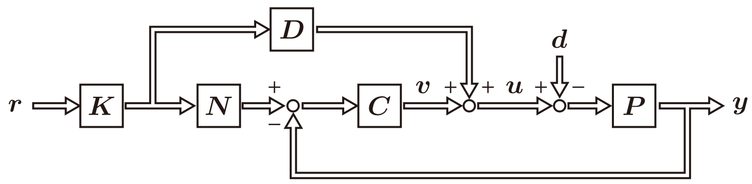

Figure 6.2. 二自由度制御系

6.2 二自由度制御系と外乱オブザーバ

外乱オブザーバの特性を理解するために，二自由度制御系との関係を述べる。二自由度制御系のブロック線図は図6.2のようになる。$\boldsymbol{K}$ はフィードフォワード制御器群をプロパーにする平滑フィルタであり，理想状態において $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{NKr}$ を満たす制御器である。$\boldsymbol{P}$ はプラント，フィードフォワード制御器 $\boldsymbol{D}$ および $\boldsymbol{N}$ はプラントを既約分解表現した際に現れる関数である。

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{D}^{-1} = \tilde{\boldsymbol{D}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{N}} \tag{6.13}$$

$\boldsymbol{C}$ はフィードバック制御器であり，Youla のパラメータ $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Q}$ を用いた一般化安定化補償器の形式を用いて以下のように表す。

$$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{N}})^{-1}(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{D}}) \tag{6.14}$$

ただし，Youla のパラメータ $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Q}$ は以下の Bezout 等式を満たすプロパーな安定多項式とする。

$$\boldsymbol{YD} + \boldsymbol{XN} = \boldsymbol{I} \tag{6.15}$$

また，制御器 $\boldsymbol{C}$ の出力を $\boldsymbol{v}$ とする。ここで，システムへの入力 $\boldsymbol{u}$ は以下のようになる。

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{DKr} + \boldsymbol{v} \tag{6.16}$$

ここで，$\boldsymbol{v}$ は以下の式を満たす。

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{N}})^{-1}(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{D}})(\boldsymbol{NKr} - \boldsymbol{y}) \tag{6.17}$$

$$(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{N}})\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{D}})(\boldsymbol{NKr} - \boldsymbol{y}) \tag{6.18}$$

したがって，次のフィードバック則を見つけることができる。

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{Y}^{-1}(\boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{D}})(\boldsymbol{NKr} - \boldsymbol{y})) \tag{6.19}$$

また，上記の式をさらに分解することで以下の式を得る。

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{Y}^{-1}(\boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{X}(\boldsymbol{NKr} - \boldsymbol{y})) + \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{NKr} - \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{y}) \tag{6.20}$$

ここで，既約分解表現における定義 $\boldsymbol{N}\boldsymbol{D}^{-1} = \tilde{\boldsymbol{D}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{N}}$ を用いて，以下の式を得る。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{Y}^{-1}(\boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{X}(\boldsymbol{NKr} - \boldsymbol{y})) + \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{DKr} - \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{y}) & (6.21)\\ &= \boldsymbol{Y}^{-1}(\boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{DKr}) + \boldsymbol{X}(\boldsymbol{NKr} - \boldsymbol{y})) - \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{y}) & (6.22) \end{aligned}$$

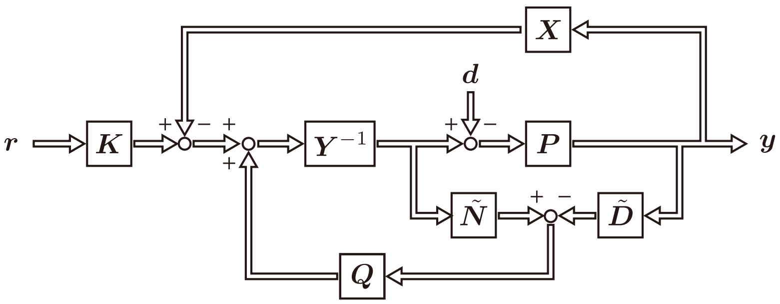

Figure 6.3. 二自由度制御系の等価変換

以上より，制御器 $\boldsymbol{C}$ の出力 $\boldsymbol{v}$ とシステムへの入力 $\boldsymbol{u}$ に関して以下の結果を得る。

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{NKr} - \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{Q}(\tilde{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{y}) \tag{6.23}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{DKr} + \boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{NKr} - \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{Q}(\tilde{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{y}) \tag{6.24}$$

ここで，Youla の安定化補償器に関する条件 $\boldsymbol{YD} + \boldsymbol{XN} = \boldsymbol{I}$ を用いて，以下の式を得る。

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Y}^{-1}(\boldsymbol{YD} + \boldsymbol{XN})\boldsymbol{Kr} - \boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{Xy} + \boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{Q}(\tilde{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{y}) \tag{6.25}$$

$$= \boldsymbol{Y}^{-1}(\boldsymbol{Kr} - \boldsymbol{Xy} + \boldsymbol{Q}(\tilde{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{y})) \tag{6.26}$$

この式より二自由度制御系のブロック線図を書き表すと，図 6.3 のようになる。この制御系はフィードフォワード制御器，フィードバック制御器および外乱オブザーバと似た制御器から構成されることが確認された。フリーパラメータ Q の直後の信号群を $\boldsymbol{\beta}$ とすると，$\boldsymbol{\beta}$ は次のように計算される。

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{Q}(\tilde{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{\beta} - \tilde{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}^{-1}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{d})) = \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{d} \tag{6.27}$$

フリーパラメータ $\boldsymbol{Q}$ の設定によっては外乱オブザーバとなり得ることがわかる。外乱オブザーバの構造では推定外乱をシステムの入力に重畳するため，二自由度制御系において外乱オブザーバを表現するためには，次の式を満たす必要がある。

$$\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{d} \approx \boldsymbol{d} \tag{6.28}$$

上記の式はフリーパラメータの $\boldsymbol{Q}$ が外乱の推定特性を決定することを示している。

二自由度制御系から見た加速度制御系

ここで，外乱オブザーバを用いて加速度制御系を構築することを考える。図 6.3 より，一般的な外乱オブザーバは Youla のパラメータが以下の値を取る二自由度制御系と等価であることがわかる。

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O} \tag{6.29}$$

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{D}^{-1} \tag{6.30}$$

加速度制御系の入出力の次元は双方とも加速度であるため，プラントを構成する既約多項式 $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{D}$ は次数 0 の定数となる。したがって，入力平滑フィルタ $\boldsymbol{K}$ は次の条件を満たせばよい。

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{NKr} = \boldsymbol{r} \tag{6.31}$$

$$\therefore \boldsymbol{K} = \boldsymbol{N}^{-1} \tag{6.32}$$

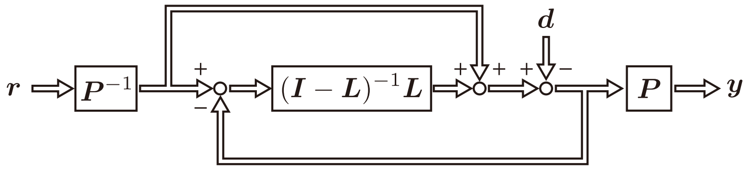

Figure 6.4. 二自由度制御形式の加速度制御

この条件下において，モデル化誤差のない場合の入出力関係は以下のようになることが確認できる。

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} \tag{6.33}$$

また，フリーパラメータ $\boldsymbol{Q}$ は以下のように設定する必要がある。

$$\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{N}} \approx 1 \tag{6.34}$$

そこで，調整ゲインと低域通過フィルタ $\boldsymbol{L}$ によりフリーパラメータ $\boldsymbol{Q}$ を以下のように構成した。

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{L}\tilde{\boldsymbol{N}}^{-1} = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{L}\tilde{\boldsymbol{N}}^{-1} \tag{6.35}$$

以上より，外乱オブザーバを用いた加速度制御系は二自由度制御器において二つの設計パラメータを次のように設定をした場合であることがわかる。

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{N}^{-1} \tag{6.36}$$
$$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{D}^{-1} - \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{N}})^{-1}\boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{D}} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{P}^{-1} \tag{6.37}$$

上記の制御器を用いて制御系を構成すると，図 6.4 に示す等価ブロック線図が導出される。ただし，モデル化誤差は非常に小さいものとする。また，システムの出力 $\boldsymbol{y}$ は次のように表される。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{P}(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{N}\boldsymbol{K}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{K}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{d}) && (6.38)\\
&= \boldsymbol{P}\boldsymbol{C}\boldsymbol{N}\boldsymbol{K}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{K}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{d} && (6.39)\\
&= (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{C})\boldsymbol{r} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{d} && (6.40)\\
\therefore \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{r} - (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{d} && (6.41)\\
&= \boldsymbol{r} - (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{P}^{-1})^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{d} && (6.42)\\
&= \boldsymbol{r} - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{d} && (6.43)\\
&= \boldsymbol{r} - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L})\boldsymbol{d} && (6.44)
\end{aligned}$$

このように，外乱オブザーバを用いた加速度制御系で見慣れた数式が現れる。外乱オブザーバの利点は，追従特性を気にすることなくフリーパラメータ $\boldsymbol{Q}$ を設定することで任意の外乱生成多項式を制御器に加えることができる点である。見方を変えれば外乱生成多項式をフィードバック制御器に持つ制御系であるので，二自由度制御系の枠組みで設計を行った方が高い性能を引き出せる可能性がある。外乱オブザーバに基づく制御構造は物理的に明快であるため直感的な理解がしやすく，単純な構造のため導入が容易な点が優れている。美多らが示したように，H_∞ 制御などの二自由度制御系に対して最適化計算を行うものに対して性能面での優位性は見出しにくい。