \frac{\alpha l}{a\pi} \\ T_n = e^{-\alpha t} (a_n \cos \sqrt{\lambda a^2 - \alpha^2} t + b_n \sin \sqrt{\lambda a^2 - \alpha^2} t), n > \frac{\alpha l}{a\pi} \end{cases}$$

再通过边值条件确定系数：

$$\begin{cases} a_n + b_n = \tilde{a}_n \\ -\alpha(a_n + b_n) + \sqrt{\alpha^2 - \lambda_n a^2} (b_n - a_n) = \tilde{b}_n, n < \frac{\alpha l}{a\pi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n = \tilde{a}_n \\ -\alpha a_n + b_n = \tilde{b}_n, n = \frac{\alpha l}{a\pi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n = \tilde{a}_n \\ -\alpha a_n + \sqrt{\lambda_n a^2 - \alpha^2} b_n = \tilde{b}_n, n > \frac{\alpha l}{a\pi} \end{cases}$$

其中  $\tilde{a}_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$ ,  $\tilde{b}_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$

解得

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{2} (\tilde{a}_n - \frac{\tilde{a}_n + \tilde{b}_n}{\sqrt{\alpha^2 - \lambda_n a^2}}) \\ b_n = \frac{1}{2} (\tilde{a}_n + \frac{\tilde{a}_n + \tilde{b}_n}{\sqrt{\alpha^2 - \lambda_n a^2}}), n < \frac{\alpha l}{a\pi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n = \tilde{a}_n \\ b_n = \alpha \tilde{a}_n + \tilde{b}_n, n = \frac{\alpha l}{a\pi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n = \tilde{a}_n \\ b_n = \frac{\alpha \tilde{a}_n + \tilde{b}_n}{\sqrt{\lambda_n a^2 - \alpha^2}}, n > \frac{\alpha l}{a\pi} \end{cases}$$

最终我们得到

$$\begin{aligned} u(x, t) = & e^{-\alpha t} \sum_{n < \frac{\alpha l}{a\pi}} (a_n e^{-\sqrt{\alpha^2 - \lambda_n a^2} t} + b_n e^{-\sqrt{\alpha^2 - \lambda_n a^2} t}) \sin \frac{n\pi}{l} x \\ & + e^{-\alpha t} \sum_{n > \frac{\alpha l}{a\pi}} (a_n \cos \sqrt{\lambda a^2 - \alpha^2} t + b_n \sin \sqrt{\lambda a^2 - \alpha^2} t) \sin \frac{n\pi}{l} x \\ & + e^{-\alpha t} (a_{n_0} + b_{n_0} t) \sin \frac{n_0 \pi}{l} x \end{aligned}$$

上式中，如果  $n_0 = \frac{\alpha l}{a\pi}$  不是整数，则最后一项不出现。

## 9.2 Fourier 变换

接下来介绍一点 Fourier 变换的内容。我们在数学分析学过的 Fourier 变换是这样定义的：

$$\hat{f}(\xi) = \int f(x) e^{ix\xi} dx$$

我们通常要求  $f$  在 Schwartz 函数类 ( $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ ) 里，也就是  $f$  及其任意阶导数都要衰减得比  $|x|^{-k}$  快。Schwartz 函数类太小了，我们想要找到一种途径能对更广泛的函数定义 Fourier 变换。

对于一般的函数来说，上面的表达式未必有意义，但是对 Schwartz 函数总是有效的，因此一个想法是把 Fourier 变换挪到一个 Schwartz 函数上去。我们知道，对于  $f, g \in \mathcal{S}$

$$\int \hat{f}(x) g(x) dx = \int \int f(\xi) e^{-ix\xi} g(x) dx d\xi = \int f(\xi) \hat{g}(\xi) d\xi$$

因此我们对一般的函数，也可以做同样的事情。这里有一个问题：上式告诉了我们  $\int \hat{f} g$  的值，也就是说，给我一个 Schwartz 函数， $\hat{f}$  给出一个值。那么  $\hat{f}$  究竟是什么呢？事实上， $\hat{f}$  是  $\mathcal{S}$  上的连续函数，叫做缓增分布。

这个定义要与原来的相容，也就是说，通过  $\hat{f}(\xi) = \int f(x) e^{ix\xi} dx$  定义的 Fourier 变换，我们也能够将其看成缓增分布。我们可以把好的函数等同于分布：把  $\phi$  等同于  $\mathcal{S}$  上的这个函数： $\phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{C}, g \mapsto \int \phi g$ 。用  $\langle \phi, g \rangle$  表示分布  $\phi$  作用在 Schwartz 函数  $g$  上。

函数可以看作分布，分布不一定是函数，举一个简单的例子： $\delta_0 : \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{C}, g \mapsto g(0)$ ，显然没有哪

个函数满足这个条件。

我们接下来介绍曲面上的 Fourier 变换。假设  $\Sigma \in \mathbf{R}^n$  是  $C^1$  曲面,  $dS$  是  $\Sigma$  上的标准测度, 或者通俗一点叫面积元、体积元, 那么  $dS$  是缓增分布:  $\langle dS, g \rangle = \int_{\Sigma} g(x) dS$ 。对于  $\Sigma$  上的函数  $f$ ,  $fdS$  也是  $\Sigma$  上的测度(当然  $f$  需要满足一定的可积性条件, 这里不过多展开, 假设  $f$  是紧支连续就好), 那么作用在  $\mathcal{S}$  上,

$$\langle fdS, g \rangle = \int_{\Sigma} f(x)g(x)dS$$

因此我们可以定义  $fdS$  的傅里叶变换:

$$\langle f\hat{d}S, g \rangle = \langle fdS, \hat{g} \rangle = \int_{\Sigma} \int_{\mathbf{R}^n} f(x)e^{ix\xi} g(\xi) dS_x d\xi$$

我们看一个例子。

### 定理 9.3

设  $V$  是  $\mathbf{R}^n$  的  $k$  维子空间,  $V^\perp$  是其正交补空间,  $d\sigma, d\sigma^\perp$  是  $V$  和  $V^\perp$  的标准测度, 则

$$\hat{d}\sigma = (2\pi)^k d\sigma^\perp$$



**证明** 不妨设  $V = \{(x_1, \dots, x_n) | x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}$ ,  $V^\perp = \{(x_1, \dots, x_n) | x_1 = \dots = x_k = 0\}$ 。记  $(x_1, \dots, x_n) = (x', x'')$ , 其中  $x' = (x_1, \dots, x_k)$ ,  $x'' = (x_{k+1}, \dots, x_n)$ 。根据定义, 我们只要证明

$$\int_{\mathbf{R}^k} \hat{\phi}(x', 0) dx' = (2\pi)^k \int_{\mathbf{R}^{n-k}} \phi(0, x'') dx'' \forall \phi \in \mathcal{S}$$

令  $\Phi(x') = \int_{\mathbf{R}^{n-k}} \phi(x', x'') dx''$ , 则  $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{n-k})$ ,  $\hat{\Phi}(\xi') = \phi(\xi', 0)$ , 两边同时做 Fourier 逆变换,

$$\Phi(x') = (2\pi)^{-k} \int_{\mathbf{R}^k} \hat{\phi}(\xi', 0) e^{ix'\xi'} d\xi'$$

取  $x' = 0$  即证。

### 定理 9.4

设  $M$  是  $\mathbf{R}^n$  中的  $C^1$  曲面, 余维数是  $k$ 。若  $u = u_0 dS$ ,  $u_0$  是  $M$  上的紧支  $L^2$  函数, 则

$$\int_{|\xi| < R} |\hat{u}(\xi)| d\xi \leq CR^k \int_M |u_0|^2 dS$$



**证明** 我们知道  $C^1$  曲面局部可以写成函数的图像: 存在  $n - k$  个分量, 不妨设为前  $n - k$  个, 使得剩下  $k$  个分量(局部)可以写成  $n - k$  个分量的  $C^1$  函数, 即  $x'' = h(x')$ ,  $(x', x'') \in M$ 。简单起见, 我们只对这一片曲面做证明。曲面的面积元和  $x'$  平面的面积元差一个连续函数:  $dS = a(x)dx'$ 。

$$\hat{u}(\xi) = \int e^{-i(x'\xi' + h(x')\xi'')} u_0(x') a(x') dx'$$

固定  $\xi''$ , 这是在  $\mathbf{R}^{n-k}$  上的积分, 我们有 Parseval 等式

$$\int |\hat{u}(\xi)| d\xi' = (2\pi)^{n-k} \int |u_0|^2 a^2 dx' \leq C \int_M |u_0|^2 dS$$

在  $|\xi''| < R$  上积分即证。

在曲面上，我们有 Parseval 等式的替代品：

**定理 9.5**

设  $M$  是  $C^1$  曲面， $\phi \in C_c(\mathbf{R}^n)$ ,  $u = u_0 dS$ ,  $u_0 \in L^2(M)$  且  $u_0$  是紧支的。则

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int |\hat{\phi}(\xi)| \phi\left(\frac{\xi}{R}\right) R^{-k} d\xi = (2\pi)^{n-k} \int_M |u_0(x)|^2 \left( \int_{N_x} \phi(y) d\sigma_y \right) dS_x$$

这里  $N_x$  是把  $M$  在  $x$  处的法平面移动到过原点所得的  $k$  维子空间。



# 第 10 章 第十次习题课讲义

## 10.1 习题讲解

### 10.1.1 作业部分

作业部分针对于波动方程与热方程的作业.

练习 10.1(P208 T24) 试问: 半无界问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u_t + u_x = 0, & (x, t) \in R_+ \times R_+, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \geq 0, \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

能否直接用对称开拓法求解, 并尝试用特征线法求解此半无界问题.

解

1. 首先回忆一维半无界问题的对称开拓法. 课程中我们的对称开拓法是考察波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(x, t), & (x, t) \in R_+ \times R_+, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \geq 0, \\ u(0, t) = g(t), & t \geq 0 \end{cases}$$

的解.

若  $g(t) \equiv 0$ , 考虑对于方程的奇延拓. 根据 D'Alembert 公式, 当  $\varphi, \psi, f(x, t)$  均为关于  $x$  的奇 (偶) 函数时, 方程的解  $u(x, t)$  为关于  $x$  的奇 (偶) 函数. 奇函数在 0 处的取值为 0, 恰好满足边值条件. 那么将延拓后一维无界问题的解限制在正半轴上面即可得到一维半无界问题的解.

若  $g(t) \not\equiv 0$ , 考虑  $v(x, t) = u(x, t) - g(t)$ , 则方程可以化简为零边值问题.

对于第二类边值问题,

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(x, t), & (x, t) \in R_+ \times R_+, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \geq 0, \\ u_x(0, t) = g(t), & t \geq 0 \end{cases}$$

若  $g(t) \equiv 0$ , 考虑对于方程的偶延拓. 奇偶延拓的选取取决于解在  $x=0$  处的性质!

若  $g(t) \not\equiv 0$ , 同样考虑将边值化零. 令  $u(x, t) = xg(t) + v(x, t)$ , 则  $v_x(x, t) = 0$ , 再利用偶延拓得到  $v(x, t)$ , 进一步得到  $u(x, t)$ .

观察以上两个问题, 利用对称开拓法求解时, 我们要利用一维无界问题的解, 意味着解分别限制在正负半轴均为无界问题的解!

事实上, 以上的过程我们只是对于方程给出了形式解. 自然的考虑是解  $u(x, t) \in C^2$ , 因此只有在初边值满足一定条件的时候该问题才具有较好正则性的解, 即提出了“相容性条件”, 满足了相容性条件才意味着得到了该初边值问题的解. 不过波方程在这门课里面我们不是特别关注他的正则性, 一般可微性都是足够的, 一般题目大多也会特别说明, 这门课唯一需要指出的光滑性就

是调和函数是光滑的，涉及到其高阶导数必须要单独光滑性，前年有一个问题就是没指出调和函数光滑的都扣了 5 分。

2. 其次回忆特征线法。课程中我们只是利用特征线法解决了一阶偏微分方程的解。即考虑问题：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, t)u = f(x, t), \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

令  $x = x(t)$ ,  $U(t) = u(x(t), t)$ , 则

$$\frac{dU}{dt} = u_t + u_x x'(t).$$

若  $x'(t) = a(x(t), t)$ , 则

$$\frac{dU}{dt} + b(x(t), t)U(t) = f(x(t), t).$$

令  $x(0) = c$ ,  $U(0) = u(x(0), 0) = \varphi(c)$ , 则实现了一阶偏微分方程向两个 ode 的转化：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x(t), t), \\ x(0) = c. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} + b(x(t), t)U(t) = f(x(t), t), \\ U(0) = u(x(0), 0) = \varphi(c). \end{cases}$$

这里需要注意的是特征线法的几何意义，我们只考虑需要在后面用到的如下方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t), \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

将其用特征线法转化为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -a, \\ x(0) = c. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = f(x(t), t), \\ U(0) = u(x(0), 0) = \varphi(c). \end{cases}$$

进而

$$x(t) = -at + c,$$

$$\frac{dU}{dt} = f(-at + c, t),$$

$$U(t) = \varphi(c) + \int_0^t f(-a\tau + c, \tau) d\tau,$$

$$u(x, t) = \varphi(x + at) + \int_0^t f(x + a(t - \tau), \tau) d\tau.$$

我们可以从几何的角度考虑这个问题：**在特征线上对时间进行积分可以得到一阶偏微分方程的解**. 请参考群里发的笔记来理解这件事.

3. 回到本题.

(a). 根据初值条件可知需要做奇延拓, 但是  $v(x, t) = -u(-x, t)$  满足方程

$$v_{tt} - v_{xx} - v_t + v_x = 0.$$

$v(x, t)$  与  $u(x, t)$  满足的方程不同, 而  $v(x, t)$  为对称开拓后限制在负半轴上的解, 因此不能用对称开拓法求解问题.

(b). 原方程等价于

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} + 1\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0.$$

令

$$v(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, t),$$

则其满足方程

$$\begin{cases} v_t - v_x + v = 0, \\ v(x, 0) = \psi(x) + \varphi'(x). \end{cases}$$

利用特征线法求解该方程: 令  $x(0) = c, V(0) = v(x(0), 0) = \psi(c) + \varphi'(c)$ , 则实现了一阶偏微分方程向两个 ode 的转化:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -1, \\ x(0) = c. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} + V = 0, \\ V(0) = v(x(0), 0) = \psi(c) + \varphi'(c). \end{cases}$$

可解得

$$v(x, t) = e^{-t}(\psi(x + t) + \varphi'(x + t))$$

$u(x, t)$  满足的方程为:

$$\begin{cases} u_t + u_x = e^{-t}(\psi(x + t) + \varphi'(x + t)), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x), \\ u(0, t) = 0. \end{cases}$$

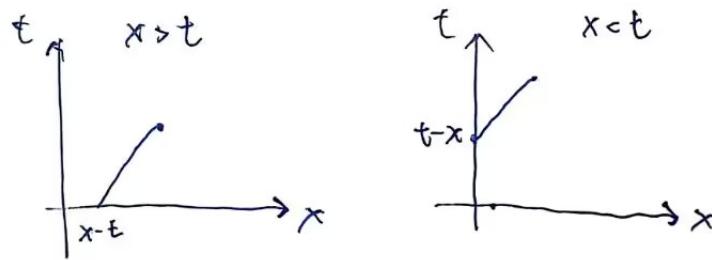
该方程的特征线为  $x(t) = t + c$ , 注意到,  $x$  与  $t$  的大小关系决定了特征线与  $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$  的交点位置. 如下图所示.

因此  $x \geq t$  时, 方程的解为

$$u(x, t) = \varphi(x - t) + \int_0^t e^{-\tau}(\psi(x - t + 2\tau) + \varphi'(x - t + 2\tau))d\tau.$$

$x < t$  时, 方程的解为

$$u(x, t) = \int_{t-x}^t e^{-\tau}(\psi(x - t + 2\tau) + \varphi'(x - t + 2\tau))d\tau.$$

图 10.1:  $x, t$  的关系对交点位置的影响

化简后得到方程的解为

$$u(x, t) = \begin{cases} \varphi(x - t) + \frac{1}{2} e^{\frac{x-t}{2}} \int_{x-t}^{x+t} e^{-\frac{\xi}{2}} (\psi(\xi) + \varphi'(\xi)) d\xi, & x \geq t, \\ \frac{1}{2} e^{\frac{x-t}{2}} \int_{t-x}^{t+x} e^{-\frac{\xi}{2}} (\psi(\xi) + \varphi'(\xi)) d\xi, & x < t. \end{cases}$$

### 注

1. 完成方程的求解不要求提出相容性原理，只需要给出解的表达式即可.
2. 关于赋值与求导的顺序：自然不允许先对  $x$  赋值再对  $x$  求导. 以下的过程是有问题的：

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} + 1 \right) u = 0.$$

令  $v(x, t) = \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} + 1 \right) u$ , 则  $v(0, t) = u_t(0, t) - u_x(0, t) + u(0, t) = 0 - 0 + 0 = 0$ .

### 练习 10.2(P209 T27) 求解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < t, \\ u|_{x=t} = \varphi(t), & t \geq 0, \\ u_x|_{x=0} = \psi(t), & t \geq 0. \end{cases}$$

如果  $\varphi(t), \psi(t)$  都在  $[0, a](a > 0)$  上给定，试指出此定解条件的决定区域.

**解** 根据 D'Alembert 公式，设该方程的解为  $u(x, t) = F(x + t) + G(x - t)$ . 则

$$\varphi(t) = u(t, t) = F(2t) + G(0).$$

$$\psi(t) = u_x(0, t) = F'(t) + G'(-t).$$

则

$$F(t) = \varphi\left(\frac{t}{2}\right) - G(0).$$

$$\int_0^t \psi(\xi) d\xi + C = F(t) - G(-t).$$

则

$$G(t) = F(-t) - \int_0^{-t} \psi(\xi) d\xi - C.$$

故

$$u(x, t) = \varphi\left(\frac{x+t}{2}\right) - G(0) + \varphi\left(\frac{t-x}{2}\right) - G(0) - \int_0^{t-x} \psi(\xi) d\xi - C.$$

进一步求解  $C$ , 在  $G(t)$  的表达式中令  $t = 0$ , 则

$$2G(0) = \varphi(0) - C.$$

因此方程的解为

$$u(x, t) = \varphi\left(\frac{x+t}{2}\right) + \varphi\left(\frac{t-x}{2}\right) - \int_0^{t-x} \psi(\xi) d\xi - \varphi(0).$$

由于  $\varphi(t), \psi(t)$  在  $[0, a](a > 0)$  上给定, 此定解条件的决定区域为

$$\begin{cases} 0 \leq x+t \leq 2a, \\ 0 \leq t-x \leq a. \end{cases}$$

**注**

1. 这里根据 D'Alembert 公式可以考虑为一维无界问题解的一种预设, 我们的想法就是利用已知的初值求解预设表达式中的  $F$  和  $G$ , 最终的求解结果应该只含  $\varphi$  与  $\psi$ .
2. 这里回顾决定区域、影响区域等名词的意义.
3. 本题还可以利用特征线的办法进行求解. 令  $v = u_t + u_x$ , 则满足:

$$\begin{cases} v_t - v_x = 0, \\ v|_{x=t} = u_t|_{x=t} + u_x|_{x=t} = u_t(t, t) + u_x(t, t) = \varphi'(t). \end{cases}$$

特征线为  $x(t) = -t + c$ , 利用特征线法求解可得

$$v(x, t) = \varphi'\left(\frac{x+t}{2}\right).$$

这里可以利用如下的技巧:

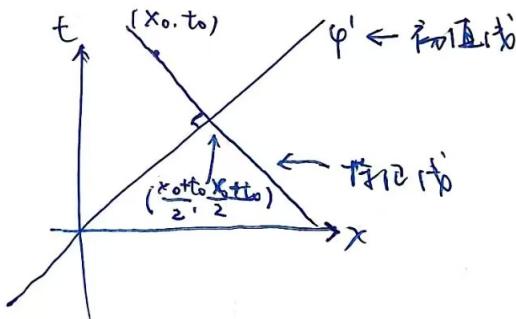


图 10.2: 求解初值线与特征线交点

则  $u(x, t)$  满足方程

$$\begin{cases} u_t + u_x = \varphi'\left(\frac{x+t}{2}\right), \\ u|_{x=t} = \varphi(t), \\ u_x|_{x=0} = \psi(t). \end{cases}$$

可以注意到这里  $x = t$  与特征线平行, 无交点, 也是无法通过前两个表达式决定方程的解的原因. 现在缺的是一条“初值线”, 我们只能利用第三个表达式:

$$(u_t + u_x)(0, t) = \varphi'\left(\frac{t}{2}\right).$$

则

$$\frac{du(0, t)}{dt} = \varphi'\left(\frac{t}{2}\right) - \psi(t).$$

故

$$u(0, t) = u(0, 0) + \int_0^t (\varphi'(\frac{\tau}{2}) - \psi(\tau)) d\tau = 2\varphi(\frac{t}{2}) - \varphi(0) - \int_0^t \psi(\tau) d\tau.$$

得到“初值线”后我们再利用特征线法可解得

$$u(x, t) = 2\varphi(\frac{t-x}{2}) - \varphi(0) - \int_0^{t-x} \psi(\tau) d\tau + \int_{t-x}^t \varphi'(\frac{2\tau-t+x}{2}) d\tau.$$

化简后与我们之前得到的结论相同.

**练习 10.3(P213 T40(2))** 用分离变量法求解混合问题:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(x, 0) = x(x - 2l), u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = 0, u_x(l, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

解 设  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , 则  $X(x)T''(t) - X''(x)T(t) = 0$ . 令

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda.$$

因此

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0.$$

根据边值有

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0,$$

$$u_x(l, t) = X'(l)T(t) = 0.$$

因此考察对于  $x$  的  $S-L$  边值问题:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ X'(l) = 0. \end{cases}$$

存在解  $X(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x$ .

根据初值有

$$\begin{cases} X(0) = c_1 = 0, \\ X'(l) = c_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases}$$

因此具有特征值  $\lambda_n = (\frac{(2n+1)\pi}{2l})^2$ , 对应特征函数为  $X_n(x) = \sin(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x)$ .

考察  $T_n(t)$  满足的方程

$$T_n''(t) + \lambda_n T_n(t) = 0.$$

具有解的形式:

$$T_n(t) = a_n \cos(\frac{(2n+1)\pi}{2l}t) + b_n \sin(\frac{(2n+1)\pi}{2l}t).$$

令

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)T_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x)[a_n \cos(\frac{(2n+1)\pi}{2l}t) + b_n \sin(\frac{(2n+1)\pi}{2l}t)].$$

根据初值有：

$$\begin{cases} u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right) = x(x - 2l), \\ u_t(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{(2n+1)\pi}{2l} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right) = 0. \end{cases}$$

因此

$$\begin{cases} a_n = \frac{\int_0^l [x(x - 2l) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right)] dx}{\int_0^l [\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right)]^2 dx} = -\frac{32l^2}{(2n+1)^3\pi^3}, \\ b_n = 0. \end{cases}$$

则原方程的解为

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{32l^2}{(2n+1)^3\pi^3} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}t\right).$$

**练习 10.4(P214 T41(3))** 用分离变量法求解混合问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(x, 0) = \frac{Ax^2}{l^2}, u_t(x, 0) = 0 & 0 \leq x \leq l, \\ u_x(0, t) = 0, u(l, t) = A & t \geq 0. \end{cases}$$

**解** 首先将边值零化. 考虑

$$v(x, t) = u(x, t) - A.$$

则  $v(x, t)$  满足方程

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ v(x, 0) = \frac{Ax^2}{l^2} - A, v_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l, \\ v_x(0, t) = 0, v(l, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

设  $v(x, t) = X(x)T(t)$ , 则  $X(x)T''(t) - X''(x)T(t) = 0$ . 令

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda.$$

因此

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0.$$

根据边值有

$$v_x(0, t) = X'(0)T(t) = 0,$$

$$v(l, t) = X(l)T(t) = 0.$$

因此考察对于  $x$  的  $S-L$  边值问题：

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X'(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases}$$

存在解  $X(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x$ .

根据初值有

$$\begin{cases} X'(0) = c_2 \sqrt{\lambda} = 0, \\ X(l) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases}$$

因此具有特征值  $\lambda_n = (\frac{(2n+1)\pi}{2l})^2$ , 对应特征函数为  $X_n(x) = \cos(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x)$ .

考察  $T_n(t)$  满足的方程

$$T_n''(t) + \lambda_n T_n(t) = 0.$$

具有解的形式:

$$T_n(t) = a_n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}t\right) + b_n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}t\right).$$

令

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right) [a_n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}t\right) + b_n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}t\right)].$$

根据初值有:

$$\begin{cases} v(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right) = \frac{Ax^2}{l^2} - A, \\ v_t(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{(2n+1)\pi}{2l} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right) = 0. \end{cases}$$

因此

$$\begin{cases} a_n = \frac{\int_0^l [(\frac{Ax^2}{l^2} - A) \cos(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x)] dx}{\int_0^l [\cos(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x)]^2 dx} = -\frac{(-1)^n 32A}{(2n+1)^3 \pi^3}, \\ b_n = 0. \end{cases}$$

则原方程的解为

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{(-1)^n 32A}{(2n+1)^3 \pi^3} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}t\right) + A.$$

**练习 10.5(P139 T18(4))** 用分离变量法求解混合问题:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u_x(0, t) = A_1 t, u_x(\pi, t) = A_2 t, & t \geq 0. \end{cases}$$

**解** 首先将边值零化. 考虑

$$v = u - \left(\frac{1}{2} \frac{A_2 t - A_1 t}{\pi} x^2 + A_1 t x\right).$$

则  $v(x, t)$  满足方程

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = -\frac{A_2 - A_1}{2\pi} x^2 - A_1 x + \frac{A_2 t - A_1 t}{\pi} := f(x, t), & 0 < x < \pi, t > 0, \\ v(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ v_x(0, t) = 0, v_x(\pi, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

设  $v(x, t) = X(x)T(t)$ , 考虑:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

根据边值有

$$v_x(0, t) = X'(0)T(t) = 0,$$

$$v_x(\pi, t) = X'(\pi)T(t) = 0.$$

因此考察对于  $x$  的  $S - L$  边值问题：

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X'(0) = 0, \\ X'(\pi) = 0. \end{cases}$$

存在解  $X(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x$ .

根据初值有

$$\begin{cases} X'(0) = c_2 \sqrt{\lambda} = 0, \\ X'(\pi) = -c_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}\pi = 0. \end{cases}$$

因此具有特征值  $\lambda_n = n^2$ , 对应特征函数为  $X_n(x) = \cos(nx)$ . 这里  $\lambda$  可以为 0, 0 对应特征函数为 1.

考察  $T_n(t)$  满足的方程：

令

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)T_n(t).$$

则

$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} &= \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)T'_n(t) - X''_n(x)T(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [T'_n(t) + \lambda_n T_n(t)]X_n(x) \\ &= f(x, t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)X_n(x). \end{aligned}$$

因此  $T_n(t)$  满足方程：

$$\begin{cases} T'_n(t) + n^2 T_n(t) = f_n(t), \\ T_n(0) = 0. \end{cases}$$

其中  $f_n(t)$  满足：

$$f_n(t) = \frac{\int_0^\pi \cos(nx)f(x, t)dx}{\int_0^\pi \cos^2(nx)dx}.$$

进一步，

$$f_0(t) = \frac{A_2 - A_1}{\pi}t - \frac{\pi}{3}A_1 - \frac{\pi}{6}A_2,$$

$$f_n(t) = \frac{2[A_1 - (-1)^n A_2]}{n^2 \pi}, \quad n \geq 1$$

可解得

$$T_0(t) = \frac{A_2 - A_1}{2\pi}t^2 - \frac{\pi}{3}A_1t - \frac{\pi}{6}A_2t,$$

$$T_n(t) = \frac{2[A_1 - (-1)^n A_2]}{n^4 \pi} (1 - e^{-n^2 t}), \quad n \geq 1.$$

则原方程的解为

$$u(x, t) = \frac{A_2 - A_1}{2\pi} t^2 - \frac{\pi}{3} A_1 t - \frac{\pi}{6} A_2 t + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2[A_1 - (-1)^n A_2]}{n^4 \pi} (1 - e^{-n^2 t}) \right] \cos(nx) + \frac{1}{2} \frac{A_2 t - A_1 t}{\pi} x^2 + A_1 t x.$$

**注** 需要注意的是边值的零化处理. 对于不同类型的边值, 我们有不同的零化处理 (当然正确的处理是有很多的, 这里只是列举了容易想到的):

1.  $u(0, t) = g_1(t), u(l, t) = g_2(t)$ , 则令

$$v = u - \frac{l-x}{l} g_1(t) - \frac{x}{l} g_2(t).$$

2.  $u_x(0, t) = g_1(t), u(l, t) = g_2(t)$ , 则令

$$v = u - (x-l)g_1(t) - g_2(t).$$

3.  $u_x(0, t) = g_1(t), u_x(l, t) = g_2(t)$ , 则令

$$v = u - \left( \frac{1}{2} \frac{g_2 - g_1}{l} x^2 + g_1 x \right).$$

经过商量, 考试的时候请尽可能算到底! 老师不会出很复杂的积分, 如果根据自己的判断积分是很复杂的, 如上面这三个题, 不算下去也不会损失什么分数. 但是如果较为简单, 请尽可能算到底 (不过不算到底也只会占一点点结果分, 看自己斟酌?) .

练习 10.6(P211 T34) 利用能量不等式证明一维波动方程在给定边值条件下的混合问题解的唯一性.

1.  $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u_x|_{x=0} = g_1(t), u_x|_{x=l} = g_2(t), & t \geq 0. \end{cases}$
2.  $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ -u_x + \alpha u|_{x=0} = g_1(t), u_x + \beta u|_{x=l} = g_2(t), & t \geq 0. \end{cases}$

其中  $\alpha$  与  $\beta$  为正的常数.

### 证明

1. 首先来回顾 “能量估计” 是什么. 我们更强调能量估计是一种解决问题的手段, 而不仅仅特指某一个不等式. 课程里面最重要的应用是解决边值问题解的唯一性问题. 即考虑波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0 & x \in \Omega, \end{cases}$$

在不同给定零边值下只有零解.

- (a). 第一类边值问题: 即  $u|_{\partial\Omega} = 0, t > 0$ .

第二类边值问题: 即  $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0, t > 0$ .  
令

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_t^2 + |\nabla u|^2 dx,$$

则

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\Omega} \operatorname{div}(u_t \nabla u) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\partial\Omega} u_t \nabla u \cdot \mathbf{n} dS \\
&= \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS
\end{aligned}$$

在给定零边值条件下右端项均为 0, 表明  $E(t) = E(0) = 0$ , 这迫使  $u_t$  与  $u_{x_i}$  均为 0, 再根据初值知  $u \equiv 0$ .

**考试过程中请使用完整的推导, 请不要直接得出这一个等式!**

- (b). 第三类边值问题: 即  $-u_x + \alpha u|_{x=0} = 0$ ,  $u_x + \beta u|_{x=l} = 0$ ,  $t \geq 0$ .

令

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l (u_t^2 + u_x^2) dx + \frac{1}{2} [\alpha u^2(0, t) + \beta u^2(l, t)].$$

则

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \int_0^l (u_t u_{tt} + u_x u_{xt}) dx + \alpha u(0, t) u_t(0, t) + \beta u(l, t) u_t(l, t) \\
&= \int_0^l (u_t u_{tt} - u_t u_{xx}) dx + u_x u_t|_{x=0}^{x=l} + \alpha u(0, t) u_t(0, t) + \beta u(l, t) u_t(l, t) \\
&= [u_x(l, t) + \beta u(l, t)] u_t(l, t) + [-u_x(0, t) + \alpha u(0, t)] u_t(0, t) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

表明  $E(t) = E(0) = 0$ , 这迫使  $u_t$  与  $u_x$  均为 0, 再根据初值知  $u \equiv 0$ .

2. 除了解的唯一性以外, 我们还利用能量估计的手段研究了稳定性.

练习 10.7(P136 T3(2)) 求函数的逆变换:

$$F(\lambda) = e^{(-a^2\lambda^2+ib\lambda+c)t}.$$

其中  $t > 0$  为参数,  $a \in \mathbf{R}_+$ ,  $b, c \in \mathbf{R}$  为常数.

解 注意到

$$-a^2\lambda^2 + ib\lambda + c = -a^2(\lambda - \frac{ib}{2a^2})^2 + \frac{4a^2c - b^2}{4a^2}.$$

则

$$F(\lambda)^{-1} = e^{(\frac{4a^2c-b^2}{4a^2})t} \cdot (e^{-a^2t(\lambda-\frac{ib}{2a^2})^2})^{-1}.$$

可视作先伸缩后平移, 因此

$$(e^{-a^2t\lambda^2})^{-1} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{\frac{-\pi^2x^2}{a^2t}}.$$

$$(e^{-a^2t(\lambda-\frac{ib}{2a^2})^2})^{-1} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{\frac{-\pi^2x^2}{a^2t}} e^{2\pi i \frac{ib}{2a^2}x}.$$

故

$$F(\lambda)^{-1} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \cdot \exp\left(\frac{-\pi^2x^2}{a^2t} - \frac{\pi bx}{a^2} + \left(c - \frac{b^2}{4a^2}\right)t\right).$$

注

1. 这里建议用以上办法去做, 有部分同学用到了复积分, 但并没有说清楚.
2. 如果考试中需要计算变换与逆变换, 请按照老师所给的定义 (去年卷子上给出了, 和课本会差一个常数); 如果是让解方程, 自然以结果为准.

练习 10.8(P136 T4(1)) 利用 Fourier 变换法求解问题:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + bu_x + cu = f(x, t), & (x, t) \in \mathbf{R}_+^2, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

其中  $a \in \mathbf{R}_+$ ,  $b, c \in \mathbf{R}$  为常数.

**解** 关于方程对  $x$  做 Fourier 变换可得

$$\begin{cases} \hat{u}_t(\xi, t) + 4a^2\pi^2\hat{u}(\xi, t) + 2b\pi i\hat{u}(\xi, t) + c\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi, t) \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{\varphi}(\xi), \end{cases}$$

为关于  $t$  的一阶线性方程, 解得

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{\varphi}(\xi)e^{-(4a^2\pi^2\xi^2+2b\pi i\xi+c)t} + \int_0^t e^{-(4a^2\pi^2\xi^2+2b\pi i\xi+c)(t-s)}\hat{f}(\xi, s)ds.$$

类似上一习题的过程, 可求得

$$(e^{-(4a^2\pi^2\xi^2+2b\pi i\xi+c)t})^{-1} = \frac{1}{2a\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}} \cdot \exp\left(\frac{-\pi^2x^2}{4a^2\pi^2t} - \frac{-2b\pi^2x}{4a^2\pi^2} + \left(-c - \frac{4b^2\pi^2}{16a^2\pi^2}\right)t\right).$$

可化简为

$$(e^{-(4a^2\pi^2\xi^2+2b\pi i\xi+c)t})^{-1} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot \exp\left(\frac{-x^2}{4a^2t} + \frac{bx}{2a^2} + \left(-c - \frac{b^2}{4a^2}\right)t\right) =: F(x, t).$$

而

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^t e^{-(4a^2\pi^2\xi^2+2b\pi i\xi+c)(t-s)}\hat{f}(\xi, s)ds \right\}^{-1} &= \int_R \int_0^t e^{-(4a^2\pi^2\xi^2+2b\pi i\xi+c)(t-s)}\hat{f}(\xi, s)ds e^{2\pi i\xi}d\xi \\ &= \int_0^t ds \int_R e^{-(4a^2\pi^2\xi^2+2b\pi i\xi+c)(t-s)}\hat{f}(\xi, s)e^{2\pi i\xi}d\xi \\ &= \int_0^t \{e^{-(4a^2\pi^2\xi^2+2b\pi i\xi+c)(t-s)}\hat{f}(\xi, s)\}^{-1}ds \\ &= \int_0^t \int_R f(x-y, s)F(y, t-s)dyds. \end{aligned}$$

因此

$$u(x, t) = \int_R \varphi(y)F(x-y, t)dy + \int_0^t \int_R f(x-y, s)F(y, t-s)dyds.$$

**注** 如此恶心的计算自然在考试中不会出现, 但是需要掌握使用 Fourier 变换计算的方法.

**练习 10.9(P141 T25)** 若  $v \in C^{2,1}(\Omega_T)$  满足:

$$v_t - a^2 \Delta v \leqslant 0, \quad (x, t) \in \Omega_T,$$

称  $v$  在  $\Omega_T$  上是热方程的下解, 其中  $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$ ,  $a > 0$  为常数.

1. 证明:

$$\max_{\bar{\Omega}_T} v(x, t) = \max_{\partial_p \Omega_T} v(x, t).$$

2. 设  $\phi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  是光滑凸函数且  $u$  在  $\Omega_T$  上满足热方程. 证明:  $v = \phi(u)$  在  $\Omega_T$  上是热方程的下解.

3. 设  $u$  在  $\Omega_T$  上满足热方程. 证明:  $v = a^2|\nabla u|^2 + u_t^2$  在  $\Omega_T$  上是热方程的下解.

**证明**

1. 根据热方程的极值原理即得. (根据课上定理的证明直接将  $u_{xx}$  换为  $\Delta u$  即可, 为 Hesse 矩阵的迹.)

2. 直接验算即可.  $u$  满足

$$u_t - a^2 \Delta u = 0.$$

则

$$v_t - a^2 \Delta v = \varphi'(u)u_t - a^2\phi''(u)|\nabla u|^2 - a^2\varphi'(u)\Delta u = -a^2\phi''(u)|\nabla u|^2 \leq 0.$$

即  $v$  为下解.

3. 同样直接验算即可.

$$\begin{aligned} v_t - a^2 \Delta v &= 2a^2 \nabla u \cdot \nabla u_t + 2u_t u_{tt} - a^2 \Delta (a^2 |\nabla u|^2 + u_t^2) \\ &= 2a^2 \nabla u \cdot \nabla u_t + 2u_t u_{tt} - a^2 (2a^2 \nabla u \cdot \nabla u_{x_i} + 2u_t u_{tx_i})_{x_i} \\ &= 2a^2 \nabla u \cdot \nabla u_t + 2u_t u_{tt} - a^2 (2a^2 |\nabla u_{x_i}|^2 + 2a^2 \nabla u \cdot \nabla u_{x_i x_i} + 2u_{tx_i}^2 + 2u_t u_{tx_i x_i}) \\ &= 2a^2 \nabla u \cdot \nabla u_t + 2u_t u_{tt} - a^2 (2a^2 |\nabla u_{x_i}|^2 + 2a^2 \nabla u \cdot \nabla u_{x_i x_i} + 2|\nabla u_t|^2 + 2u_t \Delta u_t) \\ &\leq 2a^2 \nabla u \cdot \nabla (u_t - a^2 \Delta u) + 2u_t (u_t - a^2 \Delta u)_t \\ &= 0. \end{aligned}$$

其中不等式的放缩放掉了括号内的第一项和第三项.

**注** 一个很无聊的计算题, 如果对于算子的运算不够熟悉, 展开之后考虑求和本身也不困难, 不一定必须拿算子计算.

**练习 10.10(P141 T26)** 规定记号:  $Q_T = \{(x, t) | 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ ,  $\Gamma = \partial_p Q_T$  为抛物边界. 假设  $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$  是热方程

$$u_t - u_{xx} = u, \quad (x, t) \in Q_T$$

的非负解. 假设存在正数  $M > 0$ , 使得

$$u|_{\Gamma} \leq M.$$

证明:

$$u(x, t) \leq M e^t, \quad (x, t) \in \bar{Q}_T.$$

**证明** 设  $\omega = e^{-t}u$ , 则满足方程:

$$\omega_t - \omega_{xx} = e^{-t}(u_t - u - u_{xx}) = 0.$$

由热方程的极值原理知,

$$\max_{\bar{Q}_T} \omega \leq \max_{\Gamma} \omega \leq M.$$

故

$$u(x, t) \leq M e^t, \quad (x, t) \in \bar{Q}_T.$$

## 10.1.2 补充习题

**例题 10.1(赵班.20final)** 考察如下问题:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = -2b \partial_t u + g(x, t), & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

其中  $b > 0$  为常数. 请用能量方法证明解的唯一性.

**证明** 设  $u_1, u_2$  均为题设初边值问题的解, 令  $w = u_1 - u_2$ , 则  $w$  满足初边值问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \partial_x^2 w = -2b\partial_t w, & 0 < x < l, t > 0 \\ w(0, t) = w(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

定义能量函数

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l (w_t^2 + w_x^2) dx.$$

则有

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^l (w_t w_{tt} + w_x w_{tx}) dx = \int_0^l w_t (w_{tt} - w_{xx}) dx + w_x w_t \Big|_0^l = -2b \int_0^l w_t^2 dx \leq 0.$$

由此可得  $0 \leq E(t) \leq E(0) = 0, \forall t \geq 0$ .

所以  $E(t) \equiv 0 \Rightarrow w_t \equiv w_x \equiv 0 \Rightarrow w$  恒为常数.

结合初边值可得  $w$  恒为零. 所以  $u_1 \equiv u_2$ , 即解是唯一的.

**例题 10.2(能量估计手段, P215 T47)** 考虑混合问题:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & (x, t) \in Q_T, \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u_x|_{x=0} = 0, (u_x + u)|_{x=l} = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

其中  $a$  为常数. 尝试推导能量不等式.

**证明** 我们还是利用基本的能量估计流程去做, 再根据边值条件进行一些变化.

$$u_t u_{tt} - a^2 u_t u_{xx} = f(x, t).$$

两边从 0 到  $l$  开始积分, 有

$$\int_0^l [\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{a^2}{2} u_x^2] dx - a^2 \int_0^l (u_t u_x)_x dx = \int_0^l f u_t dx.$$

故

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^l [\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{a^2}{2} u_x^2] dx &= a^2 u_t u_x \Big|_0^l + \int_0^l f u_t dx \\ &= a^2 [u_x(l, t) u_t(l, t) - u_x(0, t) u_t(0, t)] + \int_0^l f u_t dx \\ &= -a^2 u(l, t) u_t(l, t) - 0 + \int_0^l f u_t dx \\ &= -\frac{a^2}{2} (u(l, t)^2)_t + \int_0^l f u_t dx. \end{aligned}$$

将含有对  $t$  导数的项全部移至左边, 则定义

$$E(t) = \int_0^l [\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{a^2}{2} u_x^2] dx + \frac{a^2}{2} u(l, t)^2.$$

因此

$$\frac{d}{dt} E(t) = \int_0^l f u_t dx \leq \frac{1}{2} \int_0^l f^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l u_t^2 dx \leq E(t) + \frac{1}{2} \int_0^l f^2 dx.$$

$$[e^{-t} E(t)]' \leq e^{-t} \frac{1}{2} \int_0^l f^2 dx.$$

$$E(t) \leq e^t [E(0) + \frac{1}{2} \int_0^t e^{-s} \int_0^l f^2 dx ds] \leq e^t [E(0) + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^l f^2 dx ds].$$

其中

$$\begin{aligned} E(0) &= \int_0^l [\frac{1}{2} u_t(x, 0)^2 + \frac{a^2}{2} u_x(x, 0)^2] dx + \frac{a^2}{2} u(l, 0)^2 \\ &= \int_0^l [\frac{1}{2} \psi(x)^2 + \frac{a^2}{2} \varphi'(x)^2] dx + \frac{a^2}{2} \varphi'(l)^2. \end{aligned}$$

因此可产生估计

$$E(t) \leq C_T \left[ \int_0^l [\frac{1}{2} \psi(x)^2 + \frac{a^2}{2} \varphi'(x)^2] dx + \frac{a^2}{2} \varphi'(l)^2 + \int_{Q_T} f^2 \right].$$

**例题 10.3** 考虑 Klein-Gordon 方程  $u_{tt} - c^2 \Delta u + m^2 u = 0 (m > 0)$ .

1. 指出该方程的能量并证明它是常数.
2. 证明该方程具有有限传播速度, 即方程在  $(x_0, t_0)$  处的解完全由初值在球域  $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x - x_0| \leq ct_0\}$  上的取值决定.

**证明** 本题所有函数均紧支.

1. 该方程的能量函数为

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2 + m^2 u^2) dx.$$

求导可得

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \int_{\mathbb{R}^3} (u_t u_{tt} + c^2 \nabla u \cdot \nabla(u_t) + m^2 u u_t) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} u_t (u_{tt} - c^2 \Delta u + m^2 u) dx = 0. \end{aligned}$$

2. 只需证明: 若方程的初值在球域  $B(x_0, ct_0)$  内恒为零, 则  $u(x_0, t_0) = 0$ . 考虑特征锥  $C(x_0, t_0) = \{(x, t) : 0 \leq t \leq t_0, |x - x_0| \leq c(t_0 - t)\}$ , 并考虑特征锥截面上的能量函数

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_{B(x_0, c(t_0 - t))} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2 + m^2 u^2) dx.$$

求导可得

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{c(t_0-t)} \left( \int_{S(x_0, \tau)} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2 + m^2 u^2) dS \right) d\tau \\ &= \int_{B(x_0, c(t_0-t))} (u_t u_{tt} - c^2 \nabla u \cdot \nabla(u_t) + m^2 u u_t) dx - \frac{c}{2} \int_{S(x_0, c(t_0-t))} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2 + m^2 u^2) dS \\ &= \int_{B(x_0, c(t_0-t))} (u_t (u_{tt} - c^2 \Delta u + m^2 u)) dx - \frac{c}{2} \int_{S(x_0, c(t_0-t))} \left( u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2 - 2cu_t \frac{\partial u}{\partial \nu} + m^2 u^2 \right) dS \\ &= -\frac{c}{2} \int_{S(x_0, c(t_0-t))} \left( u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2 - 2cu_t \frac{\partial u}{\partial \nu} + m^2 u^2 \right) dS. \end{aligned}$$

由 Cauchy 不等式可得

$$\left| 2cu_t \frac{\partial u}{\partial \nu} \right| = |2cu_t (\nabla u \cdot \nu)| \leq 2|u_t| \cdot c|\nabla u| \leq u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2.$$

综上可得  $\frac{de}{dt} \leq 0$ . 结合特征锥底面初值为零可得  $e(0) = 0$ , 所以  $e(t) \equiv 0, \forall t \geq 0$ . 进而在整个特征锥内都有  $u_t \equiv 0, \nabla u \equiv 0 \Rightarrow u$  为常数, 结合初值可得  $u$  恒为零. 所以在特征锥顶  $(x_0, t_0)$  处  $u$  自然也为零.

# 第 11 章 2022 年期末考试参考解答

考试时间 2 小时。

**问题 11.1** 利用分离变量法求解方程

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = Ax, & 0 < x < l \\ u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = Bt, & t \geq 0, \end{cases}$$

其中,  $A, B$  是常数。

解

先把边值调成 0, 令  $v(x, t) = u(x, t) - \frac{Btx}{l}$ , 那么  $v$  满足方程

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_x^2 v = \left(A - \frac{B}{l}\right)x, & 0 < x < l \\ v(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l \\ v(0, t) = 0, v(l, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

把分离变量形式的解  $T(t)X(x)$  带入齐次方程, 得到

$$T'(t)X(x) - T(t)X''(x) = 0 \implies \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

现在考虑 S-L 边值问题

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & 0 < x < l \\ X(0) = 0, X(l) = 0, \end{cases}$$

- 如果  $\lambda = 0$ ,  $X(x) = ax + b$ , 但  $X(0) = X(l) = 0$ , 只能是  $a = b = 0$ , 此时  $\lambda$  不是特征值。
- 如果  $\lambda > 0$ ,  $X(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}$ , 但  $X(0) = X(l) = 0$ , 同样只能是  $a = b = 0$ , 此时  $\lambda$  不是特征值。
- 如果  $\lambda < 0$ ,  $X(x) = a \cos(\sqrt{-\lambda}x) + b \sin(\sqrt{-\lambda}x)$ ,  $X(0) = 0$  推出  $a = 0$ ,  $X(l) = 0$  推出  $b \sin(\sqrt{-\lambda}l) = 0$ 。于是要使得  $X$  非零,  $\sqrt{-\lambda}l = n\pi$ , 即  $\lambda = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ , 其中  $n \geq 1$ , 此时特征函数可取为  $X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ 。

现在令  $v(x, t) = \sum_{n \geq 1} T_n(t)X_n(x)$ , 带入方程得到

$$\sum_{n \geq 1} \left(T'_n(t) + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t)\right) X_n(x) = \left(A - \frac{B}{l}\right)x.$$

两边乘上  $X_n$  再在  $[0, l]$  上积分得到

$$T'_n(t) + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \left(A - \frac{B}{l}\right)x \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} (Al - B).$$

同样道理, 带入初值  $v(x, 0) = 0$  可以得到  $T_n(0) = 0$ 。解关于  $T_n(t)$  的常微分方程得到

$$T_n(t) = \frac{2(-1)^{n+1}l^2}{n^3\pi^3} (Al - B) \left(1 - e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}\right), \quad n \geq 1$$

综上,

$$v(x, t) = \sum_{n \geq 1} \frac{2(-1)^{n+1}l^2}{n^3\pi^3} (Al - B) \left(1 - e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

最后得到

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} \frac{2(-1)^{n+1} l^2}{n^3 \pi^3} (Al - B) \left(1 - e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) + \frac{Btx}{l}.$$

**问题 11.2** 如果已知 (形式上) 有如下关系

$$\left(e^{-i4\pi^2|\xi|^2 t}\right) \tilde{v}(x) = \frac{1}{(4i\pi t)^{n/2}} e^{i\frac{|x|^2}{4t}}, \quad \xi, x \in \mathbb{R}^n,$$

其中  $i = \sqrt{-1}$  表示虚数单位。

(a) 用 Fourier 变换方法求解薛定谔方程

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^n \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

(这里  $u: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  是一个取值为复数的函数。)

(b) 薛定谔方程是否具有有限传播速度? 当时间  $t \rightarrow +\infty$  时,  $u(x, t)$  会怎样? 回答并简要说明理由。

**解**

(a) 对原方程作关于空间变量  $x \in \mathbb{R}^n$  的 Fourier 变换, 得到

$$\begin{cases} i\partial_t \hat{u}(\xi, t) - 4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u}(\xi, t) = 0 \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi). \end{cases}$$

对每个固定的  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , 这是一个 ODE, 解它得到

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) e^{-i4\pi^2|\xi|^2 t}.$$

再作 Fourier 逆变换, 得到

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \left(e^{-i4\pi^2|\xi|^2 t} \hat{f}(\xi)\right) \tilde{v}(x) \\ &= \left(\frac{1}{(4i\pi t)^{n/2}} e^{i\frac{|x|^2}{4t}} * f\right)(x) \\ &= \frac{1}{(4i\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy. \end{aligned}$$

(b) 不具有, 因为即使  $f$  是紧支的, 对任意  $t > 0$ ,  $u(\cdot, t)$  也不一定是紧支的。当  $t \rightarrow +\infty$  时,  $u(x, t)$  (一致) 趋于 0。(可能需要假设  $f$  是 Schwartz 函数)

**注** 这里的 Fourier 变换是缓增分布的 Fourier 变换, 它由下面的式子定义

$$\langle \hat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \hat{\varphi} \rangle,$$

其中  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  是一个缓增分布,  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  (或者  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  是任意的 Schwartz 函数)。

**问题 11.3** 令  $\mathbb{R}_+^2$  表示上半平面, 用格林函数法求解边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

**解**

用  $\Gamma(x) = \frac{1}{2\pi} \log|x|$  表示二维位势方程的基本解，那么上半平面的格林函数是

$$\begin{aligned} G(x, y; x', y') &= \Gamma(x' - x, y' - y) - \Gamma(x' - x, y' + y) \\ &= \frac{1}{2\pi} \log \left( \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} \right) - \frac{1}{2\pi} \log \left( \sqrt{(x' - x)^2 + (y' + y)^2} \right). \end{aligned}$$

于是原边值问题的解是

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} f(x') \frac{\partial}{\partial n} \Big|_{y'=0} G(x, y'; x', y') dx' \\ &= - \int_{\mathbb{R}} f(x') \frac{\partial}{\partial y'} \Big|_{y'=0} G(x, y'; x', y') dx' \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} f(x') \frac{2y}{(x' - x)^2 + y^2} dx' \\ &= \frac{y}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x')}{(x' - x)^2 + y^2} dx' \end{aligned}$$

**问题 11.4** 令  $B$  表示  $\mathbb{R}^n$  中的球  $B_R(x_0)$ 。设  $u \in C^1(\bar{B}) \cap C^2(B)$  是调和的，证明：

$$|Du(x_0)| \leq \frac{n}{R} \max_{\bar{B}} |u|.$$

解

根据调和函数是光滑的，我们知道对任意的  $1 \leq i \leq n$ ,  $u_{x_i}$  是调和的，并且  $u_{x_i} \in C(\bar{B})$ 。根据平均值公式，

$$\begin{aligned} u_{x_i}(x_0) &= \frac{1}{|B|} \int_B u_{x_i}(x) dx \\ &= \frac{1}{|B|} \int_{\partial B} u(y) \nu_i(y) dS(y) \end{aligned}$$

其中第二个等号处使用了 Stokes 公式， $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  是  $\partial B$  上的单位外法向量(场)。于是，写成向量值函数积分的形式，我们有

$$\begin{aligned} |Du(x_0)| &= \frac{1}{|B|} \left| \int_{\partial B} u(y) \nu(y) dS(y) \right| \\ &\leq \frac{1}{|B|} \int_{\partial B} \max_{\bar{B}} |u| \cdot |\nu(y)| dS(y) \\ &= \frac{|\partial B|}{|B|} \max_{\bar{B}} |u| \\ &= \frac{n}{R} \max_{\bar{B}} |u| \end{aligned}$$

**问题 11.5** 用极大值原理证明：热传导方程

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u - 2\partial_x u - 2u = 0, & 0 < x < l, 0 < t \leq T, \\ u(0, t) = 0, u_x(l, t) + u(l, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

的古典解只有零解。(提示：考虑函数  $v = e^{-\lambda t} u(x, t)$ ，其中  $\lambda$  需要选取。)

解

大眼一看，边值没啥问题，就是要把方程里  $u$  这一项的系数调成正的。

带入  $u = e^{\lambda t}v$ , 得到关于  $v$  的方程

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_x^2 v - 2\partial_x v + (\lambda - 2)v = 0, & 0 < x < l, 0 < t \leq T, \\ v(0, t) = 0, v_x(l, t) + v(l, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ v(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

下面开始极值原理标准的论证。我们约定几个记号, 记  $R = [0, l] \times [0, T]$ ,  $I_0 = [0, l] \times \{0\}$ ,  $L_0 = \{0\} \times [0, T]$ ,  $L_l = \{l\} \times [0, T]$ ,  $R_o = R - L_0 - L_l = (0, l) \times (0, T)$ 。假设有非零解  $v$ , 通过乘上  $-1$  不妨假设  $v$  存在正值。由于  $R$  是紧集, 存在  $(x_0, t_0) \in R$  达到  $v$  在  $R$  上的最大值。

- 如果  $(x_0, t_0) \in R_o$ , 那么  $\partial_t v(x_0, t_0) \geq 0$ ,  $\partial_x^2 v(x_0, t_0) \leq 0$ ,  $\partial_x v(x_0, t_0) = 0$ , 此外根据我们的假设还有  $v(x_0, t_0) > 0$ 。如果  $\lambda > 2$ , 那么方程中第一个式子左边在  $(x_0, t_0)$  处严格大于 0, 矛盾。
- 如果  $(x_0, t_0) \in L_l$ , 那么  $\partial_x v(x_0, t_0) = \partial_x v(l, t_0) \geq 0$ ,  $v(x_0, t_0) = v(l, t_0) > 0$ , 与方程中第三个式子矛盾。
- 如果  $(x_0, t_0) \in L_0$  或者  $(x_0, t_0) \in I_0$ , 那么根据假设  $v(x_0, t_0) > 0$ , 这与方程中第二/四个式子矛盾。

综上, 取  $\lambda > 2$  即可证明  $v$  没有非零解, 从而  $u$  也没有非零解。

**问题 11.6** 设  $u(x, t)$  是自由波动方程

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^n \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x). \end{cases}$$

的解。其中  $f(x), g(x)$  是光滑函数, 并且在以原点为中心半径为  $R$  的球  $B_R$  外恒为零。

(a) 定义

$$M(t) = \int_{\mathbb{R}^n} x \cdot \nabla u(x, t) \partial_t u(x, t) dx.$$

证明: 对于任意的时间  $t \geq 0$ , 存在  $C = C(R, t, \|\nabla f\|_2, \|g\|_2)$  (即  $C$  与  $R, t, \|\nabla f\|_2, \|g\|_2$  有关), 使得  $|M(t)| < C(R, t, \|\nabla f\|_2, \|g\|_2) < +\infty$ 。

(b) 证明:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{n}{2} \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 dx + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx.$$

解

(a) 根据波方程的有限传播速度, 积分只在  $B_{R+t}$  上有贡献, 于是

$$\begin{aligned} |M(t)| &\leq (R+t) \int_{B_{R+t}} |\nabla u(x, t)| |\partial_t u(x, t)| dx \\ &\leq \frac{R+t}{2} \int_{B_{R+t}} |\nabla u(x, t)|^2 + |\partial_t u(x, t)|^2 dx \\ &\leq \frac{R+t}{2} C' (\|\nabla f\|_2^2 + \|g\|_2^2) \end{aligned}$$

其中最后一个不等号利用了书上定理 4.7'。

(b) 由于被积函数总是光滑紧支的, 所以可以交换积分与求导顺序。

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \int_{\mathbb{R}^n} (x \cdot \nabla u_t) u_t dx + \int_{\mathbb{R}^n} (x \cdot \nabla u) u_{tt} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (x \cdot \nabla u_t) u_t dx + \int_{\mathbb{R}^n} (x \cdot \nabla u) \Delta u dx \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

接下来我们分别处理两项。

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} x \cdot \nabla(u_t^2) dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} x_i \partial_{x_i}(u_t^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n - \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 dx = -\frac{n}{2} \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 dx \end{aligned}$$

其中第三个等号处我们利用了被积函数是紧支的，分部积分的边界项消失。

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} x_i u_{x_i} u_{x_j x_j} dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n - \int_{\mathbb{R}^n} (x_i u_{x_i})_{x_j} u_{x_j} dx \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \delta_{ij} u_{x_i} u_{x_j} dx - \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} x_i u_{x_i x_j} u_{x_j} dx \\ &= - \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_i}^2 dx - \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} x_i (u_{x_j}^2)_{x_i} dx \\ &= I_3 + I_4 \end{aligned}$$

其中，

$$I_3 = - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx.$$

对于  $I_4$ ，我们再用分部积分，

$$I_4 = \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_j}^2 dx = \frac{n}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx$$

于是，

$$I_2 = \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx.$$

最后就得到了，

$$\frac{dM}{dt} = I_1 + I_2 = -\frac{n}{2} \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 dx + \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx.$$

**注** 本题中的积分  $M$  是位置乘动量密度的积分，称为**位力**，第二间的等式称为**位力恒等式**。