

承 诺 书

我们完全清楚，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式，包括电话、电子邮件、“贴吧”、QQ 群、微信群等，与队外的任何人（包括指导教师）交流、讨论与赛题有关的问题；无论主动参与讨论还是被动接收讨论信息都是严重违反竞赛纪律的行为。

[illegible]

我们参赛选择的题号（从 A/B/C/D/E 中选择一项填写）： B

我们的报名参赛队号（12 位数字全国统一编号）： 202309002065

参赛学校（完整的学校全称，不含院系名）：上海交通大学

参赛队员(打印并签名): 1. 王辰润

2. 卜家梓

3. 郑棋曦

指导教师或指导教师组负责人(打印并签名): _____

(指导教师签名意味着对参赛队的行为和论文的真实性负责)

日期: 2023 年 09 月 7 日

[illegible]

编号专用页

评阅人						
备注						

[illegible]

基于贪心迭代算法和粒子群算法的多波束测线问题求解

摘要

本文研究了水体测深领域中多波束测深技术的最优测线方案设计问题,利用**立体解析几何**相关知识,构建同一测线覆盖区域内各物理量的关系式,建立了多波束测深覆盖宽度和测线间重叠率的数学模型。对于目标为最短测线总长度的优化问题,针对海底为简单平整坡面和由离散点数据点构成的复杂曲面两种情况,分别构建连续化和离散化的优化问题模型,再采取**贪心迭代算法**和**粒子群算法**分别求解,得到最佳测线设计方案。

针对问题一,首先注意到相邻的测线覆盖区域参数之间存在递推关系,在此基础上建立合适的坐标系将问题解析化。其次,利用**正弦定理**、**三角恒等变换**等,将场景中存在的空间几何关系转化为参数间的关系式,并建立递推求解水深、覆盖宽度和区域重叠率的模型。

针对问题二,在问题一的启发下,继续建立合适的三维坐标系将问题解析化。结合三维坐标系下空间解析几何有关知识,将问题转化为一元二次方程解的关系问题。此时我们便可以利用韦达定理、判别式等数学工具,将覆盖宽度用一元二次方程的系数表示,进而转化为题干中参数(测线方向夹角、多波束换能器距中心点距离)的显式表达式。

针对问题三,首先提出并证明命题:当测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角 $\beta = 90^\circ$ 或 270° ,即**沿等深线方向布线**,**多波束测深的覆盖宽度最大**。其次,我们定性说明了覆盖宽度最大和测线总长度最短在最优方案中是等价的,以上工作极大地简化了方案设计的复杂度。最后,我们以测线横坐标为自变量,建立最短测线总长度的优化模型,通过设计**贪心迭代算法**,求解出最短测线的设计方案,并绘制出测线图。方案中**最短测线组的总长度为 68 海里,即 125936 米**,相邻测线间的重叠率均为 10.01%。

针对问题四,我们首先根据附件所给数据对海底地形做可视化处理。基于此,我们确定了根据海底的不同地形,分区域布设测线的**局部贪心最优策略**。同时,我们巧妙地利用附件所给离散数据**将问题转移到离散域上**。我们先对最短测线总长度的优化问题建立了**二次约束规划模型**并成功在小区域上求解,但是受限于数据量巨大、设备算力有限而放弃了求解。随后,我们调整了优化目标和模型约束,将该优化问题重新建模为**多目标优化问题**,并采用启发式算法——**粒子群算法**求出优化问题的近似最优解,最后绘制出测线图。该方案的**测线的总长度为 114 海里,即 211128 米**;漏测海区占总待测海域面积的百分比为 **0.7532%**;在重叠区域中,重叠率超过 20% 的总长度为 **18.28 海里,即 33854.56 米**。

关键字: 多目标优化问题 粒子群算法 贪心迭代算法 空间解析几何

一、问题重述

1.1 问题背景

在水体深度测量领域，精确而可靠的数据是极为关键的，它们不仅用于科学研究，还直接影响到水资源管理、环境监测和海洋工程等各个领域。传统的水深测量方法主要依赖于单波束测深技术，这种方法能够沿航迹密集地采集数据，然而，单波束测深技术无法采集处于测线之间的数据，在复杂的水环境中表现不佳。

为了克服这些挑战并提高水深测量的准确性和效率，多波束测深技术应运而生。多波束测深系统能够在与航迹垂直的平面内一次发射出数十个乃至上百个波束，再由接收换能器接收由海底返回的声波，从而测量出平坦海域内以测量船测线为轴线且具有一定宽度的全覆盖水深条带。考虑不同的待测海域情况，建立多波束测深系统各项指标的数学模型，对推动水深测量领域的创新和进步具有重要意义。

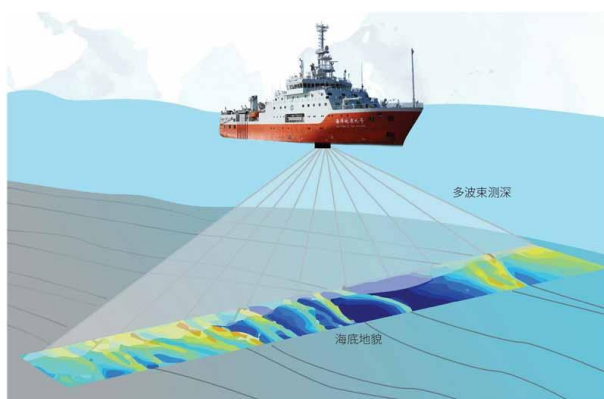


图 1 多波束测深船

1.2 问题要求

问题一：考虑待测海域在与测线方向垂直的平面之间的截面为坡度为 α 的简单斜面，建立多波束测深的覆盖宽度及相邻条带之间重叠率的数学模型。并将其应用于多波束换能器的开角为 120° ，坡度为 1.5° ，海域中心点处的海水深度为 $70m$ 的实际场景下，计算测线距海域中心点处的距离变化时的海水深度、覆盖宽度和测线重叠率。

问题二：仍然假设待测海域为简单斜面，在此基础上考虑测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角为 β ，此时测线并不与海底坡面的底边平行。建立多波束测深覆盖宽度的数学模型并将其应用到多波束换能器的开角为 120° ，坡度为 1.5° ，海域中心

点处的海水深度为 $120m$ 的实际场景的实际场景下，计算测量船距海域中心点处的距离和测线方向夹角变化时的覆盖宽度。

问题三：考虑在一个南北长 2 海里、东西宽 4 海里的矩形海域内，海域中心点处的海水深度为 $110m$ ，西深东浅，坡度为 1.5° ，多波束换能器的开角为 120° 。要求在此实际背景下，设计一组测量长度最短、可完全覆盖整个待测海域的测线，且相邻条带之间的重叠率满足 $10\% \sim 20\%$ 的要求。

问题四：结合附件中的数据，设计多波束测量船的测量布线，需要满足如下要求：

- 沿测线扫描形成的条带尽可能地覆盖整个待测海域；
- 相邻条带之间的重叠率尽量控制在 20% 以下；
- 测线的总长度尽可能短。

设计出测线后，计算测线总长度、漏测海区占总待测海域面积的百分比以及在重叠区域中，重叠率超过 20% 部分的总长度。

二、 问题分析

2.1 问题一分析

首先，注意到相邻的测量船的同一覆盖区域参数存在几何上的递推关系。在同一测量船的覆盖区域内，利用**正弦定理**、**三角恒等变换**，我们又能够找到区域左侧深度、区域右侧深度、区域覆盖宽度等物理量和区域中间深度、区域中心横坐标间存在的函数关系。这些参数和区域重叠率之间亦存在几何关系上的联系。

基于以上找到的关系式，我们可以递推地计算每一块覆盖区域的区域中间深度、区域覆盖宽度和区域重叠率。

2.2 问题二分析

由于测线方向不再与海底坡面的底线平行，而是成一定角度，问题一中所用的一维坐标系不能提供足够的信息。因此我们考虑建立三维坐标系，将问题二转化为三维坐标系中的解析几何问题。

通过构建系数与测线方向夹角、测量船距海域中心点距离相关的一元二次方程，我们可以将覆盖区域宽度求解转化为一元二次方程解的关系问题，从而可以应用**韦达定理**等知识进行求解。

2.3 问题三分析

问题三要求我们在题干给出的实际海域上设计计一组测量长度最短、可完全覆盖整个待测海域的测线，且需要满足相邻条带之间的重叠率在 10% 到 20% 之间。

考虑到本题为开放性问题，我们希望优先对设计方案的范围进行限定以简化问题。结合问题一和问题二的情景，我们考虑先简单证明使用一组**平行于等深线的平行直线作为测线条带**覆盖待测海域是最有效的，为此我们提出并证明了一系列猜想。

在确定了使用平行直线测线的基础上，我们便能将测线方案的设计转化为**迭代控制相邻平行测线间的重叠率进而求解距离**，可以使用贪心迭代算法解决。

2.4 问题四分析

问题四要求我们利用已经测得的单波束测量数据设计多波束测量船的测量布线方案。由于给出的附件数据是离散的，我们首先考虑将数据可视化，绘制等高线图和散点图，大致掌握待测海域的深度分布，随后分区域进行布线，我们注意到直接对附件中离散数据进行插值构建海底曲面模型再进行求解是非常困难的，我们无法显式地求出多波束平面和海底曲面的交点坐标，这使得计算区域覆盖率、重叠率等工作举步维艰。

因此，我们决定不对离散问题进行连续化，而是追加定义**离散化的指标**，如离散覆盖率、离散重叠率等，并尝试从确定性的凸优化方法、随机性的启发式算法两个方面出发，最终采用启发式算法中的**粒子群算法**对问题四的**多目标优化模型**进行求解。

三、模型假设

假设 1 测量船在勘测中以理想状态沿预定的测线航行。本模型不讨论测量船在海上受海浪、天气、人为等因素影响等而出现上下起伏、左右摇晃、偏离航线等情况。忽略测量船在待测海域外的任何行为。

假设 2 多波束换能器的开角 θ 具有一个小于 180° 的上界。在查阅相关技术参数之后，我们设定 $\theta \leq 150^\circ$ 。详见附录 G。该假设用于问题四。

假设 3 测量船视为理想质点，多波束换能器位于海平面上（水深为 0 米），忽略测量船和多波束换能器的大小。

假设 4 在问题一二三中，假设海底是坡度处处为 α 的理想平面。

四、符号说明

表 1 符号说明 (问题一二三)

符号	意义	取值范围
m_i	第 i 条测线的覆盖区域中心坐标	\mathbb{R}
D_i	第 i 条测线所在处的水深	\mathbb{R}^+
d	相邻两条测线的水平距离	\mathbb{R}
α	海底的坡度	$[0, \frac{\pi}{2}]$
θ	多波束换能器的开角	$[0, \pi]$
l_i	第 i 条测线覆盖区域左端坐标	\mathbb{R}
r_i	第 i 条测线覆盖区域右端坐标	\mathbb{R}
W_i	第 i 条测线覆盖区域宽度	\mathbb{R}^+
η_i	第 i 条测线覆盖区域重叠率	$[0, 1]$
β	测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角	$[0, \pi]$
r	测量船与海域中心点距离	\mathbb{R}^+
\mathbf{n}	海底坡面所在平面法向量	\mathbb{R}^3
dl	测量船在航线上位移微元	\mathbb{R}^+
x_{mid}	海域中心点的横坐标	\mathbb{R}
D_{mid}	海域中心点的水深	\mathbb{R}^+

五、模型的建立与求解

5.1 问题一模型建立与求解

5.1.1 坐标系的建立

由于相邻的测量船的同一覆盖区域参数存在几何上的递推关系, 我们考虑以垂直于海底坡面底线的直线为横轴, 以位于海域中心点的测量船的测线与横轴之间的交点为原点, 建立一维坐标系, 从而更直观地量化问题, 其几何关系如下图所示:

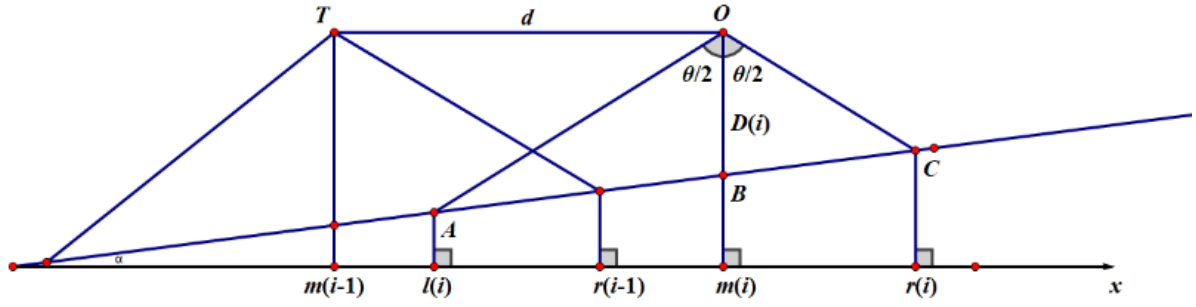


图2 问题一几何关系

5.1.2 覆盖宽度及相邻条带之间重叠率的模型建立

首先，我们将多波束测深的覆盖宽度模型定义为：

定义 1

覆盖宽度 = 测线的条带边缘点投影到水平线上的横坐标之差

如??中，经点 O 的测线覆盖宽度为 $r(i) - l(i)$ 。其物理意义是在测线该点处完成了此宽度范围的测深工作。

然后是相邻条带之间重叠率的模型构建。不同于平坦海底地形，在有坡度的情况下，相邻条带的覆盖宽度是不同的。为了保证重叠率计算的对称性，我们考虑相邻两条平行测线之间共同完成的数据测深区域，我们将其定义为：

定义 2

$$\text{重叠率} = \frac{\text{共同测深区域的重叠宽度}}{\text{两测线在共同测深区域覆盖宽度的和}}$$

如??中，经点 T 和经点 O 的两条测线的共同测深区域即为 m_{i-1} 和 m_i 之间的区域。则其重叠率为：

$$\eta = \frac{(r_{i-1} - m_{i-1}) + (m_i - l_i) - d}{(r_{i-1} - m_{i-1}) + (m_i - l_i)} = \frac{r_{i-1} - l_i}{r_{i-1} - l_i + d} = 1 - \frac{d}{r_{i-1} - l_i + d} \quad (1)$$

同时，该定义也保证了重复率计算的完备性，即同样符合平坦海底的重复率计算。

5.1.3 几何关系的转化

在上述坐标系中，第 i ($-4 \leq i \leq 4$ ，原点处为第 0 条) 条测线的覆盖区域中心坐标 m_i (也可表述为其测线与横轴的交点坐标) 可以表示为：

$$m_i = i \times d \quad (2)$$

式中 d 为相邻两条测线的水平间距。

设第 i 条测线所在处的水深为 D_i ，海底坡度为 α ，则由简单几何关系可以得到：

$$D_i = D_0 - id \tan \alpha \quad (3)$$

在上图所示的 $\triangle ABO$ 和 $\triangle BCO$ 中，设 θ 为换能器的开角，应用正弦定理：

$$\frac{|AB|}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{D_i}{\sin(90 - \frac{\theta}{2} - \alpha)} \quad (4)$$

$$\frac{|BC|}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{D_i}{\sin(90 - \frac{\theta}{2} + \alpha)} \quad (5)$$

将上述两式变形可得：

$$|AB| = \frac{D_i \sin \frac{\theta}{2}}{\cos(\frac{\theta}{2} + \alpha)} \quad (6)$$

$$|BC| = \frac{D_i \sin \frac{\theta}{2}}{\cos(\frac{\theta}{2} - \alpha)} \quad (7)$$

设第 i 条测线的覆盖区域左端横坐标为 l_i （它也是 A 点的横坐标 x_A ），右端横坐标为 r_i （它也是 C 点的横坐标 x_C ）。由简单的几何关系， l_i 和 r_i 可以表示为：

$$l_i = x_A = m_i - |AB| \cos \alpha = m_i - \frac{D_i \sin \frac{\theta}{2} \cos \alpha}{\cos(\frac{\theta}{2} + \alpha)} \quad (8)$$

$$r_i = x_C = m_i + |BC| \cos \alpha = m_i + \frac{D_i \sin \frac{\theta}{2} \cos \alpha}{\cos(\frac{\theta}{2} - \alpha)} \quad (9)$$

设第 i 条测线的覆盖区域宽度为 W_i ，则由 W_i 的定义可得：

$$\begin{aligned} W_i = r_i - l_i &= D_i \sin \frac{\theta}{2} \cos \alpha \left[\frac{1}{\cos \frac{\theta}{2} + \alpha} + \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2} - \alpha} \right] \\ &= D_i \sin \frac{\theta}{2} \cos \alpha \frac{4 \cos \frac{\theta}{2} \cos \alpha}{\cos \theta + \cos 2\alpha} \\ &= \frac{2D_i \sin \theta \cos^2 \alpha}{\cos \theta + \cos 2\alpha} \end{aligned} \quad (10)$$

设第 i 条测线的覆盖区域重叠率为 η_i ，结合题干中计算覆盖区域重叠率的例子，我们不难通过几何关系导出：

$$\eta_i = \frac{r_{i-1} - l_i}{r_{i-1} - l_i + d} \quad (11)$$

这是一个利用第 i 条测线覆盖区域参数和第 $i - 1$ 条测线覆盖区域参数递推计算第 i 条测线的覆盖区域重叠率 η_i 的递推式，所需参数的表达式我们已经在上面的计算中给出。循环计算该式，即可求得每一条测线覆盖面积的重叠率。

根据以上公式，我们计算得到如下的表格：

表 2 问题一解答

测线距中心点处的距离 /m	-800	-600	-400	-200	0	200	400	600	800
海水深度 /m	90.95	85.71	80.47	75.24	70	64.76	59.53	54.29	49.05
覆盖宽度 /m	315.71	297.53	279.35	261.17	242.99	224.81	206.63	188.45	170.27
与前一条测线的重叠率 /%	—	34.68	30.56	25.88	20.53	14.34	7.11	-1.46	-11.77

5.2 问题二模型建立与求解

5.2.1 坐标系的建立

以位于海域中心点为原点，以垂直于海底坡面底线的直线为 x 轴，以平行于海底坡面底线的直线为 y 轴，以垂直于水平面的直线为 z 轴，建立如下图所示的三维直角坐标系。

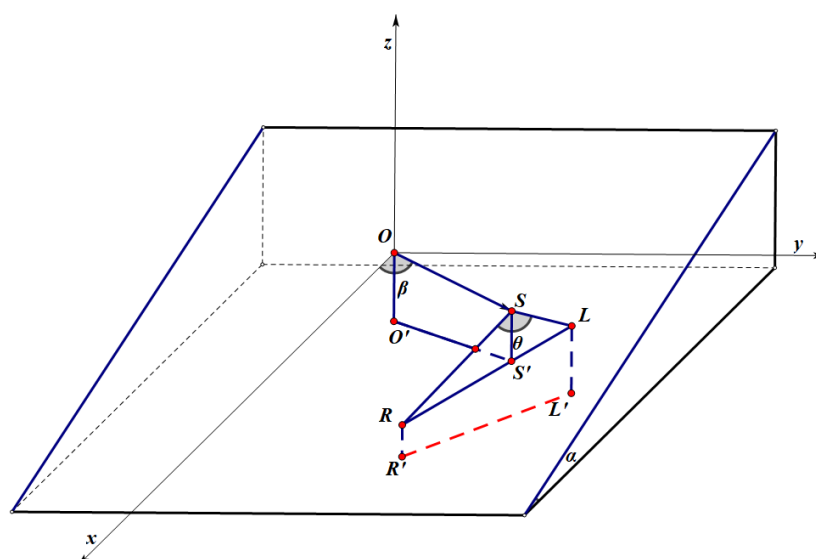


图 3 问题二几何关系

在该坐标系中，原点坐标为 $O(0,0,0)$ 。设海平面上测量船 S 与原点 O 的水平距离为 r ，测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角为 β 。 S' 为 S 在海底平面上的投影。 L, R 分别为当前方向下换能器扫描范围边界与海底平面的交点，满足 $\angle LSS' = \angle RSS' = \frac{\theta}{2}$ 。 L, R 在海底平面上的投影分别为 L', R' 。则覆盖宽度 $W = |L'R'|$ 。海底坡面的坡度为 α 。

5.2.2 利用几何关系建模

此处数学推导繁杂，详细过程见附件 A。

设向量 $\overrightarrow{LS} = (x_1, y_1, z_1)$ ， $\overrightarrow{RS} = (x_2, y_2, z_2)$ ，由一系列几何关系推导，我们得到一个一元二次方程：

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \beta} + (\cos^2 \frac{\theta}{2} - 1) \tan^2 \alpha \right] x_0^2 + 2(1 - \cos^2 \frac{\theta}{2}) \tan \alpha (r \cos \beta \tan \alpha + D_0) x_0 \\ & + (\cos^2 \frac{\theta}{2} - 1) (r \cos \beta \tan \alpha + D_0)^2 = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

而 x_1, x_2 为该一元二次方程两不等实根。

5.2.3 利用二次方程解的性质建模

此处数学推导繁杂，详细过程见附件 A。

由上述一元二次方程及韦达定理，我们可以推出：

$$\begin{aligned} W &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \frac{1}{\sin \beta} |x_1 - x_2| \\ &= \frac{1}{\sin \beta} \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \\ &= \frac{(r \cos \beta \tan \alpha + D_0) \sin \theta}{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \tan^2 \alpha \sin^2 \beta} \end{aligned} \quad (13)$$

这是一个利用测线方向夹角 β 、测量船距海域中心点处的距离 r 两个参数以及海底坡度 α 、多波束换能器开角 θ 、海域中心点水深 D_0 三个已知量计测量船覆盖区域宽度 W 的显式公式。

利用该公式，带入不同的 β 和 r 组合，我们计算得到如下的表格：

表 3 问题二解答

覆盖宽度/m		测量船距海域中心点处的距离/海里							
		0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1
测线方向夹角 /°	0	418.69	466.09	516.49	566.89	617.29	667.69	718.09	768.48
	45	416.12	451.79	487.47	523.14	558.82	594.49	630.16	665.84
	90	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55
	135	416.12	380.45	344.77	309.10	273.42	237.75	202.08	166.40
	180	415.69	365.29	314.89	264.50	214.10	163.70	113.30	62.90
	225	416.12	380.45	344.77	309.10	273.42	237.75	202.08	166.40
	270	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55
	315	416.12	451.79	487.47	523.14	558.82	594.49	630.16	665.84

5.3 问题三模型建立与求解

5.3.1 测线方案的简化猜想及其证明

通过仔细观察问题二中的各公式，我们发现以下多项式在推导过程中时常出现：

$$r \cos \beta \tan \alpha + D_0$$

考虑它的实际意义，我们可以从问题二中 S' 点的定义出发， S' 点的 z 坐标 $z_{S'}$ 可以表示为：

$$z_{S'} = -\frac{r \cos \beta \sin \alpha}{\cos \alpha} - D_0 = -(r \cos \beta \tan \alpha + D_0) \quad (14)$$

而 S' 点的实际意义是测量船 S 在海底坡面上的投影，故测量船所在处的水深 D 可以表示为：

$$D = -z_{S'} = r \cos \beta \tan \alpha + D_0 \quad (15)$$

将多项式 $r \cos \beta \tan \alpha + D_0$ 用 D 替换后，带入 (??) 式中：

$$W = \frac{D \sin \theta}{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \tan^2 \alpha \sin^2 \beta} \quad (16)$$

我们考虑测量船在航线中的一个瞬时状态，在该状态下测量船几乎没有移动，因此其所在位置的水深 D 可当做常数。而多波束换能器开角 θ 和海底坡度 α 为事先给定的常量，故此时 W 为测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角 β 的单变量函数。

不难发现，当 $\sin^2 \beta = 1$ ，即 $\beta = 90^\circ$ 或 270° 时，该状态下的覆盖区域宽度 W 有最大值。 $\beta = 90^\circ$ 或 270° ，分别代表着测线平行于海底坡面底线时行进的两个方向。

基于该结论，我们提出以下猜想：

猜想 1 测线覆盖区域面积最大时，测量船在航线上应时刻保持 $\beta = 90^\circ$ 或 270° 。

依旧从 (??) 式出发，当测量船处于任一确定深度时，都将在 $\beta = 90^\circ$ 或 270° 处取得覆盖区域宽度 W 的瞬时最大值。因此，我们可以断言，为了时刻使得 W 瞬时最大，测量船在航线上应一直保持 $\beta = 90^\circ$ 或 270° 。这证明了猜想 1 的正确性。

我们进一步猜想，当测线覆盖区域面积最大时，覆盖相同海域所需的测线总长度最短，这是符合直觉的。

猜想 2 测线总长度最短时，测量船在航线上应时刻保持 $\beta = 90^\circ$ 或 270° 。

考虑海域面积为 A 的区域，在行驶的任意时刻，设测量船的位移微元为 dl ，覆盖区域的重叠率为 η ，则该时刻波束在测线方向覆盖的面积元为：

$$dA = (1 - \eta)Wdl \quad (17)$$

对上式等号两边同时积分可得：

$$\int (1 - \eta)Wdl = A \quad (18)$$

这是一个定性的表达式，我们可以从中分析得出，欲使得测线总长度 $\int dl$ 最小，我们应该在航线上时刻使得 W 尽可能大， η 尽可能小。结合已经得证的猜想 1，猜想 2 的正确性是显然的。

综上所述，通过控制测线方向夹角 $\beta = 90^\circ$ 或 270° ，我们可以使得航线上的 W 时刻取得瞬时最大值，这个结论说明最优方案中的测线均为平行于海底坡面底线的直线。

5.3.2 优化测线方案的贪心迭代算法

在测线相互平行的基础上，我们进一步优化 η ，即使得每一条测线的覆盖面积重叠率尽量接近下限 10%，这项工作可以使用贪心迭代算法实现。易证得，当测线的方向确定时，相邻条带间的重叠率越小，所需测线越少，即总长度越短。

贪心迭代算法的伪代码如下，其中参数更新的公式推导在问题一中已经给出，此处不再赘述。其中 x_{mid} 、 D_{mid} 分别代表海域中心点的横坐标与水深。

Algorithm 1 计算测线横坐标的贪心迭代算法

- 1: 初始化: $l_0 = 0$, $x_{mid} = 2 \times 1852$, $D_{mid} = 110$, $i = 0$
- 2: 计算: $x_0 = \sqrt{3}(D_{mid} + x_{mid} \tan \alpha)$
- 3: 计算: $D_0 = D_{mid} + (x_{mid} - x_0) \tan \alpha$
- 4: 计算: $r_0 = x_0 + D_0 \frac{\sin \frac{\theta}{2} \cos \alpha}{\cos(\frac{\theta}{2} - \alpha)}$
- 5: **repeat**
- 6: $i \leftarrow i + 1$
- 7: 设置未知数: x_i , D_i , l_i , r_i
- 8: 列方程: $D_i = D_{mid} + (x_{mid} - x_i) \tan \alpha$
- 9: 列方程: $l_i = x_i - D_i \frac{\sin \frac{\theta}{2} \cos \alpha}{\cos(\frac{\theta}{2} + \alpha)}$
- 10: 列方程: $\eta_i = \frac{r_{i-1} - l_i}{r_{i-1} - l_i + (x_i - x_{i-1})} = 0.1$
- 11: 联立上述各式, 求解 x_i
- 12: 更新 D_i : $D_i = D_{mid} + (x_{mid} - x_i) \tan \alpha$
- 13: 更新 l_i : $l_i = x_i - D_i \frac{\sin \frac{\theta}{2} \cos \alpha}{\cos(\frac{\theta}{2} + \alpha)}$
- 14: 更新 r_i : $r_i = x_i + D_i \frac{\sin \frac{\theta}{2} \cos \alpha}{\cos(\frac{\theta}{2} - \alpha)}$
- 15: **until** $r_i \geq 4 \times 1852$

Output: 测线横坐标集合 $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}^+$

使用该贪心迭代算法, 我们可以得到一组平行直线测线的横坐标 $\{x_n\}$, 即为最优的测线设计方案。该组测线共含有 **34** 条南北走向长 **2** 海里的平行测线, 测线总体长度为 **68** 海里, 即共 125936 米。迭代计算结果的可视化图像和具体数据如下图表所示。

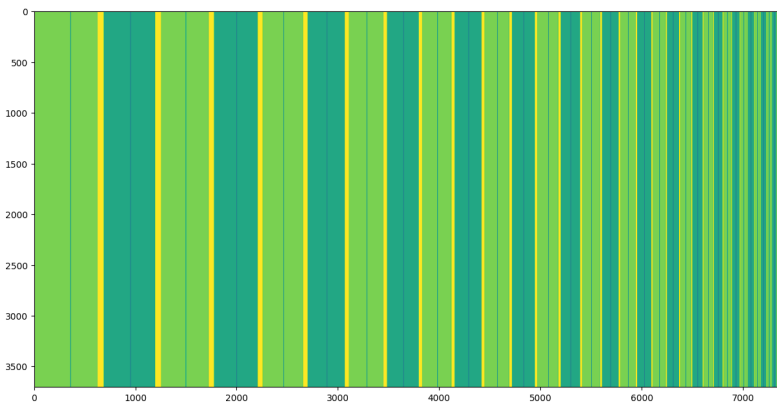


图 4 问题三结果可视化

上图横轴为由西到东，纵轴为由南到北，单位为米。深绿色线为测线，浅绿色、深绿色交替条带为相邻条带，黄色区域为重叠区域。从??和??中可以看出：该组测线完全覆盖了正片待测海域，且与前一条测线的重叠率均为 10.01%，满足题设要求。

表 4 问题三解答

	左交点横坐标	测线横坐标	右交点横坐标	覆盖宽度	与前一条测线重叠率
1	0	358.5217926	685.9328626	685.9328626	\
2	620.086218	950.4837853	1252.211109	632.1248911	0.1001
3	1191.529801	1496.009347	1774.067685	582.5378834	0.1001
4	1718.14652	1998.741181	2254.987246	536.8407263	0.1001
5	2203.452814	2462.03624	2698.181094	494.7282805	0.1001
6	2650.689278	2888.98814	3106.608622	455.9193435	0.1001
7	3062.842299	3282.447818	3482.997071	420.1547719	0.1001
8	3442.663996	3645.042569	3829.859746	387.1957503	0.1001
9	3792.690597	3979.193593	4149.512794	356.8221977	0.1001
10	4115.259377	4287.132154	4444.090674	328.831297	0.1001
11	4412.524265	4570.91449	4715.560406	303.0361412	0.1001
12	4686.470222	4832.435534	4965.734708	279.2644852	0.1001
13	4938.926502	5073.441571	5196.284097	257.3575957	0.1001
14	5171.57886	5295.541901	5408.748051	237.1691911	0.1001
15	5385.980815	5500.219581	5604.54528	218.5644649	0.1001
16	5583.564019	5688.84133	5784.983204	201.4191856	0.1001
17	5765.647817	5862.666655	5951.266684	185.618867	0.1001
18	5933.44806	6022.85626	6104.506064	171.0580036	0.1001
19	6088.085221	6170.479799	6245.724588	157.6393665	0.1001
20	6230.591878	6306.523016	6375.865231	145.2733537	0.1001
21	6361.919606	6431.894329	6495.796998	133.8773922	0.1001
22	6482.945336	6547.430896	6606.320723	123.3753864	0.1001
23	6594.477209	6653.904202	6708.174419	113.69721	0.1001
24	6697.259969	6752.025215	6802.038207	104.7782376	0.1001
25	6791.979941	6842.449129	6888.538854	96.55891367	0.1001
26	6879.269608	6925.779743	6968.253962	88.98435418	0.1001
27	6959.711842	7002.573492	7041.715823	82.00398066	0.1001
28	7033.843788	7073.343158	7109.414971	75.57118221	0.1001
29	7102.160458	7138.561301	7171.803462	69.64300434	0.1001
30	7165.118029	7198.66341	7229.297891	64.1798621	0.1001
31	7223.136897	7254.050812	7282.282173	59.14527581	0.1001
32	7276.604477	7305.093352	7331.110104	54.5056274	0.1001
33	7325.877795	7352.131861	7376.107731	50.22993599	0.1001
34	7371.285871	7395.480438	7417.575522	46.289651	0.1001

5.4 问题四模型建立与求解

5.4.1 问题四符号说明

表 5 符号说明（问题四）

符号	意义	取值范围
\mathbf{d}_j	粒子 j 代表的向量	\mathbb{R}^N
$d_{i,j}$	粒子 j 代表方案中第 i 条测线的坐标	\mathbb{R}^+
H	待测矩形海域的纵向长度（南北方向）	\mathbb{R}
W	待测矩形海域的横向长度（东西方向）	\mathbb{R}
k	当前迭代步数	\mathbb{N}^+
\mathbf{v}_j^k	粒子 j 在第 k 步迭代的速度	\mathbb{R}^N
c_1, c_2	学习因子	\mathbb{R}
r_1, r_2	区间 $[0, 1]$ 中均匀采样的随机数	$[0, 1]$
\mathbf{p}_j^k	粒子 j 在前 k 步的最佳位置	\mathbb{R}^N
\mathbf{p}^{*k}	所有粒子在前 k 步的最佳位置	\mathbb{R}^N
ω	惯性权重	\mathbb{R}
I	粒子群算法总迭代次数	\mathbb{N}^+
C_j	粒子 j 代表方案中数据点是否覆盖指示变量数组	$bool$ 变量集合或 \emptyset
OC_j	粒子 j 代表方案中数据点被覆盖次数变量数组	int 变量集合或 \emptyset
$CoverRate_j$	粒子 j 代表方案中数据点覆盖率	$[0, 1]$
$OverCoverRate_j$	粒子 j 代表方案中数据点覆盖重叠率	$[0, 1]$
θ	多波束换能器的开角	$[0, \pi]$

5.4.2 基于地图可视化的模型简化与预处理

在对附件中的单波束测量数据进行处理之前，我们考虑对其进行可视化，得到如下图所示的等高线图和散点图。

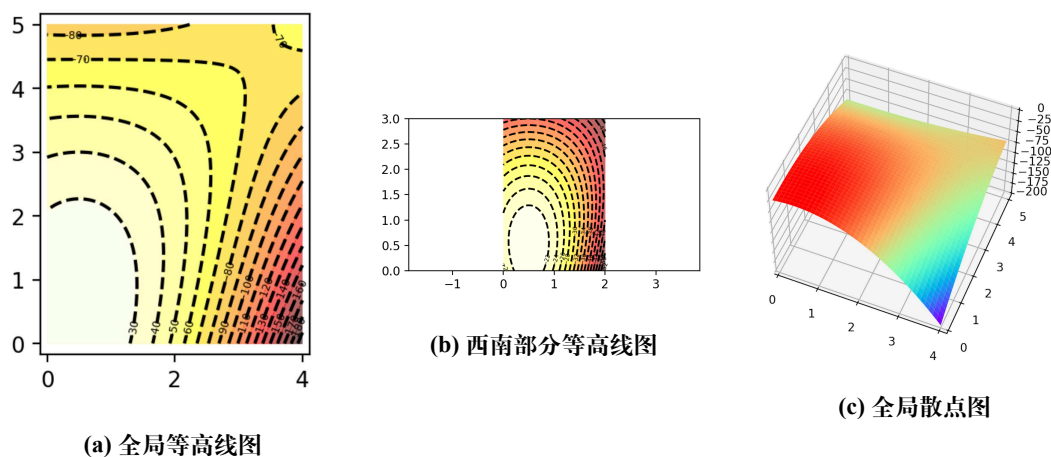


图5 附件数据可视化

基于第二问的结果可知，在沿着等高线方向布设测线效率最高。因此在坡度近似一致的海域，我们可以容易地找到逼近最优解地测线布设方向。但由上图可知，该片海域的海底地形较为复杂，坡度方向和大小并不一致。然而待测海域的海底曲面可以划分为数个坡度方向近似一致的区域，因此我们可以使用**局部最优的贪心算法**，将海域依照海底地形分布分为几个区域分别求解最优的测线布设。并能够按照该区域的坡度走势，固定测线的角度，减少参数量便于优化求解。

在不断的尝试后我们将海域如下图所示进行分区：

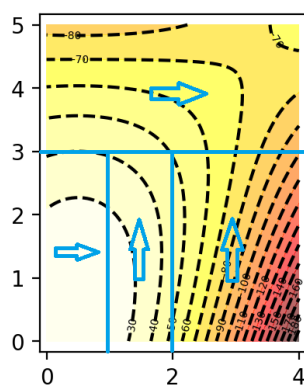


图6 海域分区图

为进一步简化问题，我们提出如下假设：

假设5 本问题中换能器开角 θ 固定为 150° 。这是在查阅了常见的多波束测深换能器设备的技术参数之后决定的，详见附录 G。

假设6 测线均为相互平行的直线，且与待测矩形海域的边界平行

下面我们说明该假设的合理性。

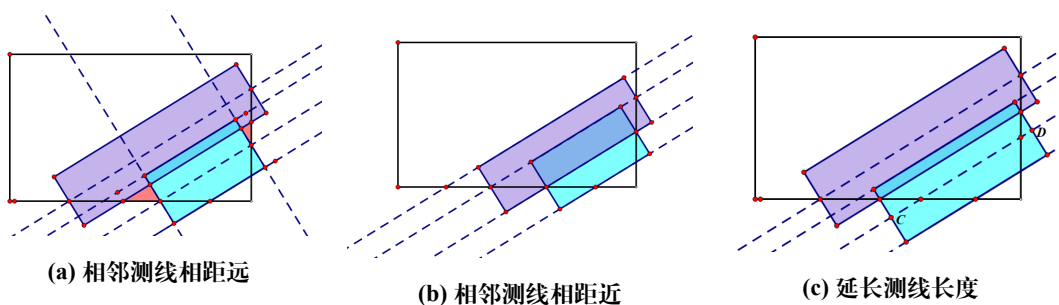


图 7 不平行于边界的测线展示

首先，根据中华人民共和国国家标准《海洋工程地形测量规范》GB/T 17501-2017 中 9.2.1: 当用多波束测深系统测深时, 主测深线方向原则上应平行于等深线的方向。因此布设的测线在一般情况下为平行直线且平行于等深线。同时，如果测线相互之间不平行，那么测线间距、测线间重叠率等指标的定义将变得复杂。所以我们此处假设测线为相互平行的直线。在此基础上，我们划分的区域中，等深线均近似平行于矩形区域边界，故测线的方向可设置为平行于矩形海域的边界，这将减小大量的计算量。如果测线与矩形待测海域边界成一定夹角，则相邻两测线在矩形海域内的部分所能扫描到的区域近似为两个矩形。当相邻测线相距较远时，如??所示，两个矩形之间重叠率较小，但是存在红色三角形区域没有被探测到。如果通过减小间距的方式消除这两个红色三角形区域，如??所示，则会导致相邻测线间重叠率过大，接近 100%。如果通过延长测线到待测海域外来消除红色三角形区域，如??所示，则会导致测线的实际长度，即 $|CD|$ 的计算变得十分繁琐。综上所述，如果不假设测线和待测海域边界平行，那么在边界上，测线间的覆盖率高、重叠率小、测线长度计算方便三者难以兼顾。因此，??是很有必要的。

假设 7 忽略在区域整合时，边缘交线的重叠率以及理论上测线在整合处可适当缩减等问题。

5.4.3 模型的离散化与二次约束规划建模的尝试

针对划分出的每块区域，我们最初的构想是使用插值的方法的数据点构建连续海底曲面。但在实际操作中，无法显式或近似地写出海底曲面的解析式，并且计算量巨大。

而针对附件中的初步单波束测深结果，我们可以将条带覆盖整个海域处理为覆盖这 201*251 个海底样本点, 这将极大优化我们的建模过程。我们将原问题转化为离散优化模型，并对覆盖率、重叠率等指标在离散域上进行重新定义。

决定在离散域上解决问题后，我们首先尝试建立线性或二次规划模型，并成功将约束公式化。在小区域内，该模型成功解出满足条件的最优解。但受限于计算机配置和所用求解器的性能，在较大区域未能顺利求解完毕，这部分的理论推导和工作成果我们将置于附录 B 中。

在查阅相关资料后，我们发现遗传算法、粒子群算法等含随机性的启发式算法能够在极大程度减少计算复杂度的前提下，高效地寻找近似全局最优解。经过尝试，本文最终采取粒子群算法对问题四进行多目标优化建模求解。

5.4.4 基于粒子群算法进行建模

在经典的粒子群算法中，第 j ($j \in [1, M]$, $M = 10$ 为预设的粒子数) 个粒子是一个 N (N 为充分大的正整数) 维向量 $\mathbf{d}_j = (d_{j,1}, d_{j,2}, \dots, d_{j,N})$ ，我们规定每个粒子代表一种测线的设计方案， $d_{j,i}$ ($i \in [1, N]$) 代表该粒子 j 方案中第 i 条测线的坐标。在我们的假设情景下，所有测线均与矩形海域的长或宽平行，因此 $d_{j,i}$ 是在海域的长或宽上标定的一维坐标。

设海域的长（南北高）为 H ，宽（东西宽）为 W ，则测线坐标受到几何关系的约束，不妨规定：

$$\begin{cases} 0 \leq d_{j,1}, d_{j,2}, \dots, d_{j,N} \leq H(\text{或}W), & \forall j \\ d_{j,i} = H(\text{或}W), & \text{当粒子 } j \text{ 中 } d_{j,i} \geq H(\text{或}W) \end{cases} \quad (19)$$

上述关系使得所有粒子代表的设计方案中测线坐标都不会超出待测海域范围，若有超出，超出的部分将设定为海域的边界坐标。

我们接下来考虑粒子的速度，在粒子群算法中，第 j 个粒子的速度递推式如下：

$$\mathbf{v}_j^{k+1} = \omega \mathbf{v}_j^k + c_1 r_1 (\mathbf{p}_j^k - \mathbf{d}_j^k) + c_2 r_2 (\mathbf{p}^{*k} - \mathbf{d}_j^k) \quad (21)$$

式中 \mathbf{v}_j^k 代表粒子 j 在第 k 步迭代时的速度向量 (\mathbf{v}_j^k 的每个分量绝对值有上界 $\frac{H}{2N}$ 或 $\frac{W}{2N}$)， c_1 、 c_2 为学习因子（一般为正数 2）， r_1 、 r_2 为区间 $[0, 1]$ 内均匀采样的随机数， \mathbf{p}_j^k 为粒子 j 前 k 步经过的历史最佳位置， \mathbf{p}^{*k} 为群体内所有 (M 个) 粒子前 k 步所经历过的最佳位置。设算法总迭代次数为 I ，则式中惯性权重 ω 的定义为：

$$\omega = \frac{k\omega_{min} + (I - k)\omega_{max}}{I} \quad (22)$$

其中 $\omega_{min} = 0.4$ ， $\omega_{max} = 1.5$ 均为预设常数。

为了评估方案的优劣，找出最佳方案，我们还需要定义目标函数 $P(\mathbf{d}_j)$ ：

$$P(\mathbf{d}_j) = 100 \times (aCoverRate + b(1 - OverCoverRate)), (a + b = 1) \quad (23)$$

定义数组 C_j 是粒子 j 代表方案中附件各离散数据点是否被测线覆盖的指示变量数组。当数据点 t 被首次覆盖时，置 $C_j[t] = 1$ 。定义数组 OC_j 为粒子 j 代表方案中附件各离散数据被覆盖的次数变量数组，即每当数据点 t 被一条新的测线覆盖时，置 $OC_j[t] = OC_j[t] + 1$ 。 C_j 和 OC_j 均被初始化为全 0 数组。

(??) 式中覆盖率 $CoverRate_j$ 和重叠率 $OverCoverRate_j$ 可以定义为:

$$CoverRate_j = \frac{\sum_t C_j[t]}{H \times W} \quad (24)$$

$$OverCoverRate_j = 1 - \frac{\sum_t C_j[t]}{\sum_t OC_j[t]} \quad (25)$$

以矩形海域的西南顶点为原点，以自西向东为 x 轴正方向，自南向北为 y 轴正方向，竖直向上为 z 轴正方向，建立三维直角坐标系。

对于粒子 j 代表方案向量 \mathbf{d}_j 中第 i 条测线坐标 $d_{j,i}$ ，若数据点 t 被该测线覆盖，则：当测线为东西走向时，下式表示数据点 t 被第 i 条测线的两个波束边缘平面夹在中间，即“覆盖”（有关波束边缘平面解析式的推导详见附录 B）：

$$\begin{cases} y_t - d_{j,i} + \tan \frac{\theta}{2} z_t < 0 \\ -y_t + d_{j,i} + \tan \frac{\theta}{2} z_t < 0 \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} x_t - d_{j,i} + \tan \frac{\theta}{2} z_t < 0 \\ -x_t + d_{j,i} + \tan \frac{\theta}{2} z_t < 0 \end{cases} \quad (27)$$

当测线为南北走向时，同理有：

$$\begin{cases} x_t - d_{j,i} + \tan \frac{\theta}{2} z_t < 0 \\ -x_t + d_{j,i} + \tan \frac{\theta}{2} z_t < 0 \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{cases} y_t - d_{j,i} + \tan \frac{\theta}{2} z_t < 0 \\ -y_t + d_{j,i} + \tan \frac{\theta}{2} z_t < 0 \end{cases} \quad (29)$$

以上四式可以判断数据点是否被覆盖，用于维护数组 C_j 和 OC_j 。

有了上述理论准备后，我们可以依据下式进行粒子群算法的迭代，直至到达迭代次数上限 I ：

$$\mathbf{d}_j^{k+1} = \mathbf{d}_j^k + \mathbf{v}_j^{k+1} \quad (30)$$

5.4.5 粒子群算法的迭代求解过程

在参数的探索中，我们发现将一个粒子的初始值设为均匀分布的平行直线，能够取得非常优异的效果：

1. 能够快速通过该组的覆盖率、重叠率判断该组直线数量是否合适。若覆盖率过小，则增加直线数量；若覆盖率很大但重叠率也很大，则需减少直线数量。这能帮助我们快速筛选逼近最优解。

2. 均匀分布的直线组往往能取得较高的打分值，这简化了算法过程的随机性，避免了很多负向优化的过程，使得所有粒子有一个基本的优化方向，加快了模型的收敛和逼近最优值。

在实际迭代时，(??) 中， (a, b) 的常用取值有 $(0.7, 0.3)$, $(0.5, 0.5)$, $(0.3, 0.7)$ ，总迭代次数的常用取值有 100, 150, 200 等。每次算法终止时，我们分析迭代日志和生成的近似最优解的覆盖率、重叠率等指标，并相应地做以下调整：

当结果的覆盖率接近或等于 1、重叠率 $> 30\%$ 时，可以认为当前设计的测线数目超过了需求，应该减少测线数目，即粒子维度 N 。反之，当覆盖率 $< 70\%$ ，且覆盖率 + 重叠率 < 1 时，可以认为是设计的测线数目过少，考虑增加粒子维度 N 。

当结果的覆盖率在 80% 到 95% 附近，且重叠率 $> 20\%$ 时，可以认为当前设计的测线数目比较合理，但在随即迭代过程中变得比较“拥挤”，或者是迭代不充分，没有收敛到最优解，考虑略微减小粒子维数 N ，或增大总迭代次数 I 。

5.4.6 结果分析与展示

对于划分出的四块区域，由粒子群算法分别迭代求解之后，得到四个海域内的近似最优解，即各条测线的起始坐标。分别统计出该方案下四块海域的测线条数、测线总长度、覆盖率、重叠率超过 20% 的总长度，进而计算出整片待测海域的相应指标。将最终得到的测线设计方案可视化处理后如??所示，各项统计指标如??所示。

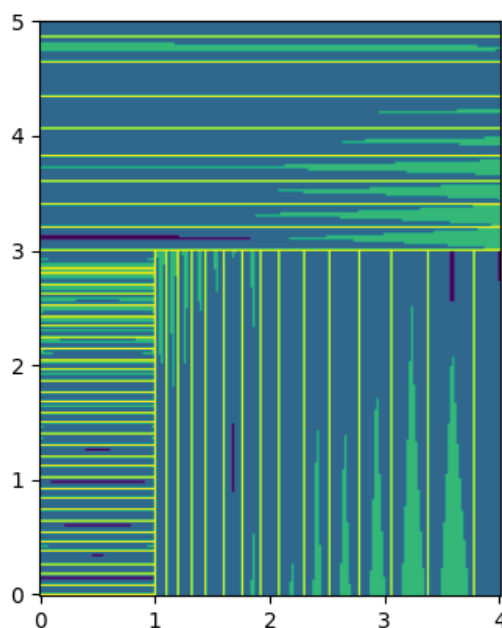


图 8 测线排布图

上图中，黄色线条表示测线布设；蓝色区域表示成功覆盖；绿色部分表示重叠覆盖处；零星的紫色部分表示未被检测出的区域。

表 6 问题四分区结果展示

划分海域	测线条数	该区域测线总长度/海里	漏测率/%	重叠率超 20% 测线长度/海里	漏测数据点数
北部	9	36	0.75	6.38	153
西南	33	33	1.78	6.84	137
中南	8	24	0.39	2.04	30
东南	7	21	1.78	3.02	60
合计	57	114	0.7532	18.28	380

表中

$$\text{漏测率} = \frac{\text{漏测数据点数}}{\text{待测区域内总点数}} \quad (31)$$

重叠率超过 20% 的总长度的统计方法是：在两相邻测线间，任意一条由离散地形图格点组成的垂直于测线的线段上，重叠率定义为：

$$\text{重叠率} = \frac{\text{该线段上位于重叠区内的点的数目}}{\text{该线段上点的数目}} \quad (32)$$

若重叠率 > 20%，则总长度增加 0.02 海里，即离散地形图上相邻格点间的长度。

由上表可知，设计方案中各区域测线的总长度为 $36 + 33 + 24 + 21 = 114$ 海里，折合 **211128m**。

漏测海区占总待测海域面积的百分比可以用各区域漏测点数之和与附件中总数据点数之比表示，即： $\frac{153+137+30+60}{251 \times 201} = 0.7532\%$ 。

在重叠区域中，重叠率超过 20% 部分的总长度为： $6.38 + 6.84 + 2.04 + 3.02 = 18.28$ 海里，折合 **33854.56m**。

六、模型的检验、评价与推广

6.1 模型的检验

在粒子群算法迭代过程中，尽管初始生成的粒子群具有随机性，但是在合理的参数设置下，最终迭代后的结果大多数是比较理想的。这说明在问题四中，实例化的粒子群算法的成功不取决于个别优异的随机数据，而是建立在合理的目标函数设置和参数调整策略上的。

6.2 模型的优点

1. 本文在清楚地分析了几何关系的基础上，针对不同复杂度的建模问题建立不同维度的坐标系对问题进行解析，考虑全面，论述严谨。

2. 针对海底平面的不同情况，我们灵活地在贪心迭代算法、凸优化法、启发式算法间进行选择；通过适当的模型假设，我们在简化模型的同时，没有忽视模型的合理性和严谨性。不同的方法还能相互检验解的正确性。
3. 将粒子群算法与本题情景巧妙结合，搭建恰当的数据结构将连续问题离散化，利用算法中的随机性降低了求近似最优解的复杂度。

6.3 模型的缺点

1. 问题四中模型未能利用离散的海底数据点插值搭建连续的海底曲面，导致覆盖率、重叠率等指标需要在离散域上重新定义，求解也只能达到近似最优。
2. 针对复杂的海底地貌，我们需要手动将海域划分为数个海底坡度方向近似一致的区域，再分区设计测线方案，这一步未能实现自动化。

6.4 模型的推广

本文将测量船抽象为测线上的质点，实际上并未利用到船只的特性。因此，利用无人机探测峡谷深度及其他陆地地貌特点理论上也可以沿用我们的模型。但是，考虑到峡谷和山脉相较于海底较为陡峭，模型可能需要一定的修改。

参考文献

- [1] 应超然. 基于 RTK 三维水深测量技术的多波束测深系统设计 [J]. 水利科技与经济, 2022,28(08):71-75.
- [2] 纪君平. 多波束测深系统在现代海洋测绘中的应用研究 [J]. 科技创新与应用, 2019(19):178-179.
- [3] JT/T 790-2010 中华人民共和国交通运输部. 多波束测深系统测量技术要求 [S]. 上海: 上海海事局
- [4] GB/T 17501-2017 中华人民共和国国家质量监督检验检疫总局, 中国国家标准化管理委员会. 海洋工程地形测量规范 [S]. 北京: 中国标准出版社
- [5] 成芳等. 多波束测量测线布设优化方法研究 [J]. 海洋技术学报, 2016, 35(2):5.DOI:10.3969/j.issn.1003-2029.2016.02.016.
- [6] 张立华, 殷晓冬. 水深测量计划测线布设与航迹控制算法 [J]. 海洋测绘, 2002, 22(2):3.DOI:10.3969/j.issn.1671-3044.2002.02.008.
- [7] 成芳, 杨晓华, 付德强. 水深测量测线布设优化方法研究 [J]. 海洋技术, 2012, 31(4):5.DOI:CNKI:SUN:HYJS.0.2012-04-005.

附录 A 问题二空间解析几何推导过程

1.0.1 坐标系的建立

以位于海域中心点为原点，以垂直于海底坡面底线的直线为 x 轴，以平行于海底坡面底线的直线为 y 轴，以垂直于水平面的直线为 z 轴，建立如下图所示的三维直角坐标系。

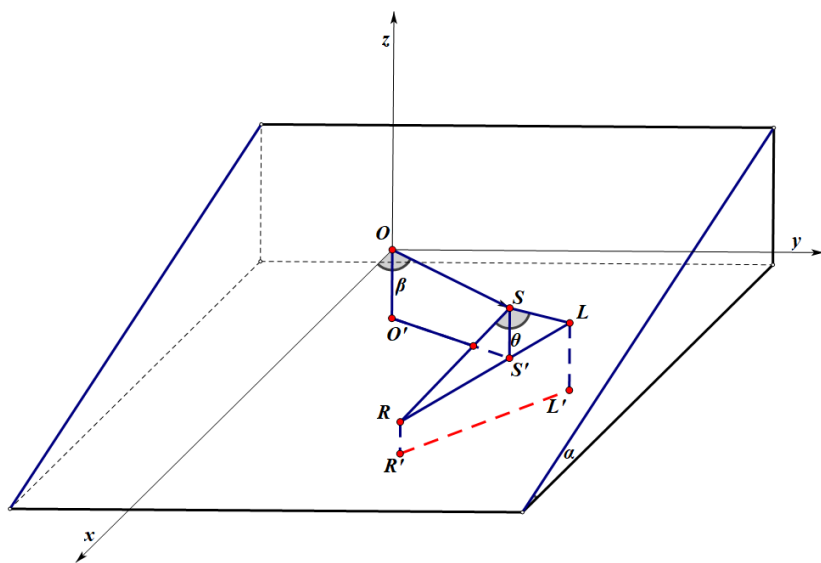


图 9 问题二几何关系

在该坐标系中，原点坐标为 $O(0,0,0)$ 。设海平面上测量船 S 与原点 O 的水平距离为 r ，测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角为 β ，则 S 的坐标可以表示为 $S(r \cos \beta, r \sin \beta, 0)$ 。

1.0.2 利用几何关系建模

由于海底坡面的坡度为 α ，在此坐标系中我们可以得到海底平面（这个平面是立体几何意义上的平面）的法向量为：

$$\mathbf{n} = (\sin \alpha, 0, \cos \alpha) \quad (33)$$

设原点 O 在海底平面上的投影为 O' ，海域中心点处海水深度为 D_0 （问题二中 $D_0 = 120m$ ）可得 $O'(0,0,-D_0)$ 。设海域内任一点坐标为 $S'(x,y,z)$ ，则由 O' 指向该点的向量为：

$$\overrightarrow{O'S'} = (x, y, z + D_0) \quad (34)$$

若 S' 位于海底平面上，应满足：

$$\overrightarrow{O'S'} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (35)$$

该式即为海底平面的解析式，带入可得：

$$x \sin \alpha + (z + D_0) \cos \alpha = 0 \quad (36)$$

考虑 S' 为 S 在海底平面上的投影，则 $S'(x, y, z)$ 应满足：

$$\begin{cases} x \sin \alpha + (z + D_0) \cos \alpha = 0 \end{cases} \quad (37)$$

$$\begin{cases} x = r \cos \beta \end{cases} \quad (38)$$

$$\begin{cases} y = r \sin \beta \end{cases} \quad (39)$$

解上述方程组得：

$$S'(r \cos \beta, r \sin \beta, -\frac{r \cos \beta \sin \alpha}{\cos \alpha} - D_0)$$

下面我们考虑刻画测量船 S 覆盖区域左端点 L 和右端点 R 的位置。考虑海域内满足如下关系的点 X ：

$$\overrightarrow{XS} = (x_0, y_0, z_0) \quad (40)$$

X 在海域内，因此有 $z_0 > 0$ 。

由题干信息不难推知波束所在平面 LRS 与测线方向向量 \overrightarrow{OS} 垂直，即有：

$$LRS \perp \overrightarrow{OS}$$

而 \overrightarrow{LS} 和 \overrightarrow{RS} 是平面 LRS 内的向量，因此有：

$$\begin{cases} \overrightarrow{LS} \cdot \overrightarrow{OS} = 0 \end{cases} \quad (41)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{OS} = 0 \end{cases} \quad (42)$$

令 $\overrightarrow{XS} \perp \overrightarrow{OS}$ ，即：

$$\overrightarrow{XS} \cdot \overrightarrow{OS} = 0 \quad (43)$$

带入表达式计算可得：

$$x_0 \cos \beta + y_0 \sin \beta = 0 \quad (44)$$

注意到多波束平面具有对称性， SS' 为 $\angle LSR$ 的角平分线，因此有：

$$\angle LSS' = \angle RSS' = \frac{\theta}{2} \quad (45)$$

式中 θ 为多波束换能器的开角（即 $\angle LSR$ ），我们已经在问题一中定义过。

令 $\angle XSS' = \frac{\theta}{2}$ ，则由向量间的夹角公式：

$$\cos \angle XSS' = \frac{\overrightarrow{XS} \cdot \overrightarrow{S'S}}{|\overrightarrow{XS}| |\overrightarrow{S'S}|} \quad (46)$$

带入表达式计算可得：

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \quad (47)$$

由定义知 $\overrightarrow{XS} = (x_0, y_0, z_0)$ ，且已得到 $S(r \cos \beta, r \sin \beta, 0)$ ，因此可以计算点 X 的坐标 $X(r \cos \beta - x_0, r \sin \beta - y_0, -z_0)$ 。

已知点 L, R 位于海底平面上。令点 X 也位于海底平面上，将其带入海底平面的解析式 (??) 得：

$$(r \cos \beta - x_0) \sin \alpha + (-z_0 - D_0) \cos \alpha = 0 \quad (48)$$

将 (??) 式变形可得：

$$y_0 = -x_0 \cot \beta \quad (49)$$

将 (??) 式变形可得：

$$z_0 = -(x_0 - r \cos \beta) \tan \alpha + D_0 \quad (50)$$

将 (??) 式变形可得：

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} x_0^2 + \cos^2 \frac{\theta}{2} y_0^2 + (\cos^2 \frac{\theta}{2} - 1) z_0^2 = 0 \quad (51)$$

将 (??)(??) 式带入 (??) 式，化简得：

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \beta} + (\cos^2 \frac{\theta}{2} - 1) \tan^2 \alpha \right] x_0^2 + 2(1 - \cos^2 \frac{\theta}{2}) \tan \alpha (r \cos \beta \tan \alpha + D_0) x_0 \\ & + (\cos^2 \frac{\theta}{2} - 1) (r \cos \beta \tan \alpha + D_0)^2 = 0 \end{aligned} \quad (52)$$

这是一个一元二次方程, 由于用于构建此方程的向量 \overrightarrow{XS} 完全满足向量 \overrightarrow{LS} 、 \overrightarrow{RS} 的性质, 不难推知该方程的两个解 (对应的完整向量坐标) 分别对应向量 \overrightarrow{LS} 、 \overrightarrow{RS} 的坐标。
在讨论方程 (??) 的解之前, 我们先计算它的判别式:

$$\Delta = \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \beta} (r \cos \beta \tan \alpha + D_0)^2 \quad (53)$$

显然 $\Delta > 0$, 方程 (??) 有两个实根, 具有明确的实际意义。

1.0.3 利用二次方程解的性质求解

根据已有的知识, 我们知道对于一个有实数根的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$, 它的解 x_1 、 x_2 应满足韦达定理:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \quad (54)$$

$$\quad (55)$$

在此基础上, 我们可以导出两根之差的绝对值公式:

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{4c}{a}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \quad (56)$$

在方程 (??) 中, 二次项系数 $a = \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \beta} + (\cos^2 \frac{\theta}{2} - 1) \tan^2 \alpha$, Δ 的计算见 (??) 式。
设 $\overrightarrow{LS} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{RS} = (x_2, y_2, z_2)$, 则有:

$$\overrightarrow{LR} = \overrightarrow{LS} - \overrightarrow{RS} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) \quad (57)$$

测量船的覆盖区域宽度 W 即为向量 \overrightarrow{LR} 在水平面上的投影:

$$\begin{aligned} W &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \frac{1}{\sin \beta} |x_1 - x_2| \\ &= \frac{1}{\sin \beta} \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \\ &= \frac{2(r \cos \beta \tan \alpha + D_0) \cos \frac{\theta}{2} \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\theta}{2}}}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + (\cos^2 \frac{\theta}{2} - 1) \tan^2 \alpha \sin^2 \beta} \\ &= \frac{(r \cos \beta \tan \alpha + D_0) \sin \theta}{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \tan^2 \alpha \sin^2 \beta} \end{aligned} \quad (58)$$

这是一个利用测线方向夹角 β 、测量船距海域中心点处的距离 r 两个参数以及海底坡度 α 、多波束换能器开角 θ 、海域中心点水深 D_0 三个已知量计测量船覆盖区域宽度 W 的显式公式。

附录 B 问题四二次约束规划思路

以矩形海域的西北角为原点，以自西向东为 x 轴正方向，自南向北为 y 轴正方向，竖直向上为 z 轴正方向，建立三维坐标系。

设我们有一组满足以上假设的共 N (N 充分大) 条测线， $a_i \in \{0, 1\}$ 为第 i 条测线是否启用的指示变量，根据实际意义有 $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_N$ ； t_i 为第 i 条测线的横坐标， $0 < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_i \leq \dots \leq t_N < H$ ； $X_{i,j} \in \{0, 1\}$ 为点 j 是否被第 i 条测线的测深区域覆盖的指示变量。

不难发现，在该情境下，每一条测线是等长的，优化测线的总长度等价于优化测线的数量，因此我们可以将优化的目标函数设为：

$$\min \sum_{i=1}^N a_i$$

由于测线是相互平行的，每条测线的两个波束边缘平面也是相互平行的，它们拥有相同的法向量：

$$\mathbf{n}_1 = (\cos \frac{\theta}{2}, 0, \sin \frac{\theta}{2}) \quad (59)$$

$$\mathbf{n}_2 = (\cos \frac{\theta}{2}, 0, -\sin \frac{\theta}{2}) \quad (60)$$

因此，第 i 条测线的两个波束边缘平面可以用以下平面方程刻画：

$$\cos \frac{\theta}{2}(x - t_i) + \sin \frac{\theta}{2}z = 0 \quad (61)$$

$$\cos \frac{\theta}{2}(x - t_i) - \sin \frac{\theta}{2}z = 0 \quad (62)$$

对于坐标为 (x_j, y_j, z_j) 的点 j ，如果它被第 i 条测线的测深区域覆盖，则它位于第 i 条测线的两个波束边缘平面内侧所夹区域，即：

$$\cos \frac{\theta}{2}(x_j - t_i) + \sin \frac{\theta}{2}z_j < 0 \quad (63)$$

$$\cos \frac{\theta}{2}(x_j - t_i) - \sin \frac{\theta}{2}z_j > 0 \quad (64)$$

此外，点 j 需要位于海域中才能被覆盖，显然需满足：

$$z_j < 0 \quad (65)$$

(??) 式 \times (??) 式得：

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} (x_j - t_i) < \sin^2 \frac{\theta}{2} z_j \quad (66)$$

该式等价于：

$$|x_j - t_i| < \tan \frac{\theta}{2} (-z_j) \quad (67)$$

根据定义， $X_{i,j} \in \{0, 1\}$ 为点 j 是否被第 i 条测线的测深区域覆盖的指示变量，因此上式等价于：

$$(|x_j - t_i| + \tan \frac{\theta}{2} z_j)(2X_{i,j} - 1) < 0 \quad (68)$$

为简化表示，我们引入中间变量 $c_{i,j} = |x_i - t_j|$ 。在我们的定义中，当 $a_i = 0$ 时，代表我们弃用第 i 条测线，为了方便优化问题的设计，我们认为此时应将第 i 条测线的坐标 t_i 移动到充分远的位置。补充引入充分大的实数 M ，则第 i 条测线的坐标可以用 $t_i + (1 - a_i)M$ 表示， $c_{i,j}$ 的定义更新为：

$$c_{i,j} = |x_j - t_i - (1 - a_i)M| \quad (69)$$

至此，点 j 被第 i 条测线的测深区域覆盖可用下式完全表示：

$$(c_{i,j} + \tan \frac{\theta}{2} z_j)(2X_{i,j} - 1) < 0 \quad (70)$$

注意到，在最优方案中，任何离散数据点都会被某一测线覆盖，故有：

$$\sum_{i=1}^N X_{i,j} \geq 1, \quad \forall j \quad (71)$$

当第 i 条测线被弃用时，它自然不可能覆盖任何点，即：

$$X_{i,j} \leq a_i, \quad \forall i \in [1, N], \forall j \quad (72)$$

$\forall i \in [1, N - 1]$ ，设 $y_{i,j} = X_{i,j} \wedge X_{i+1,j}$ 为点 j 是否同时被第 i 条测线和第 $i + 1$ 条测线的测深区域同时覆盖的指示变量 ($y_{i,j} \in \{0, 1\}$ ，补充定义 $y_{n,j} = 0$)。则离散域上的重叠率约束可以表示为：

$$\frac{\sum_j y_{i,j}}{\sum_j X_{i,j} + \sum_j X_{i+1,j}} \leq 20\%, \quad \forall i \in [1, N - 1] \quad (73)$$

有了以上公式化约束，我们可以得到如下的二次约束规划问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^N a_i \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} c_{i,j} = |x_j - t_i - (1 - a_i)M|, \quad \forall i \in [1, N], \forall j \\ (c_{i,j} + \tan \frac{\theta}{2} z_j)(2X_{i,j} - 1) < 0, \quad \forall i \in [1, N], \forall j \\ \sum_{i=1}^N X_{i,j} \geq 1, \quad \forall j \\ X_{i,j} \leq a_i, \quad \forall i \in [1, N], \forall j \\ \frac{\sum_j y_{i,j}}{\sum_j X_{i,j} + \sum_j X_{i+1,j}} \leq 20\%, \quad \forall i \in [1, N-1] \\ y_{i,j} = X_{i,j} \wedge X_{i+1,j}, \quad \forall i \in [1, N-1] \end{cases} \end{aligned}$$

该规划问题可以使用求解器在小区域上进行求解，但受限于巨大的数据量和硬件性能，我们最终放弃了使用该方法求解问题四，此处列出推导过程仅代表我们的工作。

附录 C 问题一覆盖宽度及重叠率模型-python 源程序

```
import math
import numpy as np

theta = 120*math.pi/180 #换能器开角
depth0 = 70 #海域中心深度
alpha = 1.5*math.pi/180 #海底坡度
d = 200 #测线间隔

depth = np.empty(9, dtype = float) #深度列表
x = np.empty(18, dtype = float) #横坐标列表
width = np.empty(9, dtype = float) #覆盖宽度列表
eta = np.empty(8, dtype = float) #重叠率列表

for i in range(9):
    depth[i] = depth0 - (i-4)*d*math.tan(alpha) #计算每条侧线处深度

    x[2*i] = (i-4)*d - depth[i]*math.sin(theta/2)*math.cos(alpha)/math.cos(theta/2+alpha)
    #求每条侧线条带左边缘横坐标
    x[2*i+1] = (i-4)*d + depth[i]*math.sin(theta/2)*math.cos(alpha)/math.cos(theta/2-alpha)
    #求每条侧线条带右边缘横坐标
    width[i] = x[2*i+1] - x[2*i] #相减得到覆盖宽度

for i in range(8): #计算两条条带间的重叠率
    w = x[2*i+1] - x[2*(i+1)]
    eta[i] = w/(w+d)

print(depth)
```

```
print(x)
print(width)
print(eta)
```

附录 D 问题二 β 角下覆盖宽度模型—python 源程序

```
import math

alpha = 1.5*math.pi/180 #海底坡度
theta = 120*math.pi/180 #换能器开角
betas = [45*x*math.pi/180 for x in range(8)] #测线与法线投影夹角
rs = [0.3*x*1852 for x in range(8)] #据海域中心距离
h0 = 120 #海域中心深度

for beta in betas:
    disp = []
    for r in rs:
        disp.append((r*math.tan(alpha)*math.cos(beta)+h0)*math.sin(theta)/
                    (math.cos(theta/2)**2-(math.sin(theta/2)*math.tan(alpha)*math.sin(beta))**2))
        #计算公式推导见论文
    print(disp)
```

附录 E 问题三矩形海域恒定坡度测线布设—python 源程序

```
import math
import numpy as np
from scipy.optimize import fsolve

theta = 120*math.pi/180 #换能器开角
alpha = 1.5*math.pi/180 #海底坡度
x0 = 2*1852 #海域中心横坐标
depth0 = 110 #海域中心深度

depth = [] #测线深度列表
xl = [] #测线条带左边缘横坐标
xr = [] #测线条带右边缘横坐标
m = [] #测线横坐标列表
eta = [] #重叠率列表

n=0
```

```

xl.append(0) #以最西边即最深处为第一条测线的条带左边缘
m.append((depth0 + x0*math.tan(alpha))*math.sqrt(3)) #计算第一条测线横坐标
depth.append(depth0+(x0-m[n])*math.tan(alpha)) #计算第一条测线深度
xr.append(m[n]+depth[n]*math.sin(theta/2)*math.cos(alpha)/math.cos(theta/2-alpha))
    #计算第一条测线条带右边缘横坐标

def func(i):
    x = i[0] #x为带求下一条测线横坐标
    dep = depth0+(x0-x)*math.tan(alpha) #根据x计算此处深度
    l = x - dep*math.sin(theta/2)*math.cos(alpha)/math.cos(theta/2+alpha)
        #根据x计算新测线条带左边缘横坐标
    return [
        (xr[n]-l)/(xr[n]-l+x-m[n])-0.1001 #以重叠率刚好为10%列等式求解
    ]

while(True):
    x = fsolve(func,[0]) #解得下一条测线横坐标x
    x = np.sum(x)
    dep = depth0+(x0-x)*math.tan(alpha) #计算深度
    l = x - dep*math.sin(theta/2)*math.cos(alpha)/math.cos(theta/2+alpha) #计算条带左边缘横坐标
    r = x + dep*math.sin(theta/2)*math.cos(alpha)/math.cos(theta/2-alpha) #计算条带右边缘横坐标
    m.append(x)
    xl.append(l)
    xr.append(r)
    depth.append(dep)
    eta.append((xr[n]-l)/(xr[n]-l+x-m[n]))
    n += 1
    if r >= 4*1852: break #如果新测线条带右边缘横坐标超出范围,说明找到所有测线,停止迭代

n += 1
print(n)
print(m)
print(xl)
print(xr)
print(depth)
print(eta)
print(n*2*1852)

```

附录 F 问题四粒子群算法模型-python 源程序

```

import numpy as np
import pandas as pd
import copy
from math import *
from random import *

```



```

import matplotlib.pyplot as plt

pd.set_option('display.notebook_repr_html',False)
df = pd.read_excel(io='./附件.xlsx')

# 设定边界
# 0~250
south = 0
north = 150
# 0~200
west = 0
east = 50

#south, north, west, east 用于控制待优化的区域坐标，优化不同区域应使用不同的参数

H = north - south + 1
W = east - west + 1

# 读取地图
map = []

for j in range(2+west,3+east):
    row = []
    for i in range(1+south, north+2):
        row.append(-df.iloc[i, j])
    map.append(row)

map = np.array(map)
map = np.transpose(map)
theta = 150 * np.pi / 180

# 每个点的x,y,z坐标列表：点j的坐标为(x[j],y[j],z[j])

x = [(west + i%W) * 0.02 * 1852 for i in range(H*W)]
y = [(south + i//W) * 0.02 * 1852 for i in range(H*W)]
z = [map[i//W][i%W] for i in range(H*W)]

print('Ready!')

m = 10 # 粒子数目
n = 33 # 粒子维度

dir = 1 # 方向 竖直0，水平1

# 初始化粒子 其中有一个为均匀分布
if(dir == 0):
    D = (np.random.random((m,n)) * (W-1) + west) * 1852 * 0.02

```

```

    D[0] = np.linspace(west+2, east-2, n) * 1852 * 0.02
if(dir == 1):
    D = (np.random.random((m,n)) * (H-1) + south) * 1852 * 0.02
    D[0] = np.linspace(south+2, north-2, n) * 1852 * 0.02

# 初始化速度
V = np.zeros((m,n))

# 全局最优与单粒子最优值
best = np.zeros(m)
gbest = 0

# 判断点j是否被线d覆盖
def iscover(j, d, dir):
    if(dir == 0):
        return x[j] - d + np.tan(theta/2) * z[j] < 0 and x[j] - d - np.tan(theta/2) * z[j] > 0
    if(dir == 1):
        return y[j] - d + np.tan(theta/2) * z[j] < 0 and -y[j] + d + np.tan(theta/2) * z[j] < 0

# 目标函数，计算并返回返回分数f，覆盖率和重叠率
def F(ds):
    covered = np.zeros(H * W)
    cover = 0
    overcover = 0
    for j in range(H*W):
        for d in ds:
            if iscover(j,d,dir):
                if covered[j] == 0: cover += 1
                overcover += 1
                covered[j] += 1
    coverrate = cover / H / W
    overrate = 1 - cover / (overcover+1)
    f = 100 * (0.7 * coverrate + 0.3 * (1 - overrate))
    return f, coverrate , overrate

# 粒子群算法迭代过程
p = copy.copy(D) #粒子i经历过的历史最好位置
pg = -1 #群体内所有粒子经过的最好位置

# 初始化
for i in range(m):
    f, c, o = F(D[i])
    if (f>best[i]):
        p[i]=D[i].copy()
        best[i]=f
    if (f>gbest):

```

```

        pg=D[i].copy()
        gbest = f

# 设置边界
if(dir == 0):
    lb = west * 0.02 * 1852
    ub = east * 0.02 * 1852
if(dir == 1):
    lb = south * 0.02 * 1852
    ub = north * 0.02 * 1852
c1 = 2
c2 = 2 #c1, c2为学习因子，一般取正数

# 速度上限
if(dir == 0):
    vmax = W * 0.02 * 1852 / n / 2
if(dir == 1):
    vmax = H * 0.02 * 1852 / n / 2
# 惯性系数
wmax = 1.5
wmin = 0.4

round = 101
for ti in range(round): #迭代次数
    if(ti % 10 == 0):
        print('Generation {}:'.format(ti))
    for i in range(m):
        w = ((round - ti) * wmax + ti * wmin) / round
        V[i] = w * V[i] + c1*random()*(p[i]-D[i])+c2*random()*(pg-D[i])
        for j in range(n):
            if (V[i][j]<0 and V[i][j]<~-vmax): V[i][j] = -vmax
            if (V[i][j]>0 and V[i][j]>vmax): V[i][j] = vmax
        D[i] += V[i]
        for j in range(n):
            if (D[i][j]<lb): D[i][j]=lb
            if (D[i][j]>ub): D[i][j]=ub
        f, c, o = F(D[i])
        if (f>best[i]):
            p[i]=D[i].copy()
            best[i]=f
        if (f>gbest):
            pg=D[i].copy()
            gbest = f
        if(ti % 10 == 0):
            print('No.{0} Point:{1} CoverRate:{2} OverCoverRate:{3}'.format(i, f, c, o))

# 打印最优信息

```

```

f, c, o = F(pg)
print('Best: Point:{0} CoverRate:{1} OverCoverRate:{2}'.format(f, c, o))
print(pg/1852)
pg = np.array(pg)
np.save('best0.npy', pg)

# 绘制测线图
pg = np.load('best0.npy')
f, c, o = F(pg)
print('Best: Point:{0} CoverRate:{1} OverCoverRate:{2}'.format(f, c, o))
print(pg/1852)
covered = np.zeros((H,W))
for j in range(H*W):
    for d in pg:
        if iscover(j,d,dir):
            covered[H-1-j//W][j%W] += 1
line = np.max(covered) + 1
for d in pg:
    x = floor(d / 1852 / 0.02)
    if(dir == 0):
        x -= west
        for i in range(H):
            covered[H-i-1][x] = line
    if(dir == 1):
        x -= south
        for j in range(W):
            covered[H-x-1][j] = line
plt.imshow(covered)

plt.show()

```

附录 G 常见多波束换能器设备的部分技术参数

名称	测深量程	扫宽范围
NORBIT iWBMS 多波束测深系统	0.2m~200m	典型 140°, (7°~179° 在线连续可调)
Reson T20-P 多波束测深仪	0.5~450m(200kHz) 或 0.5~180m(400kHz)	等距 140°, 等角 165°
Reson T50-P 多波束测深仪	0.5~ 575m(200kHz) 或 0.5~ 200m(400kHz)	等距 150°, 等角 165°
MS400P 便携式多波束测深仪	0.2~150m	143°
MS8200 (大力神) 多波束测深系统	0.5 米 ~500 米	160°
iBeam8120 浅水多波束测深仪	0.5m~500m	30°~140°(在线可调)
iBeam8140P 浅水多波束测深仪	0.2~180m''	30°~150°
iBeamE20 多波束测深仪	0.5m~550m	15°~165°(在线可调)
iBeam8140 浅水多波束测深仪	0.5m~180m''	30°~145°(在线可调)
GeoBeam400M 便携式多波束测深系统	0.2~150m	150°
GeoBeam2040 宽带浅水多波束测深系统	500m	140°
KONGSBERG EM®2040P 多波束测深仪	测深可达 600m	上限可达 170°, 上限可达 830m