

# 制御工学入門

## まえがき

本書は制御工学を理解する上で必要な知識を載せたものです。制御において使用される様々な技術を真に活用するためには、根本的な理解が必要不可欠です。これは、制御理論が産業の課題の上に成り立つ理論であり、特定用途向けの技術が少なくないからです。したがって、他の現場の事例がそのまま自身の現場に適用できるとは限りません。悪くいえば制御系設計には一般性がなく、対象とするシステムによって使用する技術が異なります。本書は「自身の現場に適切な技術を導入すること」を見据え、制御理論の導出や証明、使用条件や理論的裏付けについて主に説明しています。

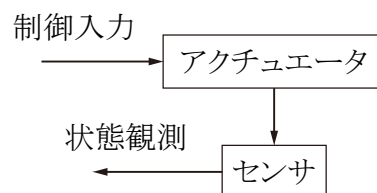
本書では制御によって得られる効果を理論的に示すだけであり、基本的には応答結果などを図示していません。自身でプログラムを組むか、他の書籍を参考にしてください。ただし、他の書籍には記載されていない理論の証明や、実際の経験則に基づく制御系設計の手法などを多く含めてあります。制御理論に触れたことがなく、本書が読みづらいと感じる場合には補助資料としてお使いください。また、本書は基礎的な理論を纏めたものなので、アドバンストな制御の導入を検討される際には専門書を参考にしてください。本書は専門書を読むための基礎知識も多く含んでいるので、スムーズに移行できると思います。

# Chapter 1

## 制御工学概論

### 1.1 制御工学

制御とはシステムに対して入力を行うことで出力を調整するものである。したがって、システムに作用する方法および観測する方法を確立することができれば、制御は可能である。ここで、システムに対して作用する機器をアクチュエータと呼び、観測する機器をセンサシステムと呼ぶ。アクチュエータは入力されたエネルギーを物理的運動に変換する機器の総称であり、電力を供給すると運動を行う電動機や発熱する熱電変換素子がこれに当たる。センサは観測対象の状態を取得する機器の総称であり、位置検出器、加速度センサや温度センサがこれに当たる。



本システムにおいて制御入力を決定し、目標を達成することが制御工学の目的である。上記の概念は人間の行動においても確認することができる。図 1.1 は人間の意志に基づく運動である随意運動の学習制御機構である。運動指令を生成する脳はコントローラ、指令を物理運動に変換する筋肉はアクチュエータ、運動を知覚する感覚器官はセンサの役割を果たす。したがって、コントローラの設計を行うことで、人間の動作を代替することも可能である。コントローラは計算機を用いて設計されるが、人間の脳に対して早い計算速度と時間管理能力を持つため、定量的な情報処理を得意とする。そのため、人間の動作能力を超えた動作を行うことも可能である。

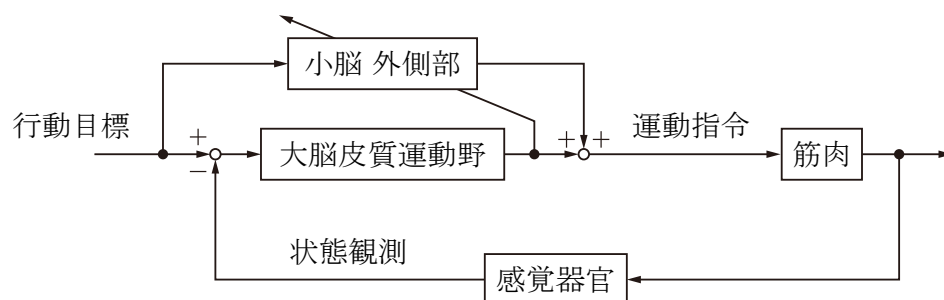


Figure 1.1. 随意運動の学習制御機構

## 1.2 システム構成

運動制御においては、電気エネルギーを運動エネルギーに変換する電動機が広く使用される。今回は制御系の一例として電動機の制御構成を紹介する。前章で述べた通り、運動系の制御には電動機の駆動および出力の観測が要求される。したがって、コントローラはアクチュエータおよびセンサシステムの制御を行う必要がある。一般的にコントローラとして使用される計算機は計算加速器としての側面が強いため、アクチュエータに指令を出す機構やセンサ情報を取り込む機構を有していない。人間に置き換えると、脳と筋肉や感覚器官を接続する神経回路が用意されていない状態である。そこで、周辺回路を設置することで外部機器と通信する。

制御器において最も重要な周辺機器はD/A変換器およびA/D変換器である。D/A変換器は計算機上のバイナリで記述される言語を物理空間上に翻訳するものであり、A/D変換器は物理空間上の情報を計算機言語に変換するものである。これらの回路の使用により、コントローラとアクチュエータおよびセンサシステムが通信を行うことが可能となり、制御が可能となる。実際にはD/A変換のみではアクチュエータと通信することはできず、両者の間に電力変換器を挟む必要がある。これは電動機の電力源を計算機から電力変換器へと移行するためであり、高出力電動機の駆動では欠かせない技術である。以上より、一般的な運動系の制御系は図1.2のように構成される。

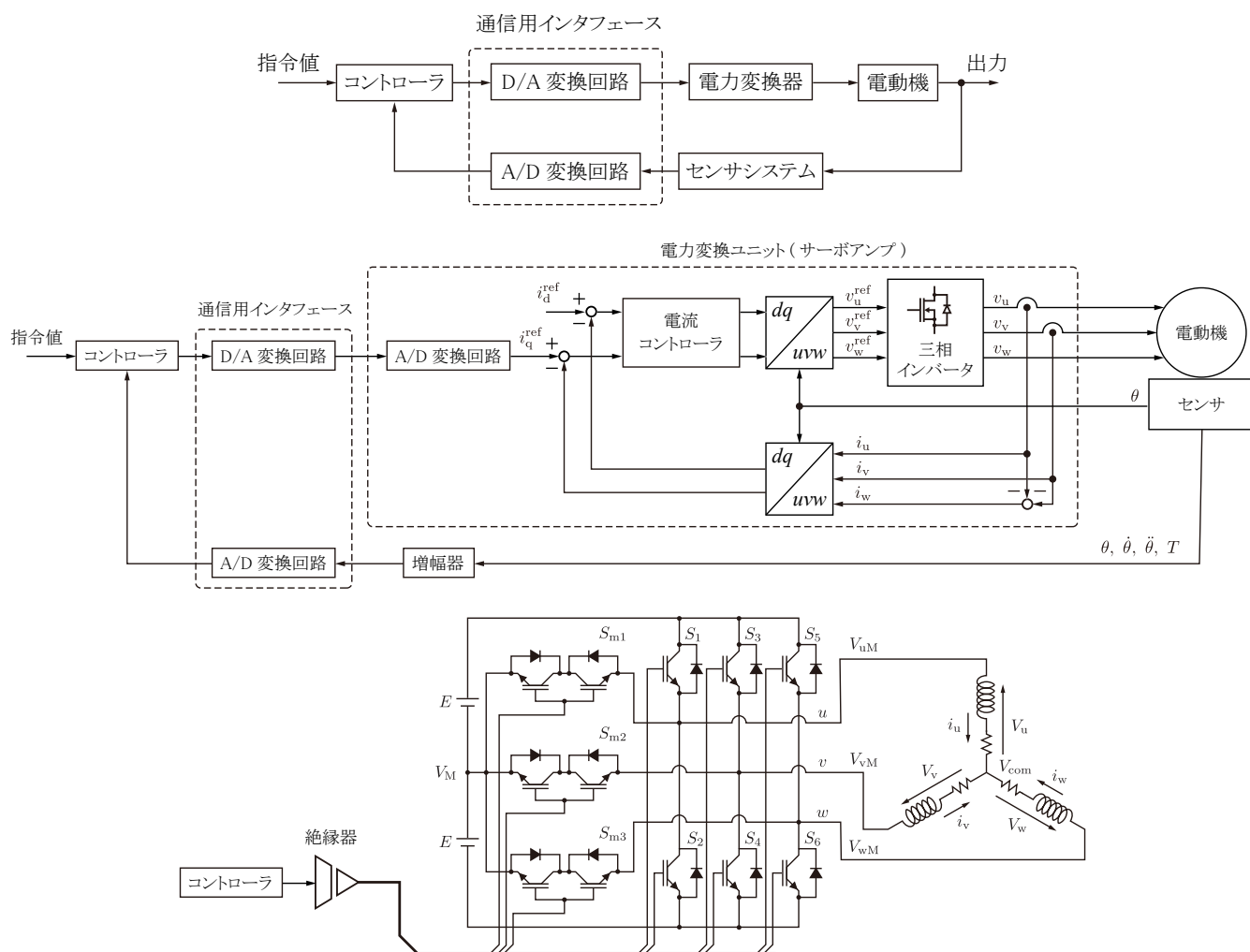


Figure 1.2. 一般的なシステム構成

# Chapter 2

## 物理現象の表現

### 2.1 解析と抽象化

システムの制御を行うにあたり，プラントの特性を理解することは非常に重要である。人間の動作においても，対象を認識すると同時に行動の命令セットが呼び出され，経験に基づいて動作が行われる。物理空間における運動は運動の第二法則を支配方程式として拘束されるため，必然的に対象のダイナミクスの影響を受ける。したがって，制御系設計においてプラントの特性を取り入れることで，高精度の制御を実現することが可能となる。しかしながら，プラントの特性を厳密に表現することは困難であるため，プラントの大部分を表現する代表的な特性を抽出することが重要である。本章では，システムの特性を解析/抽出する方法および特性を表現する手法を紹介する。

#### 2.1.1 周波数領域の運動解析

プラントの特性を抽出するにあたり，周波数領域において特性を確認することが有効である。何故ならば，線形特性を示すプラントにおいては，特定の周波数の波が入力がされた場合には同一の周波数を持つ波のみが現れるためである。加えて，重ね合わせの原理が成立することが挙げられる。これは線形性の定義に基づくものであるが，複数の周波数成分がプラントに入力された場合には各々の周波数成分を入力した際の出力の和が出力されるといったものである。

$$G(ax + by) = aG(x) + bG(y). \quad (2.1)$$

全てのプラントは少なからず非線形性を有しているが，プラントの特性として線形性が大部分を占めることが多く，上記の現象は広く確認されている。また，特定の動作領域のみ線形性を示す区間線形システムなども存在する。特性解析を行う場合には周波数解析から始めることが望ましい。

線形プラントにおいては，入力された波は振幅と位相に変化を持って出力される。位相の変化とは，入力波に対する出力波の遅れを表す。振幅と位相の特性は入力される波の周波数によって異なり，入力周波数と振幅/位相の関係を明らかにすることでシステムの特性を理解することができる。図 2.1 は周波数領域における特性解析の手順を示している。この試験によって得られた振幅・位相に関する周波数特性を示すグラフはボード線図と呼ばれる。前述の通り，線形プラントでは重ね合わせの原理が成立することから，全ての周波数成分を持つに波を入力することができれば，容易に周波数特性を得ることができる。そのための手法として，インパルス加振や M 系列信号生成などが用いられる。

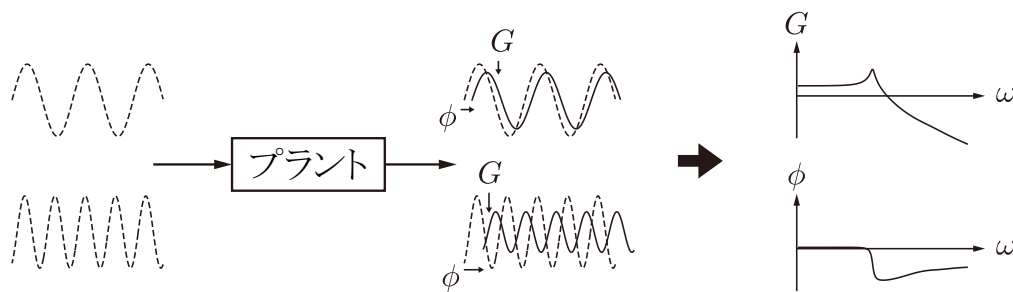


Figure 2.1. 周波数領域における特性解析

## 2.1.2 フーリエ解析

観測した周波数特性を制御系に取り入れるためには、数学的に記述する必要がある。本節では時間領域において表現される波が周波数領域においてどのように表現されるかについて説明する。

時間領域から周波数領域への写像は Fourier によって発見された。Fourier は全ての周期関数は単純な周期関数の級数 (三角級数) であることを示し、三角関数の直交性を用いて周期関数に含まれる特定の周波数成分を抽出することに成功している。

- sin 関数と cos 関数の積

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx = 0 \quad (2.2)$$

- sin 関数と sin 関数の積

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \begin{cases} \pi & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \quad (2.3)$$

- cos 関数と cos 関数の積

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} \pi & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \quad (2.4)$$

- sin/cos 関数と直流成分

$$\int_0^{2\pi} A \sin(mx) \cos(nx) dx = 0 \quad (2.5)$$

$$\int_0^{2\pi} A \cos(mx) \cos(nx) dx = 0 \quad (2.6)$$

したがって、下記の操作は周期関数  $f(x)$  から周波数  $\omega$  の三角波関数の振幅成分を抽出する。

$$a_\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos \omega t dt \quad (2.7)$$

$$b_\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin \omega t dt \quad (2.8)$$

上記の例では周期関数の周期は  $2\pi$  であり，基本波の周波数は  $1/2\pi$  である。周期関数の直流成分および基本波とその高調波の振幅成分は以下のように抽出される。

$$a_{\text{DC}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 \cdot f(t) dt \quad (2.9)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.10)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.11)$$

ここで， $a_{\text{DC}}$  は直流成分， $k$  は高調波の次数を表している。これらの関数の総和を取ることで，周期関数を表現することができる。

$$f(x) = a_{\text{DC}} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \quad (2.12)$$

上記の式はフーリエ級数と呼び， $a_k$  をフーリエ余弦係数， $b_k$  をフーリエ正弦係数と呼ぶ。ここで  $\sin(0x) = 0$  および  $\cos(0x) = 1$  であることを考慮すると，以下のように一般化することができる。

$$f(t) = \frac{1}{2} (a_0 \cos(0x) + b_0 \sin(0x)) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \quad (2.13)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kt) dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.14)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(kt) dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.15)$$

この式は余弦関数のみで表現することも可能である。

$$f(t) = \frac{1}{2} c_0 \cos(0x) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(kx - \phi_k) \quad (2.16)$$

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \phi_k = \arctan\left(\frac{a_k}{b_k}\right) + \pi \text{sgn}(b_k) \quad (2.17)$$

ここで， $c_k$  はフーリエ係数と呼ばれており，周期関数中に存在する  $k$  次高調波成分の振幅を表している。このように，Fourier は周期を  $T_x$  とする周期関数は直流成分，基本波成分 ( $\omega_1 = 2\pi/T_x$ ) とその高調波群による級数で表現できることを示した。上記の例では周期が  $2\pi$  の例 (基本波成分は  $1/2\pi$ ) を扱っているため，周期の異なる関数を扱う際には数式の変更が必要となる。時間周期  $T_p$  を持つ時間周期関数では基本波の周波数は  $2\pi/T_x$  となり，フーリエ級数は以下になる。

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_p} x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_p} x\right) \right) \quad (2.18)$$

$$a_k = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} f(t) \cos\left(\frac{2\pi k}{T_p} t\right) dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.19)$$

$$b_k = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} f(t) \sin\left(\frac{2\pi k}{T_p} t\right) dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.20)$$

### 2.1.3 ラプラス変換

ラプラス変換はフーリエ級数展開を基に時間領域の関数を周波数領域へと写像する変換である。フーリエ級数展開はオイラーの公式を用いることで簡潔に表現することができる。

- オイラーの公式

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t) \quad (2.21)$$

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}, \quad \sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2} \quad (2.22)$$

ただし,  $j$  は虚数とする。上式を用いて, 複素フーリエ級数は以下ようになる。

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k (e^{j\omega_k t} + e^{-j\omega_k t}) - jb_k (e^{j\omega_k t} - e^{-j\omega_k t}) \right) \quad (\omega_k \triangleq 2\pi k/T_p) \quad (2.23)$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a_k - jb_k}{2} e^{j\omega_k t} + \frac{a_k + jb_k}{2} e^{-j\omega_k t} \right) \quad (2.24)$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - jb_k}{2} e^{j\omega_k t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{a_{-k} + jb_{-k}}{2} e^{j\omega_k t} \quad (2.25)$$

上式を簡潔に表現するため, 以下の補題を用いる。

$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} f(t) \cos 0t dt = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} f(t) e^{-j0t} dt \quad (2.26)$$

$$\frac{a_k - jb_k}{2} = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} \left( f(t) \cos\left(\frac{2\pi k}{T_p}t\right) - jf(t) \sin\left(\frac{2\pi k}{T_p}t\right) \right) dt = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} f(t) e^{-j\omega_k t} dt \quad (2.27)$$

$$\frac{a_{-k} + jb_{-k}}{2} = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} \left( f(t) \cos\left(-\frac{2\pi k}{T_p}t\right) + jf(t) \sin\left(-\frac{2\pi k}{T_p}t\right) \right) dt = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} f(t) e^{-j\omega_k t} dt \quad (2.28)$$

以上より, 一般化複素フーリエ級数は以下ようになる。

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_k t} \quad (2.29)$$

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} f(t) e^{-j\omega_k t} dt \quad (2.30)$$

ラプラス変換は全ての周波数を扱うことを可能とするため,  $T_p$  を無限として基本波の周波数を無限に小さくしたフーリエ変換であると考えられる。ただし, 係数はアフィン写像であるため省略される。

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (s \triangleq j\omega) \quad (2.31)$$

ラプラス変換は Heaviside が回路方程式上の微分方程式を解くために経験的に考案したものであり, 後の数学者によって理論的な裏付けが行なわれた経緯がある。したがって, ラプラス変換の導出に関して記される文章を見つけることは困難である。ただし, フーリエ変換を発展させたとの記載があることから, 上記のように考案されたと予想することはできる。



制御工学において多用されるラプラス変換の性質と写像を以下に示す。

- ラプラス変換は線形写像であることが示されており，線型性を有する。
- 微分信号の写像が時間領域の状態量の初期値に依存することに留意する。

Table 2.1. ラプラス変換の性質

性質	時間領域関数	ラプラス空間
線形性	$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
相似性	$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
時間遅れ	$f(t - \tau)u(t - \tau)$	$e^{-\tau s}F(s)$
1 階微分	$f''(t)$	$sF(s) - f(0)$
2 階微分	$f'(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$n$ 階微分	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
積分	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{1}{s}F(s)$
周期関数	$f(t) = f(t + \tau)$	$\frac{1}{1 - e^{-\tau s}} \int_0^\tau f(t)e^{-j\omega t} dt$

Table 2.2. ラプラス変換の写像

関数名	時間領域関数	ラプラス空間
単位インパルス関数	$\delta(t)$	1
単位ステップ関数	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
ランプ関数	$t \cdot u(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$n$ 乗関数	$\frac{t^n}{n!} \cdot u(t)$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
指数減衰	$e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{s + a}$
一次遅れ応答	$(1 - e^{-at}) \cdot u(t)$	$\frac{a}{s(s + a)}$
正弦関数	$\sin(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
余弦関数	$\cos(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
指数減衰付き正弦関数	$e^{-at} \sin(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$
指数減衰付き余弦関数	$e^{-at} \cos(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{s}{(s + a)^2 + \omega^2}$

## 2.2 運動の表現

解析で得られた情報を可視化することは制御系設計において有効な手段である。制御工学の本質がプラントに対して運動の流れを付与するものであるため、運動の因果関係を記述した図は直感的理解を促すことができる。ここで、運動系の設計は周波数領域で行うことで非常に簡略化されるため、周波数領域における図を得ることが望ましい。本節では時間領域における運動を周波数領域にて表現する手法を説明する。

### 2.2.1 ブロック線図

ブロック線図は運動の流れを周波数領域上で表現するためのものである。直感的な記述が可能であり、複雑な系であっても容易に表現することができる。以下で複数の物理系の表現を行い、時間領域上の運動との関連性について説明する。

#### 剛体系の重心位置と力

剛体系は系に働く合力が重心の加速度となる系である。剛体の質量を  $m_r$ 、重心座標を  $x_{\text{cog}}$ 、作用力を  $F$  とすると時間領域において以下の支配方程式を得る。

$$F(t) = m_r \ddot{x}_{\text{cog}}(t) \quad (2.32)$$

上式をラプラス変換することで、以下の式を得る。

$$F(s) = m_r s^2 x_{\text{cog}}(s) \quad (2.33)$$

因果関係を考慮すると、 $F$  は入力であり、 $x_{\text{cog}}$  は出力である。したがって、ブロック線図を図 2.2 のように描くことができる。上記の系に対して一定の力  $F_c$  を加え続けた際の応答について確認する。周波数領域における重心位置は次式で表現される。

$$x_{\text{cog}}(s) = \frac{1}{m_r s^2} \frac{F_c}{s} = \frac{F_c}{m_r s^3} \quad (2.34)$$

上式を逆ラプラス変換することで、次式を得る。

$$x_{\text{cog}}(t) = \frac{t^2}{2} \frac{F_c}{m_r} \quad (2.35)$$

得られた解を支配方程式に代入することで、解の妥当性が確認できる。

$$F(t) = m_r \ddot{x}_{\text{cog}} = F_c \quad (2.36)$$

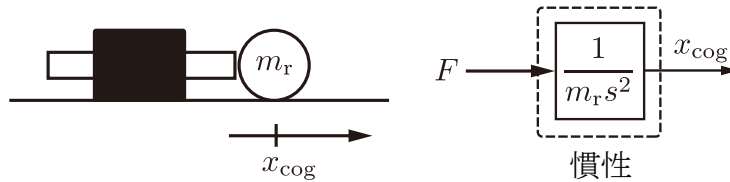


Figure 2.2. 単慣性系のブロック線図

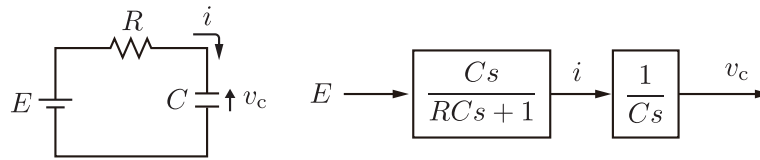


Figure 2.3. 直列 RC 回路のブロック線図

### 直列 RC 回路における供給電圧とキャパシタ電圧

直列 RC 回路に電圧を供給すると、キャパシタに電荷が蓄積され、電圧が発生する。供給電圧を  $E$ 、キャパシタ電圧を  $v_c$ 、電流を  $i$ 、電気抵抗値を  $R$ 、電気容量を  $C$  とすると以下の支配方程式を得る。

$$E(t) = Ri(t) + \int_0^t \frac{1}{C} i(t) dt \quad (2.37)$$

$$v_c(t) = \int_0^t \frac{1}{C} i(t) dt \quad (2.38)$$

上式をラプラス変換することで以下の式を得る。

$$E(s) = Ri(s) + \frac{1}{Cs} i(s) \quad (2.39)$$

$$v_c(s) = \frac{1}{Cs} i(s) \quad (2.40)$$

したがって、次の関係式を得る。

$$i(s) = \frac{Cs}{RCs + 1} E(s) \quad (2.41)$$

$$v_c(s) = \frac{1}{RCs + 1} E(s) \quad (2.42)$$

以上より、ブロック線図は図 2.3 のように描くことができる。ここで、一定電圧  $E_c$  を供給した際の応答を確認する。周波数領域におけるキャパシタ電圧の応答は以下の式で表される。

$$v_c(s) = \frac{1}{RCs + 1} \frac{E}{s} \quad (2.43)$$

$$= E_c \left( \frac{1}{s} - \frac{RCs}{RCs + 1} \right) \quad (2.44)$$

上式を逆ラプラス変換することで、次式を得る。

$$v_c(t) = E_c \left( 1 - e^{-\frac{1}{RC}t} \right) \quad (2.45)$$

得られた解を支配方程式に代入することで、解の妥当性が確認できる。

$$i(t) = C \frac{d}{dt} v_c = \frac{E_c}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} \quad (2.46)$$

$$E(t) = Ri(t) + \int_0^t \frac{1}{C} i(t) dt = E_c \quad (2.47)$$

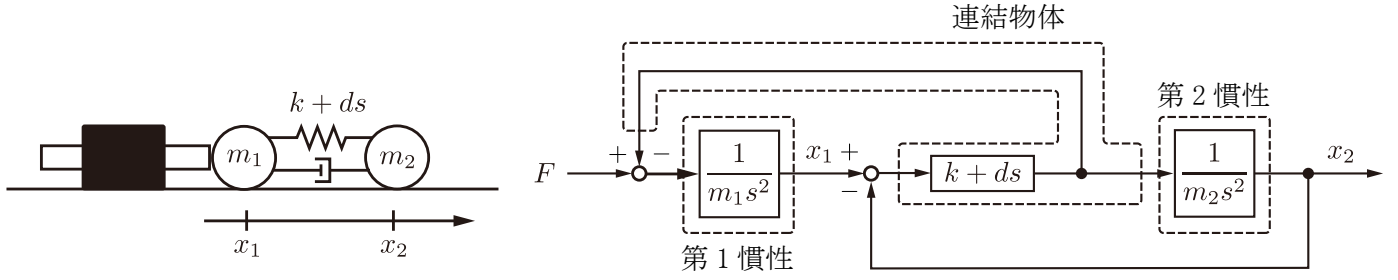


Figure 2.4. 二慣性慣性系のブロック線図

上記の例はフェーザ表示と類似性があり，周波数領域においてインピーダンスを定義していると見る事ができる。周波数領域におけるインピーダンス関数は局所インピーダンスの集合であると見る事が可能であり，重ね合わせの原理から数学的操作の妥当性があることも確認できる。

$$Z_R(s) = R, Z_C(s) = \frac{1}{Cs} \quad (2.48)$$

$$v_c(s) = \frac{Z_C(s)}{Z_R(s) + Z_C(s)} E(s) = \frac{1}{RCs + 1} E(s) \quad (2.49)$$

このようなインピーダンスを定義する操作は，機械系においても適用することができる。これは運動方程式が回路方程式と同様に記述できることから明らかである。

### 二慣性共振系の先端位置と力

これまでの例では支配方程式からブロック線図を導出したが，ここでは接点方程式に基づくブロック線図の書き方を紹介する。二慣性共振系の運動を時間領域で求めることは非常に難しい。各慣性の質量を  $m_1, m_2$ ，位置を  $x_1, x_2$ ，連結機械の機械剛性を  $k$ ，粘性を  $d$ ，第1慣性に入力される力を  $F$  とすると支配方程式は以下のように表現される。

$$m_1 \ddot{x}_1 = F - k(x_2 - x_1) - d(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad (2.50)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = k(x_2 - x_1) + d(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad (2.51)$$

2つの運動方程式が干渉しあう形となり，運動の流れを把握することが非常に困難である。そこで，ブロック線図を描くことで解を求める。上記のシステムは力が入力された際に (a) 慣性間に捻じれが生じ，(b) 連結物体の反力が各慣性に伝わり，(a') 慣性間にさらに捻じれが生じる，といった運動を繰り返すシステムである。この運動を第1慣性，連結機会，第2慣性に着目してブロック線図を描くと図2.4のようになる。この図より，第二慣性は第一慣性の位置に依存して運動することがわかる。前例では支配方程式をラプラス変換することで周波数領域の支配方程式を求めてたが，今回のようにブロック線図から支配方程式を導出することも可能である。

$$x_2 = \frac{ds + k}{m_2 s^2 + ds + k} x_1 \quad (2.52)$$

$$x_1 = \frac{1}{s^2 m_1 m_2 s^2 + (m_1 + m_2) ds + (m_1 + m_2) k} F \quad (2.53)$$

$$\therefore x_2 = \frac{1}{s^2 m_1 m_2 s^2 + (m_1 + m_2) ds + (m_1 + m_2) k} F \quad (2.54)$$

# Chapter 3

## 運動の設計

### 3.1 運動と極

運動の特性を解析することは、運動を支配する微分方程式を解くことに等しい。微分方程式の解を容易に確認することができれば、見通しの良い制御系設計が可能となる。前章で紹介した通り、ラプラス変換は時間領域における微分方程式の解を容易に与えるため、ラプラス空間上での制御系設計は広く用いられる手法となっている。本節ではラプラス空間上で定義された関数と微分方程式の関係から、運動の特性を把握する方法を紹介する。

#### 3.1.1 極と微分方程式の解

以下のシステムについて考える。

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (3.1)$$

以下を満たすラプラス変数をシステムの極と呼ぶ。

$$D(s) = 0 \quad (3.2)$$

また、以下を満たすラプラス変数をシステムの零点と呼ぶ。

$$N(s) = 0 \quad (3.3)$$

一般的に、システムの運動は極によって決定される。何故ならば、分子多項式は主に入力に対して作用するものであり、分母多項式は出力の回帰に関係するためである。入力を  $x$ 、出力を  $y$  とし、以下のシステムの入出力応答について考える。

$$G(s) = \frac{2s + 5}{s^2 + 4s + 5} \quad (3.4)$$

入出力関係は以下のように表現される。

$$y = \frac{2s + 5}{s^2 + 4s + 5} x \quad (3.5)$$

したがって，時間領域では次の微分方程式が存在することがわかる。

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 4\frac{d}{dt} + 5\right)y = \left(2\frac{d}{dt} + 5\right)x \quad (3.6)$$

また，出力値は以下になる。

$$y = \left(\frac{2}{5}\frac{d}{dt} + 1\right)x - \left(\frac{1}{5}\frac{d^2}{dt^2} + \frac{4}{5}\frac{d}{dt}\right)y \quad (3.7)$$

このように，右辺第1項は整型された入力を表し，右辺第2項はシステムの動特性を示している。また，ラプラス空間においても極が動特性を示すことが確認できる。

$$y = \frac{2s+5}{s^2+4s+5}x = \frac{2s}{s^2+4s+5}x + \frac{5}{s^2+4s+5}x \quad (3.8)$$

したがって，システムの運動を表すものは極であると言える。

続いて，極と微分方程式の解の関係について示す。以下の微分方程式について考える。

$$\frac{d}{dt}x(t) = -ax(t) + b \quad (3.9)$$

上記の微分方程式をラプラス変換することで，次式を得る。

$$sx(s) = -ax(s) + \frac{b}{s} \quad (3.10)$$

したがって，ラプラス空間上の解は次式となる。

$$x(s) = \frac{b}{s(s+a)} = \frac{b}{a} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \right) \quad (3.11)$$

逆ラプラス変換により，時間領域の解を得る。

$$x(t) = \frac{b}{a}(1 - e^{-at}) \quad (3.12)$$

ここで，システムの極は微分方程式の解において応答速度を示す項に含まれることがわかる。

続いて，以下の微分方程式について考える。

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -2\zeta\omega_0\frac{d}{dt}x(t) - \omega_0^2x(t) + b \quad (3.13)$$

上記の微分方程式をラプラス変換することで，次式を得る。

$$s^2x(s) = -2\zeta\omega_0sx(s) + \omega_0^2x(s) + \frac{b}{s} \quad (3.14)$$

したがって，ラプラス空間上の解は次式となる。

$$x(s) = \frac{b}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2} \quad (3.15)$$

システムの極は次式で表される。

$$s = \zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (3.16)$$

上式は $\zeta$ の値により極の配置が異なることを示している。

- $0 < \zeta < 1$ : 虚軸成分を持つ極と複素共役となる極
- $\zeta = 1$ : 極が実軸上に1つ
- $\zeta > 1$ : 極が実軸上に2つ

上記の3つの条件における解を導出する。

- $0 < \zeta < 1$ :

$$x(s) = \frac{b}{\omega_0^2} \left( \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_0}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \right) \quad (3.17)$$

$$= \frac{b}{\omega_0^2} \left( \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_0}{(s + \zeta\omega_0)^2 + (1 - \zeta^2)\omega_0^2} - \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_0}{(s + \zeta\omega_0)^2 + (1 - \zeta^2)\omega_0^2} \right) \quad (3.18)$$

$$\therefore x(t) = \frac{b}{\omega_0^2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \left( \sqrt{1 - \zeta^2} \cos \sqrt{1 - \zeta^2}\omega_0 t + \zeta \sin \sqrt{1 - \zeta^2}\omega_0 t \right) \right) \quad (3.19)$$

$$= \frac{b}{\omega_0^2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin \left( \sqrt{1 - \zeta^2}\omega_0 t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right) \right) \quad (3.20)$$

- $\zeta = 1$ :

$$x(s) = \frac{b}{\omega_0^2} \frac{1}{s} \left( \frac{\omega_0}{s + \omega_0} \right)^2 = \frac{b}{\omega_0^2} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_0} - \frac{\omega_0}{(s + \omega_0)^2} \right) \quad (3.21)$$

$$\therefore x(t) = \frac{b}{\omega_0^2} (1 - e^{-\omega_0 t} - \omega_0 t e^{-\omega_0 t}) \quad (3.22)$$

$$= \frac{b}{\omega_0^2} (1 - e^{-\omega_0 t} (1 + \omega_0 t)) \quad (3.23)$$

- $\zeta > 1$ :

$$x(s) = \frac{b}{\omega_0^2} \left( \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_0}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \right) \quad (3.24)$$

$$= \frac{b}{\omega_0^2} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{s + (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_0} + \frac{-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{s + (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_0} \right) \right) \quad (3.25)$$

$$\therefore x(t) = \frac{b}{\omega_0^2} \left( 1 - e^{-\zeta\omega_0 t} \left( \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_0 t} - \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_0 t} \right) \right) \quad (3.26)$$

以上より、極が実軸上にある場合には振動は発生せず、虚軸成分が振動の原因となっていることがわかる。また、虚軸成分を持つ場合であっても、 $\zeta < 0.707$ であれば振動が生じないことが知られている。今回は1次系と2次系について取り扱ったが、それ以上の次数のシステムであっても部分分数分解によって2次以下のシステムの集合とすることが可能であるため、極配置を確認すればシステムの特性を確認することができる。

### 3.1.2 極配置の物理的意味づけ

以下の二次系の一般系を考える。

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (3.27)$$

ここで、 $\zeta$ 、 $\omega_0$  は減衰率および固有角周波数と呼ばれる。前章では減衰率の大きさによって振動が発生することを確認した。本節では物理現象を基に減衰率について考察する。

バネマスダンパ系

マスバネダンパ系の運動方程式は次式で表される。

$$m\ddot{x} = -d\dot{x} - kx + F \quad (3.28)$$

ラプラス空間での応答  $x(s)$  は以下ようになる。

$$x(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} F \quad (3.29)$$

したがって、減衰率と固有各周波数は次のようになる。

$$\zeta = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.30)$$

これは、粘性が高いシステムでは振動が生じないことを示している。

### 3.1.3 支配極

多くの機構的要素を含む機械は多慣性系のように見えるが、剛体系として扱えることが多い。この理由は、高次のモードの特性が高い周波数領域にのみ現れるため、通常の運転に影響を与えないからである。この現象を数学的に記述する。以下のシステムについて考える。

$$G(s) = \frac{3000}{(s+10)(s+300)} \quad (3.31)$$

上記のシステムにステップ入力を行なった際の時間応答は以下ようになる。

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} \frac{3000}{(s+10)(s+300)} \right] \quad (3.32)$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{3000}{290} \left( \frac{29}{300} \frac{1}{s} - \frac{1}{10} \frac{1}{s+10} + \frac{1}{300} \frac{1}{s+300} \right) \right] \quad (3.33)$$

$$= 1 - \frac{30}{29} e^{-10t} + \frac{1}{29} e^{-300t} \approx 1 - e^{-10t} \quad (3.34)$$

以上より、次のように近似することができる。

$$G(s) = \frac{3000}{(s+10)(s+300)} \approx \frac{10}{s+10} \quad (3.35)$$

上記のシステムは極を2つ有するが、 $s = -10$  の応答は  $s = -300$  の応答に比べて非常に遅いため、 $s = -10$  の極が大部分の特性を表す結果となっている。このような極を支配極と呼ぶ。



# Chapter 4

## 古典制御

古典制御ではシステムの入出力関係から制御器を設計し，所望の運動を実現する。運動は運動の第二法則に依存するため，出力は微分方程式の解であった。そして，その解は機械の剛性や粘性など機械固有の特性に依存した。上記の影響は周波数領域において極という形で存在し，極位置を確認することで運動の特徴を把握することができた。制御設計はフィードバック制御器を用いてシステムに仮想的な機械特性を付与し，極を移動することで所望の運動特性を得ることを目的としている。ここに制御器とシステムの応答特性の関係を纏める。

### 4.1 フィードバック制御器

図 4.1 に示すフィードバック制御系を考える。ここで， $u$  は入力， $y$  は出力， $d$  は外乱， $C$  は制御器， $P$  はプラント， $H$  はフィードバックゲインである。このシステムは次の方程式を満たす。

$$y = P(C(u - Hy) - d) = PCu - PCHy - Pd \quad (4.1)$$

したがって，入出力関係は以下になる。

$$y = \frac{PC}{1 + PCH}u - \frac{P}{1 + PCH}d \quad (4.2)$$

所望の特性は入力と出力の一致と外乱の抑圧である。上式では入力追従に関する項と外乱抑圧に関する項が同じ特性多項式を持っており，二つの特性を独立に制御することができない。この制御器は一自由度制御器と呼ばれる。まずは一自由度制御器を用いて制御器と極の移動について確認する。

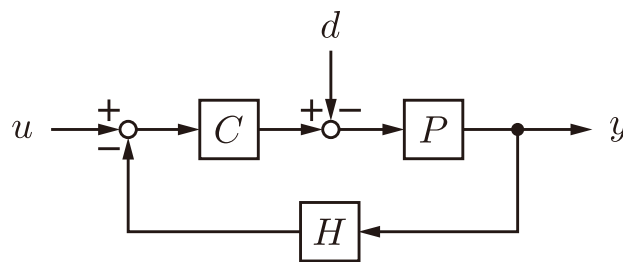


Figure 4.1. フィードバック制御器

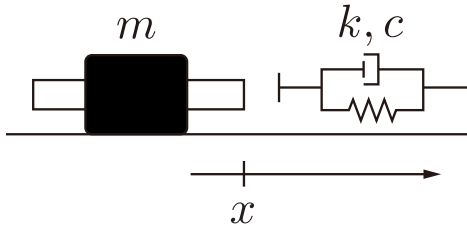


Figure 4.2. 接触動作

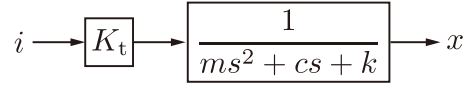


Figure 4.3. 入出力関係

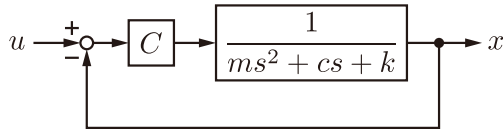


Figure 4.4. フィードバック制御系

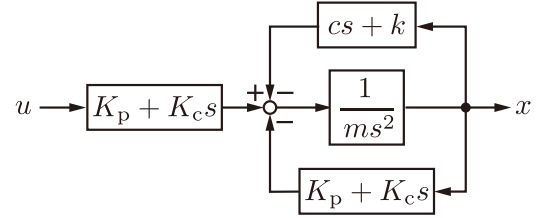


Figure 4.5. 等価ブロック線図

図 4.2 に示す接触動作において機械を制御することを考える。ここで、 $m$  は可動子質量、 $c$  は物体粘性、 $k$  は物体剛性、 $x$  は物体押し込み量とする。この系の運動方程式は次のようになる。

$$m\ddot{x} = K_t i - kx - c\dot{x} \quad (4.3)$$

ただし、 $K_t$  は推力定数、 $i$  は電機子電流であり、右辺第一項はモータ推力を表す。 $i$  を入力として機械が駆動すると見ると、周波数領域において次の入出力関係が成立する。

$$x = \frac{1}{ms^2 + cs + k} K_t i \quad (4.4)$$

このブロック線図は図 4.3 のようになる。このシステムに対して制御器を設計することを考える。一例として、図 4.4 のようにフィードバック制御系を構成した。推力定数はその逆数が制御器内部に存在するものとし、図中では省略した。この制御系の入出力関係は以下のようになる。

$$x = \frac{C}{ms^2 + cs + k + C} u \quad (4.5)$$

制御器  $C$  を比例ゲイン  $K_p$  と微分ゲイン  $K_c$  により構成した場合、入出力関係は以下のようになる。

$$C = K_c s + K_p \quad (4.6)$$

$$x = \frac{K_c s + K_p}{ms^2 + (c + K_c)s + (k + K_p)} u \quad (4.7)$$

この式から、制御器によって極の位置が変化することがわかる。今回の例では、位置の偏差に対して比例ゲイン  $K_p$  を掛けることが復元力を表し、位置の一階微分である速度の偏差に対して微分ゲイン  $K_d$  を掛けることが制動力を表したため、制御器の影響は環境の復元力と制動力に足し合わせられる形式で伝達関数に現れた。これをブロック線図に表したものが図 4.5 となる。ここで、所望の極配置となるように制御器を決定することで、所望の運動が実現する。

### 4.1.1 内部モデル原理

制御においては外乱の抑圧が一つの大きな課題である。これを説明する前に、出力の収束値を確認することを可能とする最終値の定理について説明する。まず、関数  $f(t)$  の最終値について考える。関数  $f(t)$  の一次導関数  $f'(t)$  のラプラス変換は以下のように表される。

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{dt} f(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(0) \quad (4.8)$$

ここで、 $s \rightarrow 0$  の極限を取ると、以下の結果を得る。

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{dt} f(t) dt = \int_0^{\infty} df = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0) \quad (4.9)$$

以上より、最終値の定理を得る。

$$f(\infty) - f(0) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0) \quad (4.10)$$

$$\therefore f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (4.11)$$

前述の接触運動系において指令値  $u$  を高さ  $u_c$  のステップ信号とした場合について考える。出力偏差  $e = u - x$  は以下のように表される。

$$e = \frac{ms^2 + cs + k}{ms^2 + (c + K_c)s + (k + K_p)} u \quad (4.12)$$

最終値の定理より以下の結果を得る。

$$e(\infty) = \frac{ms^2 + cs + k}{ms^2 + (c + K_c)s + (k + K_p)} \frac{u_c}{s} = \frac{k}{k + K_p} u_c \quad (4.13)$$

以上より、位置制御において環境の剛性の影響で出力偏差が残ることがわかる。続いて、同系においてモータに対して外生外乱  $d$  が作用した場合を考える。この時の出力応答は以下ようになる。

$$x = \frac{K_c s + K_p}{ms^2 + (c + K_c)s + (k + K_p)} u - \frac{1}{ms^2 + (c + K_c)s + (k + K_p)} d \quad (4.14)$$

指令値  $u$  および外生外乱  $d$  として高さ  $u_c$ ,  $d_c$  のステップ信号を仮定すると、以下の結果を得る。

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{K_c s + K_p}{ms^2 + (c + K_c)s + (k + K_p)} \frac{u_c}{s} - \frac{1}{ms^2 + (c + K_c)s + (k + K_p)} \frac{d_c}{s} \right) \quad (4.15)$$

$$= \frac{K_p}{K_p + k} u_c - \frac{1}{k + K_p} d_c \quad (4.16)$$

このように、外生信号によっても出力偏差が生じることが確認された。内部モデル原理は、これらの出力の定常偏差を 0 に収束させるために必要な制御器の集合を次のように規定する。

- 入力依存の定常偏差を 0 に収束させる制御器は、入力生成多項式の極と等しい極を持つ。
- 外乱依存の定常偏差を 0 に収束させる制御器は、外乱生成多項式の極と等しい極を持つ。

入力・外乱生成多項式とは、インパルス入力に対して外乱を生成するためのモデルを表す。

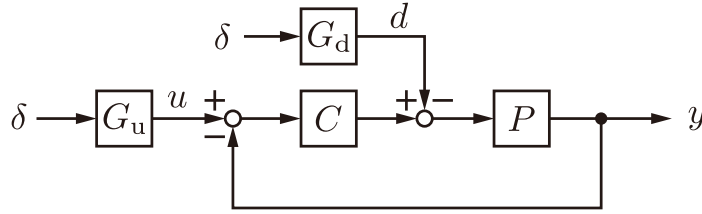


Figure 4.6. 一般化フィードバック制御系

## 内部モデル原理の証明

外生外乱が以下に表される外乱生成多項式  $G_d(s)$  を通して生成されると仮定する。

$$G_d(s) = \frac{N_d(s)}{D_d(s)} \quad (4.17)$$

図 4.6 に示す制御系について考える。ただし、 $\delta$  は時間領域におけるインパルス関数であり、 $\mathcal{L}[\delta] = 1$  を満たす。この制御系の出力は以下ようになる。

$$y = \frac{PC}{1+PC}u - \frac{PC}{1+PC}G_d \quad (4.18)$$

ここで、制御器  $C$  およびプラント  $P$  を分解して表現する。

$$C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}, \quad P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \quad (4.19)$$

これにより、出力を以下のように表現することができる。

$$y = \frac{N_c N_p}{N_c N_p + D_c D_p} u - \frac{D_c N_p}{N_c N_p + D_c D_p} \frac{N_d}{D_d} \quad (4.20)$$

最終値を確認する際には  $s \rightarrow 0$  の極限を取る必要があるため、分子多項式の最低次数は分母多項式の最低次数以上にならないといけない。ここで、外乱の係数において分母に  $s$  を残さないためには、分子多項式  $D_c N_p$  が分母多項式  $D_d$  を相殺する必要がある。設計可能なパラメータは  $D_c$  であるので、制御器の極が外乱生成多項式の極と等しくなければならないことがわかる。また、入力追従に関しても同様のことが確認できる。入力生成多項式  $G_u(s)$  を以下のように設定する。

$$G_u(s) = \frac{N_u(s)}{D_u(s)} \quad (4.21)$$

外乱の影響を無視した場合、出力偏差は以下の式で表される。

$$e = \frac{1}{1+PC} G_u = \frac{D_c D_p}{N_c N_p + D_c D_p} \frac{N_u}{D_u} \quad (4.22)$$

このように指令値追従においても定常偏差を 0 とするためには制御器の極が入力生成多項式の極と等しくなければならないことがわかる。入力に関しては、プラントの極と入力生成多項式の極が一致することがあり、追加の制御器が不要な場合もある。外乱抑圧に関していえば、内部モデル原理は「外乱生成多項式を制御器が有していれば逆位相の外乱を生成できる」ことを示している。内部モデル原理に基づいて制御器を設計すれば外乱の影響を相殺することができ、ロバストな制御が実現する。

前述の接触運動系において，内部モデル原理に基づいてコントローラを設計する。指令値  $u$  および外生外乱  $d$  として高さ  $u_c$ ,  $d_c$  のステップ信号を仮定する。入力生成多項式および外乱生成多項式の極は  $s = 0$  となる。そこで，制御器  $C$  に極  $s = 0$  を持つ制御器を導入する。

$$C = K_p + K_c s + \frac{K_i}{s} \quad (4.23)$$

ゲイン  $K_i$  は積分信号に対して掛かることから， $K_i$  は積分ゲインと呼ばれる。この積分制御器の導入により，出力は以下ようになる。

$$x = \frac{K_p s + K_c s^2 + K_i}{ms^3 + (c + K_c)s^2 + (k + K_p)s + K_i} \frac{u_c}{s} - \frac{ms^3 + cs^2 + ks}{ms^3 + (c + K_c)s^2 + (k + K_p)s + K_i} \frac{d_c}{s} \quad (4.24)$$

最終値の定理より，出力偏差は以下ようになる。

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{K_p s + K_c s^2 + K_i}{ms^3 + (c + K_c)s^2 + (k + K_p)s + K_i} \frac{u_c}{s} - \frac{ms^3 + cs^2 + ks}{ms^3 + (c + K_c)s^2 + (k + K_p)s + K_i} \frac{d_c}{s} \right) = u_c \quad (4.25)$$

このように，定常特性は改善される。しかしながら，入出力伝達関数の分子多項式が複雑化していることがわかる。分子多項式の根を零点と呼ぶが，零点は過渡応答に影響を与えるため，慎重に設計する必要がある。左半平面に存在する零点は安定零点，右半平面に存在する零点は不安定零点と呼ばれ，それぞれオーバーシュートやアンダーシュートの原因となっている。零点は極の配置にも依存して影響力が異なるため，この問題は極零配置問題として知られている。現在では，この問題に対して外乱オブザーバを用いた手法が有効である。外乱オブザーバに基づく二自由度制御系ではオブザーバが外乱生成多項式を持つことにより，前向き制御器が外乱生成多項式を持つ必要がなくなっている。そのため，極零配置問題を気にすることなく制御器設計を行うことができる。

## 4.2 零点の影響

零点の影響を解析的に説明することは非常に困難であるので，零点が好まれない理由だけを述べる。一つはオーバーシュートおよびアンダーシュートである。システムの入出力伝達関数が特性多項式  $D_s$  を持ち，分子多項式を有する系を考える。

$$G(s) = \frac{\sum_{k=0}^n a_k s^k}{D_s} \quad (4.26)$$

このシステムに任意信号を入力した場合の応答は以下ようになる。

$$y = \frac{\sum_{k=0}^n a_k s^k}{D_s} u = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{D_s} s^k u \quad (4.27)$$

周波数領域における  $s$  は微分を表すので，高次の  $s^k$  は入力信号の変動に素早く応答することがわかる。これによりオーバーシュートなどが生じる。また， $a_k < 0$  となる項が存在すれば，正方向の変化，例えばステップ指令に対して逆方向の応答を示すことになる。これがアンダーシュートである。

もう一つは非最小位相特性である。これにより安定性の担保が困難となる。システムの入出力伝達関数が特性多項式  $D_s$  を持ち，不安定零点を持つ系を考える。ただし， $a_k > 0$  とする。

$$G_n(s) = \frac{\prod_{k=0}^n (s - a_k)}{D_s} \quad (4.28)$$

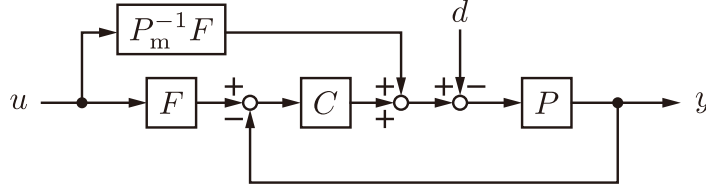


Figure 4.7. 二自由度制御系

この伝達関数と等しいゲインを持ち，最小の位相遅れを持つシステムは以下に示すとおりである。

$$G_{\min}(s) = \frac{\prod_{k=0}^n (s + a_k)}{D_s} \quad (4.29)$$

特定のゲインを実現する伝達関数において，最小の位相遅れを持つシステムを最小位相系といい，それ以外のシステムを非最小位相系と呼ぶ。ここで，最小位相関数  $G_{\min}$  はアウター関数とも呼ばれる。非最小関数はアウター関数を用いて以下のように記述することができる。

$$G_n(s) = \frac{\prod_{k=0}^n (s - a_k)}{\prod_{k=0}^n (s + a_k)} G_{\min}(s) \quad (4.30)$$

関数  $G_{\min}$  の係数はゲインが常に 1 で位相のみに作用するオールパスフィルタである。つまり，不安定零点を持つ系は非最小位相系となる。非最小位相系は最小位相系と比較して位相のみ遅れているため，最小位相系に時間遅延が加わった系と見ることができる。このことから非最小位相系に対する制御器設計の難しさが確認できる。

### 4.3 二自由度制御系

追従特性と外乱抑圧特性を独立に設計可能な二自由度制御系について説明する。図 4.7 は二自由度制御器である。ただし， $F$  はフィードフォワード制御器， $C$  はフィードバック制御器， $\bigcirc_m$  はモデルを表す。モデル化誤差がない時，この制御器の出力は以下のように表される。

$$y = P(C(Fu - y) + P_m^{-1}Fu + d) \quad (4.31)$$

$$\therefore y = Fu + \frac{P}{1 + PC}d \quad (4.32)$$

以上より，追従特性はフィードフォワード制御器  $F$ ，外乱抑圧特性はフィードバック制御器  $C$  によって決定されることがわかる。ここで，フィードフォワード制御器  $F$  は  $P^{-1}F$  がプロパーとなるように設計する。これは，運動系でいえばプラント  $P$  の慣性力の影響を完全に無視できないことを意味している。二次遅れ系の運動特性を示すプラントに対しては，二次のフィードフォワード制御器  $F$  を設計すれば良い。モデル化誤差  $P = P_m + \Delta P$  が存在する場合の応答は以下ようになる。

$$y = P(C(Fu - y) + P_m^{-1}Fu + d) \quad (4.33)$$

$$\therefore y = Fu + \frac{1}{1 + PC} \left( \frac{\Delta P}{P_m} \right) Fu + \frac{P}{1 + PC}d \quad (4.34)$$

このように，モデル化誤差に対するロバスト性も持ち合わせている。

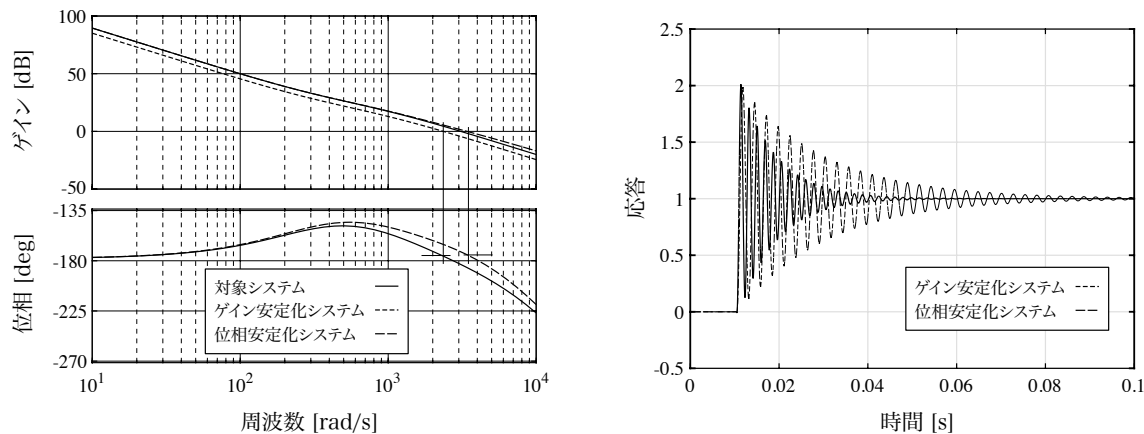


Figure 4.8. 一巡伝達関数とステップ応答

## 4.4 安定化補償器の設計

制御の安定性は極の配置から確認することができた。同時に、制御器を変更した際に極がどのように移動するかに関する研究も多く行われてきた。制御器を設計する際にはプラントモデルの伝達関数を用いて極の位置を確認するが、実装の際には離散化誤差やモデル化誤差、センサ信号の取得遅れなど非常に見難い外乱要素が多々存在する。したがって、予期した極配置とは異なる極配置となることがある。このような問題に対処するために、入出力応答からある程度の極配置を確認する手法が研究された。これが安定余裕に基づく設計である。制御系設計の最終段階の調整に向いており、実応答から直接安定化補償器を設計するため非常に実用的な技術である。定量的な設計手法が確立されてはいるが、安定化補償器の設計には技術者の力量が求められる。

### 4.4.1 安定余裕度

制御における安定とは、システムの応答が有限時間以内に目標値に静定することである。これは、制御系が持つエネルギーが消散することを示している。フィードバック制御系において系のエネルギーが増大するのは、負帰還信号が入力信号と比較して位相が180度遅れ、ゲインが1以上の場合である。これは、180度以上遅れた場合には正帰還フィードバックが構成されるためである。また、一巡ゲインが1以下であればエネルギーが増大することはないため、いかなる系であっても安定である。これをスモールゲイン定理と呼ぶ。上記の事柄は制御系の一巡信号に着目すれば安定余裕度が確認できることを示している。このことから、ゲインが1となる周波数での位相遅れの180度までの余裕を位相余裕、位相遅れが180度となる周波数でのゲインの1までの余裕をゲイン余裕という。この指標を基に、得られた実験結果から周波数特性を確認することで安定余裕度を確認することができる。

ここで、安定余裕度を考慮した制御系設計について説明する。図4.8に対象とするシステムの一巡伝達関数の周波数特性を実線で示す。このシステムは安定余裕度がなく、フィードバック制御系を構成した際に不安定化することがわかる。そこで、安定化補償器を設計して安定なフィードバック系を構築する。安定化の方法としては、ゲイン安定化と位相安定化が存在する。ゲイン安定化は定数ゲインにより一巡伝達関数全体のゲインを落とす方法やノッチフィルタを用いた方法が挙げられる。定数ゲインを用いた方法は最も容易に実現可能だが、制御帯域が低下する。ノッチフィルタをループに入れることは極零相殺を引き起こすため、モデル化誤差に対して弱くなることに注意しなければならない。位相安定化は位相補償器を用いた方法が挙げられる。位相の回復には必ずゲインの増加を伴うため、高い周波数領域での位相補償はノイズの影響を受けやすいことに注意しなければならない。



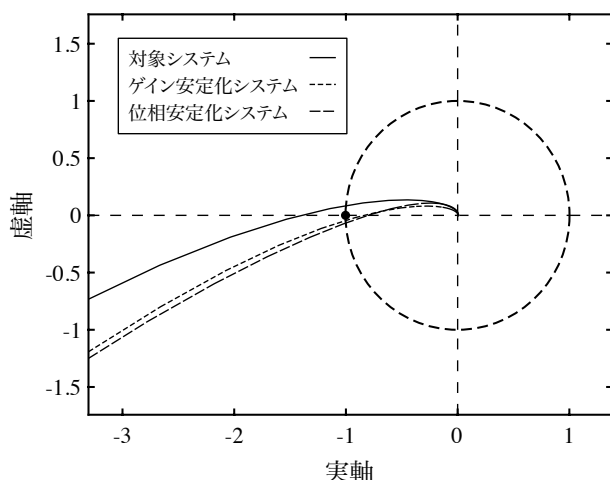


Figure 4.9. ナイキスト線図

ゲイン安定化と位相安定化にはそれぞれ特徴があるため、状況に合わせて使用することが望ましい。今回は対象とするシステムに対してゲイン安定化と位相安定化を施した際の制御器の性能について述べるに止める。対象とするシステムに対して直列補償器として位相補償器と定数ゲインを設計した際の周波数特性を図 4.8 の破線に示した。これにより、位相余裕が確保されていることがわかる。位相余裕度とゲイン余裕度はどちらも安定余裕度という意味では同じだが、実システムにおいては一巡伝達関数の増幅率が減多に変化しないことに対して位相は様々な要因の遅れ要素によって変化しやすい。したがって、ゲイン交差周波数における位相を見て安定余裕度を確認することが望ましい。ここで、位相安定化ではゲイン交差周波数を高く保ったまま位相余裕を稼げていることがわかる。一方で、ゲイン安定化ではゲイン交差周波数を低くして位相余裕を確保していることがわかる。位相補償器の高ゲイン特性がノイズの影響を受けない限りは、位相補償器の使用が望ましいことを示している。また、安定化補償器を加えたフィードバック制御系のステップ応答を図 4.8 に示した。この結果より、位相安定化を施したフィードバック制御系では早い収束が確認され、帯域が高いことを確認した。得られた結果では波形が振動的であるが、振動度合いと安定余裕度は密接に関わっている。一般的に、安定余裕を確保すると減衰率が増加する。

#### 4.4.2 ナイキスト線図

一巡伝達関数に関する特性の視認性を向上するものとして、ナイキスト線図がある。ナイキスト線図は原点からの距離をゲイン、偏角を位相として図示したもので、図 4.8 で扱ったシステムのナイキスト線図は図 4.9 のようになる。ここで、半径 1 の円はゲイン交差点を示しており、交差点における位相が  $-180$  度をを超えていなければ安定である。また、実軸線は位相交差点を示しており、交差点におけるゲインが 1 をを超えていなければ安定である。ナイキスト線図では、線が  $(-1, j0)$  を囲む回数と閉ループ系における極および零点の個数が理論的に結び付けられており、安定性を確認しやすいといった特徴がある。また、一巡伝達関数を  $L$  とすると特性方程式は  $\phi = 1 + L$  となるが、これは  $(-1, j0)$  から線までの距離と同値であるため、安定余裕度を見ながらシステムの特性を確認することができる。特性方程式  $1 + L$  の逆数はシステムのモデル化誤差に対する感度を示すため、線が  $(-1, j0)$  から離れていればロバスト安定性が高いといえる。一方で、安定化補償器を設計した際の線の遷移が把握しづらいため、ボード線図と併用して補償器を設計することが望ましい。



# Chapter 5

## 現代制御

古典制御が周波数領域における入出力の伝達関数に着目する理論であることに対して、現代制御は時間領域において内部変数まで考慮に入れた理論である。システムの支配方程式を厳密に記述することが要求されるため、モデルベースト制御と呼ばれることがある。古典制御も現代制御の出現とともにモデルベースト制御の内容を踏襲し、内部変数まで確認することが可能となったが、性能の確認に周波数領域の関数やブロック線図などの図式を用いることから、設計には経験的知見に頼る部分が多い。現代制御は古典制御の熟練知識依存の設計から設計手法に一般性を持たせるために発展を遂げた理論である。理論的に得られた数式から物理的現象を解釈することは困難であっても、誰でも解くことができる問題となっている。一方で、古典制御はブロック線図を用いて運動の流れを図式化することが可能である等、新しい制御技術の発見に貢献することも事実である。古典制御および現代制御は双方に利点があるため、両方学ぶことが望ましい。

### 5.1 状態空間表現

現代制御では状態空間表現を用いてシステムを記述する。

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (5.1)$$

$$y = Cx \quad (5.2)$$

$x$  は状態、 $y$  は観測量、 $u$  は入力、 $A$  はシステム行列、 $B$  は入力行列、 $C$  は観測行列と呼ばれる。

システムのダイナミクス  $\dot{x} = Ax$

次数  $p$  のシステムを表現するためには  $p$  階微分値が必要であり、状態  $x$  は  $p \times 1$  の要素を持つ必要がある。システム行列  $A$  は全状態量のダイナミクスを表現するため  $p \times p$  の要素を持つ必要がある。

システムへの入力  $Bu$

システムに対する入力数が  $q$  とすると、入力  $u$  を  $q \times 1$  行列とすることで対応できる。入力行列  $B$  を  $p \times q$  行列とする必要がある。

システムの観測  $y = Cx$

システムに備わるセンサの数を  $r$  とすると、観測量  $y$  を  $r \times 1$  行列とすることで対応できる。観測行列  $C$  を  $r \times p$  行列とする必要がある。

### 5.1.1 離散時間状態空間表現

制御器を実装するにあたり，離散時間における関係式を導出する必要がある。古典制御では理想とする連続時間制御系に対して双一次変換に代表される離散化处理を行うことで実装していたが，現代制御では条件付き厳密離散化を行う。連続時間状態空間方程式の解は以下のようになる。

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (5.3)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \quad (5.4)$$

ここで， $\mathbf{x}_0$  は状態量の初期値を表す。右辺第一項は初期値に対する自由運動を表し，第二項の畳み込み積分はインパルス応答の蓄積値を表す。ここで，サンプリング時間を  $T_s$  とし，任意サンプル時刻  $kT_s$  と次回サンプリング時刻  $(k+1)T_s$  の状態の関係は以下のようになる。

$$\mathbf{x}((k+1)T_s) = e^{A(k+1)T_s} \mathbf{x}_0 + \int_0^{(k+1)T_s} e^{A((k+1)T_s-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (5.5)$$

$$= e^{AT_s} e^{AkT_s} \mathbf{x}_0 + e^{AT_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} e^{A(kT_s-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau + \int_0^{kT_s} e^{A((k+1)T_s-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (5.6)$$

$$= e^{AT_s} \mathbf{x}(kT_s) + \int_0^{kT_s} e^{A((k+1)T_s-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (5.7)$$

ここで，入力  $\mathbf{u}$  が区間内一定であるとする，次式のように変形できる。

$$\mathbf{x}((k+1)T_s) = e^{AT_s} \mathbf{x}(kT_s) + \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} e^{A((k+1)T_s-\tau)} d\tau \mathbf{B} \mathbf{u}(kT_s) \quad (5.8)$$

また，積分計算において変数  $\gamma = -\tau + (k+1)T_s$  を導入することで，次式を得る。

$$\mathbf{x}((k+1)T_s) = e^{AT_s} \mathbf{x}(kT_s) + \int_{T_s}^0 e^{A\gamma} (-d\gamma) \mathbf{B} \mathbf{u}(kT_s) \quad (5.9)$$

$$= e^{AT_s} \mathbf{x}(kT_s) + \int_0^{T_s} e^{A\gamma} d\gamma \mathbf{B} \mathbf{u}(kT_s) \quad (5.10)$$

時刻  $kT_s$  における状態および入力を  $\mathbf{x}[k]$ ,  $\mathbf{u}[k]$  と書くと，離散時間状態空間表現は以下のようになる。

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}_d \mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_d \mathbf{u}[k] \quad (5.11)$$

$$\mathbf{y}[k] = \mathbf{C}_d \mathbf{x}[k] \quad (5.12)$$

$$\mathbf{A}_d \triangleq e^{AT_s}, \mathbf{B}_d \triangleq \int_0^{T_s} e^{A\gamma} d\gamma \mathbf{B}, \mathbf{C}_d \triangleq \mathbf{C} \quad (5.13)$$

下付き文字  $\circ_d$  は離散空間行列であることを示す。上記の離散化はモデル化誤差がないことおよび入力が理想的であることが前提となる。後者に関してはサンプル点における入力変化に伴う誤差や入りに重畳する雑音を別途雑音項として導入することで対応可能な場合もある。

### 5.1.2 可制御・可観測

有限時間内に状態  $x$  を任意の初期値  $x_0$  から目標値  $x_d$  へ到達させることができることを可制御と呼び、有限時間内の観測量から状態の初期値  $x_0$  を観測できることを可観測であると呼ぶ。可制御・可観測の指標として、可制御行列および可観測行列が導入されている。以下では上記の行列を導出する。

以下の状態空間表現を考える。

$$x[k+1] = A_d x[k] + B_d u[k] \quad (5.14)$$

$$y[k] = C_d x[k] \quad (5.15)$$

ただし、 $A_d \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 、 $x \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ 、 $B_d \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ 、 $C_d \in \mathbf{R}^{1 \times n}$  とし、次数  $n$  の 1 入力 1 出力系を考える。可観測および可制御とは、言い換えれば「状態  $x_0$  を目標値  $x_d$  に到達させる入力が存在すること」および「観測量  $y$  から状態量  $x$  を逆算できること」である。したがって、次の方程式の解が存在すれば良い。

$$u[k] = B^{-1}(x_d - Ax[k]) \quad (5.16)$$

$$x[k] = C^{-1}y[k] \quad (5.17)$$

上記の式はそもそも計算する行列の次元が揃っていないことから、計算できないことがわかる。したがって、解も存在しないことがわかる。行列を計算するためには、少なくとも入力行列  $B$  および観測行列  $C$  のサイズが  $n \times n$  となる必要がある。そこで、リフティングを用いた離散時間状態空間表現の変形を行う。リフティングとは、連続する複数のサンプル点の情報を要素に持つ行列を離散時間状態空間の新しい変数として定義し、支配方程式を理解しやすくするものである。リフティングの有用性を実際に確認するため、以下に時刻  $k+1$ ,  $k+2$ ,  $\dots$ ,  $k+n$  の状態量および観測量を示す。

$$x[k+1] = A_d x[k] + B_d u[k] \quad (5.18)$$

$$x[k+2] = A_d x[k+1] + B_d u[k+1] \quad (5.19)$$

$$= A_d(A_d x[k] + B_d u[k]) + B_d u[k+1] \quad (5.20)$$

$$= A_d^2 x[k] + [B_d \quad A_d B_d] \begin{bmatrix} u[k+1] & u[k] \end{bmatrix}^T \quad (5.21)$$

$$x[k+3] = A_d x[k+2] + B_d u[k+2] \quad (5.22)$$

$$= A_d \left( A_d^2 x[k] + [B_d \quad A_d B_d] \begin{bmatrix} u[k+1] & u[k] \end{bmatrix}^T \right) + B_d u[k+2] \quad (5.23)$$

$$= A_d^3 x[k] + [B_d \quad A_d B_d \quad A_d^2 B_d] \begin{bmatrix} u[k+2] & u[k+1] & u[k] \end{bmatrix}^T \quad (5.24)$$

⋮

$$x[k+n] = A_d^n x[k] + [B_d \quad A_d B_d \quad \dots \quad A_d^{n-1} B_d] \begin{bmatrix} u[k+n-1] & \dots & u[k+1] & u[k] \end{bmatrix}^T \quad (5.25)$$

$$y[k] = C_d x[k] \quad (5.26)$$

$$y[k+1] = C_d (A_d x[k] + B_d u[k]) \quad (5.27)$$

⋮

$$y[k+n] = C_d \left( A_d^n x[k] + [B_d \quad A_d B_d \quad \dots \quad A_d^{n-1} B_d] \begin{bmatrix} u[k+n-1] & \dots & u[k+1] & u[k] \end{bmatrix}^T \right) \quad (5.28)$$

$$\begin{bmatrix} y[k] & y[k+1] & \dots & y[k+n-1] \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} C & CA_d & \dots & CA_d^{n-1} \end{bmatrix}^T x[k] + (\text{input}) \quad (5.29)$$

ここで，周期  $nT_s$  でリフティングを行うと，状態空間表現は以下のように簡略化される。

$$x[l+1] = A_1 x[l] + B_1 u_1[l] \quad (5.30)$$

$$y_1[l] = C_1 x[l] + (\text{input}) \quad (5.31)$$

ただし， $lT_s \bmod nT_s = 0$  を満たし，システム行列，入力行列および観測行列は以下を満たす。

$$A_1 = A_d^n \quad (5.32)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} B_d & A_d B_d & \cdots & A_d^{n-1} B_d \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} C & C A_d & \cdots & C A_d^{n-1} \end{bmatrix}^T \quad (5.34)$$

また，リフティングされた変数は以下ようになる。

$$u_1[l] = \begin{bmatrix} u[k+n-1] & \cdots & u[k+1] & u[k] \end{bmatrix}^T \quad (5.35)$$

$$y_1[l] = \begin{bmatrix} y[k] & y[k+1] & \cdots & y[k+n-1] \end{bmatrix}^T \quad (5.36)$$

ここで， $A_1 \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ， $B_1 \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ， $C_1 \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ， $u_1 \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ ， $y_1 \in \mathbf{R}^{n \times 1}$  となるため， $B_1$  および  $C_1$  に逆行列が存在すれば，目標応答  $x_d$  を実現する制御入力が存在し，状態  $x$  を観測できることになる。

$$u_1[l] = B_1^{-1}(x_d - A_1 x[l]) \quad (5.37)$$

$$x[l] = C_1^{-1}(y_1[l] - (\text{input})) \quad (5.38)$$

逆行列が存在する条件は正則行列であることであり， $B_1$  および  $C_1$  を構成する列ベクトルが一次独立であり階数落ちしないことである。 $B_1$  は可制御行列， $C_1$  は可観測と呼ばれる。可制御であれば次数  $n$  のシステムに対して  $n$  回の入力で目標値に到達させる  $n$  次静定デッドビート制御が可能であり，可観測であれば状態  $x$  を観測するオブザーバが構成可能である。一般的に，離散時間系において可制御行列および可観測行列が正則であれば，連続時間系の可制御行列および可観測行列も正則である。したがって，可制御・可観測の確認は連続時間状態空間表現から確認することができる。

この可制御・可観測の意味するところは，たとえ少数の状態にしか干渉できない場合であっても，システムのダイナミクスを通して他の状態に作用・観測することができるということである。例えば，二次導関数に作用することができれば，一次導関数および原始関数に作用することができる。観測についても同様の操作が可能である。

## 5.2 オブザーバ

オブザーバは状態量を推定するものであり，現代制御の利点の一つである。代表的なオブザーバとして，図 5.1 に Luenberger のオブザーバを示す。下付き文字  $\circ_n$  は公称値を示し，上付き文字  $\hat{\circ}$  は推定値を示す。上記のオブザーバはほぼ全てのオブザーバの原型となっており，カルマンフィルタもこのオブザーバに基づいている。Luenberger のオブザーバはシミュレータ型であり，システムのモデルを用いることで状態を推定するものである。モデルのみを用いた推定器では推定量と真値の誤差を補正することができないため，観測量の誤差をオブザーバゲイン  $L$  を介してフィードバックする機構を有している。シミュレータの支配方程式は以下ようになる。

$$\dot{\hat{x}} = A_n \hat{x} + B_n u + L(y - \hat{y}) \quad (5.39)$$

$$= (A_n - LC) \hat{x} + B_n u + L y \quad (5.40)$$

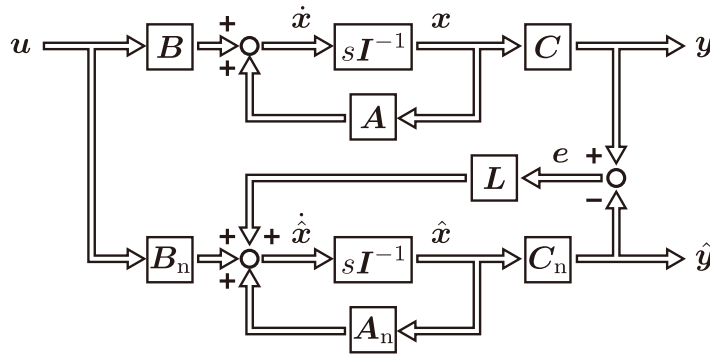


Figure 5.1. Luenberger のオブザーバ

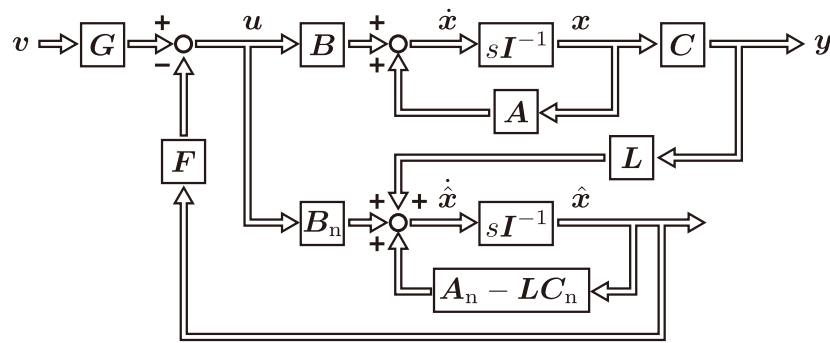


Figure 5.2. Luenberger のオブザーバを用いたフィードバック制御系

モデル化誤差が無視できるほど小さい場合，推定誤差  $e = x - \hat{x}$  に関する方程式は以下ようになる。

$$\dot{e} = Ax + Bu - A_n \hat{x} - B_n u - LC(x - \hat{x}) \quad (5.41)$$

$$= (A - LC)e \quad (5.42)$$

したがって，推定速度は  $A - LC$  の固有値に依存する。上記のオブザーバは同次元オブザーバと呼ばれる。続いて，推定された状態量を用いてフィードバック制御系を構築することを考える。フィードバックゲインを  $F$ ，フィードフォワードゲインを  $G$  として，フィードバック制御系を図 5.2 のように構成することができる。このとき，システムの支配方程式は以下ようになる。

$$\dot{x} = Ax - BF\hat{x} + BGv \quad (5.43)$$

ここで，システムの拡大系は以下のように記述される。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BF & -BF \\ \mathbf{0} & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BG \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} v \quad (5.44)$$

第一行は追従特性，第二行は推定特性を示している。上式において，係数行列の固有値が  $A - BF$  および  $A - LC$  のみに依存しており，推定誤差に関する項  $-BF e$  はシステムのダイナミクスに影響しないことを示している。また，追従特性および推定特性のダイナミクスがフィードバックゲインおよびオブザーバゲインにのみ依存することが示されており，各々が独立に設計可能である。上記の制御と観測の非干渉化に関する定理を「分離の定理」と呼ぶ。

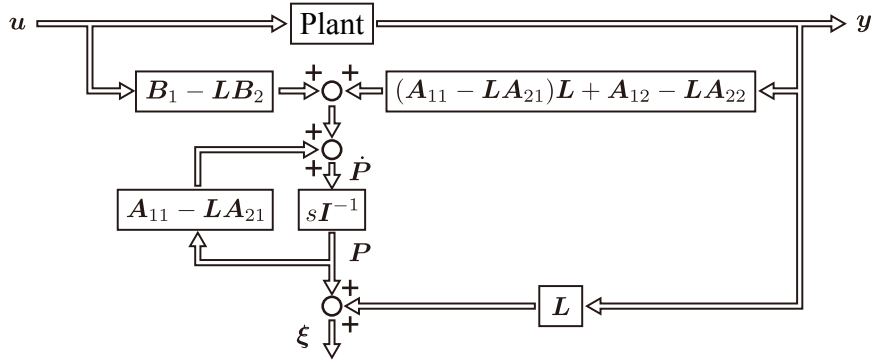


Figure 5.3. 最小次元オブザーバ

### 5.2.1 最小次元オブザーバ

前述の同次元オブザーバはセンサで取得する情報も含め全ての状態量を推定するオブザーバである。信頼性の高いセンサを使用することでモデル化誤差による推定誤差を小さくすることができる。状態量を観測される状態量  $y$  と観測されない状態量  $\xi$  に分離してシステムの支配方程式を記述する。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi \\ y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \xi \\ y \end{bmatrix} + Bu =: \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \quad (5.45)$$

$$x \triangleq \begin{bmatrix} \xi & y \end{bmatrix}^T \quad (5.46)$$

以上より，推定状態量に関して以下の状態空間表現を得る。

$$\dot{\xi} = A_{11}\xi + A_{12}y + B_1u \quad (5.47)$$

$$\dot{y} - A_{22}y - B_2u = A_{21}\xi \quad (5.48)$$

ここで， $A_{12}y + B_1u$  および  $\dot{y} - A_{22}y - B_2u$  は観測値と入力値からなる値であり，観測可能な値である。そこで，これらの値を推定状態量に関する状態空間表現の入力  $U$  と観測量  $Y$  として定義する。

$$\dot{\xi} = A_{11}\xi + U \quad (5.49)$$

$$Y = A_{21}\xi \quad (5.50)$$

このシステムに対して， $\xi$  を推定するオブザーバを構成すると，以下のような推定式を得る。

$$\dot{\hat{\xi}} = A_{11}\hat{\xi} + U + L(Y - \hat{Y}) \quad (5.51)$$

$$= (A_{11} - LA_{21})\hat{\xi} + U + LY \quad (5.52)$$

以上より，以下の推定式を得る。

$$\dot{\hat{\xi}} = (A_{11} - LA_{21})\hat{\xi} + (A_{12}y + B_1u) + L(\dot{y} - A_{22}y - B_2u) \quad (5.53)$$

$$= (A_{11} - LA_{21})\hat{\xi} + (B_1 - LB_2)u + (A_{12} - LA_{22})y + L\dot{y} \quad (5.54)$$

本式は微分を含むことから計算が困難である。そこで，新たに変数  $P = \hat{\xi} - Ly$  を導入し， $P$  に関するオブザーバを変形する。 $P$  を推定した後に  $\hat{\xi} = P + Ly$  により状態量を推定する。

$$\dot{P} = (A_{11} - LA_{21})P + (B_1 - LB_2)u + ((A_{11} - LA_{21})L + A_{12} - LA_{22})y \quad (5.55)$$

$$\hat{\xi} = P + Ly \quad (5.56)$$

以上より，図 5.3 に示す最小次元オブザーバを得る。この手法は Gopinath の方法と呼ばれる。

ここで，観測器の極は  $A_{11} - LA_{21}$  によって決定されることに留意する。

## 外乱オブザーバの導出

前述の理論を用いて外乱オブザーバの導出を行う。以下に電動機の運動方程式を示す。ただし、観測量は回転子回転速度とする。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} -T_{\text{load}} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{J_m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -T_{\text{load}} \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_t}{J_m} \end{bmatrix} i \quad (5.57)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{\text{load}} \\ \omega \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

ここで、 $T_{\text{load}}$  は外乱トルク、 $\omega$  は回転子回転速度、 $K_t$  はトルク定数、 $J_m$  は回転子慣性、 $i$  は電機子電流を表す。外乱オブザーバは外乱トルクを状態量としてシステムを表現することで、オブザーバを設計することにより外乱トルクを推定する。ここで、直流成分のみを焦点に当てた外乱オブザーバは外乱トルクの一次導関数を無視して推定を行う。上記のシステムの可観測行列は以下のようになる。

$$M_c = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{J_m} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

可観測行列が正則であることより可観測であり、オブザーバを設計することが可能である。観測量を使用して最小次元オブザーバを構成するため、図 5.3 に基づきオブザーバのパラメータを決定する。

$$B_1 - LB_2 = -\frac{K_t}{J_m} l \quad (5.60)$$

$$(A_{11} - LA_{21})L + A_{12} - LA_{22} = -\frac{1}{J_m} l^2 \quad (5.61)$$

$$A_{11} - LA_{21} = -\frac{1}{J_m} l \quad (5.62)$$

オブザーバの構造が決定したため、推定式を導出する。

$$-\hat{T}_{\text{load}} = -\frac{J_m}{J_m s + l} \frac{K_t}{J_m} l i + l \left( 1 - \frac{J_m}{J_m s + l} \frac{1}{J_m} l \right) \omega \quad (5.63)$$

$$= -\frac{l}{J_m s + l} K_t i + \frac{l}{J_m s + l} J_m s \omega \quad (5.64)$$

$$= -\frac{g}{s + g} K_t i + \frac{g}{s + g} J_m s \omega \quad (g \triangleq \frac{l}{J_m}) \quad (5.65)$$

$$= -\frac{g}{s + g} (K_t i - J_m s \omega) \quad (5.66)$$

以上より、外乱トルクは一次遅れ系を介して推定される。

$$\hat{T}_{\text{load}} = \frac{g}{s + g} T_{\text{load}} \quad (5.67)$$

上記のオブザーバは0次外乱オブザーバと呼ばれ、1型サーボとしての役割を持つ。外乱オブザーバの次数は外乱の次数を指し、内部モデル原理に基づき抑圧可能な外乱の次数を規定する。外乱のダイナミクスを考慮した状態空間表現を行うことで、高次の外乱オブザーバを導出することができる。外乱オブザーバを用いたフィードバック制御系は二自由度制御系であることが示されており、フィードフォワード制御器の極に影響を与えない。これは分離の定理からも明らかである。

## 5.3 同値変換

状態空間表現に基づく制御系では，制御器およびオブザーバの設計において  $A - BF$  および  $A - LC$  の固有値を設定する必要があった。ここで，フィードバックゲイン  $F$  およびオブザーバゲイン  $L$  の設計パラメータとなるが，これらのパラメータによって制御器およびオブザーバの固有値がどのように変化するかが把握しづらいといった問題が生じる。そこで，システムの性質に影響を与えないように状態空間上の表現を変換し，制御系設計を行う。この変換を同値変換と呼ぶ。また，入出力関係が一致し，状態空間の次数が等しいシステムを同値なシステムであると呼ぶ。

同値なシステムに対する理解を深めるため，以下に示す状態の相似変換について考える。

$$\mathbf{x} = T\mathbf{z} \quad (5.68)$$

ただし，行列  $T$  は座標変換行列である。続いて，以下の状態空間表現について考える。

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \quad (5.69)$$

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} \quad (5.70)$$

上記の表現に対して入力  $u$  観測量  $y$  を変更せずに  $z$  を状態として記述する。

$$\dot{\mathbf{z}} = T^{-1}AT\mathbf{z} + T^{-1}B\mathbf{u} \quad (5.71)$$

$$\mathbf{y} = C\mathbf{T}\mathbf{z} \quad (5.72)$$

入力  $u$  と観測量  $y$  の関係が不変であることから，この相似変換によって得られた状態空間は元の状態空間と同値である。したがって，以下のように状態空間を定義することで，任意の変換行列  $T$  に対して同値のシステムを得ることができる。

$$\dot{\mathbf{z}} = A_z\mathbf{z} + B_z\mathbf{u} \quad (5.73)$$

$$\mathbf{y} = C_z\mathbf{z} \quad (5.74)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} & A_z & B_z & C_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{-1}\mathbf{x} & T^{-1}AT & T^{-1}B & CT \end{bmatrix} \quad (5.75)$$

### 5.3.1 可制御正準系

所望の極配置を実現するフィードバック制御器について考える。前述の通り，純粋な運動方程式から導かれるシステム行列によって構成される追従特性項  $A - BF$  は固有値の確認が難しい。そこで，制御系設計を容易に行うことができる同値なシステムにおいてフィードバック制御器を設計し，元のシステムに適用することを考える。所望の特性方程式を以下のように設定する。

$$\phi(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_2s^2 + a_1s^1 + a_0 \quad (5.76)$$

上記の特性方程式を与える行列は複数存在するが，可視性の高いものとして以下の行列を利用する。

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (5.77)$$



同値なシステムの特性行列  $A_z - B_z F_z$  が上記の行列となれば，等しい入出力関係を持つ元のシステムの追従特性も所望の特性となる。上記の配列を持つ行列を可制御正準形と呼ばれる。ここで，システムが可制御であれば基準とするシステム行列を可制御正準形へと同値変換し，同時に以下の同値入力行列を実現する変換行列  $T_c$  が存在する。

$$B_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (5.78)$$

したがって，適切な座標変換行列  $T_c$  によって同値変換されたシステムでは，特性方程式の係数項のみを変更することができる。上記の変換によって得られた同値システムのフィードバックゲインに対して以下の変換を行うことで基準のシステムのためのフィードバック制御器が導出される。

$$T_c^{-1}(A - BF)T_c = A_z - B_z F_z \quad (5.79)$$

$$\therefore F = F_z T_c^{-1} \quad (5.80)$$

### 5.3.2 可観測正準系

所望の極配置を実現するオブザーバについて考える。可制御正準形と同様に，制御系設計を容易に行うことができる同値なシステムにおいてオブザーバを設計し，元のシステムに適用することを考える。所望の特性方程式を以下のように設定する。

$$\phi(s) = s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_2s^2 + b_1s^1 + b_0 \quad (5.81)$$

上記の特性方程式を与える行列は複数存在するが，可視性の高いものとして以下の行列を利用する。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -b_{n-1} \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

同値なシステムの特性行列  $A_z - L_z C_z$  が上記の行列となれば，等しい入出力関係を持つ元のシステムの観測特性も所望の特性となる。上記の配列を持つ行列を可観測正準形と呼ばれる。ここで，システムが可観測であれば基準とするシステム行列を可観測正準形へと同値変換し，同時に以下の同値観測行列を実現する変換行列  $T_o$  が存在する。

$$C_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.83)$$

したがって，適切な座標変換行列  $T_o$  によって同値変換されたシステムでは，特性方程式の係数項のみを変更することができる。上記の変換によって得られた同値システムのオブザーバゲインに対して以下の変換を行うことで基準のシステムのためのフィードバック制御器が導出される。

$$T_o^{-1}(A - LC)T_o = A_z - L_z C_z \quad (5.84)$$

$$\therefore L = T_o L_z \quad (5.85)$$

### 5.3.3 座標変換行列の導出

これまでに、適切な座標変換行列  $T_c$  および  $T_o$  を用いることでシステムを同値な可制御正準形および可観測正準形のシステムへと変換することができ、フィードバックゲインおよびオブザーバゲインの設計を簡略化できることを説明した。ここでは上記の変換行列を導出する。

可制御正準形への同値変換

次数 3 のシステムについて考える。変換行列  $T_c \in R^{4 \times 4}$  を次のように定義する。

$$T_c = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{bmatrix} \quad (5.86)$$

基準となるシステムと目標とする同値変換後のシステムの関係から変換行列  $T_c$  を求める。変換行列  $T_c$  が満たす方程式を以下に示す。

$$A_z = T_c^{-1} A T_c, \quad B_z = T_c^{-1} B \quad (5.87)$$

$$\therefore A T_c = T_c A_z, \quad B = T_c B_z = T_c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (5.88)$$

入力行列  $B, B_z$  に関する方程式から、次の解を得る。

$$t_4 = B \quad (5.89)$$

システム行列  $A, A_z$  に関する方程式から、次の方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} A t_1 & A t_2 & A t_3 & A t_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \quad (5.90)$$

$$= \begin{bmatrix} -a_0 t_4 & t_1 - a_1 t_4 & t_2 - a_2 t_4 & t_3 - a_3 t_4 \end{bmatrix} \quad (5.91)$$

以上より、順に以下の解を得る。

$$t_4 = B \quad (5.92)$$

$$t_3 = A t_4 + a_3 t_4 = A B + a_3 B \quad (5.93)$$

$$t_2 = A t_3 + a_2 t_3 = A^2 B + a_3 A B + a_2 B \quad (5.94)$$

$$t_1 = A t_2 + a_1 t_4 = A^3 B + a_3 A^2 B + a_2 A B + a_1 B \quad (5.95)$$

したがって、以下の行列  $T_c$  が可制御正準形への同値変換を与える変換行列である。

$$T = \begin{bmatrix} A^3 B + a_3 A^2 B + a_2 A B + a_1 B & A^2 B + a_3 A B + a_2 B & A B + a_3 B & B \end{bmatrix} \quad (5.96)$$

$$= \begin{bmatrix} B & A B & A^2 B & A^3 B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ a_2 & a_3 & 1 & 0 \\ a_3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.97)$$

変換行列  $T_c$  は可制御行列を含むことがわかる。可制御行列が階数落ちする場合には変換行列は存在しない。したがって、可制御である場合には可制御正準形の同値なシステムが存在し、任意の極配置を実現可能である。変換行列は規則性を持ち、任意の次数のシステムを取り扱うことができる。

## 可観測正準形への同値変換

次数 3 のシステムについて考える。変換行列  $T_0 \in R^{4 \times 4}$  の逆行列を次のように定義する。

$$T_0^{-1} = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{bmatrix}^T \quad (5.98)$$

基準となるシステムと目標とする同値変換後のシステムの関係から変換行列  $T_0^{-1}$  を求める。変換行列  $T_0^{-1}$  が満たす方程式を以下に示す。

$$A_z = T_0^{-1} A T_0, \quad C_z = C T_0 \quad (5.99)$$

$$\therefore T_0^{-1} A = A_z T_0^{-1}, \quad C = C_z T_0^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T_0^{-1} \quad (5.100)$$

入力行列  $C$ ,  $C_z$  に関する方程式から, 次の解を得る。

$$t_4 = C \quad (5.101)$$

システム行列  $A$ ,  $A_z$  に関する方程式から, 次の方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} t_1 A \\ t_2 A \\ t_3 A \\ t_4 A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & 0 & -b_2 \\ 0 & -0 & 1 & -b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_0 t_1 \\ t_1 - b_1 t_4 \\ t_2 - b_2 t_4 \\ t_3 - b_3 t_4 \end{bmatrix} \quad (5.102)$$

以上より, 順に以下の解を得る。

$$t_4 = C \quad (5.103)$$

$$t_3 = A t_4 + b_3 t_4 = C A + b_3 C \quad (5.104)$$

$$t_2 = A t_3 + b_2 t_3 = C A^2 + b_3 C A + b_2 C \quad (5.105)$$

$$t_1 = A t_2 + b_1 t_4 = C A^3 + b_3 C A^2 C + b_2 C A + b_1 C \quad (5.106)$$

したがって, 以下の行列  $T_0$  が可制御正順形への同値変換を与える変換行列である。

$$T = \begin{bmatrix} C A^3 + b_3 C A^2 C + b_2 C A + b_1 C & C A^2 + b_3 C A + b_2 C & C A + b_3 C & C \end{bmatrix}^{-T} \quad (5.107)$$

$$= \left( \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ b_2 & b_3 & 1 & 0 \\ b_3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ C A \\ C A^2 \\ C A^3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \quad (5.108)$$

変換行列  $T_0$  は可観測行列を含むことがわかる。可観測行列が階数落ちする場合には変換行列は存在しない。したがって, 可観測である場合には可観測正準形の同値なシステムが存在し, 任意の極配置を実現可能である。変換行列は規則性を持ち, 任意の次数のシステムを取り扱うことができる。

## 5.4 実用的な設計

現代制御は経験則によって制御対象ごとにアプローチが変わる古典制御の改善策として創出された経緯がある。古典制御は技術者の実験と観測によって成立する技術であり、制御対象に深い知識を持った技術者が見れば高精度な制御器が設計できるものであった。実際に、古典制御において表現される制御対象のモデルは直感的に現実の物理現象と結びつくものが多く、制御器設計の経験を積めば自身の設計した制御器と制御対象の挙動を結びつけることが容易であるといった利点がある。その反面、設計者の熟練度によって機械の性能が左右するといった問題が生じた。知識・技術の継承に時間を要すること、新製品の開発初期段階に制御器構造から検討する必要など、技術発展には障害となる部分が大きかったのも事実である。そこで、いかなる制御対象であっても定量的に設計可能な手法が求められた。そのために開発された手法が支配方程式を状態空間を用いて表現し、制御器を設計する現代制御である。現代制御では状態空間という一般化された表現方法を基に制御器設計の手順が明確化されている。そのため、制御対象を問わずに一般化問題に落とし込むことができるため、汎用性の高い設計手法として確立された。しかしながら、「問題の一般化」ができれば強力な手法である反面、それ自体が困難である場合が多い。これが現代制御の実用的な設計の難しさである。

現代制御は制御対象のモデルに基づく制御手法であり、制御器やオブザーバはモデルに基づいて設計された。したがって、モデルが正確でない場合には、所望の動作を実現することは困難である。これに対し、モデル化誤差に対する精度と安定性のロバスト性を示す指標としてロバスト性能とロバスト安定性と呼ばれる指標があり、これらの指標の設計手法として $H_\infty$ 制御などの研究も体系化されている。しかしながら、実際の制御においては数式モデルで表現することが非常に困難な非線形現象が存在する。状態空間におけるシステム行列が制御対象の自由運動を規定するものに対して、機械の軸ずれや設計上の遊びはどのように表現されるのかに関しては議論が少ない。これらの機械構造に依存する外乱は高周波領域においてハンチングを起こすことが確認されており、制御入力はこの現象を励起しないように設計する必要がある。また、制御対象を駆動するためには電力変換を担うインバータが存在するため、理想的な入力を生成できるわけではない。インバータに固有の入力帯域および重畳雑音量が存在するため、状態空間において真に厳密な離散化というものは存在しないといえる。また、状態空間表現の視認性が高くないこともあり、デバッグが困難であるといった問題が存在する。古典制御では制御対象の直感的な理解が可能なモデルが存在するため、このような問題は生じにくい。このように、現代制御は一般化された問題には一般解を与えるが、表現されない現象に対しては解を与えることが困難である。現実的な問題に対しては、古典制御に存在した内部モデル原理に基づく制御器設計やボード線図による安定余裕度の確認など、実験に基づく設計ツールが現在も強力なように見える。これは現代制御の一つの課題である。

上記のように、現代制御を利用するにしても結局のところは制御対象に対する深い知識が必要となる。また、現代制御を真に利用するためには一般解の導出過程を自身で理解しなければならない。一つの制御対象であっても状態空間における表現方法は一つに限定されるのではなく、問題定義の仕方によっては誤った解が与えられる。現代制御理論は「一般化された枠組みの問題に対して解を与える手法」であって、一般化問題に落とし込む時点で間違えば誤った解が与えられるのは自明である。現代制御の使用にあたっては根本的な理解が非常に重要である。

# Chapter 6

## 加速度制御

現在では古典制御と現代制御のハイブリッド制御手法が存在する。これが加速度制御である。任意の制御対象に対して、制御対象の加速度を制御することが可能であれば、制御対象の見かけ上の剛性を制御することができる。これは制御剛性と呼ばれ、制御剛性を高くすればロバストな位置制御を実現し、制御剛性を低くすれば環境に倣う力制御を実現する。現代制御において「問題を一般化する」という問題を「加速度制御系を実現する」という問題に置き換えたものである。加速度制御系の設計は現代制御理論に基づいて導出された外乱オブザーバを使用し、制御器特性を古典制御に基づいて設計する二自由度制御系となっており、実用上の問題を扱いやすいといった特徴がある。

### 6.1 外乱オブザーバ

外乱オブザーバの構想を非常に単純で、負荷外乱を推定して逆位相の信号をシステムに入力すれば、外乱が相殺されてロバストな制御が実現されるというものである。発明者の大石によれば、一自由度制御系における追従特性と外乱抑圧特性を決定する制御器設計において問題となる極零設計を簡略化する目的で着想に至ったという。外乱が相殺されていれば追従特性のみを設計すれば良いという単純な発想だが、それゆえ非常に強力な手法である。図 6.1 に外乱オブザーバの構造を示す。ここで、 $K_t$  はトルク定数、 $J_m$  は慣性、 $\theta_m$  は回転角、 $\tau_l$  は負荷外乱、 $Q$  は外乱推定帯域を決定する設計フィルタであり、同時に制御器をプロパーにする役割を持つ。下付き文字  $\circ_n$  は公称値、上付き文字  $\circ^{\text{ref}}$  は参照値を示す。この構造は Gopinath の方法を用いた最小次元オブザーバの設計法により導出される。

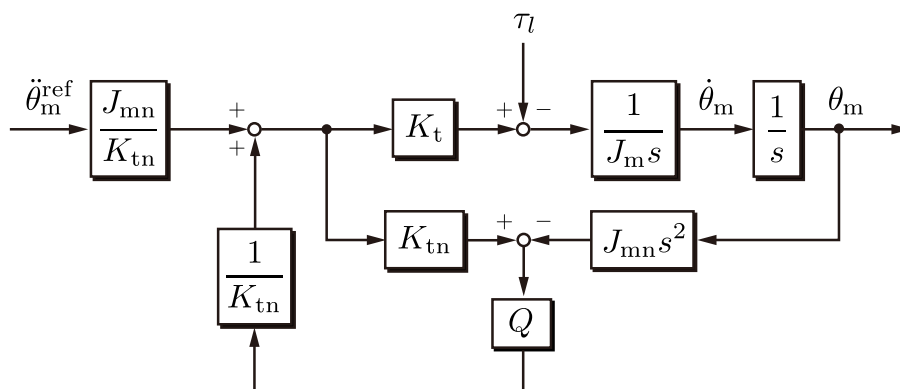


Figure 6.1. 外乱オブザーバ

現代制御理論で扱った通り，モデル化誤差が存在しない場合には制御器の極とオブザーバの極が独立に設計可能である分離の定理が成立することを説明した。しかしながら，実際にはモデル化誤差となる多くの要因が存在するため，外乱オブザーバの汎用性を示すためにはロバスト性の解析をする必要がある。 $Q$  の出力信号を外乱推定値  $\hat{\tau}_1$  とすると，このシステムには次の関係が存在している。

$$\theta_m = \frac{1}{J_m s^2} \left( K_t \left( \frac{J_{mn}}{K_{tn}} \ddot{\theta}_m^{\text{ref}} + \frac{1}{K_{tn}} \hat{\tau}_1 \right) - \tau_1 \right) \quad (6.1)$$

$$= \frac{1}{s^2} \frac{J_{mn}}{J_m} \frac{K_t}{K_{tn}} \ddot{\theta}_m^{\text{ref}} - \frac{1}{J_m s^2} \left( \tau_1 - \frac{K_t}{K_{tn}} \hat{\tau}_1 \right) \quad (6.2)$$

$$\hat{\tau}_1 = Q \left( K_{tn} \left( \frac{J_{mn}}{K_{tn}} \ddot{\theta}_m^{\text{ref}} + \frac{1}{K_{tn}} \hat{\tau}_1 \right) - \frac{J_{mn}}{J_m} \left( K_t \left( \frac{J_{mn}}{K_{tn}} \ddot{\theta}_m^{\text{ref}} + \frac{1}{K_{tn}} \hat{\tau}_1 \right) - \tau_1 \right) \right) \quad (6.3)$$

$$= Q \left( (J_{mn} \ddot{\theta}_m^{\text{ref}} + \hat{\tau}_1) + \frac{J_{mn}}{J_m} \frac{K_t}{K_{tn}} (J_{mn} \ddot{\theta}_m^{\text{ref}} + \hat{\tau}_1) + \frac{J_{mn}}{J_m} \tau_1 \right) \quad (6.4)$$

ここで，次に示すモデル化誤差指標  $\alpha$  を導入することにより上式を簡略化する。

$$\alpha = \frac{J_{mn}}{J_m} \frac{K_t}{K_{tn}} \quad (6.5)$$

$$\theta_m = \frac{1}{s^2} \alpha \ddot{\theta}_m^{\text{ref}} - \frac{1}{J_m s^2} \left( \tau_1 - \frac{K_t}{K_{tn}} \hat{\tau}_1 \right) \quad (6.6)$$

$$\hat{\tau}_1 = Q \left( (1 - \alpha) J_{mn} \ddot{\theta}_m^{\text{ref}} + (1 - \alpha) \hat{\tau}_1 + \frac{J_{mn}}{J_m} \tau_1 \right) \quad (6.7)$$

以上より，以下の結果を得る。

$$\hat{\tau}_1 = \frac{Q}{1 - Q(1 - \alpha)} \left( (1 - \alpha) J_{mn} \ddot{\theta}_m^{\text{ref}} + \frac{J_{mn}}{J_m} \tau_1 \right) \quad (6.8)$$

$$\theta_m = \frac{1}{s^2} \alpha \ddot{\theta}_m^{\text{ref}} - \frac{1}{J_m s^2} \left( \tau_1 - \frac{K_t}{K_{tn}} \frac{Q}{1 - Q(1 - \alpha)} \left( (1 - \alpha) J_{mn} \ddot{\theta}_m^{\text{ref}} + \frac{J_{mn}}{J_m} \tau_1 \right) \right) \quad (6.9)$$

$$= \frac{1}{s^2} \alpha \left( 1 - \frac{Q(1 - \alpha)}{1 - Q(1 - \alpha)} \right) \ddot{\theta}_m^{\text{ref}} - \frac{1}{J_m s^2} \left( 1 - \frac{\alpha Q}{1 - Q(1 - \alpha)} \right) \tau_1 \quad (6.10)$$

$$= \frac{1}{s^2} \frac{\alpha}{1 - Q(1 - \alpha)} \ddot{\theta}_m^{\text{ref}} - \frac{1}{J_m s^2} \frac{1 - Q}{1 - Q(1 - \alpha)} \tau_1 \quad (6.11)$$

上記の式はモデル化誤差が非常に小さいときにのみ厳密な加速度制御が実現することを示している。ここで， $Q$  はオブザーバの帯域を示していたので，上記の式を帯域で判断できる形式に変形する。

$$\theta_m = \frac{1}{s^2} \frac{\alpha}{\alpha Q + (1 - Q)} \ddot{\theta}_m^{\text{ref}} - \frac{1}{J_m s^2} \frac{1 - Q}{\alpha Q + (1 - Q)} \tau_1 \quad (6.12)$$

帯域内では  $Q \approx 1$  かつ  $(1 - Q) \approx 0$ ，帯域外では  $Q \approx 0$  かつ  $(1 - Q) \approx 1$  と見ることで大まかな特性を確認することができる。モデル化誤差が存在する場合であっても，オブザーバの帯域内であれば加速度制御が実現することが確認できる。実際には加速度制御に対して位相補償器が加わった形となるため，アウター制御系の安定性に影響を与えることに注意しなければならない。

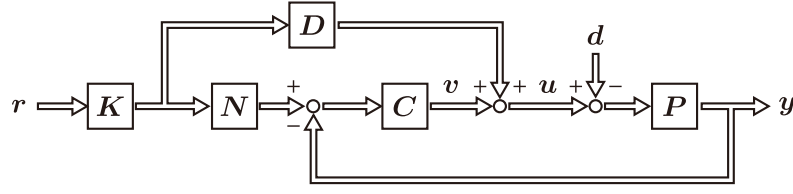


Figure 6.2. 二自由度制御系

## 6.2 二自由度制御系と外乱オブザーバ

外乱オブザーバの特性を理解するために、二自由度制御系との関係を述べる。二自由度制御系のブロック線図は図 6.2 のようになる。 $K$  はフィードフォワード制御器群をプロパーにする平滑フィルタであり、理想状態において  $y = NKr$  を満たす制御器である。 $P$  はプラント、フィードフォワード制御器  $D$  および  $N$  はプラントを既約分解表現した際に現れる関数である。

$$P = ND^{-1} = \tilde{D}^{-1}\tilde{N} \quad (6.13)$$

$C$  はフィードバック制御器であり、Youla のパラメータ  $X, Y, Q$  を用いた一般化安定化補償器の形式を用いて以下のように表す。

$$C = (Y - Q\tilde{N})^{-1}(X + Q\tilde{D}) \quad (6.14)$$

ただし、Youla のパラメータ  $X, Y, Q$  は以下の Bezout 等式を満たすプロパーな安定多項式とする。

$$YD + XN = I \quad (6.15)$$

また、制御器  $C$  の出力を  $v$  とする。ここで、システムへの入力  $u$  は以下のようになる。

$$u = DKr + v \quad (6.16)$$

ここで、 $v$  は以下の式を満たす。

$$v = (Y - Q\tilde{N})^{-1}(X + Q\tilde{D})(NKr - y) \quad (6.17)$$

$$(Y - Q\tilde{N})v = (X + Q\tilde{D})(NKr - y) \quad (6.18)$$

したがって、次のフィードバック則を見つけることができる。

$$v = Y^{-1}(Q\tilde{N}v + (X + Q\tilde{D})(NKr - y)) \quad (6.19)$$

また、上記の式をさらに分解することで以下の式を得る。

$$v = Y^{-1}(Q\tilde{N}v + X(NKr - y)) + Q\tilde{D}NKr - Q\tilde{D}y \quad (6.20)$$

ここで、既約分解表現における定義  $ND^{-1} = \tilde{D}^{-1}\tilde{N}$  を用いて、以下の式を得る。

$$v = Y^{-1}(Q\tilde{N}v + X(NKr - y)) + Q\tilde{N}DKr - Q\tilde{D}y \quad (6.21)$$

$$= Y^{-1}(Q\tilde{N}(v + DKr) + X(NKr - y)) - Q\tilde{D}y \quad (6.22)$$

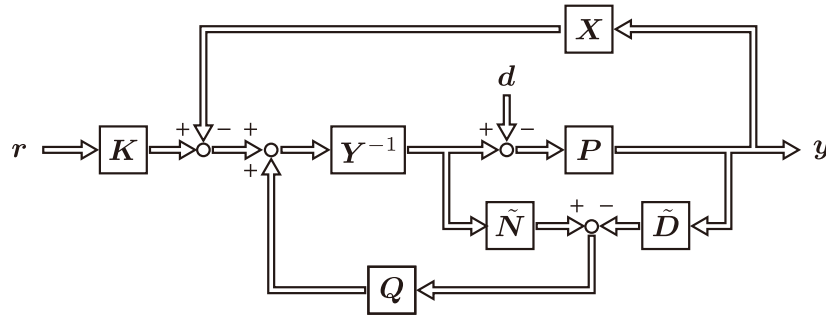


Figure 6.3. 二自由度制御系の等価変換

以上より，制御器  $C$  の出力  $v$  とシステムへの入力  $u$  に関して以下の結果を得る。

$$v = Y^{-1}X(NKr - y) + Y^{-1}Q(\tilde{N}u - \tilde{D}y) \quad (6.23)$$

$$u = DKr + Y^{-1}X(NKr - y) + Y^{-1}Q(\tilde{N}u - \tilde{D}y) \quad (6.24)$$

ここで，Youla の安定化補償器に関する条件  $YD + XN = I$  を用いて，以下の式を得る。

$$u = Y^{-1}(YD + XN)Kr - Y^{-1}Xy + Y^{-1}Q(\tilde{N}u - \tilde{D}y) \quad (6.25)$$

$$= Y^{-1}(Kr - Xy + Q(\tilde{N}u - \tilde{D}y)) \quad (6.26)$$

この式より二自由度制御系のブロック線図を書き表すと，図 6.3 のようになる。この制御系はフィードフォワード制御器，フィードバック制御器および外乱オブザーバと似た制御器から構成されることが確認された。フリーパラメータ  $Q$  の直後の信号群を  $\beta$  とすると， $\beta$  は次のように計算される。

$$\beta = Q(\tilde{N}Y^{-1}\beta - \tilde{D}PY^{-1}(\beta - d)) = Q\tilde{N}d \quad (6.27)$$

フリーパラメータ  $Q$  の設定によっては外乱オブザーバとなり得ることがわかる。外乱オブザーバの構造では推定外乱をシステムの入力に重畳するため，二自由度制御系において外乱オブザーバを表現するためには，次の式を満たす必要がある。

$$Y^{-1}\beta = Y^{-1}Q\tilde{N}d \approx d \quad (6.28)$$

上記の式はフリーパラメータの  $Q$  が外乱の推定特性を決定することを示している。

### 二自由度制御系から見た加速度制御系

ここで，外乱オブザーバを用いて加速度制御系を構築することを考える。図 6.3 より，一般的な外乱オブザーバは Youla のパラメータが以下の値を取る二自由度制御系と等価であることがわかる。

$$X = O \quad (6.29)$$

$$Y = D^{-1} \quad (6.30)$$

加速度制御系の入出力の次元は双方とも加速度であるため，プラントを構成する既約多項式  $N$ ， $D$  は次数 0 の定数となる。したがって，入力平滑フィルタ  $K$  は次の条件を満たせばよい。

$$y = NKr = r \quad (6.31)$$

$$\therefore K = N^{-1} \quad (6.32)$$



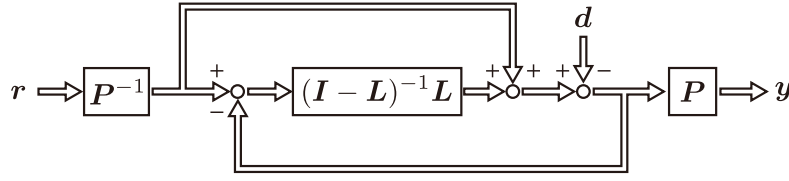


Figure 6.4. 二自由度制御形式の加速度制御

この条件下において，モデル化誤差のない場合の入出力関係は以下になることが確認できる。

$$y = PY^{-1}Kr = ND^{-1}DN^{-1}r = r \quad (6.33)$$

また，フリーパラメータ  $Q$  は以下のように設定する必要がある。

$$Y^{-1}Q\tilde{N} \approx 1 \quad (6.34)$$

そこで，調整ゲインと低域通過フィルタ  $L$  によりフリーパラメータ  $Q$  を以下のように構成した。

$$Q = YL\tilde{N}^{-1} = D^{-1}L\tilde{N}^{-1} \quad (6.35)$$

以上より，外乱オブザーバを用いた加速度制御系は二自由度制御器において二つの設計パラメータを次のように設定をした場合であることがわかる。

$$K = N^{-1} \quad (6.36)$$

$$C = (D^{-1} - Q\tilde{N})^{-1}Q\tilde{D} = (I - L)^{-1}LP^{-1} \quad (6.37)$$

上記の制御器を用いて制御系を構成すると，図 6.4 に示す等価ブロック線図が導出される。ただし，モデル化誤差は非常に小さいものとする。また，システムの出力  $y$  は次のように表される。

$$y = P(C(NKr - y) + DKr - d) \quad (6.38)$$

$$= PCNKr - PCy + PDKr - Pd \quad (6.39)$$

$$= (I + PC)r - PCy - Pd \quad (6.40)$$

$$\therefore y = r - (I + PC)^{-1}Pd \quad (6.41)$$

$$= r - (I + P(I - L)^{-1}LP^{-1})^{-1}Pd \quad (6.42)$$

$$= r - P(I + (I - L)^{-1}L)^{-1}d \quad (6.43)$$

$$= r - P(I - L)d \quad (6.44)$$

このように，外乱オブザーバを用いた加速度制御系で見慣れた数式が現れる。外乱オブザーバの利点は，追従特性を気にすることなくフリーパラメータ  $Q$  を設定することで任意の外乱生成多項式を制御器に加えることができる点である。見方を変えれば外乱生成多項式をフィードバック制御器に持つ制御系であるので，二自由度制御系の枠組みで設計を行った方が高い性能を引き出せる可能性がある。外乱オブザーバに基づく制御構造は物理的に明快であるため直感的な理解がしやすく，単純な構造のため導入が容易な点が優れている。美多らが示したように， $H_\infty$  制御などの二自由度制御系に対して最適化計算を行うものに対して性能面での優位性は見出しにくい。

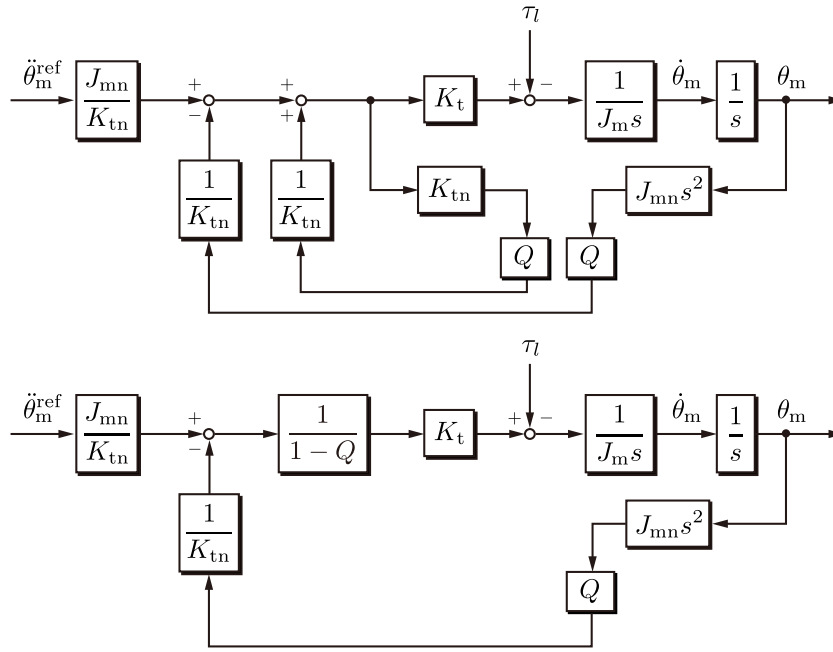


Figure 6.5. 外乱オブザーバの等価変換図

### 6.3 外乱オブザーバと内部モデル原理

外乱オブザーバは二自由度制御系の一つであることから，外乱抑圧特性を任意に設計できることが確認された。二自由度制御系ではフリーパラメータ  $Q$  の設計によってフィードバック制御器の極が決定されたが，二つの制御系の構造の類似性より外乱オブザーバでは  $Q$  フィルタ内のパラメータが内部モデル原理の成立に関係することがわかる。これをブロック線図の展開により確認する。外乱オブザーバは入力と出力の二箇所からフィードバックする構造となっているため，これらを独立に表現する。図 6.5 は外乱オブザーバの右側ループと左側ループを分解したものである。この結果より，制御器は  $1 - Q$  を特性方程式に持つことがわかる。二自由度制御系においてフィードバック制御器が  $(I - L)^{-1}LP^{-1}$  となったことに近い結果が得られたといえる。このことより，外乱オブザーバの  $Q$  フィルタは二自由度制御系のフリーパラメータ  $Q$  内のパラメータ  $L$  に対応することがわかる。

一例として，0 次外乱オブザーバの外乱抑圧特性を確認する。0 次外乱オブザーバは外生外乱の一次導関数を 0 として設計されたものであり，完全に抑圧できる外乱はステップ外乱のみであるが，これは内部モデル原理からも確認することができる。観測可能な状態量がモータ回転速度である場合，0 次外乱オブザーバでは  $Q$  フィルタは次のように設定される。

$$Q = \frac{g}{s + g} \quad (6.45)$$

ここで，外乱オブザーバの左側ループが持つ制御器  $C$  は以下ようになる。

$$C = \frac{1}{1 - Q} = \frac{s + g}{s} = 1 + \frac{g}{s} \quad (6.46)$$

$s = 0$  に極を持つため，ステップ外乱を抑圧することが可能である。高次の外乱を抑圧したい場合には， $Q$  フィルタを設計することにより実現することができる。

## 6.4 多自由度系の加速度制御

機械は複数のモータとフレームから構成され、実際にワークに作用する点はエンドエフェクタである。エンドエフェクタの加速度制御を実現できなければ外乱オブザーバの汎用性を示すことができない。ここでは、モータの加速度制御を用いてエンドエフェクタの加速度制御を実現する方法を示す。

ロボット制御においては、ロボットの関節の運動を記述する空間を関節空間、ロボットのデカルト座標での運動を記述する空間を作業空間と定義している。制御可能なアクチュエータは関節に配置されるモータであり、最終的に算出されるべき制御入力は関節空間上の値となる。一方で、ワークは作業空間に存在するためロボットの運動も作業空間上で設計することが望ましい。したがって、関節空間と作業空間の関係性を記述する式が必要となる。この関係性は、全座標系において一定値を持つ運動エネルギーから算出することができる。準備として、関節空間と作業空間の幾何学関係と速度および加速度の関係を以下のように記述する。

$$x = H(q) \quad (6.47)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H(q)}{\partial q} \dot{q} \triangleq J_{\text{aco}}(q) \dot{q} \quad (6.48)$$

$$\ddot{x} = J_{\text{aco}}(q) \ddot{q} + \dot{J}_{\text{aco}}(q) \dot{q} \quad (6.49)$$

ここで、 $q$  は関節モータの回転角度、 $x$  はロボットのエンドエフェクタの位置を表している。幾何学関係を記述する行列  $H$  は運動学、速度の関係を記述する行列  $J_{\text{aco}}$  はヤコビ行列と呼ばれる。運動におけるエネルギーは力と速度の積で表されるため、ヤコビ行列は作業空間での加速度制御実現において重要な役割を持つ。関節空間と作業空間において運動エネルギーが等しいことから、次式を得る。

$$K_{\text{joint}} = \frac{1}{2} \dot{q}^T J \dot{q} \quad (6.50)$$

$$K_{\text{work}} = \frac{1}{2} \dot{x}^T M(q) \dot{x} \quad (6.51)$$

ここで、行列  $J$  は関節空間上の運動方程式に現れる慣性行列であり、行列  $M$  はエンドエフェクタに作用した際のロボットの等価的な質量を表す等価質量行列である。慣性行列はラグランジュの方程式から導出することができる。ここで、慣性行列と等価質量行列には次の関係が成立する。

$$M(q) = J_{\text{aco}}(q)^{-T} J J_{\text{aco}}^{-1}(q) \quad (6.52)$$

また、作業空間の運動方程式は以下のように表される。

$$F = M(q) \ddot{x} \quad (6.53)$$

これまでに得られた座標間の関係式より、関節空間の加速度に関して次の式を得る。

$$\ddot{q} = J^{-1} J_{\text{aco}}^T(q) F - J_{\text{aco}}^{-1}(q) \dot{J}_{\text{aco}}(q) \dot{q} \quad (6.54)$$

以上より関節空間の運動方程式を得ることができ、関節空間のトルクと作業空間の力の関係式を得る。

$$J \ddot{q} = J_{\text{aco}}^T(q) F - J J_{\text{aco}}^{-1}(q) \dot{J}_{\text{aco}}(q) \dot{q} \quad (6.55)$$

$$\therefore \tau = J_{\text{aco}}^T(q) (F - M(q) \dot{J}_{\text{aco}}(q) \dot{q}) \quad (6.56)$$

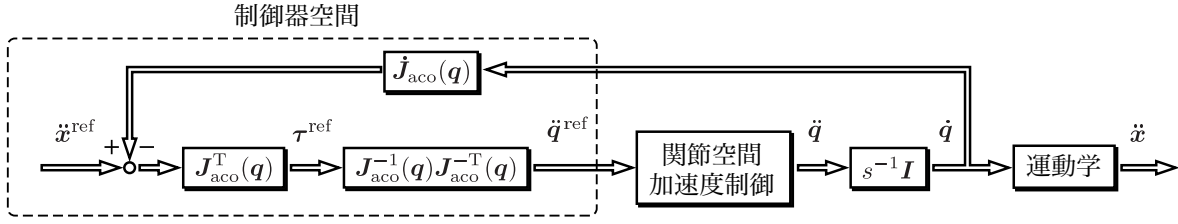


Figure 6.6. 作業空間加速度制御

以上の関係式から，作業空間上の加速度制御を実現するための方法を述べる。作業空間で生成された力参照値は次のように関節空間のトルク参照値に変換される。

$$\tau^{\text{ref}} = J_{\text{aco}}^T(q) (F^{\text{ref}} - M(q)\dot{J}_{\text{aco}}(q)\dot{q}) \quad (6.57)$$

関節空間の運動方程式より，以下の式を得る。

$$\dot{q} = (sJ + J_{\text{aco}}^T(q)M(q)\dot{J}_{\text{aco}}(q))^{-1} J_{\text{aco}}^T(q)F^{\text{ref}} \quad (6.58)$$

$$\ddot{q} = (s^2J + sJ_{\text{aco}}^T(q)M(q)\dot{J}_{\text{aco}}(q))^{-1} J_{\text{aco}}^T(q)F^{\text{ref}} \quad (6.59)$$

したがって，作業空間の加速度は以下のように算出される。

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= (sJ_{\text{aco}}(q) + \dot{J}_{\text{aco}}(q))(sJ + J_{\text{aco}}^T(q)M(q)\dot{J}_{\text{aco}}(q))^{-1} J_{\text{aco}}^T(q)F^{\text{ref}} \\ &= (sJ_{\text{aco}}(q) + \dot{J}_{\text{aco}}(q))(sJ_{\text{aco}}(q) + \dot{J}_{\text{aco}}(q))^{-1} J_{\text{aco}}(q)J_{\text{aco}}^T(q)F^{\text{ref}} \\ &= M^{-1}(q)F^{\text{ref}} \end{aligned} \quad (6.60)$$

以上より，作業空間では等価質量  $M(q) = J_{\text{aco}}(q)^{-T}JJ_{\text{aco}}^{-1}(q)$  を持つ運動系が存在していることがわかる。ここで，外乱オブザーバを用いて等価質量を設定する。外乱オブザーバは加速度制御を実現するものであったが，視点を変えれば運動系の質量を1とする制御である。したがって，任意の質量を設定することも可能である。慣性行列  $J$  が設計パラメータであるとき，以下のように設計することで作業空間の加速度制御を実現することができる。

$$J = J_{\text{aco}}^T(q)J_{\text{aco}}(q) \quad (6.61)$$

実際に計算すれば等価慣性行列  $M(q) = I$  となっていることが確認できる。以上を基に作成した作業空間の加速度制御のブロック線図が図 6.6 となる。これは力の流れを厳密に表現したものであり，実装においては省略することができる。関節空間の加速度参照値は以下のように計算される。

$$\ddot{q}^{\text{ref}} = J_{\text{aco}}^{-1}(q)J_{\text{aco}}^{-T}(q)J_{\text{aco}}^T(q)(\ddot{x}^{\text{ref}} - \dot{J}_{\text{aco}}(q)\dot{q}) \quad (6.62)$$

$$= J_{\text{aco}}^{-1}(q)\ddot{x}^{\text{ref}} - J_{\text{aco}}^{-1}(q)\dot{J}_{\text{aco}}(q)\dot{q} \quad (6.63)$$

低速運動であれば， $\dot{J}_{\text{aco}}(q) \approx 0$  として以下のように設計することもできる。

$$\ddot{q}^{\text{ref}} = J_{\text{aco}}^{-1}(q)\ddot{x}^{\text{ref}} \quad (6.64)$$

ただし，加速度制御は実現していないため運動学に基づくフィードバック補正が必要となる。

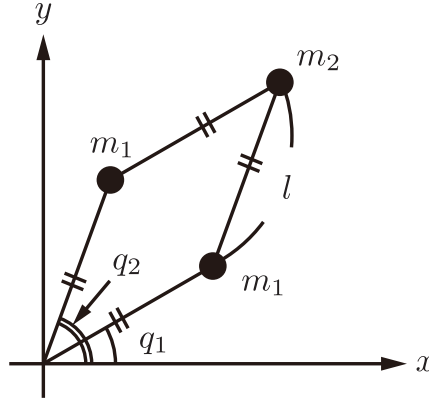


Figure 6.7. 2 リンクパラレルマニピュレータ

### 6.4.1 ラグランジュ方程式を用いた運動方程式の導出

ここでは多自由度系の運動方程式をラグランジュ方程式から導出する。ラグランジュ方程式はエネルギーに関する方程式であり、全ての運動を記述することができる。

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (6.65)$$

$$L = U - P \quad (6.66)$$

ここで、 $\tau$  はトルク、 $L$  はエネルギー、 $U$  は運動エネルギー、 $P$  は位置エネルギー、 $q$  は一般化座標を表す。例として2リンクパラレルマニピュレータを扱う。

#### 2 リンクパラレルマニピュレータ

運動エネルギーと位置エネルギーを算出するために、各質点の座標を計算する必要がある。対象にするマニピュレータを図6.7に示す。この系において、各質点の座標は以下のように計算される。

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} l \cos q_1 \\ l \sin q_1 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} l \cos q_2 \\ l \sin q_2 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} l \cos q_1 + l \cos q_2 \\ l \sin q_1 + l \sin q_2 \end{bmatrix} \quad (6.67)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_1 = \begin{bmatrix} -l \sin q_1 & 0 \\ l \cos q_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}, \dot{\mathbf{p}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -l \sin q_2 \\ 0 & l \cos q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}, \dot{\mathbf{p}}_3 = \begin{bmatrix} -l \sin q_1 & -l \sin q_2 \\ l \cos q_1 & l \cos q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (6.68)$$

$$\|\dot{\mathbf{p}}_1\|^2 = l^2 \dot{q}_1^2, \|\dot{\mathbf{p}}_2\|^2 = l^2 \dot{q}_2^2, \|\dot{\mathbf{p}}_3\|^2 = l^2 \dot{q}_1^2 + l^2 \dot{q}_2^2 + 2l^2 \cos(q_2 - q_1) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \quad (6.69)$$

マニピュレータが水平平面上で運動するとき、系のエネルギーは以下になる。

$$P = 0 \quad (6.70)$$

$$U = \frac{1}{2} m_1 \|\dot{\mathbf{p}}_1\|^2 + \frac{1}{2} m_1 \|\dot{\mathbf{p}}_2\|^2 + \frac{1}{2} m_2 \|\dot{\mathbf{p}}_3\|^2 \quad (6.71)$$

$$= \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 (l^2 \dot{q}_1^2 + l^2 \dot{q}_2^2 + 2l^2 \cos(q_2 - q_1) \dot{q}_1 \dot{q}_2) \quad (6.72)$$

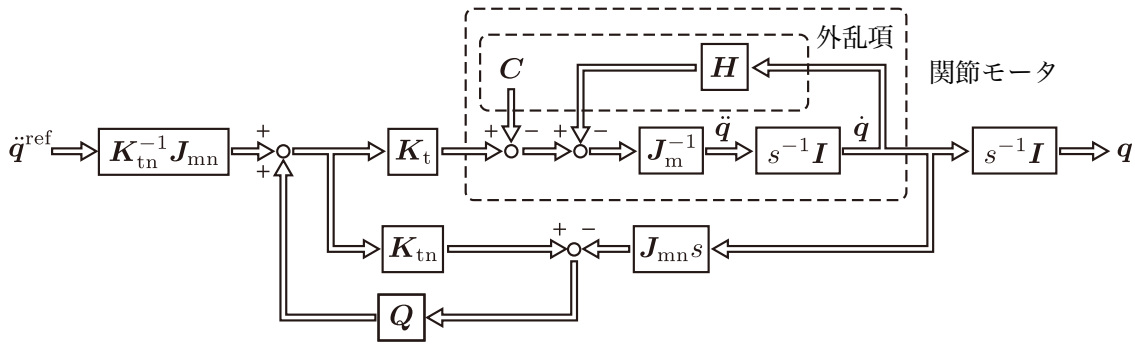


Figure 6.8. 関節空間加速度制御

したがって，ラグランジュ方程式より次の運動方程式を得る。

$$\tau_1 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} \quad (6.73)$$

$$= \frac{d}{dt} (m_1 l^2 \dot{q}_1 + m_2 l^2 \dot{q}_1 + m_2 l^2 \cos(q_2 - q_1) \dot{q}_2) - m_2 l^2 \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \quad (6.74)$$

$$= m_1 l^2 \ddot{q}_1 + m_2 l^2 \ddot{q}_1 - m_2 l^2 \sin(q_2 - q_1) (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) \dot{q}_2 + m_2 l^2 \cos(q_2 - q_1) \ddot{q}_2 - m_2 l^2 \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \quad (6.75)$$

$$= (m_1 + m_2) l^2 \ddot{q}_1 + m_2 l^2 \cos(q_2 - q_1) \ddot{q}_2 - m_2 l^2 \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_2^2 \quad (6.76)$$

$$\tau_2 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} \quad (6.77)$$

$$= \frac{d}{dt} (m_1 l^2 \dot{q}_2 + m_2 l^2 \dot{q}_2 + m_2 l^2 \cos(q_2 - q_1) \dot{q}_1) + m_2 l^2 \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \quad (6.78)$$

$$= m_1 l^2 \ddot{q}_2 + m_2 l^2 \ddot{q}_2 - m_2 l^2 \sin(q_2 - q_1) (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) \dot{q}_1 + m_2 l^2 \cos(q_2 - q_1) \ddot{q}_1 + m_2 l^2 \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \quad (6.79)$$

$$= (m_1 + m_2) l^2 \ddot{q}_2 + m_2 l^2 \cos(q_2 - q_1) \ddot{q}_1 + m_2 l^2 \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_1^2 \quad (6.80)$$

上記の式を行列表記することで，一般化運動方程式を得る。

$$\tau_w = \begin{bmatrix} J_{m1} & 0 \\ 0 & J_{m2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) l^2 & m_2 l^2 \cos(q_2 - q_1) \\ m_2 l^2 \cos(q_2 - q_1) & (m_1 + m_2) l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_2 l^2 \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_2^2 \\ m_2 l^2 \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_1^2 \end{bmatrix} \quad (6.81)$$

$$= J_m(q) \ddot{q} + H(q) \dot{q} + C(q) \quad (6.82)$$

$$q \triangleq \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, J_m(q) \triangleq \begin{bmatrix} J_{m1} + (m_1 + m_2) l^2 & 0 \\ 0 & J_{m2} + (m_1 + m_2) l^2 \end{bmatrix} \quad (6.83)$$

$$H(q) \triangleq \begin{bmatrix} 0 & m_2 l^2 \cos(q_2 - q_1) \\ m_2 l^2 \cos(q_2 - q_1) & 0 \end{bmatrix}, C(q) \triangleq \begin{bmatrix} -m_2 l^2 \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_2^2 \\ m_2 l^2 \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_1^2 \end{bmatrix}, \quad (6.84)$$

ここで， $J_m$  は慣性行列， $H$  は干渉行列， $C$  はコリオリ力行列を表す。慣性制御を実現するためには，干渉力やコリオリ力は除去する必要がある外乱と見なされる。設計の際には，慣性行列  $J_m$  を外乱オブザーバの公称モデル  $J_{mn}$  として使用する。干渉力やコリオリ力は外乱オブザーバの外乱抑圧効果によってある程度なら打ち消すことができるが，抑圧が困難であれば別途で補償器を設計する必要がある。この系において関節空間加速度制御を実現するための制御系は図 6.8 のようになる。

# Chapter 7

## システム同定

システムの制御において重要なのは、対象の特性を確認し、適切な制御系を設計することである。例えば、良好な追従特性を得るためにはシステムの挙動を理解して制御系を設計する必要がある。また、外乱を抑圧するためには内部モデル原理に従う必要があるが、外乱を観測する技術がなければ制御器は設計できない。このように、精度の高い制御性能を実現するためには、システムを忠実に表すモデルが不可欠になっている。一方で、高精度なモデルを表現するためには多くの処理が必要となるため、情報資源を消費してしまう可能性もある。実際には制御に使用する帯域が制御系の構成によって決定されるため、モデル作成において厳密にモデル化しなければならない帯域と精度が求められない帯域に分離され、モデル実現における情報資源を削減できる。残念ながら、モデルは全体を俯瞰して作成する必要があるため総合的な良し悪しが経験則に頼る部分が大きい。制御理論が理解できていてもシステムを記述することができなければ制御系を構成することができず、制御器の導入を阻害する一要因であると考えられる。ここでは経験を交えながらシステム同定の方法を説明する。

### 7.1 モデル化

制御においてモデルといえは、対象とするシステムのふるまいを数式を用いて表現したものである。モデル化において最も重要なことは、記述する対象の本質を見抜くことである。そのためにはモデルを使用する目的を明確にし、その目的を実現するために最も重要となるシステムの特徴を抽出する必要がある。全ての系には少なからず非線形性が存在するが、余程の精密性が要求されるアプリケーションでなければ非線形性を考慮する必要はない。したがって、線形性を示すふるまいのみを数式モデルに落とし込めばよい。同様に、全ての物体は共振周波数を持つが、共振周波数が制御帯域より十分に高い場合には共振を励起することではなく、振動抑制に注力する必要はない。よって、システムを剛体系として取り扱えばよい。モデル化は上記のように経験則から理解できるものもあれば、システムの複雑性ゆえに数学的アプローチによりモデルを得たい場合もある。様々なモデル化手法が存在するが、ここでは代表的な3つのモデル化手法を紹介する。

#### ホワイトボックスモデリング

このモデル化手法は運動方程式や回路方程式、電磁界方程式やエネルギー保存則のような第一原理に基づく手法である。そのため、第一原理モデリングや物理モデリングとも呼ばれる。システムの構造を熟知していれば非常に強力な手法である。複雑な機械においてはモデルの次数が高くなることが知られているが、これをいかにして低次元化するかはモデル化を行う技術者の力量に依存する。また、実機における調整は実際に実験を行わなければならないため、汎用性に欠ける部分もある。

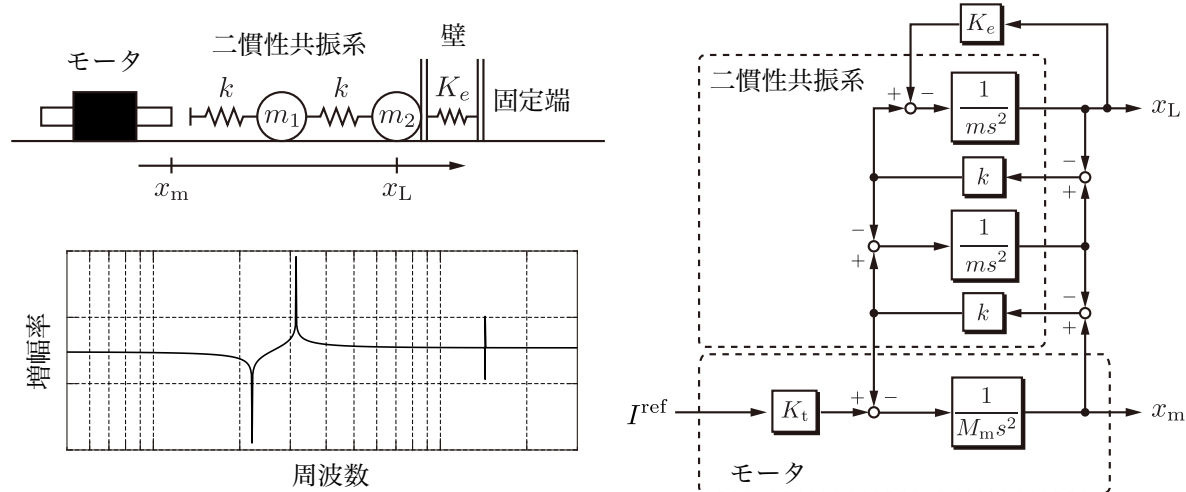


Figure 7.1. 二慣性共振形の押し込み動作

次の手法を説明する前に、低次元化の例を二慣性共振系の押し込み動作を用いて説明する。対象とするシステムおよびホワイトボックスモデリングによって得られたブロック線図を図 7.1 に示す。押し込み動作であるため、モータの位置に応じて環境から反力が生じる。上記のモデルにおいて、モータ位置と環境反力の関係は次のように記述される。

$$F_{\text{env}} = \frac{ms^2(ms^2 + k + K_e) + (ms^2 + K_e)k}{(ms^2 + k)(ms^2 + k + K_e) + (ms^2 + K_e)k} kx_m. \quad (7.1)$$

ここで、壁が十分に硬い場合、次のように近似をすることができる。

$$F_{\text{env}} \approx \frac{ms^2 + k}{ms^2 + 2k} kx_m \quad (7.2)$$

さらに、慣性の影響を受けない低い帯域では、次の近似が成立する。

$$F_{\text{env}} \approx \frac{1}{2} kx_m \quad (7.3)$$

これは、剛性  $k$  の要素が直列に接続された場合のふるまいに等しい。作成したモデルの周波数特性を確認することでも、近似の妥当性を判断することができる。図 7.1 に示すゲイン特性はモータ位置から環境反力の伝達特性を表したものであるが、二つのピークを確認することができる。一次共振は環境の特性に起因するもので、二次共振は壁に起因するものである。前述の通り、壁が十分に硬い場合には二次共振が非常に高い帯域に存在しており、制御帯域によっては無視することができる。

### ブラックボックスモデリング

実験データに基づくモデル化手法であり、データベースモデリングと呼ばれる。対象をブラックボックスとみなすことからこの名前と呼ばれるが、システム同定といえばこれを指すことが多い。実験機のふるまいから大まかな数学モデルを立て、実出力とモデル出力が最小となるようにモデルパラメータを算出する。大量に計測されるデータの中から重要な情報を抽出することは発見科学の領域にあり、こちらのモデル化も技術者の経験とモデル化対象の知識に大きく依存する。



### グレーボックスモデリング

ホワイトボックスモデリングとブラックボックスモデリングの中間に位置するモデル化手法であり、両方の利点を取り入れているといえる。対象の大まかな構造は理解できており、ある程度のふるまいが予測できる場合などに用いられる。このモデル化手法は実験環境や技術者の経験に依存する部分が大きいため一般理論は存在しないが、私がグレーボックスモデリングを用いて多慣性共振系に対してモデルを作成する場合の手順を以下に示す。まず、多慣性共振形という事前情報があるので、周波数応答において複数のゲインピークが存在すると予想する。続いて、周波数応答試験により共振周波数を確認し、制御帯域を考慮して何慣性系のモデルを作成するかを決定する。最も簡単な方法はステップ信号を指令値として入力するステップ試験である。ステップ信号への追従応答はシステムの最大周波数を含んでおり、ステップ試験において確認される共振は制御帯域内において現れる共振とほぼ同義であるといえる。最後に、作成したモデルの周波数応答と実測した周波数応答が等しくなるようにパラメータのフィッティングを行う。これを制御帯域内で周波数応答の誤差がなくなるまで繰り返すが、この際には最急降下法などの反復プログラムを用いるとよい。

## 7.2 入力信号の選定

システムの特性を取得するためには、システムのふるまいを十分に励起する必要がある。したがって、入力信号の選定は非常に重要である。加えて、システムによって着目する事柄が異なるため、それに見合った信号を入力する必要がある。ここでは入力信号とその特性について述べる。

### 7.2.1 ステップ信号

理想的なステップ信号は全ての周波数特性を持つ。単位ステップ信号  $u(t)$  をラプラス変換した結果およびそのゲインと位相は以下ようになる。

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s} = \frac{1}{j\omega} := U(s) \quad (7.4)$$

$$|U(s)| = \frac{1}{\omega}, \quad \angle U(s) = -\frac{\pi}{2} \quad (7.5)$$

ゲイン特性を確認すると、ステップ関数は周波数が高くなるにつれて振幅成分が小さくなる関数であることわかる。実際に、ステップ信号の立ち上がりエッジ部分は高周波成分によって形成されている。この信号をシステムに入力した場合にはシステムの遅れ特性によって高周波成分を十分に励起することは困難であるため、低域の周波数成分を確認することができる。特に、直流成分の確認ができる点がステップ信号の強みである。対象とするシステムの伝達関数を  $G(s)$  と表すと、ステップ応答  $y$  およびそのゲインと位相は次のように表される。

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (7.6)$$

$$|Y(s)| = |G(s)||U(s)| \quad (7.7)$$

$$\angle Y(s) = \angle G(s) + \angle U(s) \quad (7.8)$$

したがって、システムの特性  $G(s)$  を以下のように取得することができる。

$$|G(s)| = |Y(s)|/|U(s)| = \omega|Y(s)| \quad (7.9)$$

$$\angle G(s) = \angle Y(s) - \angle U(s) = \angle Y(s) + \frac{\pi}{2} \quad (7.10)$$

上記の式を用いたシステムの特性導出は信号の種類に依存せずに成立する。そのため、ステップ試験を行う際にはステップ信号の特徴を十分に理解することが重要である。

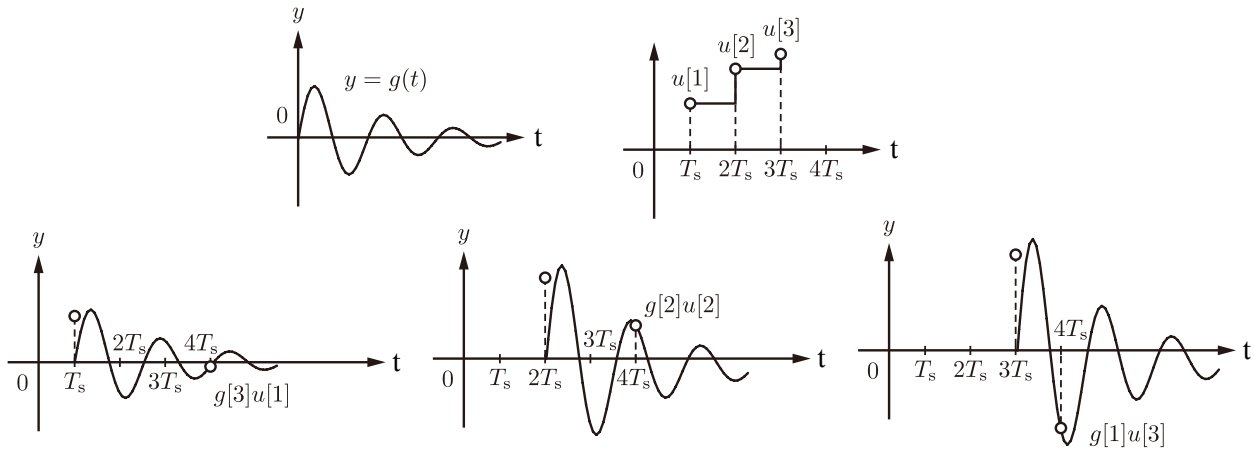


Figure 7.2. インパルス応答による出力応答の表現

## 7.2.2 インパルス信号

理想的なインパルス信号は全ての周波数成分を均一に持つ。単位インパルス信号  $\delta(t)$  をラプラス変換した結果およびそのゲインと位相は以下ようになる。

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad (7.11)$$

$$|U(s)| = 1, \angle U(s) = 0 \quad (7.12)$$

したがって、インパルス応答  $y$  およびシステムの特性  $G(s)$  を以下のように取得することができる。

$$Y(s) = G(s) \quad (7.13)$$

$$|G(s)| = |Y(s)| \quad (7.14)$$

$$\angle G(s) = \angle Y(s) \quad (7.15)$$

このように、理想的なインパルス試験では容易にシステムの特性を得ることができる。しかしながら、現実問題として理想的なインパルス入力を行うことはできないため、インパルス応答試験は簡易的な特性解析にのみ用いられる。ハンマリング試験はインパルス入力試験の一種である。

ここで、インパルス入力試験の興味深い特徴について説明する。システムに単位インパルス入力  $\delta(t)$  を入力した際の応答を  $g(t)$  とする。このとき、任意の入力信号  $u(t)$  をシステムに入力した際のシステムの出力応答  $y$  は以下のように表される。

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad (7.16)$$

このように、出力応答は畳み込み積分の形式で表される。これを図 7.2 を用いて解説する。連続する入力はインパルス信号の集合と捉えることができる。したがって、出力もインパルス応答の和である捉えることができる。図から確認できるように、時刻  $t_d$  における出力波形は、 $t_{in} \in [0, t_d]$  に入力されたインパルス信号の応答が  $t_d - t_{in}$  秒間の自由応答を経た信号の総和である。上記の畳み込み積分を変数変換によって以下のように表現すると容易に理解できる。

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad (7.17)$$

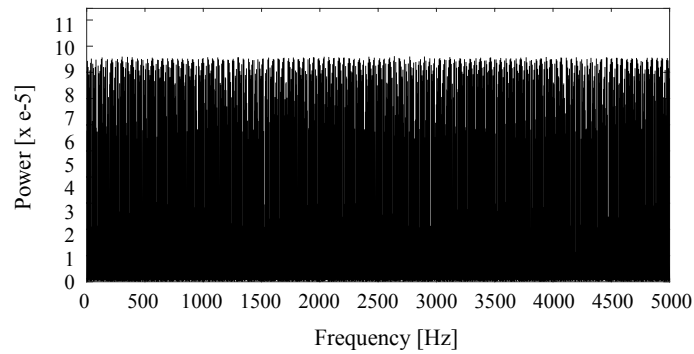


Figure 7.3. ガロア体上の 18 次原始多項式を用いて生成した M 系列の周波数成分

### 7.2.3 M 系列信号

全ての周波数帯においてシステムを励起するためには広く周波数成分を持つ入力が必要であることがわかった。インパルス信号は理想的には全周波数帯域において均一の成分を持つが、実現性に問題があった。同様の性質を持つ信号として白色雑音が挙げられるが、この信号も再現することが困難である。そこで、白色性を持つ人工的な信号として作られたのが M 系列信号である。M 系列はデータセットの信号を全て流して初めて白色性を持つ信号であり、高周波領域ではアパーチャ効果の影響を受けるなど理論的にも白色雑音とは異なる。また、データセットを周期とする周期信号であり、自己相関を持つ。しかしながら、適切に使用することで着目する周波数領域において白色性を実現する信号となっている。この信号は擬似的に白色性信号を模したものであり、擬似白色雑音と呼ばれる。

M 系列はガロア体における線形漸化式が生成する数列のうち最長の周期のものである。ガロア体では周期が最大になる生成多項式を原始多項式と呼ぶ。原始多項式  $x^p + x^q + 1$  ( $p > q$ ) を使用することで、周期  $2^p - 1$  の M 系列信号を次のように生成することができる。

$$x_N = x_{n-p} + x_{n-q} \quad (7.18)$$

ただし、ガロア体状の和算は排他的論理和となる。ここで、 $p$  個の変数  $x_1 \sim x_p$  が全て 0 でなければ、M 系列信号が生成される。ガロア体は 0 と 1 のみを扱うことから、ビット演算との相性が良い。したがって、デジタル制御系との相性が非常に良い。FPGA 上に  $p=18$  の原始多項式を用いた M 系列生成回路を作成し、100kHz で出力した波形を周波数解析した結果、図 7.3 のような結果が得られた。この結果から確認できるように、周波数特性はフラットとなる。

M 系列がビット演算と相性が良いことを述べたが、M 系列が 2 進数に関連するふるまいを持つことが確認されている。 $p=3$ ,  $q=1$  の M 系列生成器では以下の信号列が生成される。

$$1001110 \ 1001110 \ 1001110 \ \dots \quad (7.19)$$

開始点はどこでも良いが、可視性を向上するために一周期で区切った。ここで、ビットを一つずつずらして値を読むと、100, 001, 011, 111, 110, 101, 010 が含まれていることがわかる。これは、 $p$  ビット信号の 000 以外のパターンが含まれていることがわかる。これにより、周期が  $2^p - 1$  となっている。

M 系列を使う上で注意すべきことは、信号列を流す速さである。M 系列信号は矩形波信号の集合であるが、M 系列に存在する最長の矩形波の長さがシステムのステップ応答の静定時間より短い場合には、定常特性及び低周波特性を見ることができない。入力の更新時間と M 系列を生成する原始多項式の次数はステップ試験の後に決定することが望ましい。

### 7.3 最小二乗法によるシステム同定

対象が複雑であったり、物理現象の理解が難しい場合にはブラックボックスモデリングを行う。ここでは、以下の外生入力をもつ自己回帰モデル (Auto Regressive eXogenous: ARX) を取り扱う。AR モデルとは、離散時間系において次のような入出力関係を持つシステムである。

$$A(z)y[k] = w[k] \quad (7.20)$$

ここで、 $y$  は出力、 $w$  は白色雑音、 $A$  は出力レグレッサ、 $z$  はシフトオペレータである。レグレッサは日本語で退行という意味を持ち、過去の情報を取り扱うことを示す。出力レグレッサ  $A$  をシフトオペレータ  $z$  を用いて表現すると、以下の結果を得る。

$$A(z) := 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N} = 1 + \sum_{p=1}^N a_p z^{-p} \quad (7.21)$$

$$\therefore y[k] = - \sum_{p=1}^N a_p z^{-p} y + w[k] = -a_1 y[k-1] - a_2 y[k-2] - \cdots - a_N y[k-N] + w[k] \quad (7.22)$$

このように、現在の出力が過去の出力の影響を受けることを自己回帰と呼ぶ。上記の式に入力  $u$  と入力レグレッサ  $B(z)$  を用いて外生入力項を加えることで、ARX モデルとなる。

$$A(z)y[k] = B(z)u[k] + w[k] \quad (7.23)$$

離散系でモデルを作成することには、各サンプルで得られたデータに対してモデルの信憑性を評価できるという利点がある。連続系のモデルは得られた一連のデータに対してフィッティングすることはできるが、サンプルごとに評価を行うことは難しい。離散系と連続系は密接につながっているため、どちらの系でモデルを作成しても得られる結果は同じである。

ARX モデルを用いてシステムを同定する手法について説明する。この問題において同定するのは出力レグレッサ  $A(z)$  および入力レグレッサ  $B(z)$  である。これらを予測誤差の二乗誤差を最小にすることで推定する。ARX モデルの出力は、以下のように記述することができる。

$$y[k] = \theta^T \varphi[k] \quad (7.24)$$

$$\theta = [-a_1 \ -a_2 \ \cdots \ -a_n \ b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_m]^T \quad (7.25)$$

$$\varphi[k] = [y[k-1] \ y[k-2] \ \cdots \ y[k-n] \ u[k-1] \ u[k-2] \ \cdots \ u[k-m]]^T \quad (7.26)$$

ここで、 $\theta$  はパラメータベクトル、 $\varphi$  はレグレッサベクトルと呼ばれる。整数  $n, m$  は出力及び入力の次数を表し、極と零点の個数を表す。連続時間系と離散時間系の極と零点は全単射の関係にあるため、連続時間系で  $n$  次のダイナミクスと  $m$  個の不感点を示すシステムに対しては離散系においても  $n$  個の極と  $m$  個の零点を持つ必要がある。どちらの時間系で設計を行っても同一の対象を扱う場合には同値な表現となる。上記の表現を用いて、時刻  $k$  における推定誤差  $e[k]$  は次のように表現される。

$$e[k] = y[k] - \theta^T \varphi[k] \quad (7.27)$$

これを基に、全時間における推定二乗誤差の総和を最小化するパラメータベクトルを求める。パラメータベクトルを求める問題を次の評価関数  $J_N$  を最小化する問題と見る。

$$J_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y[k] - \theta^T \varphi[k])^2 \quad (7.28)$$

ここで、整数  $N$  はサンプル数を表す。

### 7.3.1 一括最小二乗法

上記の関数は二乗関数であるため、停留点を求めることができれば最小点を見つけることができる。ここで、停留点をとる条件は以下のように表現される。

$$\frac{d}{d\theta} J_N(\theta) = 0 \quad (7.29)$$

上記の問題を解くため、評価関数  $J_N$  を展開し、導関数を導出する。

$$J_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y^2[k] - 2\theta^T \varphi[k] y[k] + \theta^T \varphi[k] \varphi^T[k] \theta) \quad (7.30)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y^2[k] - 2\theta^T \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi[k] y[k] + \frac{1}{N} \theta^T \left( \sum_{k=1}^N \varphi[k] \varphi^T[k] \right) \theta \quad (7.31)$$

$$\frac{d}{d\theta} J_N(\theta) = -\frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \varphi[k] y[k] + \frac{2}{N} \left( \sum_{k=1}^N \varphi[k] \varphi^T[k] \right) \theta \quad (7.32)$$

したがって、パラメータベクトル  $\theta$  の満たすべき条件は次のようになる。

$$\theta = \left( \sum_{k=1}^N \varphi[k] \varphi[k]^T \right)^{-1} \sum_{k=1}^N \varphi[k] y[k] \quad (7.33)$$

これは実験の全てのデータが揃っている場合に行うことができるシステム同定である。

#### パラメトリックモデルの次数

ARX モデルの設定に当たっては、レグレッサベクトルの個数は極と零の数と一致するということを念頭においておかなければならない。次数の低いシステムでは古い情報の価値が小さいため、重みとなるパラメータベクトルが小さくなるという可能性もあるが、実際には極零相殺を起こして入出力応答に現れないようにパラメータベクトルが決定される。また、むやみに次数を上げると観測雑音等の誤った信号に対する表現力を持ってしまい、実際の状況に対応できないといった現象も見受けられる。ただし、次数が少ない場合にはモデルを表現しきれないことも事実である。これに対して一つの解を与えるのが、赤池の情報量規準である。

#### 入力 PE 性

システム同定において入力信号の選定が重要であることを述べたが、最小二乗推定において同定を実現する入力の条件について述べる。パラメータの可同定条件は次の行列が正定であることである。

$$\Phi = \sum_{k=1}^N \varphi[k] \varphi[k]^T \quad (7.34)$$

入力  $u$  が出力  $y$  に依存しない時、上記の行列の正定性は入力  $u$  に強く依存する。この行列は入力の自己相関値からなる  $(n+m) \times (n+m)$  のテプリッツ行列である。入力の自己相関値からなる  $M \times M$  のテプリッツ行列が正定であることは  $M$  次の PE 性があると定義され、可同定条件は  $(n+m)$  次の PE 性を持つことであると定義することができる。単一周波数の正弦波入力は 2 次の PE 性を持つことが知られており、 $p$  個の異なる周波数の正弦波を入力とした場合には  $2p$  次の PE 性を持つ。一般に、入力生成多項式の虚軸上の極の個数が PE 性の次数と一致することが知られている。

### ARX モデルの状態空間表現

システム同定によって得られた解を制御系設計に導入するためには、幾つかの方法が存在する。一つは離散時間系の極と零点を連続時間系の極と零点に写像し、連続時間系の入出力伝達関数を導出して設計に導入する方法である。もう一つは離散時間系の設計にそのまま導入するものである。この場合には、状態空間表現で記述される一般化問題に落とし込めばよい。入力次数が  $m$ 、出力次数が  $n$  の ARX モデルの状態空間表現は次のようになる。

$$\mathbf{x}[k] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k-1] + \mathbf{B}u[k-1] + \mathbf{D}w[k] \quad (7.35)$$

$$y[k] = \mathbf{C}\mathbf{x}[k] \quad (7.36)$$

$$\mathbf{x}[k] = \begin{bmatrix} y[k] & y[k-1] & \cdots & y[k-n+1] \end{bmatrix}^T \quad (7.37)$$

$$\mathbf{u}[k] = \begin{bmatrix} u[k] & u[k-1] & \cdots & u[k-m+1] \end{bmatrix}^T \quad (7.38)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & \cdots & b_m \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (7.39)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (7.40)$$

この表現では状態量に時系列を含むが、入出力関係が ARX モデルと等しいため、同値なシステムである。上記は可制御正準系の形式を取るため、容易に制御器を設計することができる。

### ARX モデルを用いた定常値の推定

定常値を求めるためには、システムに重畳するノイズの影響を除去することが重要である。システムのノイズにはシステム自体に作用するプロセスノイズとセンサに乘る観測ノイズが存在する。どちらも測定結果を乱す原因ではあるが、観測ノイズは白色性を持つことが多く、定常値推定には影響を及ぼさない。しかしながら、プロセスノイズは状態量に作用するため、真値自体の測定を不可能にする。そのため、プロセスノイズを除去した推定が必要となる。ここでは、プロセスノイズの生成過程が次の自己回帰過程によって記述可能である場合を考える。

$$w[k] = A_v^{-1}v[k] \quad (7.41)$$

ここで、 $v$  は白色雑音であり、 $w$  は整形された有色雑音であるとする。また、システムの遷移過程が次のような自己回帰過程によって記述可能であるとする。

$$x[k+1] = A_s^{-1}Bu[k] + A_s^{-1}w[k] = A_s^{-1}Bu[k] + A_s^{-1}A_v^{-1}v[k] \quad (7.42)$$

ここで、出力レグレッサ  $A_s$  および入力レグレッサ  $B$  を同定することで、 $A_v$  を同定可能である。

$$A_s x[k+1] - Bu[k] = A_v^{-1}v[k] \quad (7.43)$$

これによりプロセスノイズの影響  $A_s^{-1}A_v^{-1}$  を求めることができる。予測結果を観測結果から引くことで真値の推定が可能になる。また、定常値においてはレグレッサベクトルの値が一定値となる ( ${}^v y[k-n] = y_c, {}^v u[k-n] = u_c$ ) ことを利用して、出力レグレッサ  $A_s$  および入力レグレッサ  $B$  から定常値の推定を行うことも可能である。ただし、逐次最小二乗法を用いたオンライン同定を使用する必要がある。

$$y_c = \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_m}{1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n} u_c \quad (7.44)$$

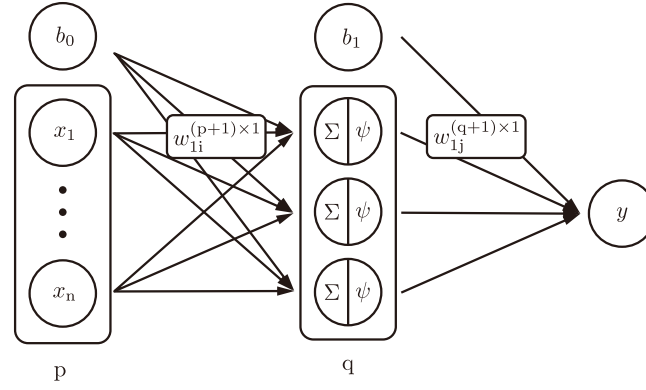


Figure 7.4. ニューラルネットワーク

## 7.4 ニューラルネットワークを用いた予測 (推論)

前述の ARX モデルでは一次導関数から停留点を求める方法で最小二乗推定を実現した。この解析解を用いた手法は単純なため非常に強力な手法であるが、線形モデルのみを表現可能である点、ARX に当てはまらないモデルの推定は困難であるという問題点が挙げられる。これに対し、ニューラルネットワークは線形・非線形を問わず、任意のモデルに対して推定誤差の二乗和を最小にするパラメータベクトルの数値解を与える。数値解であるため厳密に停留点を探索することは困難であるが、出力される結果は十分に高い精度を示し、モデルに依存しない柔軟性は非常に魅力的である。

### 7.4.1 ニューラルネットワークの構成

ニューラルネットワークは図 7.4 のようなネットワークを構成する。このネットワークは  $p$  個の入力  $x$ 、 $q$  個の中間層  $m$ 、1 個の出力  $y$  を持つパーセプトロンである。入力層と中間層に存在する変数  $b$  はバイアス項と呼ばれる。一見複雑に思えるが、構成要素は丸で表されるノードと線で表される重みだけである。ニューラルネットワークの非常に興味深いところは、単純な構成を組み合わせるだけで複雑な現象を記述できることである。ノードの役割は前段の入力に重みが掛かったものの総和を取り、ニューロンを発火させるかさせないかを判断することである。このニューロンの発火を定義する関数が  $\psi$  である。発火関数  $\psi$  の候補としては符号関数  $\text{sgn}(\cdot)$  が理想的であるが、可微分でないために使用が避けられる。後述するが、可微分性はニューラルネットワークが最小二乗法を行う際に重要な条件である。したがって、発火関数  $\psi$  としてシグモイド関数  $\sigma(\cdot)$  やハイバボリックタンジェント関数  $\tanh(\cdot)$  が用いられる。また、線形活性 (符号関数付き線形和) を表すためにランプ関数  $\text{ReLU}(\text{sgn}(\cdot))$  が用いられることもある。ただし、これに関しても後述するが、ニューラルネットワークの表現性の高さは非線形発火関数によって得られる。中間層では非線形発火関数を用いるのが一般的である。

それでは、ニューラルネットワークのふるまいを説明する。a 層から b 層への重みを  ${}^{ab}w$ 、a 層 i 番目のノードから b 層 j 番目のノードへの重みを  ${}^{ab}w_{ij}$ 、中間層 i 番目のノードへの入力を  $m_i^{\text{in}}$ 、出力を  $m_i^{\text{out}}$  とする。この時、中間層への入力以下のように記述される。

$$\begin{bmatrix} m_1^{\text{in}} \\ m_2^{\text{in}} \\ \vdots \\ m_q^{\text{in}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{12}w_{01} & {}^{12}w_{11} & {}^{12}w_{21} & \cdots & {}^{12}w_{p1} \\ {}^{12}w_{02} & {}^{12}w_{12} & {}^{12}w_{22} & \cdots & {}^{12}w_{p2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^{12}w_{0q} & {}^{12}w_{1q} & {}^{12}w_{2q} & \cdots & {}^{12}w_{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{12}w_{01}b_0 + \sum_{k=1}^p {}^{12}w_{k1}x_k \\ {}^{12}w_{02}b_0 + \sum_{k=1}^p {}^{12}w_{k2}x_k \\ \vdots \\ {}^{12}w_{0q}b_0 + \sum_{k=1}^p {}^{12}w_{kq}x_k \end{bmatrix} \quad (7.45)$$

中間層の出力は，中間層への入力を活性化関数に通すことで得られる。

$$\begin{bmatrix} m_1^{\text{out}} \\ m_2^{\text{out}} \\ \vdots \\ m_q^{\text{out}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi \left( {}^{12}w_{01}b_0 + \sum_{k=1}^p {}^{12}w_{k1}x_k \right) \\ \psi \left( {}^{12}w_{02}b_0 + \sum_{k=1}^p {}^{12}w_{k2}x_k \right) \\ \vdots \\ \psi \left( {}^{12}w_{0q}b_0 + \sum_{k=1}^p {}^{12}w_{kq}x_k \right) \end{bmatrix} \quad (7.46)$$

今回は出力層の活性化関数として線形関数を用いている。したがって，このネットワークの出力は中間層の出力の総和となり，以下のように表される。

$$y = {}^{23}w_{0q}b_1 + \sum_{k=1}^q {}^{23}w_{k1}m_k^{\text{out}} \quad (7.47)$$

このネットワークにおいて，設計パラメータは重み  $w$  となる。重み  $w$  は入力の係数となっていることから，多項式における係数と同じ役割を持つことがわかる。出力された推定結果と観測値を比較し，重みを調整することで最小二乗推定を行うのがニューラルネットワークの仕組みである。

## 7.4.2 重みの更新方法

ニューラルネットワークは最急降下法に基づく最小二乗法的一种である。評価関数の微分値を確認し，評価関数が小さくなる方向に重み  $w$  を変更する。最急降下法では次のように重み  $w$  を更新する。

$$w[k+1] = w[k] - \eta \cdot \text{grad}(J(w[k])) \quad (7.48)$$

$$\therefore {}^{\text{ab}}w_{ij}[k+1] = {}^{\text{ab}}w_{ij}[k] - \eta \frac{\partial J(w[k])}{\partial {}^{\text{ab}}w_{ij}[k]} \quad (7.49)$$

ここで， $J$  は評価関数であり， $\eta$  は学習率と呼ばれる。この式から，偏微分の値が求まれば重みを更新可能であることが確認できた。ニューラルネットワークにおいて全ての層間に存在する重み  $w$  による評価関数  $J$  の偏微分値を求める方法として，逆誤差伝搬法と呼ばれる手法が存在する。

逆誤差伝搬法には，微分の連鎖律を用いる。連鎖律とは，複数の関数が合成された合成関数を微分するとき，その導関数がそれぞれの導関数の積で与えられるという規則である。

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx} \quad (7.50)$$

ニューラルネットワークの順伝搬の計算では，頻繁に関数の合成が行われていた。ニューラルネットワークの動作を纏めると，以下のようになる。

$$y^{\text{out}} = \psi_2 \left( \sum_{j=1}^q \left( {}^{23}w_{j1} \psi_1 \left( \sum_{i=1}^p {}^{12}w_{ij}x_i + {}^{12}w_{0j}b_0 \right) \right) + {}^{23}w_{01}b_1 \right) \quad (7.51)$$

関数を分離して記述することで，以下のような合成関数であることが確認できる。

$$y^{\text{out}} = \psi_2(y^{\text{in}}), \quad y^{\text{in}} = \sum_{j=1}^q \left( {}^{23}w_{j1}m_j^{\text{out}} \right) + {}^{23}w_{01}b_1 \quad (7.52)$$

$$m_j^{\text{out}} = \psi_1(m_j^{\text{in}}), \quad m_j^{\text{in}} = \sum_{i=1}^p {}^{12}w_{ij}x_i + {}^{12}w_{0j}b_0 \quad (7.53)$$



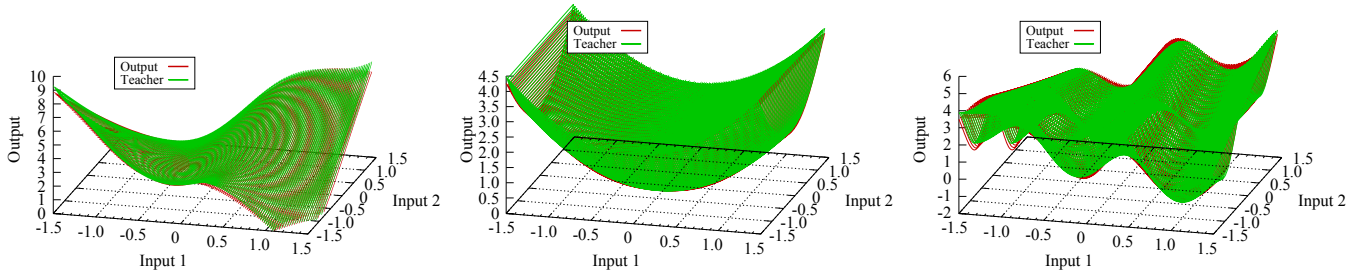


Figure 7.5. ニューラルネットワークによる多変数関数の学習

したがって，出力層から入力層の方向へ順に偏微分値を求める。評価関数  $J$  を次のように設定する。

$$J = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (y[k] - y^{\text{out}}[k])^2 \quad (7.54)$$

ここで， $n$  はデータ数を表す。まず初めに，中間層と出力層の間に存在する重み  $^{23}w$  による評価関数  $J$  の偏微分値を求める。

$$\frac{\partial J}{\partial ^{23}w_{i1}} = \frac{\partial J}{\partial y^{\text{out}}} \frac{\partial y^{\text{out}}}{\partial y^{\text{in}}} \frac{\partial y^{\text{in}}}{\partial ^{23}w_{i1}} = (y^{\text{out}}[k] - y[k])\psi'(y^{\text{in}}[k])m_j^{\text{out}}[k] =: \delta_1[k]m_j^{\text{out}}[k] \quad (7.55)$$

続いて，入力層と中間層の間に存在する重み  $^{12}w$  による評価関数  $J$  の偏微分値を求める。

$$\frac{\partial J}{\partial ^{12}w_{ij}} = \frac{\partial J}{\partial y^{\text{out}}} \frac{\partial y^{\text{out}}}{\partial y^{\text{in}}} \frac{\partial y^{\text{in}}}{\partial m_j^{\text{out}}} \frac{\partial m_j^{\text{out}}}{\partial m_j^{\text{in}}} \frac{\partial m_j^{\text{in}}}{\partial ^{12}w_{ij}} = \delta_1[k]^{23}w_{j1}[k]\psi'_1(m_j^{\text{in}}[k])x_i[k] \quad (7.56)$$

これらの値を用いて重み  $w$  を更新することができる。同様の方法を用いて，多入力多出力系を構成することができる。一連の実験を取得した後，入力層に観測値の時系列，出力層に観測値の未来時系列を設定することで，未来値を予測するネットワークを構築することができる。

### 7.4.3 ニューラルネットワークの表現性

ニューラルネットワークの高い表現性は，空間のフーリエ級数を用いた解析により理論的に裏付けられている。これは，二個のノードを用いることで矩形波を作成できるためである。1入力2出力のパーセプトロンにおいて出力ノードの発火関数にシグモイド関数を選んだ場合，二つのノードから出力されるシグモイド関数の値を差し引けば，擬似的な矩形波を生成できる。

$$m_1^{\text{out}} = \frac{1}{1 + \exp(-w_{11}x_{11} - w_{01}b_0)} \quad (7.57)$$

$$m_2^{\text{out}} = \frac{1}{1 + \exp(-w_{12}x_{12} - w_{02}b_0)} \quad (7.58)$$

上式を見ると，バイアス項によってシグモイド関数の立ち上がり点がずれることがわかる。このずれによって矩形波が生成される。また，この矩形波の振幅は次の出力層の重みによって変化する。このように，ニューラルネットワークのノードは関数の零次近似を行う能力がある。この矩形波の幅が非常に小さくなれば，任意の関数を近似できることになる。したがって，中間ノードの数はニューラルネットワークの表現力と非常に密接に関わっている。図 7.5 に正弦波や余弦波，冪関数やそれらの式を教師信号として学習させた結果を示す。この結果から，ニューラルネットワークは非線形関数であっても表現可能であることが確認できる。