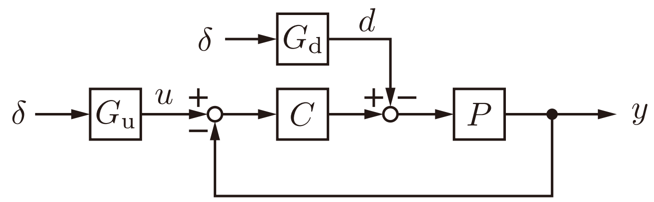

Figure 4.6. 一般化フィードバック制御系

内部モデル原理の証明

外生外乱が以下に表される外乱生成多項式 $G_{\mathrm{d}}(s)$ を通して生成されると仮定する。

$$G_{\mathrm{d}}(s) = \frac{N_{\mathrm{d}}(s)}{D_{\mathrm{d}}(s)} \tag{4.17}$$

図 4.6 に示す制御系について考える。ただし，δ は時間領域におけるインパルス関数であり，$\mathcal{L}[\delta] = 1$ を満たす。この制御系の出力は以下のようになる。

$$y = \frac{PC}{1+PC}u - \frac{PC}{1+PC}G_{\mathrm{d}} \tag{4.18}$$

ここで，制御器 C およびプラント P を分解して表現する。

$$C(s) = \frac{N_{\mathrm{c}}(s)}{D_{\mathrm{c}}(s)},\ \ P(s) = \frac{N_{\mathrm{p}}(s)}{D_{\mathrm{p}}(s)} \tag{4.19}$$

これにより，出力を以下のように表現することができる。

$$y = \frac{N_{\mathrm{c}}N_{\mathrm{p}}}{N_{\mathrm{c}}N_{\mathrm{p}} + D_{\mathrm{c}}D_{\mathrm{p}}}u - \frac{D_{\mathrm{c}}N_{\mathrm{p}}}{N_{\mathrm{c}}N_{\mathrm{p}} + D_{\mathrm{c}}D_{\mathrm{p}}}\frac{N_{\mathrm{d}}}{D_{\mathrm{d}}} \tag{4.20}$$

最終値を確認する際には $s \to 0$ の極限を取る必要があるため，分子多項式の最低次数は分母多項式の最低次数以上にならなければならない。ここで，外乱の係数において分母に s を残さないためには，分子多項式 $D_{\mathrm{c}}N_{\mathrm{p}}$ が分母多項式 D_{d} を相殺する必要がある。設計可能なパラメータは D_{c} であるので，制御器の極が外乱生成多項式の極と等しくなければならないことがわかる。また，入力追従に関しても同様のことが確認できる。入力生成多項式 $G_{\mathrm{u}}(s)$ を以下のように設定する。

$$G_{\mathrm{u}}(s) = \frac{N_u(s)}{D_{\mathrm{u}}(s)} \tag{4.21}$$

外乱の影響を無視した場合，出力偏差は以下の式で表される。

$$e = \frac{1}{1+PC}G_{\mathrm{u}} = \frac{D_{\mathrm{c}}D_{\mathrm{p}}}{N_{\mathrm{c}}N_{\mathrm{p}} + D_{\mathrm{c}}D_{\mathrm{p}}}\frac{N_u}{D_{\mathrm{u}}} \tag{4.22}$$

このように指令値追従においても定常偏差を 0 とするためには制御器の極が入力生成多項式の極と等しくなければならないことがわかる。入力に関しては，プラントの極と入力生成多項式の極が一致することがあり，追加の制御器が不要な場合もある。外乱抑圧に関していえば，内部モデル原理は「外乱生成多項式を制御器が有していれば逆位相の外乱を生成できる」ことを示している。内部モデル原理に基づいて制御器を設計すれば外乱の影響を相殺することができ，ロバストな制御が実現する。