

গাণিতিক অনুসন্ধান

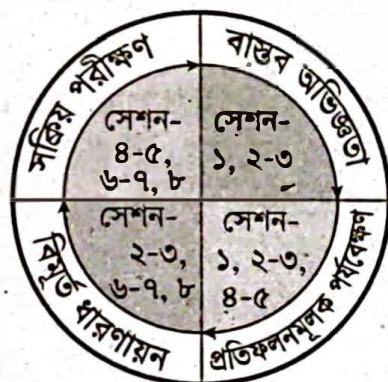
অধ্যায়টি পড়ে
চেটি ▲
পাওয়া যাবে

আগের শ্রেণিগুলোতে তোমরা সংখ্যা ও সংখ্যার বৈশিষ্ট্য নিয়ে নিচয়ই কিছু মজার তথ্য জেনে এসেছ। একের পর এক ধারাবাহিকভাবে আসতে থাকে এমন সংখ্যা যোগাল করেছ কবনো? যেমন: ১, ২, ৩, ইত্যাদি। অথবা টিভিতে কবনো দেখেছ রকেট বা মহাকাশযান উৎক্ষেপণের সময় নিচের দিকে গুণতে থাকে। যেমন: ১০, ৯, ৮, ৭,? ইংরেজিতে একে বলে Count down. আবার ছোটো থেকে বড়ো হয় এমন সংখ্যার ক্রমও আমাদের সামনে আছে। চিন্তা করে দেখো। বইয়ের পৃষ্ঠা একের পর এক উল্টাতে থাকলে পৃষ্ঠা নম্বর বাড়তে থাকে। তাই না? আসলে এ আর কিছুই নয়, বিভিন্ন পূর্ণ সংখ্যা একের পর এক বসলে যা হয় তাই। আমরা একে বলছি ক্রমিক সংখ্যার অনুক্রম। এভাবে বিভিন্ন সমস্যার মধ্যে নিয়ম/সূত্র/প্যাটার্ন খুঁজে বের করার নামই গাণিতিক অনুসন্ধান। এই শিখন অভিজ্ঞতায় আমরা গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়ার বিভিন্ন ধাপ সম্পর্কে জানতে পারবো।



অভিজ্ঞতা চক্রের ধাপ অনুসারে

সেশন বিন্যাস



সেশন বিভাজন

শিক্ষক সহায়িকা অনুসরণে—

সেশন ১	ক্রমিক সংখ্যা নিয়ে যত বেলা
সেশন ২-৩	গাণিতিক অনুসন্ধানের ধাপ
সেশন ৪-৫	দলগত কাজের মাধ্যমে মজার মজার সমস্যা সমাধান
সেশন ৬-৭	বৈশিষ্ট্যের পুনরাবৃত্তি থেকে প্যাটার্ন খুঁজি
সেশন ৮	গাণিতিক অনুসন্ধানে তথ্যের উৎস

/সূত্র: শিক্ষক সহায়িকা, পৃষ্ঠা: ১৫-১১।

এ শিখন অভিজ্ঞতার—

পারদর্শিতার ক্ষেত্র	সংশ্লিষ্ট একক যোগ্যতা	পারদর্শিতার নির্দেশক
গাণিতিক অনুসন্ধান	০৩.০৮.০১ বিভিন্ন গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া এবং প্রাপ্ত বিভিন্ন সমাধানকে একইসঙ্গে ক্রিটিক্যালি ও মুক্ত মন নিয়ে দেখা এবং যৌক্তিকভাবে যাচাই করতে পারা	০৩.০৮.০১.০১ সমস্যা সমাধানের জন্য বিভিন্ন গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া পরিকল্পনা করতে পেরেছে। ০৩.০৮.০১.০২ গাণিতিক অনুসন্ধানে তথ্যের উৎস সঠিকভাবে চিহ্নিত করতে পেরেছে। ০৩.০৮.০১.০৩ গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া এবং প্রাপ্ত বিভিন্ন সমাধানকে ক্রিটিক্যালি ও মুক্তমনে যাচাই করতে পেরেছে।
গাণিতিক সম্পর্ক	০৩.০৮.০৪ সংখ্যা, রাশি ও প্রতীক ব্যবহার করে গাণিতিক সম্পর্ক প্রকাশ করা ও বাস্তব ও বিমূর্ত ঘটনাবলির প্যাটার্ন উদঘাটনে অগ্রয়ী হওয়া	০৩.০৮.০৪.০৩ বাস্তব সমস্যাকে গাণিতিক সম্পর্কের মাধ্যমে প্রকাশ করতে পেরেছে। ০৩.০৮.০৪.০৪ বাস্তব ঘটনাবলির প্যাটার্ন পর্যবেক্ষণ করে বিমূর্ত রাশিতে প্রকাশ করতে পেরেছে।

/সূত্র: শিক্ষক সহায়িকা, পৃষ্ঠা: ৪, ১৩ ও ১৫; বিভাগিতিক মূল্যায়ন নির্দেশিকা-২০২৪, পৃষ্ঠা: ১৫-১১।

সূচী

■ শিখনকালীন মূল্যায়ন প্রযুক্তি

- পাঠ সহয়ক বিষয়বস্তু
- পাঠ মূল্যায়ন
- শিখনকালীন মূল্যায়ন: পাঠ্যবইয়ের আচিভিটি

- | | | |
|-----------|-----------------------------------|------------|
| পৃষ্ঠা ২ | শিখনকালীন মূল্যায়ন: আরও অনুশীলন | পৃষ্ঠা ৩৪ |
| পৃষ্ঠা ৫ | শিখন অভিজ্ঞতাভিত্তিক মূল্যায়ন ছক | পৃষ্ঠা ৪০ |
| পৃষ্ঠা ১০ | সামাজিক মূল্যায়ন প্রযুক্তি | পৃষ্ঠা ৪৩। |



পাঠ সহায়ক বিষয়বস্তু

এখানে পাঠ্যবই ও বিভিন্ন উৎস থেকে সংগৃহীত শিখন অভিজ্ঞতা সম্পর্কিত প্রাসঙ্গিক জ্ঞান টু-দ্য-পয়েন্ট দেওয়া হয়েছে।

শিক্ষক/অভিভাবকদের জন্য নির্দেশনা



- শিক্ষকবৃন্দ শিক্ষার্থীকে শুরুতেই পাঠ সহায়ক বিষয়বস্তু ভালোভাবে আস্থাপ্ত করতে সহায়তা করুন। প্রয়োজনে খাতায় লিখে অনুশীলন করতে বলুন যেন সে ভুলে না যায়।
- অনুশীলন বইয়ের অ্যাস্টিভিটিগুলো করার সময় যেসব বিষয়বস্তুর ওপর ধারণা দরকার হবে সেগুলোই এখানে দেওয়া হয়েছে। প্রতিটি অ্যাস্টিভিটি সম্পাদনের পূর্বে শিক্ষার্থীকে প্রাসঙ্গিক জ্ঞানের অংশটুকু রিভিশন দিতে বলুন। তাহলে সে সহজেই অ্যাস্টিভিটিগুলো নিজে নিজে বুঝে করতে পারবে এবং তাঁর শিখনযোগ্যতা অর্জিত হবে।

■ গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া (Process of Mathematical Exploration)

গাণিতিক কোনো সমস্যার বৈশিষ্ট্য বিশ্লেষণ এবং এর সমাধান বা প্রশ্নের উত্তর খুঁজে বের করার প্রক্রিয়া হচ্ছে গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া। বিজ্ঞানের অনেক বিষয় আছে যেগুলোর অনুসন্ধান ঘটনার স্থানে, ল্যাবরেটরিতে বা সামাজিক কোনো প্রতিষ্ঠানে গিয়ে করা লাগতে পারে। তবে গণিতের অনুসন্ধান ঘরে বসেই খাতা-কলম আর ক্যালকুলেটর বা কম্পিউটার এর সাহায্যে সম্পাদন করা সম্ভব।

■ ত্রুমিক সংখ্যার গাণিতিক অনুসন্ধান (Mathematical Exploration of Consecutive Numbers)

যে সংখ্যার শ্রেণিতে যেকোনো সংখ্যা ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং প্রতিটি সংখ্যা ও তার পূর্ববর্তী সংখ্যার পার্থক্য ১, তাদেরকে ত্রুমিক সংখ্যা বলে। স্বাভাবিক সংখ্যার সেট { ১, ২, ৩, ৪, ..., } হতে পরপর থাকা দুই বা ততোধিক সংখ্যা নিলে সেগুলো প্রতিক্রিয়ে ত্রুমিক সংখ্যা হবে। যেমন: ৬, ৭, ৮ ও ৯ সংখ্যা চারটি ত্রুমিক সংখ্যা।

৬, ৭, ৮ ও ৯ ত্রুমিক সংখ্যাগুলোর প্রতিটির আগে ‘+’ বা ‘-’ চিহ্ন বসিয়ে বিভিন্ন যোগফল আমরা পেতে পারি। তবে একেত্রে যোগফল প্রতিক্রিয়ে জোড় সংখ্যা পাওয়া যাবে। যোগফলগুলো ধনাত্মক ও ঋণাত্মক উভয়ই পাওয়া সম্ভব। দুই প্রকারে যোগফল আমরা ০ পেতে পারি। যতগুলো যোগফল পাওয়া সম্ভব তার সর্বোচ্চ মান ৩০ এবং সর্বনিম্ন মান - ৩০।

একাধিক ত্রুমিক সংখ্যা নিয়ে এভাবে বিশ্লেষণ করে পাওয়া অন্যতম অনুসন্ধানগুলো নিম্নরূপ:

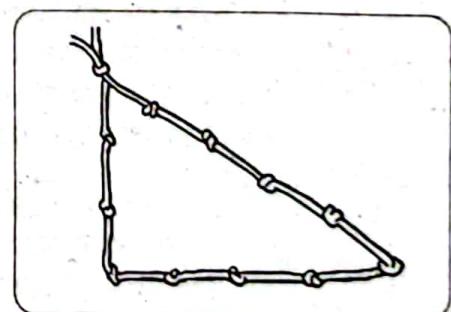
- যেকোনো জোড় সংখ্যক ত্রুমিক সংখ্যার যোগফল সর্বদা জোড় হবে।
- বিজোড় সংখ্যক ত্রুমিক সংখ্যার যোগফল জোড় বা বিজোড় উভয়ই হতে পারে।
- যেকোনো তিনি ত্রুমিক সংখ্যার যোগফল সর্বদা ৩ দ্বারা বিভাজ্য হবে।
- যেকোনো তিনি ত্রুমিক সংখ্যার গুণফল সর্বদা $(1 \times 2 \times 3)$ বা ৬ দ্বারা এবং ৪টি ত্রুমিক সংখ্যার গুণফল $(1 \times 2 \times 3 \times 4)$ বা ২৪ দ্বারা বিভাজ্য হবে।
- n টি সংখ্যা নিয়ে এভাবে '+'-এর মোট 2^n টি ফলাফল পাওয়া যাবে।

■ প্রাচীন মিশরীয় ১৩ গিটের দড়ির পদ্ধতি (Ancient Egyptian Rope of 13 Knots)

প্রাচীন মিশরীয়রা একটি দড়ি ব্যবহার করত যাতে নির্দিষ্ট সমান ব্যবধানে ১৩টি গিট দেওয়া থাকতো। এর দুই প্রান্তের গিট দুটো একসাথে বেঁধে চিত্রের মত করে ত্রিভুজ তৈরি করা হতো। এর ফলে যে ত্রিভুজটি উৎপন্ন হবে তার তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে ৩ একক; ৪ একক এবং ৫ একক হবে।

$$\text{যেহেতু } 3^2 + 4^2 = 3 \times 3 + 4 \times 4 = 9 + 16 = 25 = 5^2;$$

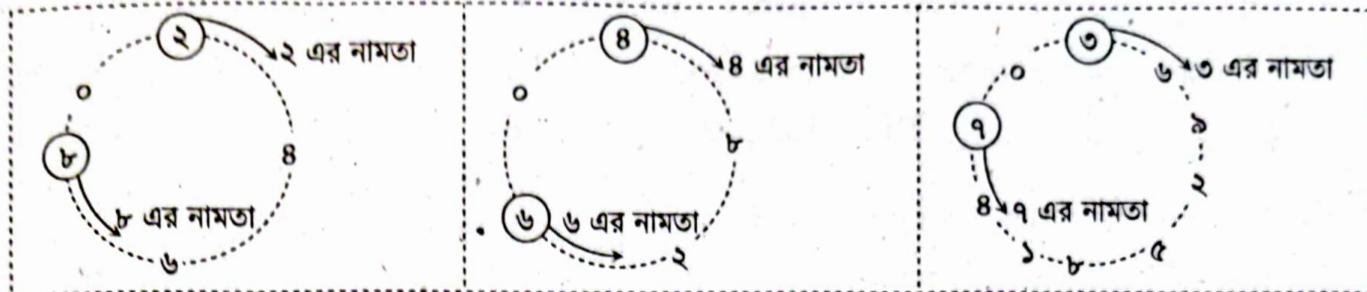
সুতরাং পীথাগোরাসের সূত্রানুযায়ী উৎপন্ন ত্রিভুজটির ৩ একক ও ৪ একক বাহুর মধ্যবর্তী কোণ ১ সমকোণ বা 90° হবে।



■ নামতার গুণফলের একক স্থানীয় অঙ্ক (Digit of Unit Place for Multiplication Table)

নামতার গুণফলগুলোর একক স্থানীয় অঙ্কগুলোর মধ্যে অনেকগুলো প্যাটার্ন (Pattern) পাওয়া যায়। বিশেষ করে যেকোনো একটি সংখ্যার নামতার গুণফলের শেষ ঘরের অর্থাৎ একক স্থানীয় অঙ্কের প্যাটার্ন এবং সংখ্যাটিকে ১০ হতে বিয়োগ করে প্রাপ্ত সংখ্যার নামতার গুণফলের একক স্থানীয় অঙ্কের প্যাটার্ন একই কিন্তু পরম্পর বিপরীতমুখী। যেমন: ১ এর গুণফলের একক স্থানীয় অঙ্কের প্যাটার্ন ১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬, ৭, ৮, ৯, ০। এবার $(10 - 1) = 9$ এর গুণফলের একক স্থানীয় অঙ্কের প্যাটার্ন ঠিক এর বিপরীতক্রমে ৯, ৮, ৭, ৬, ৫, ৪, ৩, ২, ১, ০ হয়।

চিত্রে আরও কিছু সংখ্যার প্যাটার্ন দেখানো হলো:



■ সংখ্যার গুণনীয়ক ও গুণিতক (Divisor and Multiples of Number)

যেকোনো একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার গুণনীয়ক হচ্ছে সেই সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা যে সকল সংখ্যা দ্বারা ঐ সংখ্যাটি নিঃশেষে বিভাজ্য।

উদাহরণস্বরূপ: ১২ সংখ্যাটি ১, ২, ৩, ৪, ৬ ও ১২ সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটি দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য। তাই এই সংখ্যাগুলোই ১২ এর গুণনীয়ক।

আবার, কোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সাথে বিভিন্ন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা গুণ করে করে যত সংখ্যা পাওয়া যায় সেগুলো হচ্ছে ঐ সংখ্যাটির গুণিতক।

উদাহরণস্বরূপ: ১২ সংখ্যাটির সাথে ১, ২, ৩, ৪..... সংখ্যাগুলো গুণ করলে যথাক্রমে ১২, ২৪, ৩৬, ৪৮..... সংখ্যাগুলো পাওয়া যায়। সুতরাং এই সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিই ১২ এর গুণিতক।

■ সমৃদ্ধ সংখ্যা (Abundant Number)

কোনো সংখ্যার সকল গুণনীয়কের মধ্যে ঐ সংখ্যাটি বাদ দিয়ে যতগুলো গুণনীয়ক আছে, সেগুলোর যোগফল যদি মূল সংখ্যাটি হতে বড় হয় তবে মূল সংখ্যাটি একটি সমৃদ্ধ সংখ্যা।

উদাহরণস্বরূপ: ১৫ এর গুণনীয়ক = ১, ৩, ৫, ১৫

এখানে, $1 + 3 + 5 = 9 < 15 \therefore 15$ সমৃদ্ধ সংখ্যা নয়।

কিন্তু, ২০ এর গুণনীয়ক = ১, ২, ৪, ৫, ১০, ২০

এখানে, $1 + 2 + 4 + 5 + 10 = 22 > 20 \therefore 20$ একটি সমৃদ্ধ সংখ্যা।

উদ্দেশ্য যে, যোগফল ঐ সংখ্যাটির সমান হলে ঐ সংখ্যাকে নিখুঁত সংখ্যা (Perfect Number) বলে।

যেমন: ৬ এর গুণনীয়ক = ১, ২, ৩, ৬

এখানে, $1 + 2 + 3 = 6 \therefore 6$ একটি নিখুঁত সংখ্যা।

■ প্যাটার্ন (Pattern)

গণিতে নির্দিষ্ট পদ্ধতায় কোনো কিছু সাজানো, পরিবর্ধিত বা বিন্যস্ত করাকে প্যাটার্ন বলে। এটা হতে পারে যেকোনো গাণিতিক বিষয়, সংখ্যা বা যেকোনো নকশা।

উদাহরণস্বরূপ: ২, ৪, ৬, ৮..... হচ্ছে স্বাভাবিক জোড় সংখ্যার প্যাটার্ন। আবার ২, ৩, ৫, ৭, ১১..... হচ্ছে মৌলিক সংখ্যার প্যাটার্ন।

পাশের নকশাতে প্রতিবারে ক্ষেত্রসংখ্যা বাড়ছে। সুতরাং এটি একটি প্যাটার্ন।

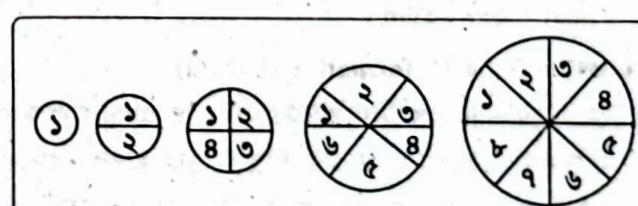
যেকোনো প্যাটার্নের সাধারণ পদ বা বীজগণিতীয় রাশি বা, 'ক' তম পদ = প্যাটার্নটির ১ম পদ + প্যাটার্নটির পাশাপাশি দুইটি

পদের পার্থক্যের প্যাটার্নের ১ম পদ $\times (k - 1)$ + প্রাপ্ত পার্থক্যের প্যাটার্নের পদগুলির পার্থক্যের ১ম পদ $\times \frac{(k - 1)(k - 2)}{2} +$

....

অবশ্যই মনে রাখতে হবে

- স্বাভাবিক ত্রৈমিক সংখ্যার যোগফল = $\frac{(\text{প্রথম সংখ্যা} + \text{শেষ সংখ্যা}) \times \text{পদ সংখ্যা}}{2}$
- 'ক' সংখ্যক ত্রৈমিক স্বাভাবিক বিজোড় সংখ্যার যোগফল = $(k)^2$
- 'ক' সংখ্যক ত্রৈমিক স্বাভাবিক জোড় সংখ্যার যোগফল = $k(k + 1)$



- ‘ক’ সংখ্যক ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি অর্থাৎ, $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$
- ‘ক’ সংখ্যক ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি অর্থাৎ,
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$
- ‘ক’ সংখ্যক একই সংখ্যার সমষ্টি = ঐ সংখ্যা \times ক
- ‘ক’ ক্রমের ম্যাজিক সংখ্যা = $\frac{k(1+k)}{2}$

■ ফিবোনাচি ধারা (Fibonacci Series)

ইতালীয় গণিতবিদ ফিবোনাচি প্রকৃতির বিভিন্ন উপাদানের মধ্যে একটি ব্যতিকৰ্মী ধারা খুঁজে পান। ধারাটি নিম্নরূপ:

০, ১, ১, ২, ৩, ৫, ৮, ১৩, ২১, ৩৮,

এই সংখ্যাগুলোতে একটি প্যাটার্ন রয়েছে। সংখ্যাগুলো ভালোভাবে লক্ষ করলে প্যাটার্নটি খুঁজে পাওয়া যাবে। এটি ০ থেকে শুরু হয় এবং এরপর ১ থেকে শুরু করে প্রতিটি সংখ্যা এর পূর্ববর্তী সংখ্যা দুইটির যোগফলের সমান। যেমন:

২ পাওয়া যায় এর পূর্ববর্তী ২টি সংখ্যা যোগ করে, $(1 + 1) = 2$

৩ পাওয়া যায় এর পূর্ববর্তী ২টি সংখ্যা যোগ করে, $(1 + 2) = 3$

২১ পাওয়া যায় এর পূর্ববর্তী ২টি সংখ্যা যোগ করে, $(8 + 13) = 21$

নিম্নে আরো কয়েকটি ফিবোনাচি সংখ্যা বের করে দেখানো হলো—

$$11\text{তম ফিবোনাচি সংখ্যা} = 38 + 21 = 55$$

$$12\text{তম ফিবোনাচি সংখ্যা} = 55 + 38 = 89$$

$$13\text{তম ফিবোনাচি সংখ্যা} = 89 + 55 = 144$$

$$14\text{তম ফিবোনাচি সংখ্যা} = 144 + 89 = 233$$

$$15\text{তম ফিবোনাচি সংখ্যা} = 233 + 144 = 377$$

$$16\text{তম ফিবোনাচি সংখ্যা} = 377 + 233 = 610$$

$$17\text{তম ফিবোনাচি সংখ্যা} = 610 + 377 = 987$$

■ সূত্র বা ফর্মুলা (Formula)

একজাতীয় বা একই বৈশিষ্ট্যের বা একই ধারার সমস্যা সমাধানের পদ্ধতিকে আমরা সূত্র বা Formula বলি।

যেমন: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ সূত্রটি a ও b এর সকল ধরনের মানের জন্য সত্য। সুতরাং এটি একটি সূত্র বা Formula.

একইভাবে, $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$; $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য \times প্রস্থ; বৃত্তের পরিধি = $2\pi r$ ইত্যাদি।

■ তথ্য ও উপাত্ত (Information & Data)

যেকোনো পরিসংখ্যানিক কাজের প্রথম ও প্রধান পদক্ষেপ হচ্ছে তথ্য সংগ্রহ করা। পরিসংখ্যান হলো সংখ্যাত্মক তথ্য উপস্থাপন, বিশ্লেষণ ও ব্যাখ্যা প্রদানকারী শাস্ত্র। তথ্যই হলো পরিসংখ্যানিক কাজের মূল ভিত্তি। সংগৃহীত তথ্যের গুণগুণের ওপরই নির্ভর করে পরিসংখ্যানিক গবেষণার ফলাফলের যথার্থতা ও নির্ভুলতা।

ল্যাটিন শব্দ Data-এর বাংলা আভিধানিক অর্থ হলো উপাত্ত। কোনো গবেষণা বা অনুসন্ধান হতে প্রাপ্ত ফলাফল বা পর্যবেক্ষণ হচ্ছে ‘উপাত্ত’। প্রাপ্ত উপাত্তকে গবেষণার প্রয়োজন অনুযায়ী প্রক্রিয়াজাত বা বিন্যন্ত করে পাওয়া যায় অর্থপূর্ণ ‘তথ্য’।

যেমন: একটি বিদ্যালয়ের শিক্ষকদের মাসিক গড় বয় অনুসন্ধানের জন্য ঐ বিদ্যালয়ের সকল শিক্ষকদের কাছ থেকে মাসিক ব্যয়ের সাংখ্যিক মান সংগ্রহ করা হলো। মাসিক ব্যয়ের অবিন্যন্ত সাংখ্যিক মান হলো উপাত্ত এবং মাসিক ব্যয়গুলোকে শিক্ষকদের নাম অনুসারে সাজিয়ে পাওয়া যাবে তথ্য।

■ তথ্যের উৎসের প্রকারভেদ (Types of Sources of Information)

সাধারণত মানবীয় উৎস এবং জড় উৎস, এই দুই প্রকারে তথ্যের সকল উৎসকে বিভক্ত করা যায়। যে উৎসের সাথে একজন মানুষ সরাসরি জড়িত সেটা মানবীয় উৎস এবং কোনো পর্যবেক্ষণ হতে তথ্য সংগ্রহ করা হলে তাকে জড় উৎস বলে বিবেচনা করা হয়। এছাড়া অনুসন্ধান বা পর্যবেক্ষণে সরাসরি জড়িত ব্যক্তির কাছ থেকে প্রাপ্ত তথ্য প্রাথমিক উপাত্ত (Primary Data) আর কোনো রেকর্ড বা অন্যকারো কাছ থেকে নেওয়া তথ্যগুলোকে মাধ্যমিক উপাত্ত (Secondary Data) বলা হয়। উল্লেখ্য যে, সবচেয়ে বেশ থাকে প্রাথমিক উপাত্তের নির্ভরযোগ্যতা।



কুইজ

- প্রশ্ন-১. কোন ক্রমিক সংখ্যায় উভয়ই মৌলিক সংখ্যা? উত্তর: ২ ও ৩।
- প্রশ্ন-২. জোড় সংখ্যক ক্রমিক সংখ্যার যোগফল সর্বদা কেমন হবে?
উত্তর: জোড় সংখ্যা।
- প্রশ্ন-৩. কতগুলো জোড় সংখ্যক ক্রমিক সংখ্যার মাঝে '+' ও '-' চিহ্ন বসিয়ে তার বীজগাণিতিক সমষ্টি সর্বদা কেমন হবে?
উত্তর: জোড় সংখ্যা।
- প্রশ্ন-৪. n-সংখ্যক ক্রমিক সংখ্যার মধ্যে মোট কতভাবে '+' ও '-' চিহ্ন বসানো যাবে? উত্তর: 2ⁿ সংখ্যক।
- প্রশ্ন-৫. প্রাচীন মিশরীয় ১৩ গিটের দড়ি দিয়ে তৈরি ত্রিভুজের ৩ একক ও ৪ একক বাহুয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত?
উত্তর: ৯০° বা এক সমকোণ।
- প্রশ্ন-৬. ৩ এর নামতার গুণফলের একক স্থানীয় অঙ্কের প্যাটার্ন বিপরীত ক্রমে কোন সংখ্যার নামতার গুণফলের একক স্থানীয় অঙ্কের প্যাটার্ন নির্দেশ করবে?
উত্তর: ৭ এর নামতা।
- প্রশ্ন-৭. ৫ এর নামতার গুণফলের একক স্থানীয় অঙ্কগুলো কি কি?
উত্তর: ৫ ও ০।
- প্রশ্ন-৮. ১২ এর মোট গুণনীয়ক সংখ্যা কতটি? উত্তর: ৬টি।
- প্রশ্ন-৯. ২৮ এর গুণনীয়কগুলোর মধ্যে ২৮ ব্যতীত বাকি সবগুলো গুণনীয়কে সমষ্টি কত? উত্তর: ২৮।

- প্রশ্ন-১০. ১৮ এর গুণনীয়কগুলো কি কি?

উত্তর: ১, ২, ৩, ৬, ৯, ১৮।

- প্রশ্ন-১১. ১৩ এর গুণিতকগুলো নির্ণয় করো।

উত্তর: ১৩, ২৬, ৩৯, ৫২।

- প্রশ্ন-১২. ১০০ এর বিজোড় গুণনীয়কগুলো কি কি?

উত্তর: ১, ৫, ২৫।

- প্রশ্ন-১৩. ক্ষুদ্রতম নিখুঁত সংখ্যা (Perfect Number) কত? উত্তর: ৬।

- প্রশ্ন-১৪. ক্ষুদ্রতম সমৃদ্ধ সংখ্যা কত? উত্তর: ১২।

- প্রশ্ন-১৫. ১, ৩, ৫, ৭ প্যাটার্নের পরবর্তী পদটি কত?

উত্তর: ৯।

- প্রশ্ন-১৬. ৫, ১২, ১৯, □, ৩৩ প্যাটার্নের শূন্যস্থানের পদটি কত হবে? উত্তর: ২৬।

- প্রশ্ন-১৭. ফিবোনাচি ধারার ১৮ তম পদটি কত? উত্তর: ১৫৯৭।

- প্রশ্ন-১৮. □ □ □ □ □ প্যাটার্নের পরবর্তী নকশাটি কি?

উত্তর:

- প্রশ্ন-১৯. ফিবোনাচি ধারার ১৩তম পদ এবং ১৪তম পদ যোগ করলে কততম পদ পাওয়া যাবে? উত্তর: ১৫তম পদ।

- প্রশ্ন-২০. পরিসংখ্যানে সবচেয়ে নির্ভরযোগ্যতা থাকে কোন ধরনের উপাত্ত? উত্তর: প্রাথমিক উপাত্ত।

পাঠ মূল্যায়ন

এ শিখন অভিজ্ঞতার কার্যক্রমগুলো করার জন্য যে মৌলিক ধারণা দরকার হবে তা তোমরা ইতোমধ্যেই 'পাঠ সহায়ক বিষয়বস্তু' অংশে জেনেছ। সেগুলো কতটা রশ্মি করতে পেরেছ তা এ অংশে দেওয়া প্রশ্ন ও উত্তর অনুশীলনের মধ্য দিয়ে যাচাই করে নাও।



জ্ঞানভিত্তিক প্রশ্ন ও উত্তর

প্রশ্ন ১ মানসভাঙ্গগুলোর উত্তর লিখো:

প্রশ্ন

- গাণিতিক কোনো সমস্যার বৈশিষ্ট্য, সমাধান বা প্রশ্নের খুজে বের করার প্রক্রিয়াকে কী বলা হয়?
- কোনো সংখ্যার ঐ সংখ্যাটি ব্যতীত বাকি গুণনীয়কগুলোর যোগফল ঐ সংখ্যার থেকে বড় হলে তাকে কী বলা হয়?
- ফিবোনাচি অনুক্রমের নবম সংখ্যাটি কত?
- বৈশিষ্ট্যের পুনরাবৃত্তিকে কী বলা হয়?
- একই জাতীয় সমস্যা সমাধানের পদ্ধতিকে আমরা কী বলি?
- তথ্যের উৎস কত প্রকার?
- সক্রিয়ভাবে পর্যবেক্ষণ করে যে উৎস থেকে তথ্য সংগ্রহ করতে হয় ঐ উৎসকে কী বলে?
- সরাসরিভাবে সংগ্রহ করা উপাত্তসমূহকে কী বলা হয়?
- পরোক্ষভাবে নির্ভরযোগ্য উৎস থেকে সংগ্রহ করা উপাত্তসমূহকে কী বলা হয়?
- কোন উপাত্তের নির্ভরযোগ্যতা বেশি?

উত্তর

গাণিতিক অনুসন্ধান

সমৃদ্ধ সংখ্যা

২১

প্যাটার্ন

সূত্র

দুই প্রকার

জড় উৎস

প্রাথমিক উপাত্ত

মাধ্যমিক উপাত্ত

প্রাথমিক উপাত্ত

প্রশ্ন সঠিক উত্তরটি বাছাই করে লিখো:

প্রশ্ন

- গণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়ার ফ্লো-চার্ট অনুসারে পদ্ধতি কাজ না করলে পুনরায় (অনুসন্ধানের প্রশ্ন/ পটভূমি গবেষণা/ অনুমান বা ধারণা নির্মাণ/ অনুমান পরীক্ষণ) ধাপে ফেরত যেতে হয়।
- (৮/ ১০/ ১২/ ১৪) একটি সমৃদ্ধ সংখ্যা।
- ৩, ৫, ৭, ৯, (১১/ ১২/ ১৫/ ১৭), একটি বিজোড় সংখ্যার প্যাটার্ন।
- ফিবোনাচির ত্রুটি অনুসারে ২১ এর পরবর্তী সংখ্যা (২২/ ৩৪/ ৪৪/ ৫২) হবে।
- পুরানো রেকর্ড থেকে উপাত্ত সংগ্রহ করা হলে, সেসকল উপাত্তকে (মানবীয়/ জড়/ প্রাথমিক/ মাধ্যমিক) উপাত্ত বলা হয়।
- সদজাত শিশুদের রোগ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে অভিভাবকের কাছ থেকে তথ্য সংগ্রহ করা হয়। এক্ষেত্রে অভিভাবক (জড়/ প্রাথমিক/ মাধ্যমিক/ অনিভরযোগ্য) উৎস হিসেবে কাজ করে।
- ১, ৮, ১৫, ২২ প্যাটার্নটি (৭ক-৬/ ৩ক+২/ ৪ক-১/ ৫ক+৩) সূত্রটি মেনে চলে।
- একই সংখ্যার ধনাত্মক ও ঋণাত্মক মান পাশাপাশি বসিয়ে প্রাপ্ত প্যাটার্নের যেকোনো জোড় সংখ্যক পদের (যোগফল/ বিয়োগফল/ গুণফল/ ভাগফল) ০ হবে।
- চারটি ত্রুটি পূর্ণ সংখ্যার যোগফল অবশ্যই (৫/ ৮/ ৩/ ২) দ্বারা বিভাজ্য।
- তিনটি ত্রুটি সংখ্যার যোগফল ও গুণফল একই হলে, (১/ ৩/ ৫/ ৮) এদের মধ্যে বৃহত্তম।
- ১, ৩, ৭, ১৩, ২১, ... তালিকার পরবর্তী সংখ্যা (২৯/ ৩১/ ৩৪/ ৩৫)।
- (১ + ক^১ / ১ + ৯৯ক / ক^১ - ১ / ৯৯ক) বীজগাণিতীয় রাশির শততম পদ ১০০০১।
১৩. ১ থেকে (৩৫/ ৩৭/ ৪০/ ৪৫) পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর যোগফল ৮২০।
১৪. প্রথম (৫/ ৬/ ৭/ ৮) টি সমৃদ্ধ সংখ্যার যোগফল ২২২।
১৫. ১১ক+৬ বীজগাণিতিক রাশি সমর্থনকারী সংখ্যার উদাহরণ ১৭, ২৮, ৩৯, (৪০/ ৫০/ ৬০/ ৭০), ৬১, ... ইত্যাদি।

উত্তর

অনুমান পরীক্ষণ

১২

১১

৩৪

মাধ্যমিক

মাধ্যমিক

৭ক-৬

যোগফল

২

৩

৩১

১ + ক^১

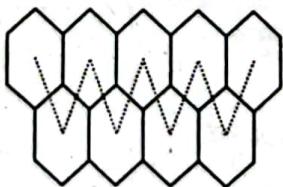
৪০

৮

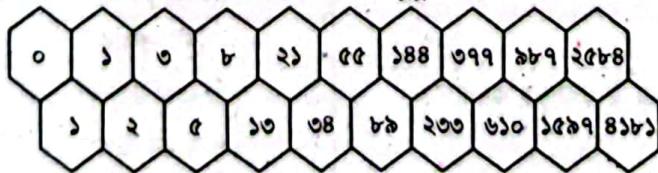
৫০

দক্ষতাভিত্তিক প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন ১: নিচের মতো করে ২০টি সংখ্যা দিয়ে এমনভাবে ঘর তৈরি করে পুরণ করতে হবে যেন কোনাকেনি প্রতি এক জোড়া সংখ্যার যোগফল ঘরগুলোতেই উপস্থিত থাকে। এর সাহায্যে কি কোনো প্যাটার্ন লক্ষ করা যায়? ব্যাখ্যা করো।

**সমাধান:**

প্রথমে একটির পাশে আরেকটি বসিয়ে নিচের মতো ঘর তৈরি করি। এরপর ০ থেকে সংখ্যা বসানো শুরু করি।



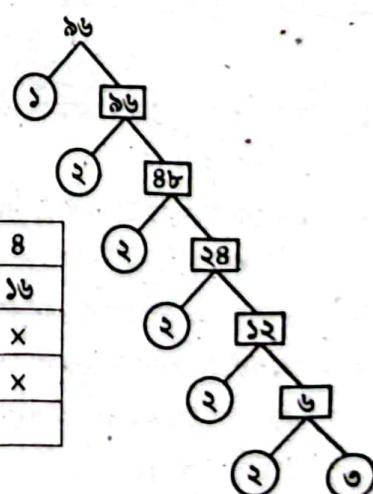
এখানে, সংখ্যাগুলো ০, ১, ১, ২, ৩, ৫, ৮, যা ফিবোনাচি সংখ্যার প্যাটার্নকে নির্দেশ করে। এখানে

কোনাকেনি প্রতি দুইটি সংখ্যার যোগফল এদের পরবর্তী সংখ্যাটির সমান হয়।

প্রশ্ন ২: পাঞ্জল-২:

১	২	৩	৪
৬	৮	১২	১৬
২৪	৩২	৪৮	X
X	X	X	X

১৫৬ > ৯৬



চির থেকে ৯৬ সম্পর্কে তোমার বৌঝিক সিদ্ধান্ত দাও। একই ধারণার আলোকে ১১২ সম্পর্কে তুমি কি সিদ্ধান্ত নিতে পারবে? চিত্রসহ ব্যাখ্যা করো।

সমাধান: চির থেকে পাই, ৯৬ সংখ্যাটির উৎপাদক

$$1, 2, 3, 8, 6, 8, 12, 16, 28, 32, 88 \text{ ও } 96।$$

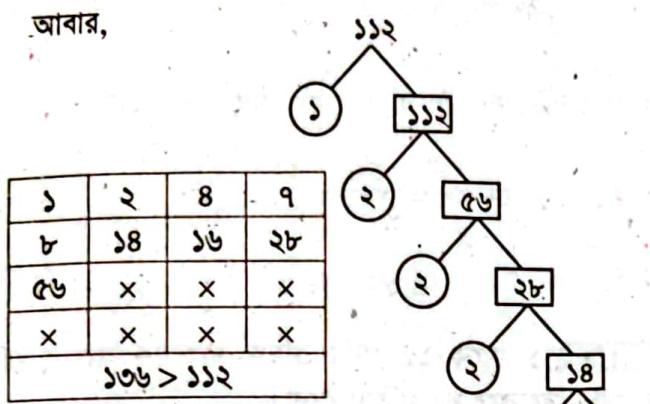
এখানে, ৯৬ ব্যতীত বাকি উৎপাদকসমূহের যোগফল

$$= 1 + 2 + 3 + 8 + 6 + 8 + 12 + 16 + 28 + 32 + 88 = 156$$

এখানে, $156 > 96$; অর্থাৎ ৯৬ ব্যতীত বাকি সবগুলো উৎপাদকসমূহের যোগফল ৯৬ অপেক্ষা বড়।

$\therefore 96$ একটি সমৃদ্ধ সংখ্যা।

আবার,



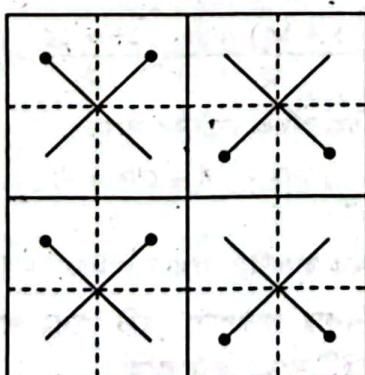
চির থেকে পাই, ১১২ সংখ্যাটির উৎপাদক $1, 2, 8, 7, 8, 14, 16, 28, 56$ ও ১১২। এখানে, ১১২ ব্যতীত বাকি উৎপাদকসমূহের যোগফল

$$= 1 + 2 + 8 + 7 + 8 + 14 + 16 + 28 + 56 = 136$$

এখানে, $136 > 112$; অর্থাৎ ১১২ ব্যতীত বাকি সবগুলো উৎপাদকসমূহের যোগফল ১১২ অপেক্ষা বড়।

$\therefore 112$ একটি সমৃদ্ধ সংখ্যা।

প্রয়োজনীয় ৩: পাজল-৩:



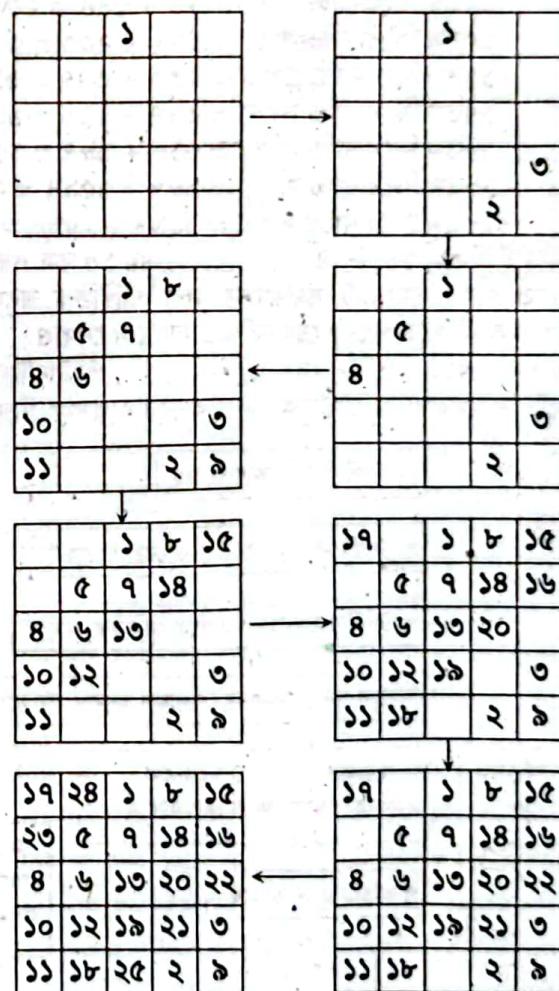
চিরে একটি বর্গকৃতির কাগজকে দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বরাবর চার ভাগে ভাগ করা হয়েছে। এরপর প্রতি ভাগে কোনাকোনি দুইটি কাঠি দিয়ে যুক্ত করা হয়েছে। ১ থেকে ১৬ পর্যন্ত সংখ্যা দিয়ে এমনভাবে প্রতি কাঠির সাথে যুক্ত করতে হবে যেন প্রতি কাঠির সাথে যুক্ত সংখ্যাজোড়ার যোগফল প্রতিক্রিয়ে ১৭ হবে।

সমাধান:

1	8	14	15
13	16	2	3
8	5	11	10
12	9	7	6

প্রয়োজনীয় ৪: পাজল-৪: একটি বর্গক্ষেত্রকে দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বরাবর পাঁচ ভাগে ভাগ করে ২৫টি ছোট বর্গক্ষেত্র তৈরি করো। প্রতিটি ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রে ১ থেকে ২৫ পর্যন্ত ক্রমিক সামাজিক সংখ্যাগুলো এমনভাবে সাজাও যেন পাশাপাশি, উপর-নিচ ও কোনাকোনি যোগ করলে যোগফল ৬৫ হয়।

সমাধান:



সাজানো বর্গক্ষেত্র:

17	24	1	8	15
23	5	9	14	16
8	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

প্রমাণ ৫ ০, ১, ১, ২, ৩, ৫, ৮, ১৩, ২১, ৩৪,..... সংখ্যাগুলোকে ফিবোনাচি সংখ্যা বলা হয়। সংখ্যাগুলোতে কোনো প্যাটার্ন দেখতে পাও কি? পরবর্তী দশটি ফিবোনাচি সংখ্যা বের করো।

সমাধান: এখানে,

- ২ পাওয়া যায় এর পূর্ববর্তী দুইটি সংখ্যা যোগ করে (১+১)
- ৩ পাওয়া যায় এর পূর্ববর্তী দুইটি সংখ্যা যোগ করে (১+২)
- ৫ পাওয়া যায় এর পূর্ববর্তী দুইটি সংখ্যা যোগ করে (২+৩)
- ৮ পাওয়া যায় এর পূর্ববর্তী দুইটি সংখ্যা যোগ করে (৩+৫)
- ১৩ পাওয়া যায় এর পূর্ববর্তী দুইটি সংখ্যা যোগ করে (৫+৮)
- ২১ পাওয়া যায় এর পূর্ববর্তী দুইটি সংখ্যা যোগ করে (৮+১৩)
- ৩৪ পাওয়া যায় এর পূর্ববর্তী দুইটি সংখ্যা যোগ করে (১৩+২১)

সুতরাং প্যাটার্ন এর প্রতিটি পদ এর পূর্ববর্তী দুইটি পদের যোগফলের সমান।

তাহলে, ১১তম ফিবোনাচি সংখ্যা = $21 + 34 = 55$

১২তম ফিবোনাচি সংখ্যা = $34 + 55 = 89$

১৩তম ফিবোনাচি সংখ্যা = $55 + 89 = 144$

১৪তম ফিবোনাচি সংখ্যা = $89 + 144 = 233$

১৫তম ফিবোনাচি সংখ্যা = $144 + 233 = 377$

১৬তম ফিবোনাচি সংখ্যা = $233 + 377 = 610$

১৭তম ফিবোনাচি সংখ্যা = $377 + 610 = 987$

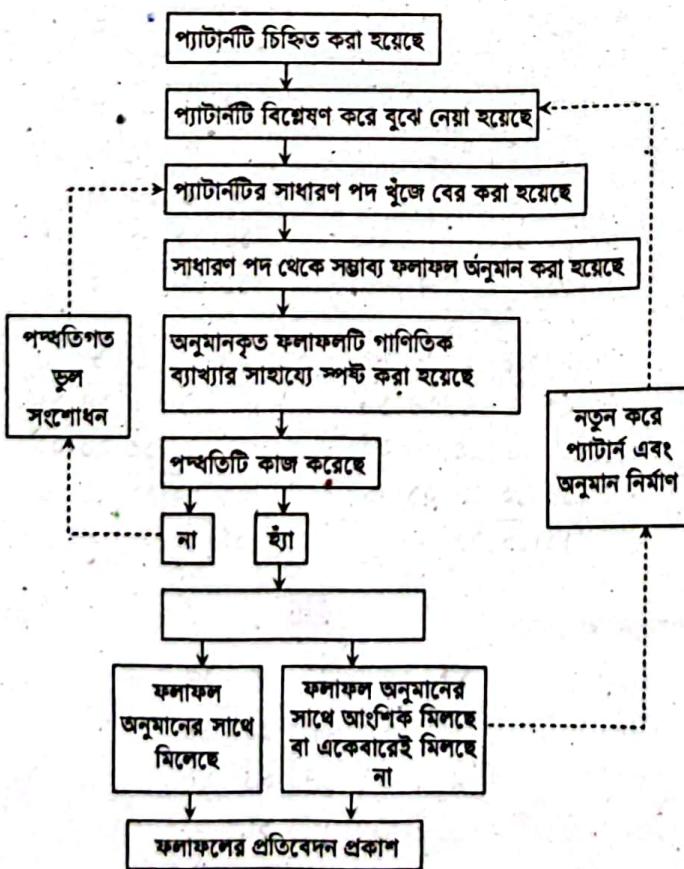
১৮তম ফিবোনাচি সংখ্যা = $610 + 987 = 1597$

১৯তম ফিবোনাচি সংখ্যা = $987 + 1597 = 2584$

২০তম ফিবোনাচি সংখ্যা = $1597 + 2584 = 4181$

প্রমাণ ৬ ৩২, ১৬, ৮, ৪, এর ১৩ তম পদটি নির্ণয় করতে হবে। সমস্যাটি সমাধানের জন্য গাণিতিক অনুসন্ধানের ধাপসমূহ কী হতে পারে? ফ্লোচার্ট এর সাহায্যে দেখাও।

সমাধান: ৩২, ১৬, ৮, ৪, প্যাটার্নটির ১৩তম পদটি নির্ণয়ের জন্য গাণিতিক অনুসন্ধানের ধাপসমূহ নিম্নরূপ:



চিত্র: প্রদত্ত সমস্যাটির গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়ার ফ্লোচার্ট

সমস্যাটির সমাধান:

$$\text{এখানে, } \text{প্যাটার্নটির প্রথম পদ, } 32 = \frac{32}{2^0} = \frac{32}{2^{1-1}}$$

$$\text{দ্বিতীয় পদ, } 16 = \frac{32}{2^1} = \frac{32}{2^{2-1}}$$

$$\text{তৃতীয় পদ, } 8 = \frac{32}{2^2} = \frac{32}{2^{3-1}}$$

$$\text{চতুর্থ পদ, } 4 = \frac{32}{2^3} = \frac{32}{2^{4-1}}$$

\therefore প্যাটার্নটির সাধারণ পদ = $\frac{32}{2^{k-1}}$; যেখানে k পদের ক্রম।

$$\therefore \text{সম্ভাব্য } 13\text{তম পদ} = \frac{32}{2^{12-1}} = \frac{32}{2^{11}} = \frac{32}{2^9}$$

$$= 2^{9-12} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{128}$$

প্রমাণ ৭ ১ থেকে ১৫ পর্যন্ত ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যাগুলোর যোগফল বের করে সূত্র প্রতিষ্ঠা করো।

সমাধান: ধরি, ১ থেকে ১৫ পর্যন্ত ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যাগুলোর যোগফল ক

$$\text{অর্থাৎ, } k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15$$

সংখ্যাগুলো বিপরীতক্রমে লিখলে পাই,

$$k = 15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

প্রদত্ত সংখ্যাগুলোর যোগফলের সাথে বিপরীতক্রমে লেখা

সংখ্যাগুলো যোগ করে পাই,

$$2k = (1+15) + (2+14) + \dots \dots \dots + (14+2) + (15+1)$$

$$\text{বা, } 2k = (1+15) \times 15$$

$$\therefore k = \frac{(1+15) \times 15}{2} = \frac{16 \times 15}{2} = 120$$

\therefore একাধিক ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার

$$\text{যোগফল} = \frac{(\text{প্রথম সংখ্যা} + \text{শেষ সংখ্যা}) \times \text{পদসংখ্যা}}{2}$$

ইহাই ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল নির্ণয়ের সূত্র।

প্রমাণ ৮ তালিকার পাশাপাশি দুইটি পদের পার্থক্য বের কর এবং পরবর্তী দুইটি সংখ্যা নির্ণয় করো।

ক. ৭, ১২, ১৭, ২২, ২৭, ...

খ. ৬, ১৭, ২৮, ৩৯, ৫০, ...

সমাধান:

ক. প্রদত্ত তালিকার সংখ্যাগুলো: ৭, ১২, ১৭, ২২, ২৭, ...



পাশাপাশি দুইটি পদের পার্থক্য: ৫ ৫ ৫ ৫

প্রতিক্ষেত্রেই দেখা যাচ্ছে, তালিকার পাশাপাশি দুইটি পদের পার্থক্য ৫

$$\therefore \text{তালিকার } ৬\text{ষ্ঠ পদ} = ২৭ + ৫ = ৩২$$

$$\text{এবং } ৭\text{ম পদ} = ৩২ + ৫ = ৩৭$$

$$\therefore \text{তালিকার পরবর্তী দুইটি সংখ্যা } ৩২ \text{ ও } ৩৭।$$

৪ প্রদত্ত তালিকার সংখ্যাগুলো: ৬, ১৭, ২৮, ৩৯, ৫০,



পাশাপাশি দুইটি পদের পার্থক্য: ১১ ১১ ১১ ১১

প্রতিক্ষেত্রেই দেখা যাচ্ছে, তালিকার পাশাপাশি দুইটি পদের পার্থক্য ১১

$$\therefore \text{তালিকার } ৬\text{ষ্ঠ পদ} = ৫০ + ১১ = ৬১$$

$$\text{এবং } ৭\text{ম পদ} = ৬১ + ১১ = ৭২$$

$$\therefore \text{তালিকার পরবর্তী দুইটি সংখ্যা } ৬১ \text{ ও } ৭২।$$

প্রমাণ ১৯ নিচের সংখ্যা প্যাটার্নগুলোর মধ্যে কোনো মিল রয়েছে কি? প্রতিটি তালিকার পরবর্তী সংখ্যা নির্ণয় করো।

- ১, ১, ২, ৩, ৫, ৮, ১৩, ...
- ৮, ৪, ৫, ৬, ৮, ১১, ...

সমাধান:

সংখ্যা প্যাটার্নগুলো

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots \dots$$

$$\text{এবং } 8, 4, 5, 6, 8, 11, \dots \dots$$

$$\text{এখানে, } 1\text{ম পদ} = 8 = 1 + 3; 2\text{য পদ} = 8 = 1 + 3;$$

$$3\text{য পদ} = 5 = 2 + 3; 4\text{র্থ পদ} = 6 = 3 + 3;$$

$$5\text{ম পদ} = 8 = 5 + 3; 6\text{ষ্ঠ পদ} = 11 = 8 + 3$$

দেখা যাচ্ছে, দ্বিতীয় সংখ্যা প্যাটার্নটির প্রতিটি পদ, ক্রমানুসারে প্রথম সংখ্যা প্যাটার্নটির প্রতিটি পদ অপেক্ষা ৩ বেশি।

সূতরাং সংখ্যা প্যাটার্নগুলোর মধ্যে মিল বিদ্যমান।

∴ দ্বিতীয় সংখ্যা প্যাটার্নটির পরবর্তী পদ

$$\text{অর্থাৎ } 7\text{ম পদ} = \text{প্রথম সংখ্যা প্যাটার্নটির } 7\text{ম পদ} + 3$$

$$= 13 + 3 = 16$$

আবার, প্রথম সংখ্যা প্যাটার্নটির ৩য় পদ থেকে প্রতিটি পদের মান, তার পূর্ববর্তী দুইটি পদের সমষ্টির সমান।

∴ প্রথম সংখ্যা প্যাটার্নটির পরবর্তী পদ

$$\text{অর্থাৎ } 8\text{ম পদ} = 8 + 13 = 21.$$

প্রমাণ ১০ $(4k + 3)$ ও $(3k + 1)$ দুইটি বীজগাণিতিক রাশি

এবং $10, 17, 28, 31, \dots \dots$ একটি প্যাটার্ন।

ক. দেখাও যে, ২য় বীজগাণিতিক রাশির $1\text{ম } 100$ পদের সমষ্টি, 1ম বীজগাণিতিক রাশির $1\text{ম } 10\text{টি}$ পদের সমষ্টির ৬১ গুণ।

খ. প্যাটার্নটির ৪র্থ পদের জ্যামিতিক প্যাটার্ন আঁক ও অঙ্কনের সহজতা যাচাই কর।

সমাধান:

ক এখানে, ২য় বীজগাণিতিক রাশি $= 3k + 1$

$$\text{রাশিটির } 1\text{ম পদ} = 3 \times 1 + 1 = 8$$

$$\text{এবং } 100 \text{ তম পদ} = 3 \times 100 + 1 = 301$$

$$\therefore 1\text{ম } 100 \text{ পদের সমষ্টি} = \frac{8 + 301}{2} \times 100$$

$$= 305 \times 50$$

$$= 15250$$

আবার, 1ম বীজগাণিতিক রাশি $= 4k + 3$

$$\text{রাশিটির } 1\text{ম পদ} = 4 \times 1 + 3 = 7$$

$$\text{এবং } 10 \text{ তম পদ} = 4 \times 10 + 3 = 43$$

$$\therefore 1\text{ম } 10 \text{ পদের সমষ্টি} = \frac{7 + 43}{2} \times 10$$

$$= 50 \times 5$$

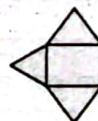
$$= 250$$

$$\text{এখানে, } 15250 = 250 \times 61$$

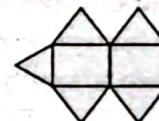
∴ ২য় বীজগাণিতিক রাশির $1\text{ম } 100$ পদের সমষ্টি, 1ম বীজগাণিতিক রাশির $1\text{ম } 10\text{টি}$ পদের সমষ্টির ৬১ গুণ।

(দেখানো হলো)

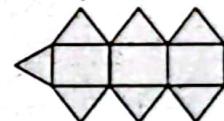
খ প্রদত্ত প্যাটার্ন: $10, 17, 28, 31, \dots \dots$



১ম পদের
জ্যামিতিক চিত্র



২য় পদের জ্যামিতিক চিত্র



৩য় পদের জ্যামিতিক চিত্র



৪র্থ পদের জ্যামিতিক চিত্র

উপরোক্ত চিত্র হতে দৃশ্যমান হয় যে, বীজগাণিতিক রাশির প্রতিটি পদকে রেখার সংখ্যা বিবেচনা করলে $1\text{ম}, 2\text{য}, 3\text{য}$ ও 4র্থ চিত্রে যথাক্রমে $10, 17, 28$ এবং 31 রেখা বিদ্যমান। অতএব, 4র্থ পদের জ্যামিতিক চিত্র প্রদত্ত প্যাটার্নটির চতুর্থ সংখ্যাটি নির্দেশ করে। (যাচাই করা হলো)

নিজে করি

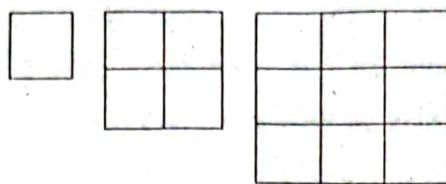
প্রমাণ ১১ প্রথম দশটি সমৃদ্ধ সংখ্যার একটি তালিকা তৈরি করো।

উভয়: $12, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 42, 48, 54$

প্রমাণ ১২ $12, 8, 4, 0, -4 \dots \dots$ প্যাটার্নটির 14 তম পদ নির্ণয় করো।

উভয়: - 80

প্রয়োজনীয়



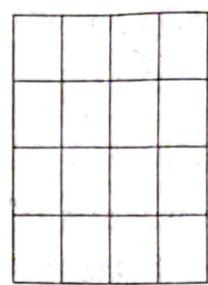
উপরের চিত্রটি হতে এর সম্ভাব্য প্যাটার্নটি নির্ণয় করো। এর আলোকে ৯ম চিত্রে কতগুলো ছোট বর্গ পাওয়া যাবে?

উত্তর: ক^১, ৮১ টি।

প্রয়োজনীয় ফিবোনাচি ক্রমের প্রথম ৮টি সংখ্যার যোগফল কতো? পরবর্তী ৪টি সংখ্যার যোগফল ও প্রথম ৮টি সংখ্যার যোগফলের পার্থক্য নির্ণয় করো।

উত্তর: ৩৩, ১৬৬।

প্রয়োজনীয়



প্রথম ১৬টি ক্রমিক সংখ্যার সাহায্যে ঘরগুলো এমনভাবে পূরণ করো যেন পাশাপাশি, উপর নিচ বা কোনাকোনি যোগ করলে যোগফল একই থাকে।

উত্তর:

১৬	২	৩	১৩
৫	১১	১০	৮
৯	৭	৬	১২
৪	১৪	১৫	১

শিখনকালীন মূল্যায়ন: পাঠ্যবইয়ের অ্যাসিডিটি

এখানে শিখনকালীন মূল্যায়নের জন্য পাঠ্যবইয়ের অ্যাসিডিটিগুলোর সমাধান দেওয়া হয়েছে।



শিক্ষক/অভিভাবকদের জন্য নির্দেশনা



- শিক্ষার্থীদের শিখনযোগ্যতা অর্জন ও মূল্যায়ন হবে অনুীলন বইয়ের অ্যাসিডিটির ওপরে। সঠিকভাবে অ্যাসিডিটিগুলো সম্পাদনের জন্য প্রথমেই প্রতিটি অ্যাসিডিটির শুরুতে Tutor-এ প্রদত্ত নির্দেশনা অনুযায়ী প্রাসঙ্গিক জ্ঞানের বিষয়গুলো শিক্ষার্থী কতটা রপ্ত করেছে তা যাচাই করুন।
- প্রয়োজনে আপনি নিজে বিষয়বস্তুর ওপর স্বচ্ছ ধারণা দিয়ে সহায়তা করুন।
- ব্রতঃস্ফূর্তভাবে ও সতত বজায় রেখে শিক্ষার্থীরা কাজগুলো করেছে কিনা তা খেয়াল রাখুন।
- সেশনে কর্মপত্র থাকলে শিক্ষার্থীদের বুঝিয়ে দিন, যা সে পরবর্তী সেশনে করে নিয়ে আসবে।
- শিখন কার্যক্রমগুলো পর্যবেক্ষণ করে প্রদত্ত ছকে শিক্ষার্থীর পারদর্শিতার তথ্য সংরক্ষণ করুন। তাহলে এ অধ্যায়ের শেষে দেওয়া শিখন অভিজ্ঞতাভিত্তিক মূল্যায়ন ছকে পারদর্শিতার সূচকের (PI) মাত্রা নিরূপণ করা সহজ হবে।

সেশন
১

ক্রমিক সংখ্যা নিয়ে যত খেলা

/সূত্র: শিক্ষক সহায়িকা, পৃষ্ঠা ১৬/



এই সেশনের অ্যাসিডিটিগুলো সম্পর্ক করতে একজন শিক্ষার্থীকে গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া, ক্রমিক সংখ্যার গাণিতিক অনুসন্ধান ও প্যাটার্ন সম্পর্কে জানতে হবে, যা তোমরা ইতোমধ্যেই ‘পাঠ সহায়ক বিষয়বস্তু’ অংশে জেনেছ। এগুলো ভালোভাবে আয়ত্ত না হয়ে থাকলে আরও একবার পৃষ্ঠা ২ ও ৩ থেকে দেখে নাও।



মূল সমস্যা

১ সমস্যাটির শুরু সংখ্যা দিয়ে। যেকোনো চারটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা নাও এবং সংখ্যাগুলোকে ক্রমানুসারে সাজিয়ে পাশাপাশি বসাও এবং তাদের মাঝখানে বেশ খানিকটা ফাঁকা জায়গা রাখো। তুমি যেকোনো চারটি সংখ্যা নিতে পার, বোঝার সুবিধার জন্য আমরা নিচের চারটি সংখ্যা নিলাম।

8 5 6 9

২ এখন তোমার কাজ হলো সংখ্যাগুলোর মধ্যে যোগ (+) অথবা বিয়োগ (-) চিহ্ন বসানো। সংখ্যাগুলোর ক্রম ভঙ্গ না করে। বিভিন্ন রকম ভাবে + অথবা - চিহ্ন বসাও। খানিকটা এমন-

8 + 5 - 6 + 9

8 - 5 + 6 + 9

৩



অনুমান করে বলো দেখি।

- কত ভাবে সংখ্যাগুলোর মধ্যে যোগ অথবা বিয়োগ চিহ্ন বসানো যায়?
- পাশের ফাঁকা ঘরে লিখতে পার।

/পাঠ্যবইয়ের পৃষ্ঠা ৩/

সমাধান: নিম্নে বর্ণিত উপায়ে সংখ্যাগুলোর মধ্যে যোগ (+) অথবা বিয়োগ (-) চিহ্ন বসানো যায়:

উপায়-১: তিনটি যোগ ও একটি বিয়োগ চিহ্ন ব্যবহার করে

8 ভাবে বসানো যায়।

(1) $+ 8 + 5 + 6 - 9$

(2) $+ 8 + 5 - 6 + 9$

(3) $+ 8 - 5 + 6 + 9$

(4) $- 8 + 5 + 6 + 9$

উপায়-২: তিনটি বিয়োগ ও একটি যোগ চিহ্ন ব্যবহার করে ৪ ভাবে বসানো যায়।

- (১) $-8 - 5 - 6 + 7$
- (২) $-8 - 5 + 6 - 7$
- (৩) $-8 + 5 - 6 - 7$
- (৪) $+8 - 5 - 6 - 7$

উপায়-৩: দুইটি যোগ ও দুইটি বিয়োগ চিহ্ন ব্যবহার করে মোট ৬ ভাবে বসানো যায়।

- (১) $+8 + 5 - 6 - 7$
- (২) $+8 - 5 + 6 - 7$
- (৩) $-8 + 5 - 6 + 7$
- (৪) $-8 - 5 + 6 + 7$
- (৫) $-8 + 5 + 6 - 7$
- (৬) $+8 - 5 - 6 + 7$

উপায়-৪: চারটিই যোগ অথবা চারটিই বিয়োগ চিহ্ন ব্যবহার করে মোট দুইভাবে বসানো যায়।

- (১) $+8 + 5 + 6 + 7$
- (২) $-8 - 5 - 6 - 7$

সংখ্যাগুলোর ক্রম ভঙ্গ না করে মোট **১৬** ভাবে সংখ্যাগুলোর মধ্যে যোগ অথবা বিয়োগ চিহ্ন বসানো যায়।

- ৮) এর পরের কাজ হলো সবকটির ফলাফল বের করা। যোগ বিয়োগ করে ঘটপট ফলাফল বের করে নাও। উদাহরণস্বরূপ—
 $8 - 5 + 6 + 7 = 12$

৯) অনুমান করে বলো দেখি



- ফলাফলগুলোর মধ্যে সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন সংখ্যা কী কী হতে পারে?
- ফলাফলগুলোকে ছোটো থেকে বড়ো সাজালে তাদের মধ্যে কি কোনো সম্পর্ক পাওয়া যেতে পারে?

/পাঠ্যবইয়ের পৃষ্ঠা-৪/

Tutor নিচের ছকের পর্যবেক্ষণ অনুযায়ী সমাধান মূল্যায়ন করে নির্দিষ্ট ঘরে টিক (✓) চিহ্ন দিন এবং পৃষ্ঠা ৪০ এর শিখন অভিজ্ঞতাভিত্তিক মূল্যায়ন ছকে পারদর্শিতার সূচকের মাত্রা পূরণ করুন। শিক্ষার্থীকে অনুরূপ আরও অ্যাডিভিটি করানোর জন্য পৃষ্ঠা ৩৪ দেখুন।

শিখন কার্যক্রম মূল্যায়ন ছক-১

পারদর্শিতার সূচক (PI)	পারদর্শিতার সূচকের মাত্রা		
	□	○	△
০৩.০৮.০১.০১ সমস্যা সমাধানের জন্য বিভিন্ন গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া পরিকল্পনা করতে পেরেছে।	১-৫ নং ধাপগুলো সম্পূর্ণ ও উপস্থাপন করার সময় একাধিক উপযুক্ত গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া পরিকল্পনা করেছে।	১-৫ নং ধাপগুলো সম্পূর্ণ ও উপস্থাপন করার সময় একাধিক উপযুক্ত গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া পরিকল্পনা করে যৌক্তিক ব্যাখ্যা প্রদান করেছে।	১-৫ নং ধাপগুলো সম্পূর্ণ ও উপস্থাপন করার সময় বিভিন্ন গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া পরিকল্পনা করে যৌক্তিক ব্যাখ্যা প্রদান করেছে।

৬ ফলাফলগুলোর মধ্যে বিশেষ কোন অনুক্রম দেখতে পাচ্ছ বা কোনো সম্পর্ক খেয়াল করেছ? /পাঠ্যবইয়ের পৃষ্ঠা-৮/

সমাধান: এখানে, ফলাফলগুলো ক্রমানুসারে সাজিয়ে বিশেষ কোনো অনুক্রম বা সম্পর্ক পাওয়া যায় না। তবে ৪ ভাবে যোগ ও বিয়োগ চিহ্ন বিসিয়ে প্রাপ্ত ফলাফলগুলো নিজেদের মাঝে অনুক্রম গঠন করে। যেমন: তিনটি যোগের জন্য অনুক্রম: ৮, ১০, ১২, ১৪

তিনটি বিয়োগের জন্য অনুক্রম: -১৪, -১২; -১০, -৮

দুটি যোগ ও দুটি বিয়োগের জন্য অনুক্রম: - ৪, - ২, ০
এবং ০, ২, ৮

চারটি যোগ অথবা চারটি বিয়োগের জন্য অনুক্রম: - ২২, ২২

৭ পরীক্ষা করে দেখো

/পাঠ্যবইয়ের পৃষ্ঠা-৮/

[তোমার বুদ্ধির ধার বাড়ানোর জন্য চারটি প্রশ্ন দেওয়া হলো।
তোমার মাথায় আরও প্রশ্ন এলে নিচে লিখে রাখতে পারে]

১. ফলাফলগুলোকে ক্রমানুসারে সাজালে তাদের মধ্যে পার্থক্য (difference) কি একই থাকবে?
২. কোনো ফলাফল কি ০(শূন্য) হতে পারে?
৩. কোনো ফলাফলের পুনরাবৃত্তি হতে পারে?
৪. + অথবা - চিহ্নের সংখ্যার উপর কি ফলাফলের ছোটো বা বড়ো হওয়ার সম্ভাবনা নির্ভর করে?
- ৫.
- ৬.

সমাধান:

১ ফলাফলগুলোকে ক্রমানুসারে সাজালে পাই-

৮ ২ ২ ২ ২ ৮ ২ ২ ০ ২ ২ ৮ ২ ২ ২ ৮
-২২, -১৪, -১২, -১০, -৮, -৮, -২, ০, ২, ৮, ৮, ১০, ১২, ১৪, ২২
অর্থাৎ, ফলাফলগুলোকে ক্রমানুসারে সাজালে তাদের মধ্যে পার্থক্য একই থাকবে না। পার্থক্য ০, ২, ৪ এবং ৮ হবে।

২ নিম্নোক্ত দুটি ক্ষেত্রে ফলাফল ০ হতে পারে।

$$(i) -8 + 5 + 6 - 7 = 0$$

$$(ii) +8 - 5 - 6 + 7 = 0$$

৩ একটি ফলাফলের পুনরাবৃত্তি হতে পারে।

$$-8 + 5 + 6 - 7 = 0 \text{ এবং } 8 - 5 - 6 + 7 = 0$$

অর্থাৎ ০ ফলাফলটি দুইবার আসতে পারে।

৪ + অথবা - চিহ্নের সংখ্যার ওপর ফলাফলের ছোটো বা বড়ো হওয়া নির্ভর করে।

(i) তিনি বা তার অধিক সংখ্যক + চিহ্ন ব্যবহার করলে ফলাফল ৮ থেকে ২২ এর মধ্যে পাওয়া যায়।

(ii) দুটি যোগ ও দুটি বিয়োগ চিহ্ন ব্যবহার করলে ফলাফল
- ৮ থেকে + ৮ এর মধ্যে সীমাবদ্ধ।

(iii) তিনি বা তার অধিক বিয়োগ চিহ্ন ব্যবহার করলে
ফলাফল - ৮ থেকে -২২ এর মধ্যে পাওয়া যায়।

৫ ও ৬ নং এর জন্য ২টি নমুনা প্রশ্ন ও সমাধান দেওয়া হলো:

৫. কোনো ফলাফল কি বিজোড় সংখ্যা হতে পারে?

৬. (i) তিনটি + একটি -, (ii) তিনটি - একটি +, (iii) দুটি + দুটি - ব্যবহার করে প্রাপ্ত ফলাফলগুলোতে বিশেষ কোনো বৈশিষ্ট্য পাওয়া যায় কী?

সমাধান:

৫ কোনো ফলাফল বিজোড় সংখ্যা হতে পারে না কারণ যেকোনো চারটি ক্রমিক পূর্ণ সংখ্যায় অবশ্যই দুইটি জোড় ও দুইটি বিজোড় সংখ্যা থাকবে এবং দুইটি বিজোড় সংখ্যার যোগফল বা বিয়োগফল সর্বদা একটি জোড় সংখ্যা। তবুপ দুইটি জোড় সংখ্যার যোগফল বা বিয়োগফল ও একটি জোড় সংখ্যা। অতএব, কোন ফলাফল বিজোড় হতে পারবে না।

৬ (i) তিনটি + একটি - ব্যবহার করে প্রাপ্ত ফলাফলগুলো ক্রমানুসারে সাজালে পার্থক্য ২ হয়।

$$+8 + 5 + 6 - 7 = 8 > 2$$

$$+8 + 5 - 6 + 7 = 10 > 2$$

$$+8 - 5 + 6 + 7 = 12 > 2$$

$$-8 + 5 + 6 + 7 = 18 > 2$$

(ii) তিনটি - একটি + ব্যবহার করে প্রাপ্ত ফলাফলগুলো ক্রমানুসারে সাজালে পার্থক্য ২ হয়।

$$+8 - 5 - 6 - 7 = -18 > 2$$

$$-8 + 5 - 6 - 7 = -12 > 2$$

$$-8 - 5 + 6 - 7 = -10 > 2$$

$$-8 - 5 - 6 + 7 = -8 > 2$$

(iii) দুইটি + ও দুইটি - ব্যবহার করে প্রাপ্ত ফলাফলগুলো ক্রমানুসারে সাজালে পার্থক্য ২ হয়।

১ম সংখ্যার পূর্বে + বসালে,

$$+8 + 5 - 6 - 7 = -8 > 2$$

$$+8 - 5 + 6 - 7 = -2 > 2$$

$$+8 - 5 - 6 + 7 = 0 > 2$$

এবং ১ম সংখ্যার পূর্বে - বসালে,

$$-8 + 5 + 6 - 7 = 0 > 2$$

$$-8 + 5 - 6 + 7 = 2 > 2$$

$$-8 - 5 + 6 + 7 = 8 > 2$$

৮ তোমার খুঁজে পাওয়া সবচেয়ে মজার ছয়টি বৈশিষ্ট্য নিচের ফাঁকা ঘরে লেখো। সেই সঙ্গে এমনটি হওয়ার কারণ কী হতে পারে বলে তুমি মনে করো তাও লিখে রাখো। /পাঠ্যবইয়ের পৃষ্ঠা-৮/

সমাধান: মজার আটটি বৈশিষ্ট্য নিম্নরূপ:

i. সবগুলো ফলাফলই জোড় সংখ্যা। কারণ সংখ্যা চারটি ক্রমিক সংখ্যা।

ii. ফলাফলগুলো যোগায়ক বিপরীতরূপে বিদ্যমান। অর্থাৎ, একটি ফলাফলে যে সংখ্যাটি পাওয়া যায়, অন্য একটি ফলাফলে তার ঝগায়ক সংখ্যাটিও পাওয়া যাবে। কারণ, একই সংখ্যার সামনে + এবং - চিহ্ন পরস্পর পরিবর্তন করলে ফলাফলের সংখ্যাটিতেও চিহ্ন পরিবর্তিত হবে।
যেমন:

$$-8 + 5 + 6 + 7 = 18$$

$$+8 - 5 - 6 - 7 = -18$$

iii. ফলাফলগুলোর পার্থক্য সবসময় জোড় সংখ্যা কারণ সবগুলো ফলাফলই জোড় আর যেকোনো দুটি জোড় সংখ্যার পার্থক্যও জোড় হয়।

iv. প্রাপ্ত ফলাফলগুলোর যোগফল শূন্য (০) হবে। কারণ, একই সংখ্যা ধনায়ক ও ঝগায়করূপে বিদ্যমান।

v. দুইটি + এবং দুইটি - চিহ্নের জন্য প্রাপ্ত ফলাফল যে কোনো চারটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যার জন্য -8, -2, 0, 2 অথবা 8 হবে। কারণ, সংখ্যা চারটি ক্রমিক বলে ১ম ও শেষ সংখ্যাটির যোগফল ২য় ও ৩য় সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টির সমান এবং পরপর দুইটি সংখ্যাদ্বয়ের পার্থক্য একই।

vi. ফলাফলগুলোকে ক্রমানুসারে সাজালে পরপর দুটি সংখ্যার পার্থক্যগুলোর সমষ্টি, সাজানো ক্রমটির প্রথম ও শেষ পদদ্বয়ের পার্থক্যের সমান।

$$\begin{array}{ccccccccc} -22, -18, -12, -10, -8, -8, -2, 0, 2, 8, 8, 10, 12, 14, 22 \\ \checkmark \end{array}$$

8 2 2 2 8 2 2 2 8
এখানে, 8 + 2 + 2 + 2 + 8 + 2 + 2 + 2 + 2 + 8 = 88
এবং 22 - (-22) = 88

vii. এখানে, প্রাপ্ত ফলাফলের মোট সংখ্যা ১৬টি। কারণ চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে ২টি এবং ক্রমিক সংখ্যা ৪টি। তাই ফলাফল সংখ্যা হয়েছে $2^4 = 16$ টি। ক্রমিক সংখ্যা ৩টি হলে ফলাফল সংখ্যা হত $2^3 = 8$ টি এবং ৫টি হলে ফলাফল সংখ্যা হত $2^5 = 32$ টি।

viii. যেকোনো চারটি ক্রমিক ঝগায়ক সংখ্যা নিয়ে কাজ করলেও একই রকমের ফলাফল পাওয়া যাবে।

প্রস্তাৱ: পুরো পরীক্ষাটি করতে গিয়ে তোমার কোনো ভুল হয়েছে? কখনো পুনরায় গণনা করতে হয়েছে? বা আগের ধাপ ফেরত যেতে হয়েছে? এমন কিছু হয়ে থাকলে নিচের ফাঁকা ঘরে লিখে রাখতে পার।

/পাঠ্যবইয়ের পৃষ্ঠা-৬/

সমাধান: পুরো পরীক্ষাটি করতে গিয়ে ফলাফল সংখ্যা প্রথমবারে নির্ণয় করতে সমস্যা হতে পারে। সেক্ষেত্রে পূর্বের ধাপে ব্যবহৃত যোগ বা বিয়োগ চিহ্নের সংখ্যা হিসাব করে দেখতে হবে। তাছাড়া ফলাফলগুলো দেখে ক্রমিক জোড় সংখ্যা মনে হলেও এরা নিজেরা নিজেদের মাঝে বিশেষ অনুক্রম গঠন করে।

 নিচের ছকের পর্যবেক্ষণ অনুযায়ী সমাধান মূল্যায়ন করে নির্দিষ্ট ঘরে টিক (✓) চিহ্ন দিন এবং পৃষ্ঠা ৪০ এর শিখন অভিজ্ঞতাভিত্তিক মূল্যায়ন ছকে পারদর্শিতার সূচকের মাত্রা পূরণ করুন। শিক্ষার্থীকে অনুরূপ আরও অ্যাটিভিটি করানোর জন্য পৃষ্ঠা ৩৪ দেখুন।

শিখন কার্যক্রম মূল্যায়ন ছক-২

পারদর্শিতার সূচক (PI)	পারদর্শিতার সূচকের মাত্রা		
	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
০৩.০৮.০১.০৩ গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া এবং প্রাপ্ত বিভিন্ন সমাধানকে ক্রিটিক্যালি ও মুক্তমনে যাচাই করতে পেরেছে।	৬-৮ নং ধাপগুলো সম্পন্ন ও উপস্থাপন করতে বিভিন্ন গাণিতিক অনুসন্ধানের মাধ্যমে সমাধান নির্ণয় করে কোনটি কেন গ্রহণ করেছে তা যুক্তিসহ ব্যাখ্যা করেছে।	৬-৮ নং ধাপগুলো সম্পন্ন ও উপস্থাপন করতে বিভিন্ন গাণিতিক প্রক্রিয়ার জন্য প্রাপ্ত বিভিন্ন সমাধান তুলনামূলক বিশ্লেষণ করে প্রেক্ষিত বিবেচনায় যৌক্তিক সিদ্ধান্ত গ্রহণ করেছে।	৬-৮ নং ধাপগুলো সম্পন্ন ও উপস্থাপন করতে বিভিন্ন গাণিতিক প্রক্রিয়ার জন্য প্রাপ্ত বিভিন্ন সমাধান তুলনামূলক বিশ্লেষণ করে প্রেক্ষিত বিবেচনায় যৌক্তিক সিদ্ধান্ত গ্রহণ করেছে।

সেশন
২-৩

গণিতিক অনুসন্ধানের ধাপ

/সূত্র: পিচক সহচরিক, পৃষ্ঠা ১৭/



এই সেশনের আটিভিটিগুলো সম্পর্ক করতে একজন শিক্ষার্থীকে গণিতিক অনুসন্ধান প্রতিয়া, ত্রুটির সংখ্যার গণিতিক অনুসন্ধান ও প্লাটার সম্পর্কে জানতে হবে, যা তোমরা ইতোমধ্যেই ‘পাঠ সহায়ক বিষয়বস্তু’ অঙ্গে জেনেছে। এগুলো ভালোভাবে আরও না হয়ে থাকলে আরও একবার পৃষ্ঠা ২ ও ৩ থেকে দেখে নাও।



একক কাজ

/পাঠবইয়ের পৃষ্ঠা-৭/

তোমার চৰ্চার জন্য একই রকম আরও কিছু প্রশ্ন নিচে দেওয়া হলো। এমন সব প্রশ্নের উত্তর খুঁজতে চেষ্টা করো তোমার বুদ্ধির বিকাশের জন্য ভালো। পূর্বের পর্যবেক্ষণটির পদ্ধতিতেই নিচের পরীক্ষাগুলো সম্পাদন করে দেখো—

১. সংখ্যাগুলো ছোটো থেকে বড়ো ত্রুটে না সাজিয়ে যদি বড়ো থেকে ছোটো ত্রুটে সাজাই, তাহলে ফলাফল কী আসে?
২. চারটির বদলে যদি তিনটি ত্রুটিক সংখ্যা নাও।
৩. চারটির বেশি ত্রুটিক সংখ্যা নিয়ে কাজ করে দেখো।
৪. তিনি অন্য কোনো চারটি সংখ্যা নিয়ে কাজ করে দেখো। আগেরবারের সংখ্যাগুলোতে যে ফলাফলের ধারা লক্ষ্য করেছ, এবারের সঙ্গে তার কোনো মিল আছে? কোনো পার্থক্য আছে?

সমাধান:

- ১ এক্ষেত্রেও একই ফলাফল আসবে কেননা সংখ্যার কোনো পরিবর্তন হচ্ছে না। যেমন তিনটি + একটি - চিহ্ন ব্যবহার করে প্রাপ্ত ফলাফলগুলো হলো:

$$+ 7 + 6 + 5 - 8 = 18$$

$$+ 7 + 6 - 5 + 8 = 12$$

$$+ 7 - 6 + 5 + 8 = 10$$

$$- 7 + 6 + 5 + 8 = 8$$

- ২ তিনটি ত্রুটিক সংখ্যা, ৬, ৭ ও ৮ নিয়ে পূর্বোক্ত প্রতিয়ার অনুরূপ ফলাফল নির্ণয় করি।

$$+ 6 + 7 + 8 = 21$$

$$+ 6 + 7 - 8 = 5$$

$$+ 6 - 7 + 8 = 9$$

$$- 6 + 7 + 8 = 9$$

$$+ 6 - 7 - 8 = - 9$$

$$- 6 + 7 - 8 = - 9$$

$$- 6 - 7 + 8 = - 5$$

$$- 6 - 7 - 8 = - 21$$

ক্রমানুসারে সাজালে পাই,

$$- 21, - 9, - 9, - 5, 5, 9, 9, 21$$

পার্থক্য \rightarrow ১২ ২ ২ ১০ ২ ২ ১২

এখানে প্রাপ্ত ফলাফলগুলো সবই বিজোড় সংখ্যা

এবং যেকোনো দুটি ফলাফল পরস্পর অনুবন্ধী।

$$\text{পার্থক্যগুলোর সমষ্টি} = (12 + 2 + 2 + 10 + 2 + 2 + 12) \\ = 42$$

ফলাফলগুলোর সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের পার্থক্য

$$= 21 - (-21) = 42$$

বিস্তৃত: মাঝের সংখ্যাটি জোড় হলে (যেমন: ৩, ৪, ৫) প্রাপ্ত ফলাফলগুলো সব জোড় হবে।

- ৩ এবার ৫টি ত্রুটিক সংখ্যা ৬, ৭, ৮, ৯ ও ১০ নিয়ে পূর্বোক্ত পদ্ধতির অনুরূপ যোগ ও বিয়োগ চিহ্ন ব্যবহার করে ফলাফলগুলো নির্ণয় করি।

এক্ষেত্রে প্রাপ্ত ফলাফলগুলো সবই জোড় হবে এবং পূর্বোক্ত ন্যায় ফলাফলগুলো অনুবন্ধী হবে। প্রাপ্ত ফলাফল গুলোকে ক্রমানুসারে সাজিয়ে পরপর দুটি পদের পার্থক্যগুলোর সমষ্টি, সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের পার্থক্যের সমান হবে। নিম্ন সংখ্যাগুলো নিয়ে সম্ভাব্য ফলাফলগুলো দেখানো হলো:

- ৪টি যোগ (+) ও ১টি বিয়োগ (-) চিহ্ন নিয়ে প্রাপ্ত ফলাফল:

$$1. + 6 + 7 + 8 + 9 - 10 = 20$$

$$2. + 6 + 7 + 8 - 9 + 10 = 22$$

$$3. + 6 + 7 - 8 + 9 + 10 = 24$$

$$4. + 6 - 7 + 8 + 9 + 10 = 26$$

$$5. - 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 28$$

- ৫টি যোগ (+) ও ২টি বিয়োগ (-) চিহ্ন নিয়ে প্রাপ্ত ফলাফল:

$$6. + 6 + 7 + 8 - 9 - 10 = 2$$

$$7. + 6 + 7 - 8 - 9 + 10 = 6$$

$$8. + 6 - 7 - 8 + 9 + 10 = 10$$

$$9. + 6 + 7 - 8 + 9 - 10 = 8$$

$$10. + 6 - 7 + 8 + 9 - 10 = 6$$

$$11. + 6 - 7 + 8 - 9 + 10 = 8$$

$$12. - 6 + 7 + 8 + 9 - 10 = 8$$

$$13. - 6 + 7 + 8 - 9 + 10 = 10$$

$$14. - 6 + 7 - 8 + 9 + 10 = 12$$

$$15. - 6 - 7 + 8 + 9 + 10 = 18$$

- ৬টি যোগ (+) ও ৩টি বিয়োগ (-) চিহ্ন নিয়ে প্রাপ্ত ফলাফল:

$$16. + 6 + 7 - 8 - 9 - 10 = - 18$$

$$17. + 6 - 7 - 8 - 9 + 10 = - 8$$

$$18. + 6 - 7 - 8 + 9 - 10 = - 10$$

$$19. + 6 - 7 + 8 - 9 - 10 = - 12$$

$$20. - 6 - 7 - 8 + 9 + 10 = - 2$$

$$21. - 6 - 7 + 8 - 9 + 10 = - 8$$

$$22. - 6 - 7 + 8 + 9 - 10 = - 6$$

$$23. - 6 + 7 - 8 - 9 + 10 = - 6$$

$$24. - 6 + 7 + 8 - 9 - 10 = - 10$$

$$25. - 6 + 7 - 8 + 9 - 10 = - 8$$

ঘ. ১টি যোগ ও ৪টি বিয়োগ (-) চিহ্ন নিয়ে প্রাপ্ত ফলাফল:

$$26. + 6 - 7 - 8 - 9 - 10 = - 28$$

$$27. - 6 + 7 - 8 - 9 - 10 = - 26$$

$$28. - 6 - 7 + 8 - 9 - 10 = - 28$$

$$29. - 6 - 7 - 8 + 9 - 10 = - 22$$

$$30. - 6 - 7 - 8 - 9 + 10 = - 20$$

ঙ. ৫টিই যোগ অথবা ৫টিই বিয়োগ চিহ্ন নিয়ে প্রাপ্ত ফলাফল:

$$31. + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 80$$

$$32. - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 = - 80$$

অনুসন্ধান:

ফলাফলগুলোকে ছোটো থেকে বড়ো ক্রমানুসারে সাজিয়ে পাই,

$$- 80, - 28, - 26, - 28, - 22, - 20, - 18, - 12,$$

$$- 10, - 10, - 8, - 8, - 6, - 6, - 8, - 2, 2, 8, 6,$$

$$6, 8, 8, 10, 10, 12, 18, 20, 22, 28, 26, 28, 80$$

পূর্বে আমরা দেখেছি যে, ফলাফল সংখ্যা ২^o এর সূত্র সমর্থন করে। যেহেতু এখানে ক্রমিক সংখ্যা ৫টি, সেহেতু ফলাফল সংখ্যা ২^o = ৩২টি।

ফলাফলসমূহের মধ্যে পূর্বের মত প্রতিটি ফলাফলের যোগায়ক বিপরীত ফলাফলও বিদ্যমান। অর্থাৎ ফলাফলগুলো তাদের যোগায়ক বিপরীত সংখ্যার কতগুলো জোড় গঠন করে। যেমন: (- 80, 80), (- 28, 28), (- 26, 26) ইত্যাদি। এছাড়া কিছু ফলাফলের পুনরাবৃত্তি ও বিদ্যমান।

প্রতিটি ফলাফল তার যোগায়ক বিপরীত সংখ্যার জোড়ায় থাকার ব্যাখ্যা হল, দুটি সংখ্যার মধ্যে বড়ো সংখ্যা হতে ছোটো সংখ্যার বিয়োগফল এবং ছোটো সংখ্যা হতে বড়ো সংখ্যার বিয়োগফলের মানে কোন পার্থক্য নেই। যেমন: ৬ - ৭ = - ১ এবং ৭ - ৬ = ১ কিন্তু সংখ্যাদ্বয়ের পার্থক্য হল ১। আমরা উপরের পরীক্ষণে এরূপ বিয়োগফল নিয়ে কাজ করেছি। যেমন: (৮ - ৯) ও (৯ - ৮); (৯ - ১০) ও (১০ - ৯) ইত্যাদি। একারণে প্রতিটি ফলাফলের যোগায়ক বিপরীত ফলাফল বিদ্যমান। উল্লেখ্য প্রতিটি ফলাফলই জোড় সংখ্যা। কারণ ক্রমিক সংখ্যা ৫টির মধ্যে ২টি বিজোড় সংখ্যা বিদ্যমান এবং দুইটি বিজোড় সংখ্যার সমষ্টি বা বিয়োগফল সর্বদা জোড় সংখ্যা। যদি ক্রমিক সংখ্যা ৫টির মধ্যে ৩টি বিজোড় সংখ্যা থাকত তবে ফলাফলগুলো সর্বদা বিজোড়

 নিচের ছকের পর্যবেক্ষণ অনুযায়ী সমাধান মূল্যায়ন করে নির্দিষ্ট ঘরে টিক (✓) চিহ্ন দিন এবং পৃষ্ঠা ৪০ এর শিখন অভিজ্ঞতাভিত্তিক মূল্যায়ন ছকে পারদর্শিতার সূচকের মাত্রা পূরণ করুন। শিক্ষার্থীকে অনুরূপ আরও অ্যাটিভিটি করানোর জন্য পৃষ্ঠা ৩৪ দেখুন।

হত। উল্লেখ্য, ক্রমিক সংখ্যার পরিমাণ জোড় হলে উক্ত পরীক্ষণের ফলাফল সর্বদা জোড় হবে। বিজোড় হলে, ক্রমিক সংখ্যাগুলোর মধ্যে যদি ক্ষুদ্রতমটি জোড় হয় তবে ফলাফলগুলো জোড় হবে এবং ক্ষুদ্রতম সংখ্যাটি বিজোড় হলে ফলাফলগুলো বিজোড় হবে।

উর্ধ্বক্রমানুসারে সাজানো ফলাফলসমূহের মাঝে বিশেষ ক্ষেত্রে কিছু অনুক্রম বিদ্যমান। যেমন: - ২৮, - ২৬, - ২৪, - ২২, - ২০; ২, ৪, ৬, ৮, ১০, ১২, ১৪ ইত্যাদি।

৮ যেকোনো চারটি ক্রমিক সংখ্যা যেমন ২১, ২২, ২৩ ও ২৪ নিয়ে পূর্বোক্ত প্রক্রিয়া অনুসারে ফলাফল নির্ণয় করি।

$$+ 21 + 22 + 23 - 24 = 82$$

$$+ 21 + 22 - 23 + 24 = 88$$

$$+ 21 - 22 + 23 + 24 = 86$$

$$- 21 + 22 + 23 + 24 = 88$$

$$+ 21 + 22 - 23 - 24 = - 8$$

$$- 21 + 22 - 23 + 24 = 2$$

$$+ 21 - 22 + 23 - 24 = - 2$$

$$- 21 - 22 + 23 + 24 = 8$$

$$- 21 + 22 + 23 - 24 = 0$$

$$+ 21 - 22 - 23 + 24 = 0$$

$$- 21 - 22 - 23 + 24 = - 82$$

$$- 21 - 22 + 23 - 24 = - 88$$

$$- 21 + 22 - 23 - 24 = - 86$$

$$+ 21 - 22 - 23 - 24 = - 88$$

$$+ 21 + 22 + 23 + 24 = 90$$

$$- 21 - 22 - 23 - 24 = - 90$$

পূর্বের ফলাফলের সাথে মিল:

(i) দুই ক্ষেত্রেই ফলাফলে - ৮, -২, ০, ২, ৪ বিদ্যমান।

(ii) প্রতিটি ফলাফলই জোড়।

(iii) ফলাফলটির পুনরাবৃত্তি হয়।

অবিল:

(i) দুটি + ও দুটি - নিয়ে প্রাপ্ত ফলগুলো ব্যতীত অন্য ফলাফলগুলো ভিন্ন হবে।

শিখন কার্যক্রম মূল্যায়ন ছক-৩

পারদর্শিতার সূচক (PI)	পারদর্শিতার সূচকের মাত্রা		
	<input type="checkbox"/>	<input type="circle"/>	<input type="triangle"/>
০৩.০১.০১.০১ সমস্যা সমাধানের জন্য বিভিন্ন গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া পরিকল্পনা করতে পেরেছে।	একক কাজটি সম্পন্ন ও, উপস্থাপন করার সময় একটি অনুসন্ধান প্রক্রিয়া পরিকল্পনা করেছে।	একক কাজটি সম্পন্ন ও উপস্থাপন করার সময় একাধিক উপযুক্ত গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া পরিকল্পনা করেছে।	একক কাজটি সম্পন্ন ও উপস্থাপন করার সময় বিভিন্ন গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া পরিকল্পনা করে যৌক্তিক ব্যাখ্যা প্রদান করেছে।

► গাণিতিক অনুসন্ধানের ধাপ /পঠ্যবইয়ের পৃষ্ঠা-৭/

আমাদের গাণিতিক অনুসন্ধানে যা যা কাজ করেছি, নিচের ছকে সেগুলো এলোমেলো করে দেওয়া আছে (ক-ঝ)। তোমার কাজ হবে ধাপগুলোর বাম পাশের ফাঁকা ঘরে কোনটি তোমার ক্ষেত্রে কততম ধাপ, তা লেখা। কোনো ধাপ যদি প্রয়োজন না পড়ে, তবে তার ঘর ফাঁকা রাখতে পার।

ক. সম্ভাব্য ফলাফল অনুমান করেছি

খ. সমস্যাটি বিশ্লেষণ করে বুঝে নিয়েছি

গ. অনুমানের সঙ্গে ফলাফল মিলেছে কি না,
পরীক্ষা করতে গিয়ে ধরা পড়েছে

ঘ. যা করছি, ঠিক করছি কি না যাচাই করেছি

ঙ. সমস্যা/প্রশ্ন চিহ্নিত করেছি

চ. ফলাফল বিশ্লেষণ করেছি

ছ. ভুল করলে আগের ধাপে ফেরত গিয়েছি

জ. কী পর্যবেক্ষণ করলাম, তা লিখেছি

ঝ. অনুমানগুলো পরীক্ষা করে দেখেছি

নমুনা সমাধান: আমাদের গাণিতিক অনুসন্ধানে যা যা করেছি তা নিচের ধাপগুলোর বামপাশের ফাঁকা ঘরে কোনটি কততম ধাপ তা লেখা হলো। কোনো ধাপ প্রয়োজন না পড়লে তা ফাঁকা রাখা হলো।

৩ ক. সম্ভাব্য ফলাফল অনুমান করেছি

২ খ. সমস্যাটি বিশ্লেষণ করে বুঝে নিয়েছি

গ. অনুমানের সঙ্গে ফলাফল মিলেছে কি না,
পরীক্ষা করতে গিয়ে ধরা পড়েছে

৫ ঘ. যা করছি, ঠিক করছি কি না যাচাই করেছি

১ ঙ. সমস্যা/প্রশ্ন চিহ্নিত করেছি

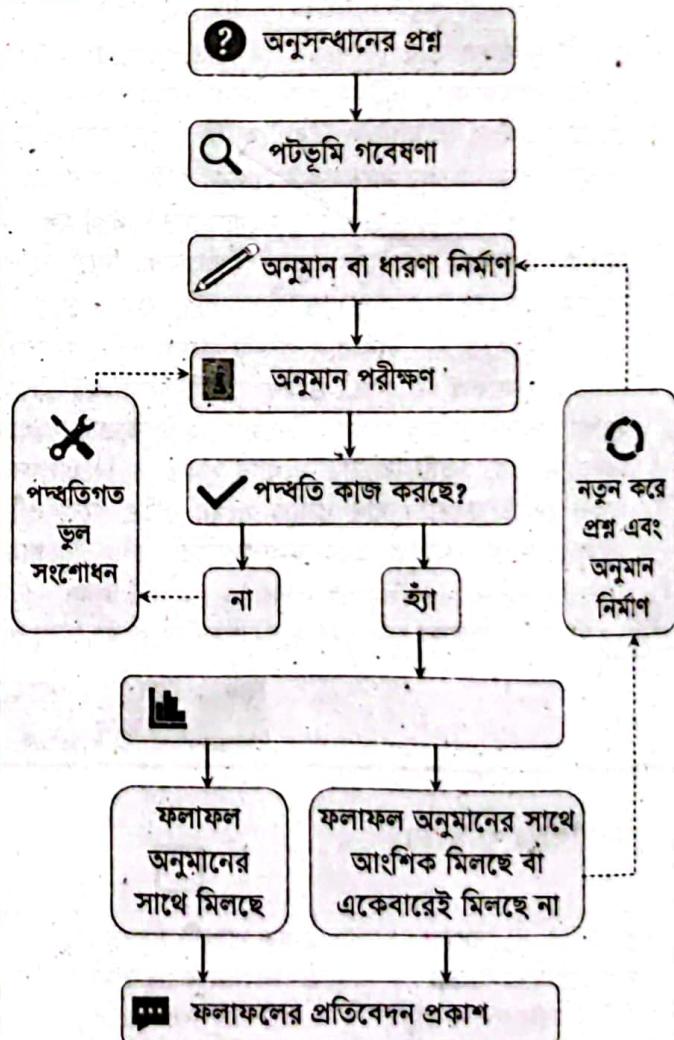
৮ চ. ফলাফল বিশ্লেষণ করেছি

ছ. ভুল করলে আগের ধাপে ফেরত গিয়েছি

৬ জ. কী পর্যবেক্ষণ করলাম, তা লিখেছি

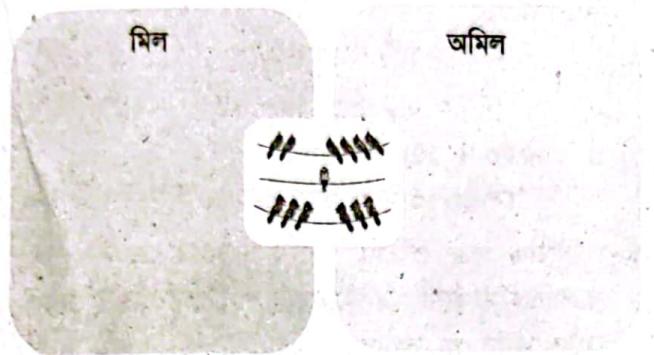
ঝ. অনুমানগুলো পরীক্ষা করে দেখেছি

২৭ জোড়ায় কাজ /পঠ্যবইয়ের পৃষ্ঠা-১০/



চিত্র: গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়ার ধাপের ফ্লো-চার্ট

গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়ার ধাপের ফ্লো-চার্টের সঙ্গে তোমাদের করা অনুসন্ধানটির নিচয়ই কিছু মিল বা অমিল রয়েছে। তোমার বন্ধুর সঙ্গে আলোচনা করে নিচের ছক দুটিতে কী কী মিল বা অমিল পেলে, সেগুলো লিখে ফেলো।



সমাধান:

মিল	অমিল
i. অনুসন্ধানের প্রয়োগ/সমস্যা চিহ্নিতকরণ।	i. পটভূমি গবেষণা
ii. অনুমান বা ধারণা নির্মাণ করে সমস্যা সমাধানে অগ্রসর হওয়া।	ii. অনুমান পরীক্ষণ
iii. ফলাফল বিশ্লেষণ	iii. পদ্ধতিগত ভুল সংশোধন
iv. ফলাফলের প্রতিবেদন প্রকাশ	iv. নতুন করে প্রয়োগ এবং অনুমান নির্মাণ

প্রয়োজন: খেয়াল করো, নিচের ছকে পূর্বের ফ্লো-চার্ট থেকে পাওয়া অনুসন্ধানের বিভিন্ন ধাপ দেওয়া আছে। তোমার করা অনুসন্ধানের সময় ফ্লো-চার্টে উল্লেখ করা ধাপগুলোর কিছু কিছু মিল পেয়েছ। কোন ধাপে নির্দিষ্টভাবে কী করেছ সেটি নিচের ফাঁকা ঘরে লেখো। তোমার জন্য একটি করে দেওয়া হলো:

অনুমান গ্রহণ	
পরীক্ষণ	
ভুল চিহ্নিতকরণ	
ফলাফল বিশ্লেষণ	

(পাঠ্যবইয়ের পৃষ্ঠা-১০)

সমাধান:

ধাপ	কাজ
সমস্যা চিহ্নিতকরণ	চারটি ক্রমিক সংখ্যার মধ্যে বিভিন্নভাবে যোগ এবং বিয়োগ চিহ্ন বসালে ফলাফলের কী কী বৈশিষ্ট্য দেখা যায়?
অনুমান গ্রহণ	অনুমানের ভিত্তিতে বিভিন্ন সংখ্যক যোগ বা বিয়োগ চিহ্ন সংখ্যাগুলোর সামনে বসিয়েছি।
পরীক্ষণ	সংখ্যাগুলোর সামনে প্রতিটি ক্ষেত্রে ভিন্ন চিহ্ন বসিয়ে ১৬টি ভিন্ন উপায়ে ফলাফল নির্ণয় করেছি।
ভুল চিহ্নিতকরণ	ফলাফলগুলো নির্ণয়ে যোগ-বিয়োগ প্রক্রিয়ায় ভুল হয়নি। তবে ভুল হলে তা সংশোধন করতে হতো।
ফলাফল বিশ্লেষণ	প্রাপ্ত ফলাফলগুলো বিশ্লেষণ করে দেখা যায় এদের মাঝে বিশেষ বৈশিষ্ট্য বিদ্যমান।

► কাজ: গাণিতিক অনুসন্ধান করা জরুরি কেন? /গণিতের পৃষ্ঠা-১১/
এ পর্যন্ত আমরা গাণিতিক অনুসন্ধানের ধাপগুলো জানলাম, কোনটি কীভাবে করে তা হাতে-কলমে দেখলাম। কিন্তু তোমার কি জানতে ইচ্ছা করেছে যে এই অনুসন্ধান করে কী হবে? কেন গণিতবিদ এবং বিজ্ঞানীরা অনুসন্ধান করে থাকেন? প্রশ্নের উত্তর পাওয়ার জন্য তো বটেই, কিন্তু কী হবে সে সব প্রশ্নের উত্তর জেনে? তোমার মাথায় কী আসছে নিচের ফাঁকা ঘরে লেখো তো, ইচ্ছে হলে পাশে ছবিও এঁকে রাখতে পার।

১.
২.
৩.
৪.

সমাধান:

১. প্রশ্নের উত্তর বা সমাধান নির্ণয় করা। যেমন: একটি সংখ্যার দ্বিগুণ ও তার অর্ধেকের সমষ্টি ১০ হলে সংখ্যাটি কত?

অনুসন্ধান:

- ধরে নিই সংখ্যাটি x
- তাহলে সংখ্যাটির দ্বিগুণ হলো $2x$ এবং অর্ধেক হলো $\frac{x}{2}$
- প্রশ্ন অনুযায়ী $2x + \frac{x}{2} = 10$

$$\text{বা, } \frac{5x}{2} = 10 \text{ বা, } x = \frac{10 \times 2}{5} = 8$$

 নিচের ছকের পর্যবেক্ষণ অনুযায়ী সমাধান মূল্যায়ন করে নির্দিষ্ট ঘরে টিক (✓) চিহ্ন দিন এবং পৃষ্ঠা ৪০ এর শিখন অভিজ্ঞতাভিত্তিক মূল্যায়ন হকে পারদর্শিতার সূচকের মাত্রা পূরণ করুন। শিক্ষার্থীকে অনুরূপ আরও অ্যাডিভিটি করানোর জন্য পৃষ্ঠা ৩৪ দেখুন।

শিখন কার্যক্রম মূল্যায়ন ছক-৪

পারদর্শিতার সূচক (PI)	পারদর্শিতার সূচকের মাত্রা		
	□	○	△
০৩.০৮.০১.০৩ গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া এবং প্রাপ্ত বিভিন্ন সমাধানকে ক্রিটিক্যাল ও মুক্তমনে যাচাই করতে পেরেছে।	“গাণিতিক অনুসন্ধান করা জরুরি কেন?” কাজটি সম্পূর্ণ করতে বিভিন্ন গাণিতিক অনুসন্ধানের মাধ্যমে সমাধান নির্ণয় করেছে।	“গাণিতিক অনুসন্ধান করা জরুরি কেন?” কাজটি সম্পূর্ণ করতে বিভিন্ন গাণিতিক অনুসন্ধানের মাধ্যমে সমাধান নির্ণয় করে কোনটি কেন গ্রহণ করেছে তা যুক্তিসহ ব্যাখ্যা করেছে।	“গাণিতিক অনুসন্ধান করা জরুরি কেন?” কাজটি সম্পূর্ণ করতে বিভিন্ন গাণিতিক প্রক্রিয়ার জন্য প্রাপ্ত বিভিন্ন সমাধান তুলনামূলক বিশ্লেষণ করে প্রেক্ষিত বিবেচনায় যৌক্তিক সিদ্ধান্ত গ্রহণ করেছে।

সেশন
৪-৫

দলগত কাজের মাধ্যমে মজার মজার সমস্যা সমাধান

/সূত্র: শিক্ষক সহায়িকা, পৃষ্ঠা ১৭/



এই সেশনের আকৃতিগুলো সম্পন্ন করতে একজন শিক্ষার্থীকে প্রাচীন মিশরীয় ১৩ গিটের দড়ির পদ্ধতি, নামতার গুণফলের একক স্থানীয় অঙ্ক, সংখ্যার গুণনীয়ক ও গুণিতক এবং সম্মুখ সংখ্যা সম্পর্কে জানতে হবে, যা তোমরা ইতোমধ্যেই 'পাঠ সহায়ক বিষয়বস্তু' অংশে জেনেছ। এগুলো ভালোভাবে আয়ত না হয়ে থাকলে আরও একবার পৃষ্ঠা ২ ও ৩ থেকে দেখে নাও।



দলগত অনুসন্ধান

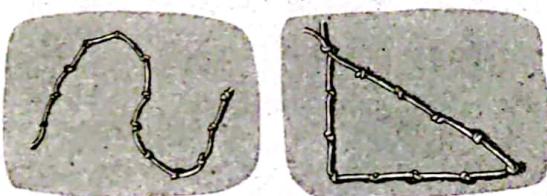
/পাঠ্যবইয়ের পৃষ্ঠা-১২/

এ পর্যন্ত তোমরা জেনে এসেছ গাণিতিক অনুসন্ধান কী, এই অনুসন্ধান কীভাবে সম্পন্ন করে, এর ধাপগুলো কী কী। কিন্তু ভবিষ্যতে বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাবলি একই পদ্ধতিতে সমাধান করার জন্য আমাদের এখন থেকেই চৰ্চা থাকা প্রয়োজন। তাই আমরা এবার কিছু দলগত কাজ করব। তোমাদের পুরো ক্লাসটিকে শিক্ষক ছয়টি ভাগে ভাগ করবেন, প্রতিটি ভাগ একটি দল। নিচে তিনটি দলের জন্য একটি করে সমস্যা বা প্রশ্ন দেওয়া আছে।

সমস্যা-১:

/পাঠ্যবইয়ের পৃষ্ঠা-১২/

প্রাচীন মিশরীয়রা গণিত এবং বিজ্ঞানে ভৌগোলিক উন্নতি করেছিলেন, জানো তো? তারা বিভিন্ন জ্যামিতিক পরিমাপের জন্য একটি দড়ি ব্যবহার করতেন। দড়িটির বৈশিষ্ট্য হলো, তাতে নির্দিষ্ট সমান ব্যবধানে ১৩টি গিট দেওয়া থাকত (ঠিক নিচের বাম পাশের ছবিটির মতো করে)।



এই দড়ি দিয়ে তাঁরা সমকোণী ত্রিভুজ বানাতেন (উপরের ডান পাশের ছবিটির মতো করে)। তোমরা নিশ্চয়ই জানো সমকোণী ত্রিভুজ কোণগুলো? পরবর্তী একটি অভিজ্ঞতায় তোমরা সমকোণী ত্রিভুজের মজার কিছু ব্যবহার শিখবে।

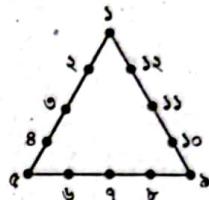
তোমাদের দলের অনুসন্ধানটির জন্য সমান দূরত্বে ১৩টি গিট দেওয়া একটি দড়ি জোগাড় করো। এরপর—

১. খুঁজে বের করো কী কী ধর্কার ত্রিভুজ তৈরি করতে পার। শর্ত হলো দড়িটির দুই প্রান্তে গিট থাকবে, ত্রিভুজের প্রতিটি কোণে একটি গিট থাকবে এবং দুই প্রান্তের গিট মিলিত হবে।
২. এমন একটি দড়ি দিয়ে আর কী কী আকৃতি তৈরি করতে পার (যেমন— বর্গক্ষেত্র, আয়তক্ষেত্র ইত্যাদি)?

সমাধান:

১. প্রদত্ত শর্ত মেনে তিন ধর্কার ত্রিভুজ তৈরি করা সম্ভব। নিম্ন ত্রিভুজগুলোর নাম উল্লেখপূর্বক ছিত্র দেখানো হলো:

i. সমবাহু ত্রিভুজ:



ii. সমবিবাহু ত্রিভুজ:



iii. সমকোণী ত্রিভুজ:



২. প্রদত্ত দড়িটি দিয়ে আমরা নিম্নোক্ত আকৃতিগুলো তৈরি করতে পারব।

ক্রমিক নং	আকৃতির নাম	আকৃতির চিত্র
১.	বর্গক্ষেত্র	
২.	আয়তক্ষেত্র	
৩.	সামান্তরিক	
৪.	রম্বস	
৫.	ঘূড়ি	
৬.	ষড়ভুজ	
৭.	বৃত্ত	
৮.	১২-পার্শ্ববৃত্ত বহুভুজ (ডেডেকাগন)	

বিশেষ ছন্টব্য: ৩ হতে ১২ বাহুবিশিষ্ট যে কোনো বহুভুজ গঠন করা যাবে।

সমস্যা-২:

/পাঠ্যবইয়ের পৃষ্ঠা-১৩/

নিচের ছবিটিতে মোট ১৯৬টি ঘর রয়েছে (তবে নিজে গণনা করে নিশ্চিত হয়ে নেওয়া ভালো, আমরা ভুলও বলতে পারি)। ছক্টির প্রতিটি সারির জন্য একটি করে সংখ্যা এবং প্রতিটি কলামের জন্য একটি করে বাংলা অক্ষর নির্ধারণ আছে। এই সংখ্যা এবং অক্ষর ধরে প্রতিটি ঘরের ঠিকানা বের করা যায়। যেমন- ২য় সারির তৃতীয় ঘরটির ঠিকানা হলো ২গ।

এই অনুসন্ধানটিতে তোমরা পাঠ্যবইয়ের ১৩ নম্বর পৃষ্ঠায় ছক-১.১ এর নির্দেশিত ঘরে মূলত ১ থেকে ১০ এর ঘরের নামতার ফলাফল লিখবে। যেমন- $2 \times 1 = 2$, নির্ধারিত ঘরে কেবল গুণফলটি লিখবে, অর্থাৎ ২। কিন্তু শর্ত হলো নামতার ফলাফলে যদি দশকের ঘরের সংখ্যাও থাকে সেটি বসাতে পারবে না, কেবল এককের ঘরের সংখ্যাটি বসাবে। যেমন-

$$2 \times 5 = 10, \text{ নির্ধারিত ঘরে কেবল } 0 \text{ লিখবে।}$$

ক খ গ ঘ ঙ চ ছ জ ঝ ঝ ট ঠ ড ঢ

১													
২													
৩													
৪													
৫													
৬													
৭													
৮													
৯													
১০													
১১													
১২													
১৩													
১৪													

ছক-১.১

এবার নিচের নির্দেশনাগুলো অনুসরণ করো:

- ৩গ ঘর থেকে ১ এর নামতার ফলাফল লেখা শুরু করো। অর্থাৎ, ৩গ-তে বসবে ১, ৩৮-তে ২, ৩৬-তে ৩ ...। এমন করে 1×10 পর্যন্ত গুণফল লেখো, কিন্তু অবশ্যই শর্তটি মনে রাখবে।
- ৪গ থেকে ২ এর নামতা, ৫গ থেকে ৩ এর এমন করে ১১গ থেকে ১০ এর নামতার ফলাফলগুলো লেখো।
- এবার পুরো ছক্টা সম্পূর্ণ করার জন্য সংখ্যাগুলোর চারপাশের ঘরগুলোতে শূন্য বসিয়ে দাও।

সমাধান: প্রদত্ত নির্দেশনা অনুযায়ী ছক-১.১ পূরণ করা হলো:

ক	খ	গ	ঘ	ঙ	চ	ছ	জ	ঝ	ঝ	ট	ঠ	ড	ঢ
১	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০
২	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০
৩	০	০	১	২	৩	৪	৫	৬	৭	৮	৯	০	০
৪	০	০	২	৪	৬	৮	০	২	৪	৬	৮	০	০
৫	০	০	৩	৬	৯	২	৫	৮	১	৪	৭	০	০
৬	০	০	৪	৮	২	৬	০	৪	৮	২	৬	০	০
৭	০	০	৫	০	৫	০	৫	০	৫	০	৫	০	০
৮	০	০	৬	২	৮	৪	০	৬	২	৮	৪	০	০
৯	০	০	৭	৪	১	৮	৫	২	৯	৬	৩	০	০
১০	০	০	৮	৬	৪	২	০	৮	৬	৪	২	০	০
১১	০	০	৯	৮	৭	৬	৫	৪	৩	২	১	০	০
১২	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০
১৩	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০
১৪	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০

ছক-১.১

প্রশ্ন ► এখন পর্যবেক্ষণ করে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

/পাঠ্যবইয়ের পৃষ্ঠা-১৪/

- ক. অঙ্কগুলোর মধ্যে কী বৈশিষ্ট্য দেখতে পাচ্ছ?
 খ. কোনো পুনরাবৃত্তি দেখতে পাচ্ছ? কোনো পুনরাবৃত্তি যদি দেখতে পাও, সেটিকে/সেগুলোকে চক্রের মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারবে? পুনরাবৃত্তি কি কেবল একই দিকে ঘূরতে পারে, নাকি বিপরীতেও?
 গ. ছক্টির বৈশিষ্ট্য এমনই কেন হলো?

সমাধান:

- ক. অঙ্কগুলোর মধ্যে পুনরাবৃত্তিক বৈশিষ্ট্য লক্ষণীয়। ওনং কলাম অর্থাৎ 'গ' এর উপর থেকে নিচে আসলে সংখ্যাগুলোর ক্রম: ০, ০, ১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬, ৭, ৮, ৯, ০, ০, ০, আবার, ওনং সারির বাম থেকে ডানে গেলে প্রাপ্ত সংখ্যাগুলোর ক্রম: ০, ০, ১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬, ৭, ৮, ৯, ০, ০, ০ আবার, চার নং অর্থাৎ 'ঘ' নং কলামে উপর থেকে নিচে প্রাপ্ত ক্রম: ০, ০, ২, ৪, ৬, ৮, ০, ২, ৪, ৬, ৮, ০, ০, ০ এবং ৮ নং সারিতে বাম হতে ডান বরাবর প্রাপ্ত সংখ্যার ক্রম: ০, ০, ২, ৪, ৬, ৮, ০, ২, ৪, ৬, ৮, ০, ০, ০

∴ একই সংখ্যাবিশিষ্ট কলাম ও সারিতে যথাক্রমে উপর-নিচ এবং বাম-ডান বরাবর প্রাপ্ত ক্রম একই।

- খ. ছক্টির মধ্যে সংখ্যাগুলোতে পুনরাবৃত্তি লক্ষণীয়। পুনরাবৃত্তির ধরণটি চাক্রিক অর্থাৎ চক্রের মাধ্যমে প্রকাশ করা সম্ভব। এক্ষেত্রে পুনরাবৃত্তি একই দিক ছাড়াও বিপরীত দিকে ঘূরতে পারে। নিম্নে চিত্রের মাধ্যমে ঘটনাটি বর্ণনা করা হলো।

ক	খ	গ	ঘ	ঙ	চ	ছ	জ	ঝ	ঞ	ট	ঠ	ড	ঢ
১	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০
২	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০
৩	০	০	১	২	৩	৪	৫	৬	৭	৮	৯	০	০
৪	০	০	২	৪	৬	৮	০	২	৪	৬	৮	০	০
৫	০	০	৩	৬	৯	২	৫	৮	১	৪	৭	০	০
৬	০	০	৪	৮	২	৬	০	৪	৮	২	৬	০	০
৭	০	০	৫	০	৫	০	৫	০	৫	০	৫	০	০
৮	০	০	৬	২	৮	৪	০	৬	২	৮	৪	০	০
৯	০	০	৭	৪	১	৮	৫	২	৯	৬	৩	০	০
১০	০	০	৮	৬	৪	২	০	৮	৬	৪	২	০	০
১১	০	০	৯	৮	৭	৬	৫	৪	৩	২	১	০	০
১২	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০
১৩	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০
১৪	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০	০

চিত্র: ছক-১.১

উপরের চিত্রের ছকটিতে রং করা সারি ও কলামগুলোতে ডান-বাম এবং উপর নিচ বরাবর পুনরাবৃত্তি দেখানো হয়েছে। রংবয়ের দ্বারা এটি স্পষ্ট যে পুনরাবৃত্তি বিপরীত দিকেও ঘূরতে পারে। ছকটির আরো একটি বিশেষ বৈশিষ্ট্য হচ্ছে ছকটির প্রতিটি সংখ্যা কর্ণ সাপেক্ষে প্রতিসম।

গ) ১ ও ৯ এর গুণের ক্ষেত্রে শুধুমাত্র শেষ অঙ্কটি বা এককের ঘরের অঙ্কটি নিয়ে পাই—

$$1 \times 1 = 1$$

$$1 \times 2 = 2$$

$$1 \times 3 = 3$$

$$1 \times 8 = 8$$

$$1 \times 5 = 5$$

$$1 \times 6 = 6$$

$$1 \times 7 = 7$$

$$1 \times 8 = 8$$

$$1 \times 9 = 9$$

এখানে $(1 + 9) = 10$ ও $(2 + 8) = 10$ এবং গুণ প্রক্রিয়ায় একটিতে ছোটো হতে বড়ো এবং অপরটিতে বড়ো হতে ছোটো ক্রমে সাজানো হয়েছে। আরেকটি উদাহরণ লক্ষ করি—

$$2 \times 1 = 2 = 2$$

$$2 \times 2 = 8 = 8$$

$$2 \times 3 = 6 = 6$$

$$2 \times 8 = 8 = 8$$

$$2 \times 5 = 10 = 0$$

$$2 \times 6 = 12 = 2$$

$$2 \times 7 = 14 = 8$$

$$2 \times 8 = 16 = 6$$

$$2 \times 9 = 18 = 8$$

$$9 \times 9 = 81 = 1$$

$$9 \times 8 = 72 = 2$$

$$9 \times 7 = 63 = 3$$

$$9 \times 6 = 54 = 8$$

$$9 \times 5 = 85 = 5$$

$$9 \times 8 = 36 = 6$$

$$9 \times 3 = 27 = 9$$

$$9 \times 2 = 18 = 8$$

$$9 \times 1 = 9 = 9$$

$$8 \times 1 = 8 = 8$$

$$8 \times 2 = 16 = 6$$

$$8 \times 3 = 24 = 8$$

$$8 \times 8 = 32 = 2$$

$$8 \times 5 = 80 = 0$$

$$8 \times 6 = 48 = 8$$

$$8 \times 7 = 56 = 6$$

$$8 \times 8 = 64 = 8$$

$$8 \times 9 = 72 = 2$$

এখানে মূল বিষয়টি হচ্ছে দুটি এক অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার যোগফল ১০ হলে তাদের নামতায় প্রাপ্ত গুণফলের এককের ঘরের অঙ্কটি পরস্পরের বিপরীত ক্রমে সজ্ঞিত থাকবে।

$$\begin{aligned} &\text{প্রথম ক্ষেত্রের সংখ্যা দুটি } 1 \text{ ও } 9 \text{ এবং যোগফল } (1 + 9) \\ &= 10, \text{ দ্বিতীয় ক্ষেত্রের সংখ্যা দুটি } 2 \text{ ও } 8 \text{ এবং যোগফল } \\ &= (2 + 8) = 10 \end{aligned}$$

উক্ত বৈশিষ্ট্যের কারণ ছকটি একটি বিশেষ রূপ ধারণ করেছে।

সমস্যা-৩:

/পাঠ্যবইয়ের পৃষ্ঠা-১৪/

সংখ্যার গুণনীয়ক সম্পর্কে নিচয়ই তোমাদের ধারণা রয়েছে? না থাকলেও মনে করিয়ে দিই— কোনো একটি সংখ্যার গুণনীয়ক হলো এমন আরেকটি সংখ্যা যে সংখ্যা দিয়ে ঐ সংখ্যাটিকে ভাগ করা যায়। যেমন- ৮ এর গুণনীয়কগুলো হলো- ১, ২, ৪ এবং ৮। এবার ৮কে বাদ দিয়ে এর গুণনীয়কগুলোকে যোগ করলে কী পাওয়া যায় দেখো: $1 + 2 + 8 = 9$

একইভাবে, ১০ এর গুণনীয়কগুলো বের করো। ১০ কে বাদ দিয়ে এর গুণনীয়কগুলোকে যোগ করলে কী পাওয়া যায়?

সমাধান:

$$10 = 1 \times 10 = 1 \times 2 \times 5$$

$\therefore 10$ এর গুণনীয়কগুলো হলো ১, ২, ৫, ১০

১০ কে বাদ দিয়ে গুণনীয়কগুলোর যোগফল $= 1 + 2 + 5 = 8$

\therefore প্রাপ্ত যোগফল ৮; ১০ অপেক্ষা ছোটো।

প্রমাণ ► এবার এসো দেখি একইভাবে ১২ এর গুণনীয়কগুলোর যোগফল কত হয়।

১২ এর গুণনীয়কগুলো হলো-

$$1, 2, 3, 4, 6, 12$$

তাহলে ১২ বাদ দিয়ে বাকি গুণনীয়কগুলো যোগ করলে যোগফল কত হয় দেখা যাক-

$$1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$$

খেয়াল করে দেখো, ৮ এবং ১০ এর গুণনীয়কগুলোর যোগফল যথাক্রমে ৮ এবং ১০ এর থেকে ছোটো। কিন্তু ১২ এর ক্ষেত্রে তা নয়। তাই ১২ হলো সমৃদ্ধ সংখ্যা (abundant number)।

তোমার অনুসন্ধানের কাজটি হলো—

/পাঠ্যবইয়ের পৃষ্ঠা-১৫/

১। ৫টি সমৃদ্ধ সংখ্যা খুঁজে বের করো।

২। সমৃদ্ধ সংখ্যার বৈশিষ্ট্য কেন অন্যান্য সংখ্যার চেয়ে আলাদা?

৩। অন্য দলের সহপাঠীদের বোঝানোর জন্য সমৃদ্ধ সংখ্যার একটি সংজ্ঞা প্রস্তুত করো।

সমাধান:

১ একটি সমৃদ্ধ সংখ্যা হলো: ১৮, ২০, ২৪, ৩০, ৩৬

(i) ১৮ এর গুণনীয়কগুলো হলো: ১, ২, ৩, ৬, ৯, ১৮
প্রকৃত গুণনীয়কগুলোর সমষ্টি

$$= 1 + 2 + 3 + 6 + 9 = 21 > 18$$

∴ ১৮ একটি সমৃদ্ধ সংখ্যা।

(ii) ২০ এর গুণনীয়কগুলো হলো: ১, ২, ৪, ৫, ১০, ২০
প্রকৃত গুণনীয়কগুলোর সমষ্টি

$$= 1 + 2 + 4 + 5 + 10 = 22 > 20$$

∴ ২০ একটি সমৃদ্ধ সংখ্যা।

(iii) ২৪ এর গুণনীয়কগুলো হলো: ১, ২, ৩, ৪, ৬, ৮, ১২ ২৪
প্রকৃত গুণনীয়কগুলোর সমষ্টি

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 12 = 36 > 24$$

∴ ২৪ একটি সমৃদ্ধ সংখ্যা।

(iv) ৩০ এর গুণনীয়কগুলো হলো: ১, ২, ৩, ৫, ৬, ১০, ১৫, ৩০
প্রকৃত গুণনীয়কগুলোর সমষ্টি

$$= 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 10 + 15 = 42 > 30$$

∴ ৩০ একটি সমৃদ্ধ সংখ্যা।

(v) ৩৬ এর গুণনীয়কগুলো হলো: ১, ২, ৩, ৪, ৬, ৯, ১২, ১৮, ৩৬
প্রকৃত গুণনীয়কগুলোর সমষ্টি

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 9 + 12 + 18 = 60 > 36$$

∴ ৩৬ একটি সমৃদ্ধ সংখ্যা।

২ সমৃদ্ধ সংখ্যার বিশেষ কিছু বৈশিষ্ট্য বিদ্যমান। যেমন:

(i) একটি সমৃদ্ধ সংখ্যার প্রতিটি গুণিতকই একটি সমৃদ্ধ সংখ্যা।

(ii) একটি নিখুঁত (Perfect) সংখ্যার প্রতিটি গুণিতক অবশ্যই একটি সমৃদ্ধ সংখ্যা হবে।

[জেনে রাখি: নিখুঁত সংখ্যা (Perfect number) হলো সে সকল সংখ্যা যাদের প্রকৃত গুণনীয়কগুলোর সমষ্টি ঐ সংখ্যাটির সমান। যেমন: ২৮।

২৮ এর প্রকৃত গুণনীয়কগুলো ১, ২, ৪, ৭, ১৪ এবং
এদের সমষ্টি = $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$

(iii) ৪৬ থেকে বড় সকল জোড় পূর্ণসংখ্যাকে কমপক্ষে
একটি উপায়ে দুটি সমৃদ্ধ সংখ্যার যোগফল হিসেবে
প্রকাশ করা যায়। যেমন: $56 = 36 + 20$, এখানে
৩৬ ও ২০ উভয়ই সমৃদ্ধ সংখ্যা।

আবার, $88 = 12 + 36 = 18 + 30$ ।

সমৃদ্ধ সংখ্যার বৈশিষ্ট্য অন্যান্য সংখ্যার চেয়ে আলাদা
হওয়ার কারণ হলো সমৃদ্ধ সংখ্যার প্রকৃত গুণনীয়ক
সংখ্যা অন্যান্য সংখ্যাগুলো থেকে বেশি হয়। গুণনীয়ক
গুলো দ্বারা বিভিন্ন সংখ্যা গঠন করা সম্ভব।

৩ একটি সংখ্যাকে সমৃদ্ধ সংখ্যা বলা হবে যদি ঐ সংখ্যাটি
ব্যতীত প্রদত্ত সংখ্যাটির সকল গুণনীয়কগুলোর সমষ্টি ঐ
সংখ্যা হতে বড়ো হয়। যেমন: ১৫ ও ২০ দুটি সংখ্যা। ১৫
এর গুণনীয়কগুলো হলো: ১, ৩, ৫ ও ১৫। ১৫ ব্যতীত সকল
গুণনীয়কগুলোর সমষ্টি = $1 + 3 + 5 = 9$ যা ১৫ হতে
ছোটো; অতএব, ১৫ সংখ্যাটি সমৃদ্ধ সংখ্যা নয়।

আবার, ২০ এর গুণনীয়কগুলো হলো: ১, ২, ৪, ৫, ১০ ও ২০
এবং ২০ ব্যতীত সকল গুণনীয়কগুলোর সমষ্টি = $1 + 2 +$
 $4 + 5 + 10 = 22$ যা ২০ হতে বড়ো অতএব, ২০ সংখ্যাটি
সমৃদ্ধ সংখ্যা।

বিশেষ দ্রষ্টব্য: ১২ ক্ষুদ্রতম জোড় সমৃদ্ধ সংখ্যা।

□ অবশিষ্ট তিনটি দলের জন্য শিক্ষক নিচের সমস্যাগুলো দিতে
পারেন:

সমস্যা-৪:

তোমাদের দলের অনুসন্ধানের জন্য a, b, c ও d এই চারটি চলক
নিয়ে কাজ করো। এরপর-

ক. চলকগুলোর এক অঙ্কবিশিষ্ট বিভিন্ন মান নিয়ে,

$a^{\circ} + b^{\circ} + c^{\circ} + d^{\circ}$ এর মান নির্ণয় করো এবং প্রাপ্ত মানটির
বিশেষ বৈশিষ্ট্য ব্যাখ্যা করো।

খ. যদি তোমাদের নেওয়া ভিন্ন ভিন্ন এক অঙ্কবিশিষ্ট
মানসমূহের জন্য তোমরা $a^{\circ} + b^{\circ} + c^{\circ} + d^{\circ} = (a + b + c$
 $+ d)^{\circ}$ অথবা, $a^{\circ} + b^{\circ} + c^{\circ} + d^{\circ} = 2(a + b + c + d)^{\circ}$
সম্পর্কটি পেতে চাও তবে a, b, c ও d এর মান কীরূপ হবে?
[সংকেত: মানসমূহ ক্রমিক হবে]

সমাধান:

ক. ধরি, $a = 3, b = 5, c = 6$ ও $d = 1$

$$\therefore a^{\circ} + b^{\circ} + c^{\circ} + d^{\circ}$$

$$= (3)^{\circ} + (5)^{\circ} + (6)^{\circ} + (1)^{\circ}$$

$$= 27 + 125 + 216 + 1 = 369$$

'৩৬৯' সংখ্যাটির প্রতিটি অঙ্ক ৩ দ্বারা বিভাজ্য এবং ভিন্ন।
অর্থাৎ এরা ৩ দ্বারা বিভাজ্য ক্রমিক অঙ্কত্বয়। এছাড়াও
সংখ্যাটির অঙ্কসমূহের যোগফল ৩ ও ৯ দ্বারা বিভাজ্য
হওয়ায় সংখ্যাটি ৩ ও ৯ উভয় সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য।

তবে সংখ্যাটির মূল বৈশিষ্ট্য হলো এটি ৩ দ্বারা বিভাজ্য
অঙ্কসমূহ ব্যবহার করে পুনরাবৃত্তি না ঘটিয়ে গঠিত বৃহত্তম
সংখ্যা।

খ. এক অঙ্কবিশিষ্ট চারটি ক্রমিক সংখ্যা নিতে হলে সংখ্যার জুটিগুলো নিচের মতো হতে পারবে:

সংখ্যাজুটি	ঘনের সমষ্টি	সমষ্টির বর্গ
১, ২, ৩, ৪	$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100$	$(1+2+3+4)^2 = 100$
২, ৩, ৪, ৫	$2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 228$	$(2+3+4+5)^2 = 196$
৩, ৪, ৫, ৬	$3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = 832$	$(3+4+5+6)^2 = 328$
৪, ৫, ৬, ৭	$4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 = 988$	$(4+5+6+7)^2 = 888$
৫, ৬, ৭, ৮	$5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 = 1196$	$(5+6+7+8)^2 = 676$
৬, ৭, ৮, ৯	$6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 = 1800$	$(6+7+8+9)^2 = 900$

এখানে, $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$ এর জন্য

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = (a+b+c+d)^3$$

আবার, $a = 5, b = 6, c = 7, d = 8$ এর জন্য

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 2(a+b+c+d)^3$$

∴ সংখ্যাগুলো ১, ২, ৩, ৪ অথবা ৫, ৬, ৭, ৮, ৯ হবে।

সমস্যা-৫:

এই অনুসন্ধানটিতে দলের সদস্যরা শুরুতে প্রথম ১০টি পূর্ণঘন সংখ্যা খুঁজে বের করবে। এরপর প্রতিবার ক্রমানুসারে প্রথম ২টি, প্রথম ৩টি, প্রথম ৪টি এভাবে সবগুলো সমষ্টি আলাদা আলাদাভাবে নির্ণয় করবে। এরপর প্রথম n সংখ্যক পূর্ণঘন সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয়ের জন্য সাধারণ পদ নির্ণয় করবে।

এখন পর্যবেক্ষণ করে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

ক. প্রথম ১০টি পূর্ণঘন সংখ্যার সমষ্টি কত?

খ. n সংখ্যক ক্রমিক পূর্ণসংখ্যার সমষ্টি ও প্রথম n সংখ্যক পূর্ণঘন সংখ্যার সমষ্টির সম্পর্ক নির্ণয় করো।

গ. প্রথম n সংখ্যক পূর্ণঘন সংখ্যার সমষ্টি ও প্রথম n সংখ্যক ক্রমিক পূর্ণসংখ্যার সমষ্টির সাধারণ পদটি কী হবে?

সমাধান:

ক. প্রথম ১০টি পূর্ণঘন সংখ্যা নির্ণয়:

$$\begin{array}{ll} 1^3 = 1 & 6^3 = 216 \\ 2^3 = 8 & 7^3 = 343 \\ 3^3 = 27 & 8^3 = 512 \\ 4^3 = 64 & 9^3 = 729 \\ 5^3 = 125 & 10^3 = 1000 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{প্রথম } 10\text{টি পূর্ণঘন সংখ্যার সমষ্টি} \\ = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 + 343 \\ + 512 + 729 + 1000 \\ = 3025 \end{aligned}$$

খ. এখানে,

$$\text{প্রথম } 2\text{টি পূর্ণঘন সংখ্যার সমষ্টি} = 1 + 8 = 9$$

$$\text{প্রথম } 3\text{টি পূর্ণঘন সংখ্যার সমষ্টি} = 1 + 8 + 27 = 36$$

$$\begin{aligned} \text{প্রথম } 4\text{টি পূর্ণঘন সংখ্যার সমষ্টি} &= 1 + 8 + 27 + 64 \\ &= 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{প্রথম } 5\text{টি পূর্ণঘন সংখ্যার সমষ্টি} &= 1 + 8 + 27 + 64 + 125 \\ &= 225 \end{aligned}$$

$$\text{প্রথম } 6\text{টি পূর্ণঘন সংখ্যার সমষ্টি}$$

$$= 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 = 881$$

$$\text{প্রথম } 7\text{টি পূর্ণঘন সংখ্যার সমষ্টি}$$

$$= 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 + 343 = 788$$

$$\begin{aligned} \text{প্রথম } 8\text{টি পূর্ণঘন সংখ্যার সমষ্টি} &= 1 + 8 + 27 + 64 \\ &+ 125 + 216 + 343 + 512 = 1296 \end{aligned}$$

$$\text{প্রথম } 9\text{টি পূর্ণঘন সংখ্যার সমষ্টি} = 1 + 8 + 27 + 64$$

$$+ 125 + 216 + 343 + 512 + 729 = 2025$$

$$\begin{aligned} \text{প্রথম } 10\text{টি পূর্ণঘন সংখ্যার সমষ্টি} &= 1 + 8 + 27 + 64 \\ &+ 125 + 216 + 343 + 512 + 729 + 1000 = 3025 \end{aligned}$$

পর্যবেক্ষণ:

$$\text{প্রথম } 1 = (1)^3$$

$$\text{প্রথম } 2 = (2)^3 = (1+1)^3$$

$$\text{প্রথম } 3 = (3)^3 = (1+2)^3$$

$$= (1+2+1)^3$$

$$\text{প্রথম } n = (n)^3$$

$$= (\text{প্রথম } n \text{ সংখ্যক ক্রমিক পূর্ণ সংখ্যার সমষ্টি})^3$$

সিদ্ধান্ত:

প্রথম n সংখ্যক পূর্ণঘন সংখ্যার সমষ্টি

$$= (\text{প্রথম } n \text{ সংখ্যক ক্রমিক পূর্ণসংখ্যার সমষ্টি})^3$$

গ. এখানে $1 = \frac{1 \times 2}{2}$

$$1 + 2 = 3 = \frac{2 \times 3}{2}$$

$$1 + 2 + 3 = 6 = \frac{3 \times 4}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 = \frac{4 \times 5}{2}$$

.....

.....

$$\therefore \text{প্রথম } n \text{ সংখ্যক ক্রমিক পূর্ণসংখ্যার সমষ্টি} = \frac{n(n+1)}{2}$$

এখানে,

$$\text{প্রথম } n \text{ সংখ্যক পূর্ণঘন সংখ্যার সমষ্টি} = (\text{প্রথম } n \text{ সংখ্যক ক্রমিক পূর্ণসংখ্যার সমষ্টি})^3$$

$$\therefore \text{প্রথম } n \text{ সংখ্যক পূর্ণঘন সংখ্যার সমষ্টি} = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^3$$

সমস্যা-৬:

৮৮ এর গুণনীয়কগুলো নির্ণয় করো। ৮৮ কে বাদ দিয়ে এর গুণনীয়কগুলো যোগ করো।

তোমাদের অনুসন্ধানের কাজগুলো নিম্নরূপ—

ক. ৮৮ এর গুণনীয়ক ও ৮৮ বাদে এদের যোগফল হতে ৮৮ সম্পর্কে কী মন্তব্য করা যায়?

খ. ৯৪৫ সংখ্যাটির জন্য একই বৈশিষ্ট্যের আলোকে মন্তব্য প্রদান করো।

সমাধান:

$$\begin{aligned} \text{ক } 88 &= 1 \times 88 \\ &= 2 \times 44 \\ &= 3 \times 29 \\ &= 4 \times 22 \\ &= 6 \times 14 \end{aligned}$$

এখানে, ৮৮ এর গুণনীয়কসমূহঃ

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 14, 24, 48$$

\therefore ৮৮ বাদে বাকি গুণনীয়কগুলোর যোগফল

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 12 + 14 + 24 = 76 > 88$$

\therefore ৮৮ একটি সমৃদ্ধ সংখ্যা।

$$\text{খ } 945 = 1 \times 945$$

$$\begin{aligned} &= 3 \times 315 \\ &= 5 \times 189 \\ &= 7 \times 135 \\ &= 9 \times 105 \\ &= 15 \times 63 \\ &= 21 \times 45 \\ &= 27 \times 35 \end{aligned}$$

এখানে, ৯৪৫ ব্যতীত এর অন্য গুণনীয়কগুলোর যোগফল

$$= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 15 + 21 + 27 + 35 + 45 + 63 + 105 + 135 + 189 + 315$$

$$= 975 > 945$$

\therefore ৯৪৫ একটি সমৃদ্ধ সংখ্যা।

বিশেষ দ্রষ্টব্য: ৯৪৫ ক্ষুদ্রতম বিজোড় সমৃদ্ধ সংখ্যা।

► অনুসন্ধান উপস্থাপনের জন্য নির্দেশনা /পাঠ্যবইয়ের পৃষ্ঠা-১৬/

তোমার দলের অনুসন্ধানটি কীভাবে করবে তার নির্দেশনা আগেই পেয়েছ। দলগতভাবে কাজটি হয়ে যাওয়ার পর কী করবে তার কিছু নির্দেশনা নিচে দেওয়া রইল, দেখে নাও।

১. প্রয়োজনীয় সংখ্যক পোস্টার কাগজে নিচের বিষয়গুলো লিখবে এবং ব্যাখ্যা করবে। প্রয়োজনে চিত্র, ছবি বা ডায়াগ্রাম ব্যবহার করবে।



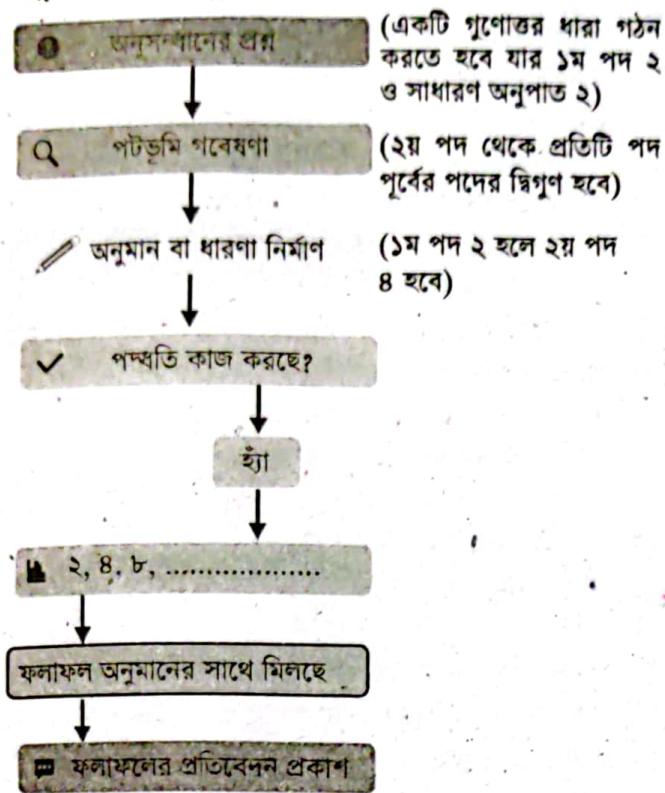
- তোমাদের দেওয়া অনুসন্ধানটি কী নিয়ে?
- কোন কোন প্রয়ের উত্তর করলে তোমরা অনুসন্ধানটি সমাধান করতে পারবে?
- অনুসন্ধানটি সম্পাদন করার জন্য তোমাদের কী কী উপকরণ, জ্ঞান এবং দক্ষতা প্রয়োজন হয়েছে?
- অনুসন্ধানটি কী ধাপে সমাধান করেছ, তা একটি ফ্লো-চার্টের সাহায্যে উপস্থাপন করো। প্রয়োজনে এই অভিজ্ঞতার “গাণিতিক অনুসন্ধানের ধাপ” এর সাহায্য নিতে পারো।
- অনুসন্ধানটির ফলাফল কী পেয়েছ?
- ফলাফল বিশ্লেষণ করে তোমরা নতুন কী কী শিখতে পারলে?
- কোনো ধাপে কি কোনো ভুল করেছিলে? ভুল শুধরে নেওয়ার জন্য কি আগের কোনো ধাপে আবার ফেরত যেতে হয়েছে?
- এবার শিক্ষকের নির্দেশনায় অপর একটি দলের সঙ্গে তোমাদের সমস্যাটি ব্যাখ্যা করো এবং তোমাদের পোস্টার বা প্রতিবেদনটি অদল-বদল করে নাও। তোমাদের অনুসন্ধানটি তারা বুঝতে পেরেছে নাকি খেয়াল করো। তাদের প্রশ্ন, পরামর্শ এবং মন্তব্যগুলো লিখে নাও। তাদের প্রশ্ন, পরামর্শ এবং মন্তব্যগুলো নিজেদের প্রতিবেদনে সংযোজন এবং পরিমার্জন করো।
- অপর যে দলের পোস্টার বা প্রতিবেদনটি পেয়েছ, সেটি বুঝতে পেরেছ কি না দেখ, তাদের প্রশ্ন করো এবং পরামর্শ দাও।
- এই অনুসন্ধানটিতে শিক্ষক বা বাবা-মা তোমাদের তেমন কোনো সাহায্য করবেন না, কেবল লক্ষ্য করবেন। সুতরাং, তোমাদের সমস্যার উত্তর নিজেদেরই নির্ণয় করতে হবে।
- যদি অর্থবৎ হয় তবে উপস্থাপনার দিন বাস্তব বস্তুর সাহায্যে প্রদর্শন করো।

সমাধান:

১

- আমরা এমন একটি ধারার সাধারণ পদ নির্ণয় করব যার ১ম পদ ২ ও সাধারণ অনুপাত ২।
- সাধারণ অনুপাতের সাহায্যে ধারার কয়েকটি পদ নির্ণয় করতে পারলেই অনুসন্ধানটি সমাধান করা সম্ভব।
- অনুসন্ধানটি সম্পাদন করার জন্য উপকরণ হিসেবে আমাদের ক্যালকুলেটর ও কাগজের প্রয়োজন হয়েছে। এছাড়াও ঘাত বা সূচকের ব্যবহার ও ক্যালকুলেটর ব্যবহারের দক্ষতা থাকাও জরুরি ছিল।

৪. গাণিতিক অনুসন্ধানের ধাপ:



৫. অনুসন্ধানের ফলাফল:

$$\text{গুণোত্তর ধারাটির } 1\text{ম পদ} = 2 = 2^1$$

$$2\text{য় পদ} = 2 \times \text{সাধারণ অনুপাত}$$

$$= 2 \times 2 = 8 = 2^2$$

$$3\text{য় পদ} = 8 \times 2 = 8 = 2^3$$

$$4\text{থ পদ} = 8 \times 2 = 16 = 2^4$$

$$\therefore \text{সাধারণ বা } n \text{ তম পদ} = 2^n$$

চ. ফলাফল বিশ্লেষণের মাধ্যমে আমরা জানতে পারি যে, ধারাটির সাধারণ পদ ar^{n-1} সূত্রটিকে সমর্থন করে, যেখানে $a = 1$ ম পদ, $r = \text{সাধারণ অনুপাত এবং } n = \text{পদসংখ্যা}$ । সূত্রটিতে a ও r এর মান বসিয়ে পাই, n তম পদ $= 2 \times 2^{n-1}$

$$= 2^{1+n-1}$$

$$= 2^n$$

ই. কোনো ধাপে ভুল হয়লি।

২. অপর একটি দলকে অনুসন্ধানটি দেখানোর পর-

প্রয়োজন:

- সূচক বা ঘাত এর সাথে পদগুলোর সম্পর্ক কি?
- কিভাবে যেকোনো ত্রৈমের পদকে কেবলমাত্র ২ এর সূচক আকারেই দেখানো যায়?
- ২ এর পরিবর্তে ৩ এর সূচক আকারে সাধারণ পদ পেতে হলে কোথায় কী পরিবর্তন করতে হবে?

পরামর্শ:

- সাধারণ পদ এর পাশাপাশি সমষ্টির সাধারণ রূপ বা n পদের সমষ্টির জন্য গাণিতিক অনুসন্ধান করা যেতে পারে।
- ১ম পদ ও সাধারণ অনুপাত ডি঱ রেখে গাণিতিক অনুসন্ধানটি করা যেতে পারে।

মন্তব্য: প্রদত্ত শর্তানুযায়ী সাধারণ পদটি সম্পূর্ণ সঠিক।

৩. অপর দলের সম্ভাব্য প্রস্তুতকৃত সমস্যা ও সমাধান:

শুধুমাত্র ৯ অঙ্কটি দ্বারা গঠিত সংখ্যার বর্গের প্যাটার্ন নির্ণয়। ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে ৯ অঙ্কটি দ্বারা গঠিত সংখ্যার বর্গের প্যাটার্ন নির্ণয়।

ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে ৯ অঙ্কটি দ্বারা গঠিত সংখ্যাগুলোর বর্গ নির্ণয় কর।

$$9^2 = 81$$

$$99^2 = 9801$$

$$999^2 = 998001$$

$$9999^2 = 99980001$$

$$99999^2 = 9999800001$$

n সংখ্যক ৯ দ্বারা গঠিত সংখ্যার বর্গ

$$= (n - 1) \text{ সংখ্যক } 9' '8' '(n - 1) \text{ সংখ্যক } 0' '1';$$

পাশাপাশি অঙ্কগুলোকে লিখে যেতে হবে।

আমাদের করা প্রয়োজন:

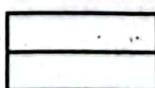
- যে প্রক্রিয়ায় বর্গ সংখ্যাটি দেখানো হয়েছে তার নাম কি?
- কোনো গাণিতিক নীতি বা সূত্র দেখানো যায় কি না?
- ৯ ব্যক্তিত অন্য কোন অঙ্ক দ্বারা গঠিত সংখ্যার ক্ষেত্রে কী ধরনের প্যাটার্ন পাওয়া যেতে পারে?

আমাদের দেওয়া পরামর্শ:

- গাণিতিক নীতি বা সূত্র দেখানো গেলে অধিক নির্ভরযোগ্য হতো।
- সকল অঙ্কের ক্ষেত্রে খাটো কিনা এ সম্পর্কে সিদ্ধান্ত দেওয়া যেতে।

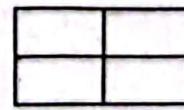
৫. গুণোত্তর ধারাটির প্রতিটি পদকে বাস্তব বস্তুর সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। নিম্নে এর বর্ণনা দেওয়া হলো:

- (i) একটি সাদা কাগজকে মাঝ বরাবর ভাজ কর। দেখবে কাগজটি ২ ভাগে ভাগ হয়েছে। একে আমরা ধারার প্রথম পদ হিসেবে বিবেচনা করতে পারি।



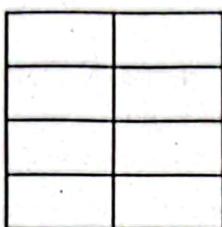
১য় চিত্র

- (ii) এবার ভাজ করা কাগজটিকে পুনরায় মাঝ বরাবর ভাজ করি। এতে কাগজটি মোট চার ভাগে বিভক্ত হবে। একে আমরা ধারার ২য় পদ হিসেবে বিবেচনা করতে পারি।



২য় চিত্র

- (iii) অনুরূপতাবে ৩য় বার ভাজ করলে কাগজটি ৮টি ভাগে
বিভক্ত হবে যা ধারার ৩য় পদের সাথে মিলে যায়।



৩য় চিত্র

অর্থাৎ কাগজটি যত বার ভাজ করা হবে গুগোত্তর
ধারাটির সেই তম পদের সমান অংশে কাগজটি বিভক্ত
হবে।

প্রশ্ন ► গাণিতিক অনুসন্ধান করে কী কী পাই?

/পাঠ্যবইয়ের পৃষ্ঠা-১৭/

তোমরা দলগতভাবে কিছু গাণিতিক অনুসন্ধানে অংশগ্রহণ করলে এবং অন্যান্য দলের অনুসন্ধানের ফলাফল দেখলে। কিন্তু তোমাদের মনে কি প্রশ্ন জেগেছে যে গাণিতিক অনুসন্ধান করে কী কী পাওয়া যায়? নিচে এই প্রশ্নের কিছু সম্ভাব্য উত্তর দেওয়া আছে। যে উত্তরগুলো তোমার পর্যবেক্ষণের সঙ্গে মিলে সেগুলোর বাম পাশের ঘরে টিক (✓) চিহ্ন দাও। নিচের উত্তরগুলো ছাড়াও তোমার মাথায় আরও কিছু এলে ফাঁকা ঘরে লিখে রাখো।

- প্রশ্নের উত্তর পাওয়া যায়।
- সমস্যার সমাধান পাওয়া যায়।
- উত্তর বা সমাধান নির্ণয়ের পদ্ধতি আবিষ্কার করা যায়।
- একজাতীয় সমস্যার সমাধানের পদ্ধতি ঠিক করা যায়।
- জটিল কোনো বিষয়ের উপর সিদ্ধান্ত নেওয়া যায়।
- নতুন আরও সমস্যা তৈরি করা যায়।
- ভুল করার মাধ্যমে সঠিক পদ্ধতি খুঁজে
পাওয়া যায়।
- নতুন গাণিতিক সম্পর্ক আবিষ্কার করা
যায়।
- গাণিতিক সমস্যা সমাধান করার মাধ্যমে অন্য
বিষয়ে সমস্যার সমাধান খুঁজে পাওয়া যায়।
- নিজের বুদ্ধিবৃত্তিক উন্নতি হয়।
- একই সমস্যার অপেক্ষাকৃত সহজ সমাধান নির্ণয় করা
যায়।
- একজাতীয় সমস্যার সাথে আরেকজাতীয় সমস্যার
সম্পর্ক গঠন করা যায়। যেমন: যোগজীকরণ বা
ইন্টিগ্রেশনের মাধ্যমে হিমাত্রিক বস্তুর ক্ষেত্রফল নির্ণয়
করা যায়, যা তোমরা উপরের শ্রেণিতে শিখবে।
- রাসায়নিক বিশ্লেষণ করে বিভিন্ন পদার্থের গাঠনিক ধর্ম
সম্পর্কেও ধারণা অর্জন করা যায়।



[তুমি যে বক্তব্যগুলোর পাশে টিক চিহ্ন দিয়েছ, সেগুলোর
একটি করে উদাহরণ দিতে পারবে?]

সমাধান:

- প্রশ্নের উত্তর পাওয়া যায়।
- সমস্যার সমাধান পাওয়া যায়।
- উত্তর বা সমাধান নির্ণয়ের পদ্ধতি আবিষ্কার করা যায়।
- একজাতীয় সমস্যার সমাধানের পদ্ধতি ঠিক করা যায়।
- জটিল কোনো বিষয়ের উপর সিদ্ধান্ত নেওয়া যায়।
- নতুন আরও সমস্যা তৈরি করা যায়।
- ভুল করার মাধ্যমে সঠিক পদ্ধতি খুঁজে
পাওয়া যায়।
- নতুন গাণিতিক সম্পর্ক আবিষ্কার করা
যায়।
- গাণিতিক সমস্যা সমাধান করার মাধ্যমে অন্য
বিষয়ে সমস্যার সমাধান খুঁজে পাওয়া যায়।
- নিজের বুদ্ধিবৃত্তিক উন্নতি হয়।
- একই সমস্যার অপেক্ষাকৃত সহজ সমাধান নির্ণয় করা
যায়।
- একজাতীয় সমস্যার সাথে আরেকজাতীয় সমস্যার
সম্পর্ক গঠন করা যায়। যেমন: যোগজীকরণ বা
ইন্টিগ্রেশনের মাধ্যমে হিমাত্রিক বস্তুর ক্ষেত্রফল নির্ণয়
করা যায়, যা তোমরা উপরের শ্রেণিতে শিখবে।
- রাসায়নিক বিশ্লেষণ করে বিভিন্ন পদার্থের গাঠনিক ধর্ম
সম্পর্কেও ধারণা অর্জন করা যায়।



যে বক্তব্যগুলোর পাশে টিক চিহ্ন দেওয়া হয়েছে, সেগুলোর একটি
করে উদাহরণ নিম্নরূপ:

- i গাণিতিক অনুসন্ধান করে প্রশ্নের উত্তর পাওয়া যায়।

প্রশ্ন: ১২ ও ১৮ সংখ্যা দুটির সাধারণ গুণনীয়ক কয়টি?

অনুসন্ধান: $12 = 1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4$

$$18 = 1 \times 18 = 2 \times 9 = 3 \times 6$$

$\therefore 12$ এর গুণনীয়কগুলো: ১, ২, ৩, ৪, ৬, ১২

১৮ এর গুণনীয়কগুলো: ১, ২, ৩, ৬, ৯, ১৮

উত্তর: ১২ ও ১৮ সংখ্যা দুটির সাধারণ গুণনীয়ক তিনটি।

- ii গাণিতিক অনুসন্ধান করে সমস্যার সমাধান পাওয়া যায়।

সমস্যা: একজন দোকানদার ১৮০০ টাকায় একটি পণ্য
বিক্রয় করায় তার ১০% ক্ষতি হয়। পণ্যটিতে ১৫% লাভ
করতে চাইলে বিক্রয়মূল্য কত হবে?

অনুসন্ধান: ১০% ক্ষতিতে ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে

$$\text{বিক্রয়মূল্য } (100 - 10) = ৯০ \text{ টাকা।}$$

এখন, বিক্রয়মূল্য ৯০ টাকা হলে ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা

$$\therefore \text{বিক্রয়মূল্য } ১ \text{ টাকা হলে ক্রয়মূল্য } = \frac{১০০}{৯০} \text{ টাকা}$$

∴ বিক্রয়মূল্য ১৮০০ টাকা হলে ক্রয়মূল্য

$$= \frac{100}{90} \times 1800 \text{ টাকা}$$

$$= 2000 \text{ টাকা}$$

১৫% লাভে ক্রয়মূল্য ১০০ হলে বিক্রয়মূল্য ১১৫ টাকা

$$\therefore \text{ক্রয়মূল্য } 2000 \text{ হলে বিক্রয়মূল্য } = \frac{115}{100} \times 2000 \text{ টাকা}$$

$$= 2300 \text{ টাকা}$$

সমাধান: দোকানদার ১৫% লাভ করতে চাইলে পণ্যটির বিক্রয়মূল্য হতে হবে ২৩০০ টাকা।

iii) গাণিতিক অনুসন্ধান করে সমাধান নির্ণয়ের পদ্ধতি আবিষ্কার করা যায়।

সমস্যা: একটি ব্যাংক ৬% বার্ষিক হারে জমাকৃত টাকার ওপর সুদ প্রদান করে। তাহলে ৫ বছরে ১০,০০০ টাকার সুদ কত হবে?

সমাধান: উক্ত সমস্যাটি সমাধানের মাধ্যমে আমরা সমাধান নির্ণয়ের পদ্ধতি অনুসন্ধান করব।

৬% বার্ষিক হারে সুদের অর্থ হচ্ছে,

১০০ টাকায় ১ বছরে সুদ দেয় ৬ টাকা

$$\therefore 1 \text{ টাকায় } 1 \text{ বছরে সুদ দেয়} = \frac{6}{100} \text{ টাকা}$$

$$\therefore 10,000 \text{ টাকায় } 1 \text{ বছরে সুদ দেয়} = \frac{6}{100} \times 10,000 \text{ টাকা}$$

$$\therefore 10,000 \text{ টাকায় } 5 \text{ বছরে সুদ দেয়} = \frac{6 \times 10,000 \times 5}{100} \text{ টাকা}$$

$$\therefore I = \frac{r \times P \times n}{100} \text{ টাকা}$$

এখানে, সুদের হারকে $r\%$, মোট টাকাকে P , বছরকে n এবং মোট সুদকে I হারা প্রকাশ করা হয়েছে।

তাহলে, সুদের পরিমাণ, $I = \frac{Pnr}{100}$

$$= \frac{10000 \times 5 \times 6}{100}$$

$$= 3000 \text{ টাকা}$$

$$P = 10,000 \text{ টাকা}$$

$$r = 6$$

$$n = 5$$

$$I = ?$$

iv) গাণিতিক অনুসন্ধান করে একজাতীয় সমস্যার সমাধানের পদ্ধতি ঠিক করা যায়।

সমস্যা: একটি ব্যবসায় বিনিয়োগ করলে বার্ষিক ১০% হারে মুনাফা লাভ করা যায়। একজন ব্যবসায়ী ৫০,০০০ টাকা ২ বছরের জন্য বিনিয়োগ করলেন। ২ বছর শেষে তিনি কত মুনাফা লাভ করবেন?

উক্ত সমস্যাটি পূর্বের উল্লিখিত সমস্যাটির অনুরূপ।

$$\text{মুনাফা, } I = \frac{Pnr}{100}$$

$$= \frac{50000 \times 2 \times 10}{100}$$

$$= 10,000 \text{ টাকা}$$

$$\begin{aligned} P &= 50000 \text{ টাকা} \\ n &= 2 \text{ বছর} \\ r &= 10 \\ I &=? \end{aligned}$$

v) গাণিতিক অনুসন্ধান করে জটিল কোনো বিষয়ের উপর সিদ্ধান্ত নেওয়া যায়।

গাণিতিক অনুসন্ধানের মাধ্যমে অপেক্ষাকৃত জটিল বিষয়ের ওপর সিদ্ধান্ত গ্রহণ করা যায়। যেমন: যোগাশ্রয়ী নীতি বিষয়ক একটি সমস্যা উল্লেখ করা হলো।

একজন ছাত্র সর্বোচ্চ ১০০ টাকা ব্যয় করে কিছু সংখ্যক কলম ও পেসিল কিনতে চায়। প্রতিটি কলম ও পেসিলের মূল্য যথাক্রমে ১২ টাকা ও ৮ টাকা। ছাত্রটি কমপক্ষে ১টি কলম কিনবে কিন্তু ৮টির বেশি পেসিল কিনবে না। ছাত্রটি কোন প্রকারের কতগুলো জিনিস কিনলে একত্রে সর্বাধিক সংখ্যক জিনিস কিনতে পারবে?

অনুসন্ধান:

কলম সংখ্যাকে x এবং পেসিল সংখ্যাকে y ধরলে

$$\text{প্রশ্নানুযায়ী, } 12x + 8y \leq 100 \quad \dots \dots \dots \quad (i)$$

$$x \geq 1 \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (ii)$$

$$\text{এবং } y \leq 8 \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (iii)$$

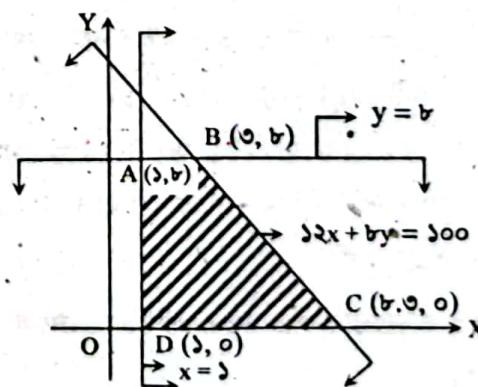
অসমতা তিনটি লেখচিত্রে উপস্থাপন করলে নিচের চিত্রের ন্যায় ABC-গাঢ় সমাধান অঙ্গুল পাবো।

$$A \text{ বিন্দুতে } x + y = 1 + 8 = 9$$

$$C \text{ বিন্দুতে } x + y = 8.3 + 0 = 8.3$$

$$D \text{ বিন্দুতে } x + y = 1 + 0 = 1$$

$$B \text{ বিন্দুতে } x + y = 3 + 8 = 11$$



$\therefore x = 3$ এবং $y = 8$ এর জন্য $x + y$ এর সর্বোচ্চমান পাওয়া যায়।

অর্থাৎ, ৩টি কলম ও ৮টি পেসিল বা মোট ১১টি সর্বোচ্চ সংখ্যক জিনিস ছাত্রটি কিনতে পারবে।

vi গাণিতিক অনুসন্ধান করে নতুন আরও সমস্যা তৈরি করা যায়।

গাণিতিক অনুসন্ধানের সাহায্যে বিভিন্ন ধরনের সমস্যা তৈরি ও সমাধান করা যায়।

সমস্যা ও অনুসন্ধান: একটি সাবানের কারখানায় একটি সুগন্ধী সাবানের জন্য উৎপাদন খরচ ২৪.৩ টাকা।

কারখানা মালিক ১০% লাডে ডিলারের কাছে, ডিলার ১০% লাডে পাইকারি বিক্রেতার কাছে এবং পাইকারি বিক্রেতা ১০% লাডে খুচরা বিক্রেতার নিকট সাবানটি বিক্রি করে। তাহলে, খুচরা বিক্রেতার সাবানের ক্রয়মূল্য কত?

উত্তর: $24.3 + 24.3 \times 0.1 = 26.73$ (ডিলারের ক্রয়মূল্য)

$26.73 + 26.73 \times 0.1 = 29.8$ (পাইকারি বিক্রেতার ক্রয়মূল্য)

$29.8 + 29.8 \times 0.1 = 32.78$ (খুচরা বিক্রেতার ক্রয়মূল্য)

vii ভুল করার মাধ্যমে সঠিক পদ্ধতি খুঁজে পাওয়া যায়।

নিম্নে একটি উদাহরণ লক্ষ করি:

$$1 = 1$$

$$\text{বা, } 1 - 1 = 1^2 - 1^2$$

$$\text{বা, } 1 - 1 = (1 + 1)(1 - 1)$$

বা, $1 = 1 + 1$ [উভয়পক্ষকে $(1 - 1)$ দ্বারা ভাগ করে।]

$$\text{বা, } 1 = 2$$

সাধারণভাবে দেখলে উপরের সমাধান পদ্ধতিতে কোনো ভুল নেই।

তাই বলে, $1 = 2$ গাণিতিকভাবে সম্ভব নয়। অর্থাৎ উপরের হিসেবে একটি ভুল বিদ্যমান। $(1 - 1)$ বা ০ দ্বারা কোনো কিছু ভাগ করা যায় না। উত্ত ভুলটি থেকে আমরা অন্য অনুরূপ সমস্যার হিসেবে সঠিক পদ্ধতি ব্যবহার করে সমাধান করতে পারি।

viii গাণিতিক অনুসন্ধান করে নতুন গাণিতিক সম্পর্ক আবিষ্কার করা যায়।

বৃত্তের ওপর যেকোনো দুটি বিন্দুর সংযোজক রেখাকে জ্যা বলে। আমরা এমন একটি গাণিতিক সম্পর্ক নির্ণয় করতে

চাই যেখানে বৃত্তের ওপর কতটি নির্দিষ্ট বিন্দুর সাহায্যে সর্বোচ্চ কতটি জ্যা অঙ্কন করা যায় সেটি নির্ণয় করবো।



বিন্দু সংখ্যা (n):

১	২	৩	৪	৫
জ্যা'র সংখ্যা: ০	১	৩	৬	১০
$= \frac{1 \times 0}{2}$	$= \frac{2 \times 1}{2}$	$= \frac{3 \times 2}{2}$	$= \frac{4 \times 3}{2}$	$= \frac{5 \times 4}{2}$

\therefore দেখা যাচ্ছে, n সংখ্যক বিন্দুর জন্য সর্বোচ্চ জ্যা অঙ্কন করা যাবে $\frac{n(n-1)}{2}$ সংখ্যক।

ix গাণিতিক সমস্যা সমাধান করার মাধ্যমে অন্য বিষয়ে সমস্যার সমাধান খুঁজে পাওয়া যায়।

গণিত হলো পরিমাণ, সংগঠন, পরিবর্তন ও স্থান বিষয়ক গবেষণা। গণিতে সংখ্যা ও অন্যান্য পরিমাপযোগ্য রাশিসমূহের মধ্যকার সম্পর্ক বর্ণনা করা হয়। গাণিতিক জ্ঞান অন্যান্য বিষয়গুলির বিষয়বস্তু বুঝতে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। যেমন: সাহিত্যে সনেট ব্যবহারে গণিতের ব্যবহার পরিলক্ষিত হয়। সামাজিক বিজ্ঞানে বিভিন্ন ধরনের গ্রাফ পড়তে ও ব্যাখ্যা করতে গাণিতিক জ্ঞান প্রয়োজন। রসায়ন, পদার্থ, ভূগোল প্রভৃতি বিষয়ক বিভিন্ন সমস্যার সমাধান সহজতর হয় গণিতের অনুসন্ধানী চর্চার মাধ্যমে।

x নিজের বুদ্ধিগুরুত্বিক উন্নতি হয়।

গাণিতিক অনুসন্ধান বিশ্লেষণাত্মক চিন্তাভাবনা এবং সমস্যা সমাধানের দক্ষতা বাড়ায়, পদ্ধতিগত এবং যৌক্তিক চিন্তাভাবনাকে উৎসাহিত করে এবং অন্যান্য সুবিধাগুলির মধ্যে আচ্ছাদিত সাথে অপরিচিত কাজগুলো পরিচালনা করার জন্য মনকে প্রস্তুত করে। গণিত চর্চা একটি মানসিক অনুশীলন যা মনুষকে শক্তিশালী ও বিকাশে সহায়তা করে। গাণিতিক অনুসন্ধানের মাধ্যমে বিভিন্ন রকম গাণিতিক ধার্থা, কুইজ, সুভোকু, পুলসাইড পাজল, দাবা, বোর্ড গেম, বুবিক্স কিউব বা গণিতের বিভিন্ন ম্যাজিক বা ট্রিকস খুব সহজেই বিশ্লেষণ করা সম্ভব হয়।



নিচের ছকের পর্যবেক্ষণ অনুযায়ী সমাধান মূল্যায়ন করে নির্দিষ্ট ঘরে টিক (✓) টিক দিন এবং পৃষ্ঠা ৪০ এর শিখন অভিজ্ঞতাভিত্তিক মূল্যায়ন ছকে
পারদর্শিতার সূচকের মাত্রা পূরণ করুন। শিক্ষার্থীকে অনুরূপ আরও অ্যাডিভিটি করানোর জন্য পৃষ্ঠা ৩৪ দেখুন।

শিখন কার্যক্রম মূল্যায়ন ছক-৫

পারদর্শিতার সূচক (PI)	পারদর্শিতার সূচকের মাত্রা		
	<input type="checkbox"/>	<input type="radio"/>	<input type="triangle"/>
০৩.০৮.০১.০১ সমস্যা সমাধানের জন্য বিভিন্ন গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া পরিকল্পনা করতে পেরেছে।	দলগত অনুসন্ধান করার সময় একটি অনুসন্ধান প্রক্রিয়া পরিকল্পনা করেছে।	দলগত অনুসন্ধান করার সময় একাধিক উপযুক্ত গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া পরিকল্পনা করেছে।	দলগত অনুসন্ধান করার সময় বিভিন্ন গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া পরিকল্পনা করে যৌক্তিক ব্যাখ্যা প্রদান করেছে।
০৩.০৮.০১.০৩ গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া এবং প্রাপ্ত বিভিন্ন সমাধানকে ক্রিটিক্যাল ও মুক্তমনে যাচাই করতে পেরেছে।	দলগত অনুসন্ধান সম্পর্ক ও উপস্থাপন করতে বিভিন্ন গাণিতিক অনুসন্ধানের মাধ্যমে সমাধান নির্ণয় করেছে।	দলগত অনুসন্ধান সম্পর্ক ও উপস্থাপন করতে বিভিন্ন গাণিতিক অনুসন্ধানের মাধ্যমে সমাধান নির্ণয় করে কোনটি কেন গ্রহণ করেছে তা যুক্তিসহ ব্যাখ্যা করেছে।	দলগত অনুসন্ধান সম্পর্ক ও উপস্থাপন করতে বিভিন্ন গাণিতিক প্রক্রিয়ার জন্য প্রাপ্ত বিভিন্ন সমাধান তুলনামূলক বিশ্লেষণ করে প্রেক্ষিত বিবেচনায় যৌক্তিক সিদ্ধান্ত গ্রহণ করেছে।
০৩.০৮.০৪.০৩ বাস্তব সমস্যাকে গাণিতিক সম্পর্কের মাধ্যমে প্রকাশ করতে পেরেছে।	দলগত অনুসন্ধান সম্পর্ক ও উপস্থাপন করতে গাণিতিক সম্পর্কের মাধ্যমে প্রকাশ করার জন্য বিভিন্ন সংখ্যার রাশি, প্রতীক ও চলক চিহ্নিত করেছে।	দলগত অনুসন্ধান সম্পর্ক ও উপস্থাপন করতে গাণিতিক সম্পর্কের মাধ্যমে প্রকাশ করেছে।	দলগত অনুসন্ধান সম্পর্ক ও উপস্থাপন করতে গাণিতিক সম্পর্কের মাধ্যমে প্রকাশ করে যুক্তি প্রদান করেছে।
০৩.০৮.০৪.০৪ বাস্তব ঘটনাবলির প্যাটার্ন পর্যবেক্ষণ করে বিমূর্ত রাশিতে প্রকাশ করতে পেরেছে।	দলগত অনুসন্ধান সম্পর্ক ও উপস্থাপন করতে প্যাটার্ন পর্যবেক্ষণ করে বিমূর্ত রাশিতে প্রকাশ করার জন্য কিছু রাশি চিহ্নিত করেছে।	দলগত অনুসন্ধান সম্পর্ক ও উপস্থাপন করতে প্যাটার্ন পর্যবেক্ষণ করে বিমূর্ত রাশিতে প্রকাশ করেছে।	দলগত অনুসন্ধান সম্পর্ক ও উপস্থাপন করতে প্যাটার্ন পর্যবেক্ষণ করে যৌক্তিকভাবে বিমূর্ত রাশিতে প্রকাশ করেছে।

সেশন
৬-৭

বৈশিষ্ট্যের পুনরাবৃত্তি থেকে প্যাটার্ন খুঁজি

সূত্র: পিছক সহায়িকা, পৃষ্ঠা ১৮।



এই সেশনের আগতিমিতিশুলো সম্পর্ক করতে একজন শিক্ষার্থীকে সংখ্যার গুণনীয়ক ও গুণিতক, সমৃদ্ধ সংখ্যা, প্যাটার্ন, ফিবোনাচি ধারা এবং সূত্র বা ফর্মুলা সম্পর্কে জানতে হবে, যা তোমরা ইতোমধ্যেই 'পাঠ সহায়ক বিষয়কর্তৃ' অংশে জেনেছ। এগুলো ভালোভাবে আয়ত্ত না হয়ে থাকলে আরও একবার পৃষ্ঠা ৩ ও ৪ থেকে দেখে নাও।

► বৈশিষ্ট্যের পুনরাবৃত্তি থেকে প্যাটার্ন /পাঠ্যবইয়ের পৃষ্ঠা-১৮/
নিচের দুই লাইনে বিভিন্ন সংখ্যা সাজানো রয়েছে। পর্যবেক্ষণ করে বলো, সংখ্যাগুলো যত পদ পর্যন্ত সাজানো রয়েছে তুমি কি তার পরের পদটি নির্ণয় করতে পারবে?

- ক. ১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬, ৭,
খ. ১, ২, ৪, ৮, ১৬, ৩২,

সমাধান:

ক. প্রথম অনুক্রমটির বৈশিষ্ট্য হলো: পরের পদ = আগের পদ + ১
 $= 1 + 1 = 2$

খ. তৃতীয় অনুক্রমটির বৈশিষ্ট্য হলো: পরের পদ = আগের পদ $\times 2$
 $= 32 \times 2 = 64$ (উত্তর)

প্রম. ► ফিবোনাচি অনুক্রমের ১২তম সংখ্যাটি কত?

/পাঠ্যবইয়ের পৃষ্ঠা-১৯/

এই ফাঁকা ঘরটি তোমার উত্তর নির্ণয়ের জন্য ব্যবহার করতে পার। তোমার উত্তর সম্পর্কে নিশ্চিত হতে পারলে ধারাটির মূল বৈশিষ্ট্যটি ব্যাখ্যা করে লিখে রাখতে পার।

সমাধান:

ফিবোনাচি অনুক্রমটি হলো:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots\dots$$

এখানে, ১ম পদ = ০, ২য় পদ = ১, তৃতীয় পদ = ১, ৪র্থ পদ = ২, ৫ম পদ = ৩, ৬ষ্ঠ পদ = ৫, ৭ম পদ = ৮, ৮ম পদ = ১৩, ৯ম পদ = ২১, ১০ম পদ = ৩৪

$$৩য় পদ = ১ = (০ + ১) = ১ম পদ + ২য় পদ,$$

$$৪র্থ পদ = ২ = (১ + ১) = ২য় পদ + ৩য় পদ$$

$$৫ম পদ = ৩ = (১ + ২) = ৩য় পদ + ৪র্থ পদ,$$

$$৬ষ্ঠ পদ = ৫ = (২ + ৩) = ৪র্থ পদ + ৫ম পদ$$

$$৭ম পদ = ৮ = (৩ + ৫) = ৫ম পদ + ৬ষ্ঠ পদ \dots\dots$$

∴ অনুক্রমটির মূল বৈশিষ্ট্য: পরপর দুটি পদের যোগফল পরবর্তী পদের সমান।

$$\therefore ১১তম পদ = ৯ম পদ + ১০ম পদ = ২১ + ৩৪ = ৫৫$$

$$\therefore ১২তম পদ = ১০ম পদ + ১১তম পদ = ৩৪ + ৫৫ = ৮৯$$

$$\therefore \text{ফিবোনাচি অনুক্রমের } 12\text{তম সংখ্যাটি } 89।$$

প্রম. ► কেন খুঁজব প্যাটার্ন?

/পাঠ্যবইয়ের পৃষ্ঠা-১৯/

ভাবছ যে প্যাটার্ন নিয়ে কথা বলার কী প্রয়োজন? তাহলে পাটিগণিত এবং বীজগণিতের দুটি খুব সাধারণ সমস্যার মধ্যে দিয়ে প্যাটার্নের প্রয়োজনীয়তা বোঝার চেষ্টা করি, এসো। সমস্যা দুটি হলো:

১. ৫০ এর ৫% কত?

২. $(2+b)^2 = ?$

সমাধান:

১. ৫০ এর ৫% = $50 \times \frac{5}{100} = 2.5$

২. $(2+b)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times b + b^2$
 $= 8 + 8b + b^2$

প্রম. ► ৫০০ এর ২৫% কত?

/পাঠ্যবইয়ের পৃষ্ঠা-১৯/

সমাধান: ৫০০ এর ২৫%

$$= 500 \text{ এর } \frac{25}{100} = 125$$

প্রম. ► $(a+29)^2 = ?$

/পাঠ্যবইয়ের পৃষ্ঠা-১৯/

সমাধান: $(a+29)^2 = a^2 + 2 \times a \times 29 + 29^2$
 $= a^2 + 58a + 841$

একক কর্মপত্র

/পাঠ্যবইয়ের পৃষ্ঠা-১৯/

তুমি কি নিজের মতো করে কোনো সংখ্যার প্যাটার্ন এবং তার বৈশিষ্ট্য তৈরি করতে পারবে? চেষ্টা করে দেখো এবং তোমার অনুসন্ধানের ফলাফল কর্মপত্রের মাধ্যমে শিক্ষকের কাছে জমা দাও।

সমাধান: নিম্নে দেশলাইয়ের কাঠি বা অন্য যেকোনো কাঠির সাহায্যে প্যাটার্ন তৈরি করা হলো:



আকৃতি নং ১ ২ ৩ ৪

কাঠি সংখ্যা: ১ ৮ ৯ ১০

সাধারণ পার্থক্য: ৩ ৩ ৩ ৩

এখন, ১ম আকৃতিতে কাঠির সংখ্যা = $1 = 1 \times 3 - 2$

২য় আকৃতিতে কাঠির সংখ্যা = $8 = 2 \times 3 - 2$

৩য় আকৃতিতে কাঠির সংখ্যা = $9 = 3 \times 3 - 2$

৪র্থ আকৃতিতে কাঠির সংখ্যা = $10 = 4 \times 3 - 2$

∴ n তম আকৃতিতে কাঠির সংখ্যা = $n \times 3 - 2$

তাহলে, ১, ৪, ৭, ১০, প্যাটানটির n তম পদ = $3n - 2$
আবার,

$$\text{প্রথম দুটি আকৃতিতে মোট কাঠি সংখ্যা} = 1 + 4 = 5 = \frac{5}{2}(1+4)$$

$$\text{প্রথম } 3\text{টি আকৃতিতে মোট কাঠি সংখ্যা} = 1 + 4 + 7 = 12$$

$$= \frac{3}{2}(1+7)$$

$$\text{প্রথম } 4\text{ আকৃতিতে মোট কাঠি সংখ্যা} = 1 + 4 + 7 + 10 = 22 \\ = \frac{8}{2}(1+10)$$

∴ প্রথম n টি আকৃতিতে মোট কাঠি সংখ্যা

$$= \frac{n}{2}(\text{প্রথম পদ} + n \text{ তম পদ})$$

∴ প্যাটানটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি

$$= \frac{n}{2}(\text{প্রথম পদ} + n \text{ তম পদ})$$



নিচের ছকের পর্যবেক্ষণ অনুযায়ী সমাধান মূল্যায়ন করে নির্দিষ্ট ঘরে টিক (✓) চিহ্ন দিন এবং পৃষ্ঠা ৪০ এর শিখন অভিজ্ঞতাভিত্তিক মূল্যায়ন ছকে
পারদর্শিতার সূচকের মাত্রা পূরণ করুন। শিক্ষার্থীকে অনুরূপ আরও অ্যাডিভিটি করানোর জন্য পৃষ্ঠা ৩৪ দেখুন।

শিখন কার্যক্রম মূল্যায়ন ছক-৬

পারদর্শিতার সূচক (PI)	পারদর্শিতার সূচকের মাত্রা		
	□	○	△
০৩.০৮.০১.০১ সমস্যা সমাধানের জন্য বিভিন্ন গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া পরিকল্পনা করতে পেরেছে।	একক কর্মপত্রটি সম্পন্ন ও উপস্থাপন করার সময় একটি অনুসন্ধান প্রক্রিয়া পরিকল্পনা করেছে।	একক কর্মপত্রটি সম্পন্ন ও উপস্থাপন করার সময় একাধিক উপযুক্ত গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া পরিকল্পনা করেছে।	একক কর্মপত্রটি সম্পন্ন ও উপস্থাপন করার সময় বিভিন্ন গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া পরিকল্পনা করে যৌক্তিক ব্যাখ্যা প্রদান করেছে।

শেখন
৮

গাণিতিক অনুসন্ধানে তথ্যের উৎস

/সূত্র: শিক্ষক সহায়িকা, পৃষ্ঠা ১১/



এই শেখনের অ্যাডিভিটিগুলো সম্পন্ন করতে একজন শিক্ষার্থীকে তথ্য ও উপাত্ত এবং তথ্যের উৎসের প্রকারভেদ সম্পর্কে জানতে হবে, যা তোমরা
ইতোমধ্যেই ‘পাঠ সহায়ক বিষয়বস্তু’ অংশে জেনেছ। এগুলো ভালোভাবে আয়ত্ত না হলে ধাক্কে আরও একবার পৃষ্ঠা ৪ থেকে দেখে নাও।

► **গাণিতিক অনুসন্ধানে তথ্যের উৎস** /পঠ্যবইয়ের পৃষ্ঠা-২০/
তোমাদের একটি ঘটনা বলি তাহলে সহজে বুঝতে পারবে। মনে
করো তোমরা অষ্টম ‘জবা’ শাখার শিক্ষার্থী; তোমরা মোট ৪৫ জন
ছেলেমেয়ে। তোমাদের বিদ্যালয়ের সব শ্রেণিতেই শিক্ষণীয় কোনো
একটি জায়গায় ঘুরতে যাওয়ার পরিকল্পনা হচ্ছে। কিন্তু তোমরা
সিদ্ধান্ত নিতে পারছোনা কোথায় যাবে। তোমাদের বন্ধু অনিক
অষ্টম শ্রেণিতে ‘সূর্যমুখী’ শাখার বন্ধুদের নিকট থেকে জেনে
এলো যে তারা চিড়িয়াখানায় ঘুরে এসেছে। অনিকের কাছ থেকে
শুনে তোমাদের ক্লাসের ছেলেরা সিদ্ধান্ত নিয়ে ফেলল যে অষ্টম
'জবা' শাখার শিক্ষার্থীদেরও চিড়িয়াখানায় যাওয়া উচিত।



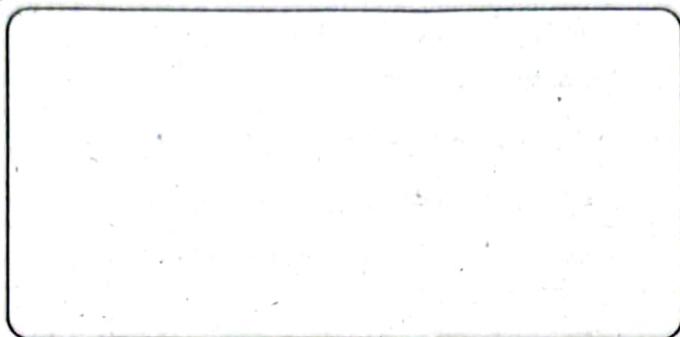
একটু চিন্তা করে বলো তো এই সিদ্ধান্ত প্রহণের পদ্ধতির
ভেতরে কোনো ভুল আছে কি না? যদি থাকে তাহলে কী
কী লেখো।

সমাধান: উপরে বর্ণিত সিদ্ধান্ত প্রহণের পদ্ধতির ক্ষেত্রে ভুল
আছে। ভুলগুলো হলো:

- কোনো কর্মপরিকল্পনা বাস্তবায়ন করতে হলে সকলের
অংশগ্রহণ প্রয়োজন।
- মতামত প্রহণের ক্ষেত্রে সকলের মতামত বিবেচনা করতে
হবে এবং সব ধরনের মতামতের প্রতি সহনশীল ও শ্রদ্ধা
জানাতে হবে।
- সংখ্যাগরিষ্ঠের মতামতের ভিত্তিতে চূড়ান্ত সিদ্ধান্ত নিতে
হবে।

প্রমাণ ▶ তুমি কি নিজের ভাষায় ব্যাখ্যা করতে পারবে তথ্য বা উপাত্ত সংগ্রহের জন্য নির্ভরযোগ্য উৎস ব্যবহার করা কেন প্রয়োজন?

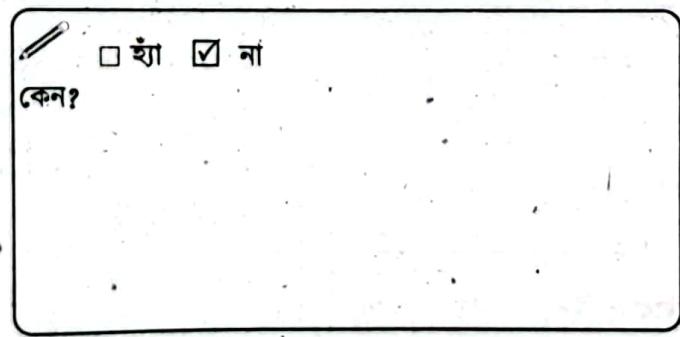
(পাঠ্যবইয়ের পৃষ্ঠা-২১)

**সমাধান:**

- নির্ভরযোগ্য উৎস হতে প্রাপ্ত তথ্য অপেক্ষাকৃত সঠিক হয়।
- নির্ভরযোগ্য উৎস হতে প্রাপ্ত তথ্যের বিপ্লবেগে যে ফলাফল পাওয়া যায় তা হতে সঠিক সিদ্ধান্ত গ্রহণ করা যায় যেটি ফলপ্রসূ হওয়ার সম্ভাবনা সবচেয়ে বেশি।
- অনির্ভরযোগ্য উৎসের তথ্যের গড় মিলের কারণে সমস্যার সৃষ্টি হতে পারে।
- নির্ভরযোগ্য উৎস হতে প্রাপ্ত তথ্য যাচাই করে পরিকল্পনা অনুযায়ী বিকল্প সিদ্ধান্ত গ্রহণে সুবিধা হয়।

প্রমাণ ▶ বিজ্ঞানীগণ তোমার এলাকার ১০০ জন মানুষকে টিকা দিলেন, আর বললেন যে সামনের মাসে এসে তাদের স্বাস্থ্য কেমন আছে, এ সম্পর্কিত তথ্য নিয়ে যাবেন। কিন্তু পরের মাসে ঐ ১০০ জনের মধ্যে ৬৫ জন অন্য এলাকায় চলে গেলেন। এখন বিজ্ঞানীরা যদি তোমার এলাকার যে কোনো ১০০ জনের থেকে উপাত্ত সংগ্রহ করেন এবং তার ভিত্তিতে টিকা তৈরি করেন, তুমি কি সেই টিকা নিবে?

(পাঠ্যবইয়ের পৃষ্ঠা-২১)

**সমাধান:**

হ্যাঁ না

কেন?

- টিকা তৈরির ক্ষেত্রে যে ১০০ জনের তথ্য গ্রহণ করা হয়েছে তাদের বেশির ভাগই পূর্বের ট্রায়ালে অংশগ্রহণ করেনি।
- নির্ভরযোগ্য উৎস হতে তথ্য সংগ্রহ করা হয়নি।
- প্রাপ্ত উপাত্তের ভিত্তিতে তৈরিকৃত টিকাটি কার্যকর ফলাফল পাওয়ার সম্ভাবনা কম, মানব স্বাস্থ্যের ওপর বিরূপ প্রতিক্রিয়া হতে পারে।

► উৎসের নির্ভরযোগ্যতা যাচাই

(পাঠ্যবইয়ের পৃষ্ঠা-২১)

১. টিকার কার্যকারিতা যাচাই করার ক্ষেত্রে প্রাথমিক উৎস কী হতে পারে?

২. মানুষ ছাড়া আর কোনো উৎস কি প্রাথমিক উৎস হতে পারে?

**সমাধান:**

১. টিকার কার্যকারিতা যাচাই করার ক্ষেত্রে প্রাথমিক উৎস হিসেবে যে প্রাণীর টিকা তৈরি করা হবে এই প্রাণী ব্যবহার করাই সর্বাধিক কার্যকর। যেমন: বিড়ালের জন্য টিকা তৈরির ক্ষেত্রে বিড়ালই প্রাথমিক উৎস, আবার মানুষের জন্য ভ্যাক্সিন বা টিকা তৈরি করার ক্ষেত্রে মানুষকেই ট্রায়াল বা প্রাথমিক উৎস হিসেবে ব্যবহার করা ভালো। কারণ, প্রতিটি জীবদেহেই কিছু স্বতন্ত্র শরীরবৃত্তীয় বৈশিষ্ট্য বিদ্যমান। তবে মানুষের জন্য টিকা তৈরির ক্ষেত্রে প্রাথমিক পর্যায়ে নিম্নস্তরের প্রাণী যেমন: বানর, শিমপাঞ্জি ইত্যাদির ওপর ট্রায়াল চালানো হয় কারণ এগুলোর সাথে মানুষের শরীরবৃত্তীয় বৈশিষ্ট্য অনেকটা কাছাকাছি।

২. মানুষ ছাড়া আরও বিভিন্ন জীব প্রাথমিক উৎস হতে পারে। যেমন: ইদুর, কুকুর, বিড়াল, মুরগি, বানর, হনুমান, গরিলা, শিমপাঞ্জি ইত্যাদি।

২. জোড়ায় কাজ

(পাঠ্যবইয়ের পৃষ্ঠা-২৩)

সংশ্পষ্টীর সঙ্গে আলোচনা করে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর খুঁজে বের করে লেখো।

নিচের বক্সে একটি টিকা তৈরির সময় বিজ্ঞানীগণ কোন উৎস থেকে তথ্য সংগ্রহ করেছিল তার একটি বর্ণনা দেওয়া আছে। তোমাদের কাজ হবে তথ্যের উৎসের ধরণ ও বৈশিষ্ট্যগুলো শনাক্ত করে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর খুঁজে বের করা।

টিকার কার্যকারিতা পরীক্ষার জন্য তথ্য সংগ্রহের প্রক্রিয়া প্রথমে বিজ্ঞানীগণ বিজ্ঞানাগারে টিকাটি তৈরি করেন। এরপর ঐ টিকা বিভিন্ন দলের মানুষের উপর প্রয়োগ করে, তাদের কাছ থেকে টিকার কার্যকারিতা সম্পর্কে তথ্য সংগ্রহ করেন। টিকাটি তৈরি করার জন্য বিজ্ঞানীগণ ৩টি ধাপে পরীক্ষা-নিরীক্ষা করে তথ্য সংগ্রহ করেন। ২০২০ সালের জুলাই মাসে, টিকার তৃতীয় ধাপের পরীক্ষা (trial) পরিচালনা করা হয়। সারা বিশ্ব থেকে ৪৬,৩০১ জন বিভিন্ন বয়সি মানুষ এ পরীক্ষায় অংশগ্রহণ করেন। তাদের সকলকে টিকা প্রদান করে, এর কার্যকারিতা পরীক্ষা করার জন্য বিজ্ঞানীগণ তথ্য সংগ্রহ করেন। প্রাপ্ত তথ্যগুলো ভালোমতো বিশ্লেষণ ও পরীক্ষার মাধ্যমে ঐ টিকা কার্যকর হিসেবে প্রমাণ পাওয়া যায়।

নানা বৈশিষ্ট্যের মানুষ এ পরীক্ষায় অংশগ্রহণ করেছিলো যাতে বিজ্ঞানীগণ নিশ্চিত করতে পারেন যে ঐ টিকাটি বিভিন্ন ধরণের মানুষের জন্য কার্যকরী। যেমন- এই পরীক্ষায় ৪৯.১% পুরুষ এবং ৫০.৯% নারী ছিলেন। এশিয়ান, আফ্রিকান, ল্যাটিন প্রভৃতি দলের মানুষ ছিলেন। এছাড়াও অংশগ্রহণকারীদের মধ্যে বিভিন্ন বয়সের মানুষের উপস্থিতি নিশ্চিত করা হয়েছিল। নিচের ছকে বয়স অনুযায়ী মানুষের সংখ্যা দেয়া হলো:

বয়স (বছর)	অংশগ্রহণকারীর সংখ্যা
১২-১৫	২,২৬০
১৬-১৭	৭৫৪
১৮-৫৫	২৫,৪২৭
৫৬+	১৭,৮৭৯

- ক. টিকা তৈরির জন্য কোন ধরনের উৎস থেকে বিজ্ঞানীরা তথ্য সংগ্রহ করেছিলেন? কেন?
- খ. টিকা তৈরির জন্য যে উৎস ব্যবহার করা হয়েছিল তাদের সবার বৈশিষ্ট্য কি একই রকম ছিল? ভিন্নতা থাকলে তা বর্ণনা করো।
- গ. তথ্য সংগ্রহের উৎসের ক্ষেত্রে বয়সের ভিন্নতা থাকলে কী সুবিধা হয়েছে বলে তুমি মনে করো, লেখো।

নিচের ছকের পর্যবেক্ষণ অনুযায়ী সমাধান মূল্যায়ন করে নির্দিষ্ট ঘরে টিক (✓) চিহ্ন দিন এবং পৃষ্ঠা ৪০ এর শিখন অভিজ্ঞতাভিত্তিক মূল্যায়ন ছকে পারদর্শিতার সূচকের মাত্রা পূরণ করুন। শিক্ষার্থীকে অনুরূপ আরও আর্টিভিটি করানোর জন্য পৃষ্ঠা ৩৪ দেখুন।

শিখন কার্যক্রম মূল্যায়ন ছক-৭

পারদর্শিতার সূচক (PI)	পারদর্শিতার সূচকের মাত্রা		
	<input type="checkbox"/>	<input type="radio"/>	<input type="triangle"/>
০৩.০৮.০১.০২ গাণিতিক অনুসন্ধানে তথ্যের উৎস সঠিকভাবে চিহ্নিত করতে পেরেছে।	জোড়ায় কাজাটি সম্পূর্ণ ও উপস্থাপন করার সময় গাণিতিক অনুসন্ধানে তথ্যের উৎস চিহ্নিতকরণের পরিকল্পনা করেছে।	জোড়ায় কাজাটি সম্পূর্ণ ও উপস্থাপন করার সময় পরিকল্পনা অনুযায়ী তথ্যের উৎস সঠিকভাবে চিহ্নিত করেছে।	জোড়ায় কাজাটি সম্পূর্ণ ও উপস্থাপন করার সময় চিহ্নিত উৎসসমূহের গাণিতিক ব্যাখ্যা করেছে।

শিখনকালীন মূল্যায়ন: আরও অনুশীলন

অধিক অনুশীলনের জন্য এ অংশে পাঠ্যবই ও শিক্ষক সহায়িকা অনুসরণে আরও কিছু অ্যাটিভিটি দেওয়া হয়েছে।



শিক্ষক/অভিভাবকদের জন্য নির্দেশনা



- এখানে শিক্ষার্থীর দক্ষতা বৃদ্ধির জন্য পারদর্শিতার নির্দেশকের (PI) সাথে সংশ্লিষ্ট আরও কিছু কাজ দেওয়া হয়েছে। শিক্ষক/অভিভাবক এগুলো শিক্ষার্থীকে দিয়ে করাবেন এবং সমাধান দেখে সঠিকতা যাচাই করবেন।
- এ অংশে দেওয়া কার্যক্রমগুলোর প্রতিটি পাঠ্যবইয়ের অ্যাটিভিটির অনুরূপ। শিক্ষক পাঠ্যবইয়ের প্রতিটি অ্যাটিভিটির পরপর সংশ্লিষ্ট কাজটি করাতে পারেন। অথবা সবগুলো শেষ করার পর 'রিভিশন' হিসেবেও করাতে পারেন।



একক কাজ-১: সমৃদ্ধ সংখ্যায় প্যাটার্ন খুঁজি

শিক্ষক ক্লাসে শিক্ষার্থীদের উদ্দেশ্যে বললেন যে, ১ থেকে ১০০ এর মধ্যে ২২টি সমৃদ্ধ সংখ্যা পাওয়া যায়। অতঃপর তিনি বোর্ডে সংখ্যাগুলো লিখতে শুরু করলেন। কিছু শিক্ষার্থী সংখ্যাগুলোর মধ্যে প্যাটার্ন খোজার চেষ্টা করে ব্যর্থ হলো। কিন্তু শিক্ষক লেখা শেষ করে বললেন, এই সমৃদ্ধ সংখ্যাগুলোর মধ্যেও ১টি প্যাটার্ন রয়েছে। তুমি কি প্রথম ২২টি সমৃদ্ধ সংখ্যার মধ্যে খুঁজে পাওয়া প্যাটার্নটি ধরতে পারবে? গাণিতিক অনুসন্ধানের ধারণা ব্যবহার করো।

(পারদর্শিতার সূচক ০৩.০৮.০১.০১ ৪ ০৩.০৮.০১.০৩ এর আলোকে)
সমাধান: ১ থেকে ১০০ এর মধ্যে পাওয়া ২২টি সমৃদ্ধ সংখ্যা নিম্নরূপ:

১২, ১৮, ২০, ২৪, ৩০, ৩৬, ৪০, ৪২, ৪৮, ৫৪, ৫৬, ৬০, ৬৬, ৭০, ৭২, ৭৪, ৮০, ৮৪, ৮৮, ৯০, ৯৬, ১০০

গাণিতিক অনুসন্ধান:

- সংখ্যাগুলোর প্রকৃতি
- ক্রমিক সংখ্যাগুলোর পার্থক্য।



১ নং একক কাজটির সমাধান নিচের ছকের পর্যবেক্ষণ অনুযায়ী মূল্যায়ন করুন।

অনুসন্ধান এর ফলাফল:

- সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিই জোড় সংখ্যা।

$18 - 12 = 6$	$66 - 60 = 6$
$20 - 18 = 2$	$70 - 66 = 4$
$24 - 20 = 4$	$72 - 70 = 2$
$30 - 24 = 6$	$78 - 72 = 6$
$36 - 30 = 6$	$80 - 78 = 2$
$40 - 36 = 4$	$84 - 80 = 4$
$42 - 40 = 2$	$88 - 84 = 4$
$48 - 42 = 6$	$90 - 88 = 2$
$54 - 48 = 6$	$96 - 90 = 6$
$56 - 54 = 2$	$100 - 96 = 4$
$60 - 56 = 4$	

অর্থাৎ পরপর দুইটি সংখ্যার পার্থক্য কোনো নিদিষ্ট ক্রমিক প্যাটার্ন অনুসরণ করে না। তবে এরা ২, ৪ অথবা ৬ এর মধ্যে যেকোনো একটি অবশ্যই হবে।

প্রথম ২২টি সমৃদ্ধ সংখ্যার সবগুলোই জোড় এবং এদের পরপর দুইটি সংখ্যার পার্থক্য ২, ৪ অথবা ৬।

পর্যবেক্ষণ ছক

পারদর্শিতার সূচক (PI)	পারদর্শিতার সূচকের মাত্রা [প্রযোজ্য ঘরে টিক (<input checked="" type="checkbox"/>) চিহ্ন দিন]		
০৩.০৮.০১.০১ সমস্যা সমাধানের জন্য বিভিন্ন গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া পরিকল্পনা করতে পেরেছে।	প্রদত্ত সমস্যা সমাধানের জন্য একটি অনুসন্ধান প্রক্রিয়া পরিকল্পনা করেছে।	প্রদত্ত সমস্যা সমাধানের জন্য একাধিক উপযুক্ত গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া পরিকল্পনা করেছে।	প্রদত্ত সমস্যা সমাধানের জন্য বিভিন্ন গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া পরিকল্পনা করে যৌক্তিক ব্যাখ্যা প্রদান করেছে।
০৩.০৮.০১.০৩ গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া এবং প্রাপ্ত বিভিন্ন সমাধানকে ত্রুটিক্যালি ও মুক্তমনে যাচাই করতে পেরেছে।	বিভিন্ন গাণিতিক অনুসন্ধানের মাধ্যমে সমাধান নির্ণয় করে কোনটি কেন গ্রহণ করেছে তা যুক্তিসহ ব্যাখ্যা করেছে।	বিভিন্ন গাণিতিক অনুসন্ধানের মাধ্যমে সমাধান নির্ণয় করে কোনটি কেন গ্রহণ করেছে তা যুক্তিসহ ব্যাখ্যা করেছে।	বিভিন্ন গাণিতিক প্রক্রিয়ার জন্য প্রাপ্ত বিভিন্ন সমাধান তুলনামূলক বিশ্লেষণ করে প্রেক্ষিত বিবেচনায় যৌক্তিক সিদ্ধান্ত গ্রহণ করেছে।



একক কাজ-২: ঘড়িতে প্যাটার্ন দেখি

মিতু তার বাস্তবী দিনার বাসায় বেড়াতে এসেছে। কথার এক পর্যায়ে দিনাকে সে বলল, 'চারপাশে তাকালে আমরা বিভিন্ন ধরনের প্যাটার্ন দেখতে পাই'। দিনা কথাটি বিশ্বাস করতে চাইলো

না। সে মিতুকে তার ঝুমের মধ্যেই প্যাটার্নের অভিত্ত খুঁজে বের করতে বলল। মিতু তাকে জানাল যে সে অনেক জায়গাতেই প্যাটার্ন দেখতে পাচ্ছে, তবে এর মাঝে একটি প্যাটার্ন একটু ব্যতিক্রম। মিতুর খুঁজে পাওয়া প্যাটার্নটি ছিল একটি কৌশিক প্যাটার্ন যা নিচের মত আচরণ করে।

$0^{\circ}, 30^{\circ}, 60^{\circ}, 90^{\circ}, \dots, 300^{\circ}, 330^{\circ}, 360^{\circ}$

মিতু কোথায় প্যাটানটি খুঁজে পেয়েছিল তা অনুসন্ধান করে তোমার ধারণার স্বপক্ষে যুক্তি দাও। /পারদর্শিতার সূচক ০৩.০৮.০১.০১,

০৩.০৮.০১.০২ ও ০৩.০৮.০১.০৩ এর আলোকে/

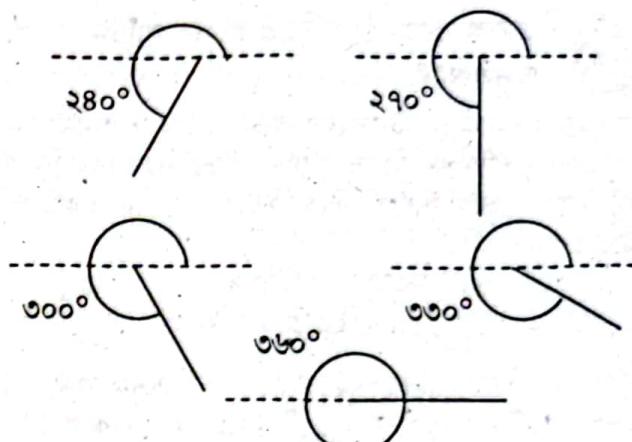
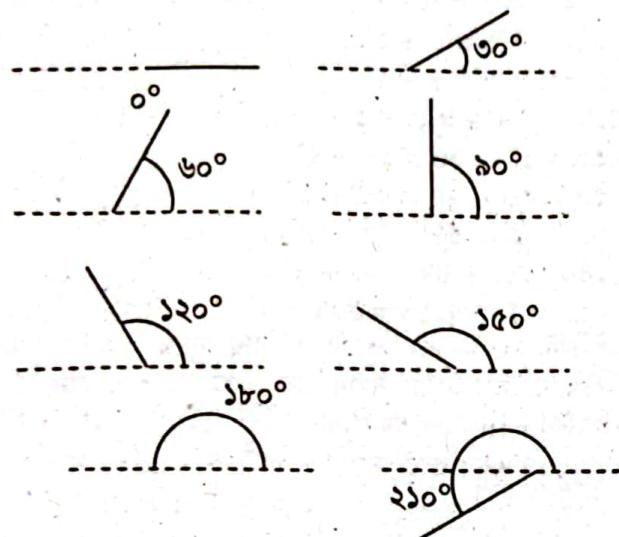
সমাধান: $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, \dots, 300^\circ, 330^\circ, 360^\circ$

প্যাটানটির প্রথম পদ = 0°

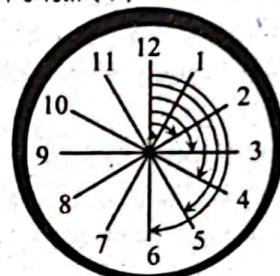
প্রথম দুইটি পদের পার্থক্য = $30^\circ - 0^\circ = 30^\circ$

বিতীয় ও তৃতীয় পদের পার্থক্য = $60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$

এটি একটি কৌণিক প্যাটার্ন যা 0° থেকে 360° পর্যন্ত বিস্তৃত এবং প্যাটার্নের পরপর দুইটি কৌণিক রাশির পার্থক্য 30°



প্যাটানটির জ্যামিতিক চিত্র থেকে দেখা যায়, ০ হতে এটি ক্রমাগ্রামে একটি পূর্ণ বৃত্ত রূপ নিছে। অর্থাৎ, মিতু এমন একটি স্থানে প্যাটানটি দেখতে পেয়েছিল যেখানে একটি চলমান/সচল বস্তু রয়েছে যার চলার পথটি বৃত্তাকার। কারো বাসার রুমে থাকতে পারে এমন বৃত্তাকার পথ অনুসরণকারী সচল বস্তুর উদাহরণ হলো ঘড়ি। সুতরাং মিতু, দিনার রুমের দেয়াল ঘড়িতে কৌণিক প্যাটানটি খুঁজে পেয়েছিল।



দিনার বাসার দেয়াল ঘড়ির কৌণিক গতিপথের চিত্র

২ নং একক কাজটির সমাধান নিচের ছকের পর্যবেক্ষণ অনুযায়ী মূল্যায়ন করুন।

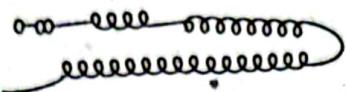
পর্যবেক্ষণ ছক

পারদর্শিতার সূচক (PI)	পারদর্শিতার সূচকের মাত্রা [প্রযোজ্য ঘরে টিক (✓) চিহ্ন দিন]		
০৩.০৮.০১.০১ সমস্যা সমাধানের জন্য বিভিন্ন গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া পরিকল্পনা করতে পেরেছে।	প্রদত্ত সমস্যা সমাধানের জন্য একটি অনুসন্ধান প্রক্রিয়া পরিকল্পনা করেছে।	প্রদত্ত সমস্যা সমাধানের জন্য একাধিক উপযুক্ত গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া পরিকল্পনা করেছে।	প্রদত্ত সমস্যা সমাধানের জন্য বিভিন্ন গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া পরিকল্পনা করে যৌক্তিক ব্যাখ্যা প্রদান করেছে।
০৩.০৮.০১.০২ গাণিতিক অনুসন্ধানে তথ্যের উৎস সঠিকভাবে চিহ্নিত করতে পেরেছে।	গাণিতিক অনুসন্ধানে তথ্যের উৎস চিহ্নিতকরণের পরিকল্পনা করেছে।	পরিকল্পনা অনুযায়ী তথ্যের উৎস সঠিকভাবে চিহ্নিত করেছে।	চিহ্নিত উৎসসমূহের গাণিতিক ব্যাখ্যা করেছে।
০৩.০৮.০১.০৩ গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া এবং প্রাপ্ত বিভিন্ন সমাধানকে ক্রিটিক্যালি ও মুক্তমনে যাচাই করতে পেরেছে।	বিভিন্ন গাণিতিক অনুসন্ধানের মাধ্যমে সমাধান নির্ণয় করেছে।	বিভিন্ন গাণিতিক অনুসন্ধানের মাধ্যমে সমাধান নির্ণয় করে কোনটি কেন গ্রহণ করেছে তা যুক্তিসহ ব্যাখ্যা করেছে।	বিভিন্ন গাণিতিক প্রক্রিয়ার জন্য প্রাপ্ত বিভিন্ন সমাধান তুলনামূলক বিশ্লেষণ করে প্রেক্ষিত বিবেচনায় যৌক্তিক সিদ্ধান্ত গ্রহণ করেছে।



একক কাজ-৩: দড়িতে বর্ণের প্যাটার্ন অনুসন্ধান

নতুন বছরের শুরুতে একটি স্কুলের অষ্টম শ্রেণির শিক্ষার্থীরা স্কুল থেকে জাদুর পরিদর্শন করতে গেলো। বিভিন্ন প্রস্তাতিক নির্দশন দেখার মাঝে একজন শিক্ষার্থী নিচের মতো গিট দেয়া একটি দড়ি দেখতে পেলো:



দড়িটি দেখে তার গণিত বইয়ে দেখা প্যাটার্নের কথা মনে পড়লো। দড়িটিতে এবৃপ মোট ১০টি গিটের স্তর থাকলে সে ঐ দড়িতে মোট কতগুলো গিট দেখতে পেলো? সে কিভাবে ঐ গিটসংখ্যা নির্ণয় করেছিলো? /পারদর্শিতার সূচক ০৩.০৮.০১.০৩, ০৩.০৮.০৮.০৩ ও ০৩.০৮.০৮.০৮ এর আলোকে/

সমাধান: ১ম গিটের স্তরে গিটসংখ্যা = ১

২য় গিটের স্তরে গিট সংখ্যা = ২

৩য় গিটের স্তরে গিট সংখ্যা = ৮

৪র্থ গিটের স্তরে গিট সংখ্যা = ৮

৫ষ্ঠ গিটের স্তরে গিট সংখ্যা = ১৬

এখানে, $1 = 2^0; 2 = 2^1; 8 = 2^3; 8 = 2^3; 16 = 2^4$

তাহলে, গিটের স্তরে গিট সংখ্যা 2^{n-1} সূত্রটি মেনে চলে, যেখানে 'ক' গিটের স্তরের ত্রুটি।

∴ ১০টি গিটের স্তরে মোট গিটসংখ্যা

$$= 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8$$

$$= 1 + 2 + 8 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128$$

$$+ 256 + 512$$

$$= 1023$$

∴ শিক্ষার্থী ঐ দড়িতে মোট ১০২৩ টি গিট দেখতে পেয়েছিলো যা সে প্যাটার্ন ও সূচকের ধারণা ব্যবহার করে নির্ণয় করেছিলো।



৩ ও ৪ নং একক কাজটির সমাধান নিচের ছকের পর্যবেক্ষণ অনুযায়ী মূল্যায়ন করুন।



একক কাজ-৪: স্ট্রিপে বর্ণের প্যাটার্ন অনুসন্ধান

০	১	৫	১৪	৩০	৫৫	৯১	১৪০	২০৮
---	---	---	----	----	----	----	-----	-----

মৃদুলের বাবা তাকে উপরের কাগজের স্ট্রিপটি ধরিয়ে দিলেন। স্ট্রিপে লেখা সংখ্যাগুলো দেখে মৃদুল তার বাবাকে সংখ্যাগুলো সম্পর্কে জিজ্ঞাসা করলো। জবাবে তার বাবা পূর্ণবর্গ সংখ্যা সম্পর্কে মৃদুলকে ধারণা দিলেন। বাবা চলে যাওয়ার পর মৃদুল স্ট্রিপের শেষে রাখা ফাঁকা ঘরটি দেখতে পেলো। তুমি কি মৃদুলের স্ট্রিপটির ফাঁকা ঘরের জন্য উপযুক্ত সংখ্যাটি নির্ণয় করতে পারবে? /পারদর্শিতার সূচক ০৩.০৮.০১.০৩, ০৩.০৮.০৮.০৩ ও ০৩.০৮.০৮.০৮ এর আলোকে/

সমাধান: স্ট্রিপে লেখা সংখ্যাগুলো পর্যবেক্ষণ করি,

$$0 = 0 + 0 = 0 + 0^2$$

$$1 = 0 + 1 = 0 + 1^2$$

$$5 = 1 + 8 = 1 + 2^2$$

$$14 = 5 + 9 = 5 + 3^2$$

$$30 = 14 + 16 = 14 + 8^2$$

$$55 = 30 + 25 = 30 + 5^2$$

$$91 = 55 + 36 = 55 + 6^2$$

$$140 = 91 + 49 = 91 + 7^2$$

$$208 = 140 + 68 = 140 + 8^2$$

প্রতিটি সংখ্যা তার পূর্বের সংখ্যার সাথে একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যার যোগফলের সমান এবং n তম সংখ্যার জন্য প্রাপ্ত প্যাটার্ন $= (n - 1)$ তম সংখ্যা $+ (n - 1)^2$

∴ ২০৮ এর পরবর্তী সংখ্যা = প্যাটার্নটির ১০তম সংখ্যা

$$= 208 + (10 - 1)^2$$

$$= 208 + 81 = 289$$

∴ মৃদুলের স্ট্রিপটির ফাঁকা ঘরের জন্য উপযুক্ত সংখ্যাটি হলো ২৮৯।

পর্যবেক্ষণ ছক

পারদর্শিতার সূচক (PI)	পারদর্শিতার সূচকের মাত্রা [প্রযোজ্য ঘরে টিক (<input checked="" type="checkbox"/>) চিহ্ন দিন]
০৩.৮.০১.০৩ গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া এবং প্রাপ্তি বিভিন্ন সমাধানকে ত্রিটিক্যালি ও মুক্তমনে যাচাই করতে পেরেছে।	বিভিন্ন গাণিতিক অনুসন্ধানের মাধ্যমে সমাধান নির্ণয় করেছে। বিভিন্ন গাণিতিক অনুসন্ধানের মাধ্যমে সমাধান নির্ণয় করে কোনটি কেন গ্রহণ করেছে তা যুক্তিসহ ব্যাখ্যা করেছে।
০৩.০৮.০৮.০৩ বাস্তব সমস্যাকে গাণিতিক সম্পর্কের মাধ্যমে প্রকাশ করার জন্য বিভিন্ন সংখ্যার রাশি, প্রতীক ও চলক চিহ্নিত করেছে।	বাস্তব সমস্যাকে গাণিতিক সম্পর্কের মাধ্যমে প্রকাশ করেছে। বাস্তব সমস্যাকে গাণিতিক সম্পর্কের মাধ্যমে প্রকাশ করে যুক্তি প্রদান করেছে।
০৩.০৮.০৮.০৪ বাস্তব ঘটনাবলির প্যাটার্ন পর্যবেক্ষণ করে বিমূর্ত রাশিতে প্রকাশ করার জন্য কিছু রাশি চিহ্নিত করেছে।	বাস্তব ঘটনাবলির প্যাটার্ন পর্যবেক্ষণ করে বিমূর্ত রাশিতে প্রকাশ করেছে। যেকোনো বাস্তব ঘটনাবলির প্যাটার্ন পর্যবেক্ষণ করে যৌক্তিকভাবে বিমূর্ত রাশিতে প্রকাশ করেছে।



একক কাজ-৫

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

উপরে ৫টি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি দেখানো হয়েছে। ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টির এই ধারণাটি থেকে তুমি কি প্রথম n সংখ্যক ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টির জন্য কোন গাণিতিক সূত্র প্রতিষ্ঠা করতে পারবে?

[পারদর্শিতার সূচক ০৩.০৮.০১.০৩ ও ০৩.০৮.০৮.০৮ এর আলোকে]

সমাধান: মনে করি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি S_n । অর্থাৎ, $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

আমরা জানি, যেকোনো $r \in \mathbb{N}$ এর জন্য,

$$r^2 - 3r^2 + 3r - 1 = (r-1)^2$$

$$\text{বা, } r^2 - (r-1)^2 = 3r^2 - 3r + 1$$

উপরের অভেদটিতে, $r = 1, 2, 3, \dots, n$ বসিয়ে পাই,

$$1^2 - 0^2 = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1$$

$$2^2 - 1^2 = 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1$$

$$3^2 - 2^2 = 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1$$

...

$$n^2 - (n-1)^2 = 3 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1$$

যোগ করে পাই, $n^2 - 0^2 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$

$$- 3(1 + 2 + 3 + \dots + n) + (1 + 1 + 1 + \dots + 1)$$

$$\text{বা, } n^2 = 3S_n - \frac{3n(n+1)}{2} + n \left[\because 1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2} \right]$$

$$\text{বা, } 3S_n = n^2 + \frac{3n(n+1)}{2} - n = \frac{2n^2 + 3n^2 + 3n - 2n}{2}$$

$$= \frac{2n^2 + 3n^2 + n}{2} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2}$$

$$= \frac{n(2n^2 + 2n + n + 1)}{2} = \frac{n\{2n(n+1) + 1(n+1)\}}{2}$$

$$\text{বা, } 3S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} \therefore S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

∴ প্রতিষ্ঠিত সূত্রটি হলো:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



৫ ও ৬ নং একক কাজটির সমাধান নিচের ছকের পর্যবেক্ষণ অনুযায়ী মূল্যায়ন করুন।

পর্যবেক্ষণ ছক

পারদর্শিতার সূচক (PI)	পারদর্শিতার সূচকের মাঝা [প্রযোজ্য ঘরে টিক (✓) চিহ্ন দিন]		
০৩.০৮.০১.০৩ গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া এবং প্রাপ্তি বিভিন্ন সমাধানকে ত্রিটিক্যালি ও মুক্তমনে যাচাই করতে পেরেছে।	বিভিন্ন গাণিতিক অনুসন্ধানের মাধ্যমে সমাধান নির্ণয় করেছে।	বিভিন্ন গাণিতিক অনুসন্ধানের মাধ্যমে সমাধান নির্ণয় করে কোনটি কেন গ্রহণ করেছে তা যুক্তিসহ ব্যাখ্যা করেছে।	বিভিন্ন গাণিতিক প্রক্রিয়ার জন্য প্রাপ্তি বিভিন্ন সমাধান তুলনামূলক বিশ্লেষণ করে প্রেক্ষিত বিবেচনায় যৌক্তিক সিদ্ধান্ত গ্রহণ করেছে।
০৩.০৮.০৪.০৪ বাস্তব ঘটনাবলির প্যাটার্ন পর্যবেক্ষণ করে বিমূর্ত রাশিতে প্রকাশ করার জন্য কিছু রাশি চিহ্নিত করেছে।	বাস্তব ঘটনাবলির প্যাটার্ন পর্যবেক্ষণ করে বিমূর্ত রাশিতে প্রকাশ করার জন্য কিছু রাশি চিহ্নিত করেছে।	বাস্তব ঘটনাবলির প্যাটার্ন পর্যবেক্ষণ করে বিমূর্ত রাশিতে প্রকাশ করেছে।	যেকোনো বাস্তব ঘটনাবলির প্যাটার্ন পর্যবেক্ষণ করে যৌক্তিকভাবে বিমূর্ত রাশিতে প্রকাশ করেছে।

একক কাজ-৬

$$1^2 = 1$$

$$1^2 + 2^2 = 9$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = 36$$

...

...

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \square$$

উপরের রাশিগুলোকে লক্ষ্য কর। গাণিতিক অনুসন্ধানের মাধ্যমে এদের রহস্য উদঘাটন করো। তোমার উদঘাটিত রহস্যের যথাযথ ব্যাখ্যা প্রদান করো।

[পারদর্শিতার সূচক ০৩.০৮.০১.০৩ ও ০৩.০৮.০৮.০৮ এর আলোকে]

সমাধান: এখানে, $1^2 = 1$

$$1^2 + 2^2 = 9$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = 36$$

...

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \square$$

প্রদত্ত রাশিসমূহ ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনফলের সমষ্টি নির্দেশ করেছে।

খালিঘরে n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনফলের সমষ্টি বসাতে হবে।

মনে করি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনফলের সমষ্টি S_n

অর্থাৎ, $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

আমরা জানি, (যেকোনো $r \in \mathbb{N}$ এর জন্য)

$$(r+1)^2 - (r-1)^2 = (r^2 + 2r + 1) - (r^2 - 2r + 1) = 8r$$

$$\text{বা, } (r+1)^2 - r^2 - (r-1)^2 = 8r \cdot r^2 = 8r^3$$

[ডিভয়পক্ষকে r^2 দ্বারা গুণ করে]

উপরের অভেদটিতে, $r = 1, 2, 3, \dots, n$ বসিয়ে পাই,

$$2^2 \cdot 1^2 - 1^2 \cdot 0^2 = 8 \cdot 1^2$$

$$3^2 \cdot 2^2 - 2^2 \cdot 1^2 = 8 \cdot 2^2$$

$$8^2 \cdot 3^2 - 3^2 \cdot 2^2 = 8 \cdot 3^2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(n+1)^2 \cdot n^2 - n^2 \cdot (n-1)^2 = 8n^2$$

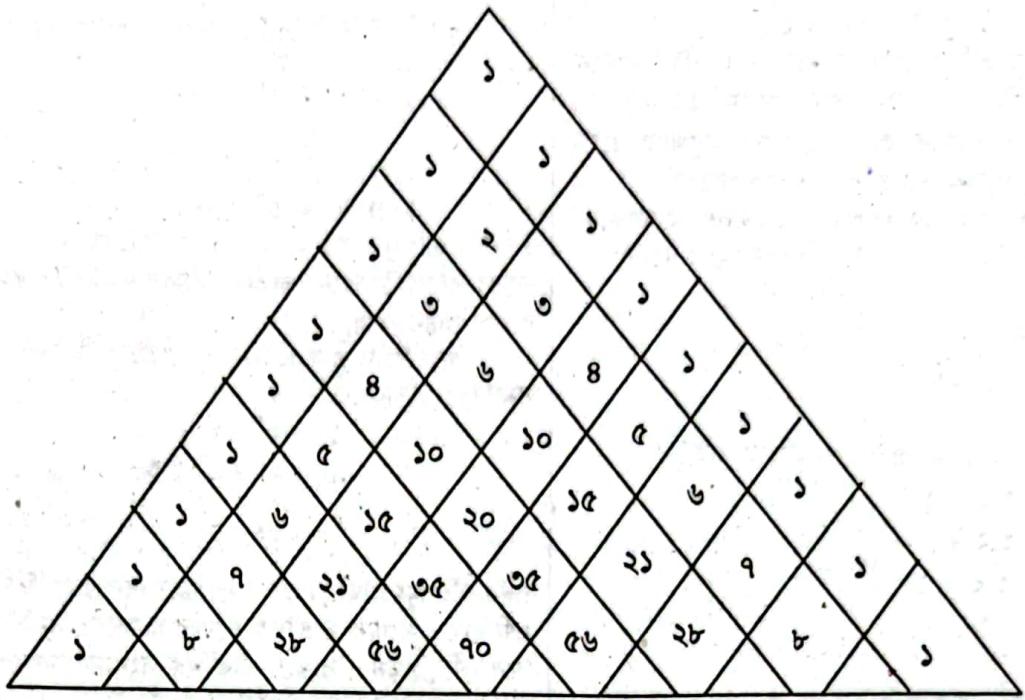
$$\text{যোগ করে পাই, } (n+1)^2 \cdot n^2 - 1^2 \cdot 0^2 = 8(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$$

$$\text{বা, } (n+1)^2 \cdot n^2 = 8S_n \text{ বা, } S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{8} \therefore S_n = \frac{\{n(n+1)\}^2}{2}$$

$$\text{রহস্য উদঘাটন: } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{\{n(n+1)\}^2}{2}$$



একক কাজ-৭: সংখ্যা ও সূচকের ত্রিভুজ রহস্য



- $(a+b)^0 = 1$
- $(a+b)^1 = a+b$
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a+b)^3 = (a+b)^1(a+b)^2$
 $= (a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$
 $= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2)$
 $= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$
 $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a+b)^4 = \{(a+b)^2\}^2$
 $= (a^2 + 2ab + b^2)^2$
 $= (a^2)^2 + (2ab)^2 + (b^2)^2 + 2.a^2.2ab + 2.2ab.b^2 + 2.b^2.a^2$
 $= a^8 + 8a^6b^2 + b^8 + 8a^6b + 8ab^7 + 2a^5b^3$
 $= a^8 + 8a^6b + 6a^5b^3 + 8ab^7 + b^8$
- ঘর পরিষ্কার করতে গিয়ে ফাহাদ একটি কাগজে উপরে লেখাগুলো দেখতে পেলো। লেখাগুলো তার আংশিক পরিচিত হলেও সম্পূর্ণ পরিচিত নয়। কাজ বাদ দিয়ে সে কাগজটির রহস্য উদ্ঘাটনে লেগে পড়ল। এক পর্যায়ে সে কাগজটির রহস্য সঠিকভাবে উদ্ঘাটন করতে সক্ষম হলো। ফাহাদের উদ্ঘাটিত রহস্যটি বিশ্লেষণ করে $(a+b)^6$, $(a+b)^7$, $(a+b)^8$ ও $(a+b)^9$ রাখিগুলোর মান নির্ণয় কর।

পাইদলিতার সূচক ০১.০২.০৩.০৪, ০৫.০৬.০৭.০৮, ০৯.০৮.০৯.০১ ও
০১.০৮.০৯.০১ এর আলোকে।

সমাধান: গাণিতিক অনুসন্ধান-

$$(a+b)^0 = \boxed{1}$$

$$(a+b)^1 = \boxed{1} \cdot a^0 \cdot b^0 + \boxed{1} a^0 \cdot b^1$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$= 1.a^2 + 2.a^1.b^1 + 1.b^2$$

$$= \boxed{1} a^2.b^0 + \boxed{2} a^1.b^1 + \boxed{1} a^0.b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$= \boxed{1} \cdot a^0 \cdot b^3 + \boxed{3} \cdot a^1 \cdot b^2 + \boxed{3} \cdot a^2 \cdot b^1 + \boxed{1} \cdot a^3 \cdot b^0$$

$$(a+b)^4 = a^8 + 8a^6b^2 + 6a^4b^4 + 8ab^7 + b^8$$

$$= \boxed{1} \cdot a^8 \cdot b^0 + \boxed{8} \cdot a^6 \cdot b^2 + \boxed{6} \cdot a^4 \cdot b^4 + \boxed{8} \cdot a^2 \cdot b^6 + \boxed{1} \cdot a^0 \cdot b^8$$

অনুসন্ধানের মাধ্যমে গৃহীত সিদ্ধান্ত:

- প্রতিটি সূত্রে পাওয়া পদগুলোর সহগ ত্রিভুজে পাওয়া সংখ্যাগুলোর সমান হবে। এক্ষেত্রে বিপরীত রাশির যে ঘাতের জন্য সূত্র নির্ণয় করতে হবে তার সাথে ১ যোগ করে ঐ ঘাতের জন্য প্রযোজ্য ত্রিভুজ সারি জানা যাবে।
- শুরুতে প্রথম পদের ঘাত সর্বোচ্চ এবং দ্বিতীয় পদের ঘাত সর্বনিম্ন হবে।
- প্রথম পদের ঘাত ক্রমাগত ১ করে কমবে ও দ্বিতীয় পদের ঘাত ক্রমাগত বাঢ়বে।

প্রাপ্ত সিদ্ধান্তসমূহ হতে সূত্রসমূহ নির্ণয়—

$$(a+b)^5 = 1.a^5.b^0 + 5.a^4.b^1 + 10.a^3.b^2 + 10.a^2.b^3 + 5.a^1.b^4 + 1.a^0.b^5$$

$$= a^8 + 5a^6b^2 + 10a^4b^4 + 10a^2b^6 + 5ab^8 + b^10$$

$$(a+b)^6 = 1.a^6.b^0 + 6.a^5.b^1 + 15.a^4.b^2 + 20.a^3.b^3 + 15.a^2.b^4 + 6.a^1.b^5 + 1.a^0.b^6$$

$$= a^8 + 6a^6b^2 + 15a^4b^4 + 20a^2b^6 + 15ab^8 + b^10$$

$$(a+b)^7 = 1.a^7.b^0 + 7.a^6.b^1 + 21.a^5.b^2 + 35.a^4.b^3 + 35.a^3.b^4 + 21.a^2.b^5 + 7.a^1.b^6 + 1.a^0.b^7$$

$$= a^8 + 7a^6b^2 + 21a^4b^4 + 35a^2b^6 + 35ab^8 + b^10$$

$$(a+b)^8 = 1.a^8.b^0 + 8.a^7.b^1 + 28.a^6.b^2 + 56.a^5.b^3 + 70.a^4.b^4 + 56.a^3.b^5 + 28.a^2.b^6 + 8.a^1.b^7 + 1.a^0.b^8$$

$$= a^8 + 8a^6b^2 + 28a^4b^4 + 56a^2b^6 + 70ab^8 + 56b^{10} + 28a^0b^8 + 8a^1b^7 + 1a^0b^9$$

$$(a+b)^9 = 1.a^9.b^0 + 9.a^8.b^1 + 36.a^7.b^2 + 84.a^6.b^3 + 126.a^5.b^4 + 126.a^4.b^5 + 84.a^3.b^6 + 36.a^2.b^7 + 9.a^1.b^8 + 1.a^0.b^9$$

$$= a^8 + 9a^6b^2 + 36a^4b^4 + 84a^2b^6 + 126ab^8 + 126b^{10} + 84a^0b^8 + 36a^1b^7 + 9a^0b^9 + 1a^0b^{10}$$



একক কাজ-৮: সংখ্যার রহস্য উদঘাটন

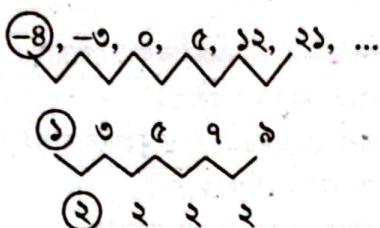
আলভিকে তার গণিত শিক্ষক সংখ্যা প্যাটার্ন সংক্রান্ত বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যা অনুশীলন করালেন। অনুশীলনের এক পর্যায়ে আলভি নিচের অনুক্রমটি খুঁজে পেল:

- 8, - 3, 0, 5, 12, 21,

১. আলভি কিভাবে অনুক্রমটির জন্য সাধারণ পদ নির্ণয় করবে?
২. বীজগাণিতিক রাশির ধারণা ব্যবহার করে অনুক্রমটির ১৬-তম পদ নির্ণয় করতে আলভিকে কি কি পদক্ষেপ নিতে হবে তা ব্যাখ্যা কর। /পারদর্শিতার সূচক ০৩.০৮.০১.০১, ০৩.০৮.০১.০৩, ০৩.০৮.০৮.০৩ ও ০৩.০৮.০৮.০৪ এর আলোকে/

সমাধান: প্রদত্ত অনুক্রম:

পাশাপাশি দুইটি



সংখ্যার পার্থক্য:

প্যাটার্নটির প্রথম পদ + প্যাটার্নটির পাশাপাশি দুইটি পদের পার্থক্যের প্যাটার্নের প্রথম পদ $\times (k - 1)$ +

প্রাপ্ত পার্থক্যের প্যাটার্নের পদগুলির পার্থক্যের প্রথম পদ

২

$\times (k - 1) (k - 2) + \dots \dots$

যেখানে k অজানা রাশি এবং স্বাভাবিক সংখ্যা।

\therefore প্রদত্ত অনুক্রমটির সাধারণ পদ

$$= -8 + 1(k - 1) + \frac{1}{2}(k - 1)(k - 2)$$

$$= -8 + k - 1 + k^2 - 2k - k + 2$$

$$= k^2 - 2k - 3$$

যেখানে k স্বাভাবিক সংখ্যা।

$$\therefore \text{অনুক্রমটির } 16\text{-তম পদ} = 16^2 - 2 \times 16 - 3$$

$$= 256 - 32 - 3$$

$$= 221$$

৭ ও ৮ নং একক কাজটির সমাধান নিচের ছকের পর্যবেক্ষণ অনুযায়ী মূল্যায়ন করুন।

পর্যবেক্ষণ ছক

পারদর্শিতার সূচক (PI)	পারদর্শিতার সূচকের মাত্রা [প্রযোজ্য ঘরে টিক (✓) চিহ্ন দিন]		
০৩.০৮.০১.০১ সমস্যা সমাধানের জন্য বিভিন্ন গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া পরিকল্পনা করতে পেরেছে।	প্রদত্ত সমস্যা সমাধানের জন্য একটি অনুসন্ধান প্রক্রিয়া পরিকল্পনা করেছে।	প্রদত্ত সমস্যা সমাধানের জন্য একাধিক উপযুক্ত গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া পরিকল্পনা করেছে।	প্রদত্ত সমস্যা সমাধানের জন্য বিভিন্ন গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া পরিকল্পনা করে যৌক্তিক ব্যাখ্যা প্রদান করেছে।
০৩.০৮.০১.০৩ গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া এবং প্রাপ্ত বিভিন্ন সমাধানকে ক্রিটিক্যালি ও মুক্তমনে যাচাই করতে পেরেছে।	বিভিন্ন গাণিতিক অনুসন্ধানের মাধ্যমে সমাধান নির্ণয় করেছে।	বিভিন্ন গাণিতিক অনুসন্ধানের মাধ্যমে সমাধান নির্ণয় করে কোনটি কেন গ্রহণ করেছে তা যুক্তিসহ ব্যাখ্যা করেছে।	বিভিন্ন গাণিতিক প্রক্রিয়ার জন্য প্রাপ্ত বিভিন্ন সমাধান তুলনামূলক বিশ্লেষণ করে প্রেক্ষিত বিবেচনায় যৌক্তিক সিদ্ধান্ত গ্রহণ করেছে।
০৩.০৮.০৪.০৩ বাস্তব সমস্যাকে গাণিতিক সম্পর্কের মাধ্যমে প্রকাশ করতে পেরেছে।	বাস্তব সমস্যাকে গাণিতিক সম্পর্কের মাধ্যমে প্রকাশ করার জন্য বিভিন্ন সংখ্যার রাশি, প্রতীক ও চলক চিহ্নিত করেছে।	বাস্তব সমস্যাকে গাণিতিক সম্পর্কের মাধ্যমে প্রকাশ করেছে।	বাস্তব সমস্যাকে গাণিতিক সম্পর্কের মাধ্যমে প্রকাশ করে যুক্তি প্রদান করেছে।
০৩.০৮.০৪.০৪ বাস্তব ঘটনাবলির প্যাটার্ন পর্যবেক্ষণ করে বিশৃঙ্খল রাশিতে প্রকাশ করতে (প্রারম্ভ)	বাস্তব ঘটনাবলির প্যাটার্ন পর্যবেক্ষণ করে বিশৃঙ্খল রাশিতে প্রকাশ করার জন্য কিছু রাশি চিহ্নিত করেছে।	বাস্তব ঘটনাবলির প্যাটার্ন পর্যবেক্ষণ করে বিশৃঙ্খল রাশিতে প্রকাশ করেছে।	যেকোনো বাস্তব ঘটনাবলির প্যাটার্ন পর্যবেক্ষণ করে যৌক্তিকভাবে বিশৃঙ্খল রাশিতে প্রকাশ করেছে।

শিখন অভিজ্ঞতাভিত্তিক মূল্যায়ন ছক

এখানে পারদর্শিতার সূচকের ভিত্তিতে শিক্ষার্থীর তথ্য সংরক্ষণের জন্য শিখন অভিজ্ঞতাভিত্তিক মূল্যায়ন ছক দেওয়া হয়েছে।



শিক্ষকের জন্য নির্দেশনা



- ইতোপূর্বে সম্পর্ক আচিত্তিগুলোর মূল্যায়ন ছক থেকে প্রাপ্ত তথ্য নিয়ে প্রগতি ছকটি পেনসিল দিয়ে পূরণ করুন এবং শিক্ষার্থীর পারদর্শিতা মাত্রা () নির্ধারণ করুন।
- একাধিক কার্যক্রমের মাধ্যমে PI-এর মাত্রা নির্ধারণ করতে হলে সেক্ষেত্রে চূড়ান্ত অর্জিত মাত্রা বের করার জন্য সংশ্লিষ্ট PI-এ কার্যক্রমটিতে সর্বোচ্চ মাত্রা () পেয়েছে সেটিকে চিহ্নিত করুন।
- কোনো মূল্যায়ন হলে শিক্ষার্থীর অর্জনের মাত্রা যদি বা হয় তাহলে ফলাবর্তনের জন্য কার্যক্রমটি পুনরায় করতে সহযোগিতা করুন শিক্ষার্থী বা অন্তত পর্যায়ে উন্নীত হলে বলপেন দিয়ে ছকটি পূরণ করুন।
- শিক্ষার্থী পারদর্শিতার সূচকে যে মাত্রা অর্জন করবে তা পরিশিষ্ট অংশে (পৃষ্ঠা-৫১৬) দেওয়া উপাত্ত সংগ্রহের ছকে সংরক্ষণ করুন। তাহার 'নেপুট' আপ-এ সহজেই ইনপুট দিতে পারবেন।

পারদর্শিতার সূচকসমূহ

PI ০৩.০৮.০১.০১	সমস্যা সমাধানের জন্য বিভিন্ন গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া পরিকল্পনা করতে পেরেছে।
PI ০৩.০৮.০১.০২	গাণিতিক অনুসন্ধানে তথ্যের উৎস সঠিকভাবে চিহ্নিত করতে পেরেছে।
PI ০৩.০৮.০১.০৩	গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া এবং প্রাপ্ত বিভিন্ন সমাধানকে ত্রিটিক্যালি ও মুক্তমনে যাচাই করতে পেরেছে।
PI ০৩.০৮.০৮.০৩	বাস্তব সমস্যাকে গাণিতিক সম্পর্কের মাধ্যমে প্রকাশ করতে পেরেছে।
PI ০৩.০৮.০৮.০৮	বাস্তব ঘটনাবলির প্যাটার্ন পর্যবেক্ষণ করে বিমূর্ত রাশিতে প্রকাশ করতে পেরেছে।

শিখন অভিজ্ঞতা ১: গাণিতিক অনুসন্ধান

মূল্যায়ন ত্রুটি	০৩.০৮.০১.০১	০৩.০৮.০১.০২	০৩.০৮.০১.০৩	০৩.০৮.০৮.০৩	০৩.০৮.০৮.০৮
শিখন কার্যক্রম মূল্যায়ন ছক-১	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="radio"/> <input type="triangle"/>				
শিখন কার্যক্রম মূল্যায়ন ছক-২			<input checked="" type="checkbox"/> <input type="radio"/> <input type="triangle"/>		
শিখন কার্যক্রম মূল্যায়ন ছক-৩	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="radio"/> <input type="triangle"/>				
শিখন কার্যক্রম মূল্যায়ন ছক-৪			<input checked="" type="checkbox"/> <input type="radio"/> <input type="triangle"/>		
শিখন কার্যক্রম মূল্যায়ন ছক-৫	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="radio"/> <input type="triangle"/>		<input checked="" type="checkbox"/> <input type="radio"/> <input type="triangle"/>	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="radio"/> <input type="triangle"/>	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="radio"/> <input type="triangle"/>
শিখন কার্যক্রম মূল্যায়ন ছক-৬	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="radio"/> <input type="triangle"/>				
শিখন কার্যক্রম মূল্যায়ন ছক-৭		<input checked="" type="checkbox"/> <input type="radio"/> <input type="triangle"/>			

শিক্ষার্থী পারদর্শিতার সূচকের যে মাত্রা অর্জন করেছে তা উপরের ছক থেকে সংগ্রহ করে নিচে প্রদত্ত উপাত্ত সংগ্রহের ছকে ইনপুট দিতে হবে। শ্রেণির

সকল শিক্ষার্থীর তথ্য সংরক্ষণের জন্য এ ছকটি ব্যবহার করবেন শিক্ষক; অভিভাবকেরা ও চাইলে এ ছকটি পূরণ করে শিক্ষার্থীর ধারাবাহিক অগ্রগতি
Tutor পর্যবেক্ষণ করতে পারবেন।

শিখন অভিজ্ঞতা ভিত্তিক মূল্যায়নের জন্য শিক্ষার্থীর উপাত্ত সংগ্রহের ছক (পরিশিষ্ট-১)

প্রতিষ্ঠানের নাম	তারিখ:				
অভিজ্ঞতা নং: ১	শ্রেণি	৮ম	বিষয়	গণিত	
শিখন অভিজ্ঞতার শিরোনাম	গাণিতিক অনুসন্ধান				
প্রযোজ্য PI নং					

রোল নং	নাম	০৩.০৮.০১.০১	০৩.০৮.০১.০২	০৩.০৮.০১.০৩	০৩.০৮.০৮.০৩	০৩.০৮.০৮.০৮
		<input checked="" type="checkbox"/> <input type="radio"/> <input type="triangle"/>				
		<input checked="" type="checkbox"/> <input type="radio"/> <input type="triangle"/>				
		<input checked="" type="checkbox"/> <input type="radio"/> <input type="triangle"/>				
		<input checked="" type="checkbox"/> <input type="radio"/> <input type="triangle"/>				
		<input checked="" type="checkbox"/> <input type="radio"/> <input type="triangle"/>				

দৈনন্দিক কাজে বাস্তব সংখ্যা

১। ক্রীড়া প্রতিযোগিতায় একটি মজার খেলা হলো দীর্ঘ লাফ। ধরা যাক তোমাকে দীর্ঘ লাফ প্রতিযোগিতায় ১০ মিটার দূরের একটি দেয়াল ছুঁতে হবে কিন্তু তুমি প্রতি লাফে শুধু অর্ধেক পথ যেতে পারবে। যেমন, প্রথম লাফে $\frac{1}{2} = 5$ মিটার পথ গেলে, এরপরের লাফে $\frac{1}{2} = 2.5$ মিটার পথ গেলে দেয়াল ছুঁতে কঠি লাফ দিতে হবে তা কি বের করতে পারবে?

সমাধান: এখানে,

$$1\text{ম লাফের দূরত্ব}, a = 5 \text{ মিটার};$$

$$\text{সাধারণ অন্তর}, a = \frac{2.5}{5} = \frac{1}{2};$$

$$\text{মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব } s = 10 \text{ মিটার}.$$

এখন, গুনোত্তর ধারা অনুসারে, $r < 1$ হলে, n তম পদের সমষ্টি $= a(1-r^n)/(1-r)$

$$\text{বা, } a(1-r^n)/(1-r) = s$$

$$\text{বা, } a(1-r^n) = s(1-r)$$

$$\text{বা, } 5(1-\frac{1}{2}^n) = 10(1-\frac{1}{2})$$

$$\text{বা, } 5(1-\frac{1}{2}^n) = 10 \times \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } 5(1-\frac{1}{2}^n) = 5$$

$$\text{বা, } (1-\frac{1}{2}^n) = 1$$

$$\text{বা, } -\frac{1}{2}^n = 1-1$$

$$\text{বা, } -\frac{1}{2}^n = 0 \text{ যা গাণিতিকভাবে সম্ভব নয়।}$$

অর্থাৎ, n এর মান বা লাফ সংখ্যা অগণিত হবে।

২। একটি বর্গকার আমবাগানে ১৩৬৯টি আমগাছ আছে। বাগানের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ উভয় দিকে সমান সংখ্যক আমগাছ থাকলে, প্রত্যেক সারিতে গাছের সংখ্যা যুক্তিসহকারে উপস্থাপন করো। দৈর্ঘ্য ও প্রস্থে দুটি গাছের মধ্যে দূরত্ব ১০০ ফুট হলে, বাগানের ক্ষেত্রফল আনুমানিক কত হবে বলে তুমি মনে করো?

সমাধান: ধরি,

$a = \text{দৈর্ঘ্য বরাবর আমগাছের সংখ্যা} = \text{প্রস্থ বরাবর আমগাছের সংখ্যা}.$

প্রশ্নমতে,

$$a \times a = 1369$$

$$\text{বা, } a^2 = 1369$$

$$\text{বা, } a = \sqrt{1369} = 37$$

অর্থাৎ, আম বাগানটিতে দৈর্ঘ্য বরাবর যে সারিটি আছে সেখানে 37 টি আমগাছ আছে, একইভাবে প্রস্থ বরাবর সারিতেও 37 টি আমগাছ আছে।

এখন দৈর্ঘ্য বা প্রস্থ বরাবর যেহেতু 37 টি করে আমগাছ আছে সেহেতু বাগানটিতে মোট সারি আছে

$$= \frac{1369}{37} = 37 \text{ টি।}$$

এখন, শর্তমতে,

$$1\text{ম গাছ থেকে ২য় গাছের দূরত্ব} = 100 \text{ ফুট}$$

$$\therefore 1\text{ম থেকে ৩য় গাছের দূরত্ব} = 200 \text{ ফুট}$$

$$\therefore 1\text{ম থেকে ৩৭তম গাছের দূরত্ব} = 3600 \text{ ফুট}$$

অর্থাৎ, বাগানের দৈর্ঘ্য = 3600 ফুট = বাগানের প্রস্থ।

∴ বাগানের ক্ষেত্রফল

$$= 3600 \times 3600 \text{ বর্গ ফুট}$$

$$= 12960000 \text{ বর্গ ফুট।}$$

৩। ১ থেকে ১০০ পর্যন্ত সকল পূর্ণবর্গ সংখ্যার বর্গমূল ও পূর্ণবর্গ সংখ্যার ঘনমূল নির্ণয় করো।

সমাধান: ১ থেকে ১০০ পর্যন্ত সকল পূর্ণবর্গ সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয়ের জন্য নিচের সারণিটি তৈরি করিঃ

সংখ্যার বর্গের আকার	ফলাফল
১ ^২	১
২ ^২	৪
৩ ^২	৯
৪ ^২	১৬
৫ ^২	২৫
৬ ^২	৩৬
৭ ^২	৪৯
৮ ^২	৬৪
৯ ^২	৮১
১০ ^২	১০০

∴ ১ থেকে ১০০ পর্যন্ত সকল পূর্ণবর্গ সংখ্যা হলোঁ ১, ৪, ৯, ১৬, ২৫, ৩৬, ৪৯, ৬৪, ৮১, ১০০ যাদের বর্গমূল হলোঁ ১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬, ৭, ৮, ৯, ১০।

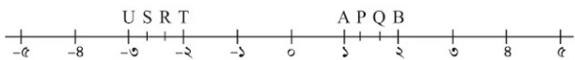
আবার,

১ থেকে ১০০ পর্যন্ত সকল পূর্ণসংখ্যার ঘনমূল নির্ণয়ের জন্য নিচের সারণিটি তৈরি করিঃ

সংখ্যার ঘনের আকার	ফলাফল
১ ^০	১
২ ^০	৮
৩ ^০	২৭
৪ ^০	৬৪
৫ ^০	১২৫

∴ ১ থেকে ১০০ পর্যন্ত সকল পূর্ণসংখ্যা হলোঁ ১, ৮, ২৭, ৬৪ যাদের ঘনমূল হলোঁ ১, ২, ৩, ৪।

৪। একটি সংখ্যারেখায় P, Q, R, S, T, U, A এবং B বিন্দুগুলো এমনভাবে আছে যে, $TR = RS = SU$ এবং $AP = PQ = QB$. এমতাবস্থায় P, Q, R এবং S মূলদ সংখ্যাসমূহের মান নির্ণয় করো।



সমাধান: সংখ্যারেখায়, $TU = -3 - (-2) = -3 + 2 = -1$

দেওয়া আছে,

$$TR = RS = SU$$

$$\therefore TR = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore TS = -\frac{2}{3}$$

এখন, সংখ্যারেখায় T এর মান = -2

∴ সংখ্যারেখায় R এর মান = $-2 - \frac{1}{3} = -\frac{6+1}{3} = -\frac{7}{3}$

∴ সংখ্যারেখায় S এর মান = $-2 - \frac{2}{3} = -\frac{6+2}{3} = -\frac{8}{3}$

আবার,

$$\text{সংখ্যারেখায়, } AB = 2 - 1 = 1$$

দেওয়া আছে,

$$AP = PQ = QB$$

$$\therefore AP = \frac{1}{3}$$

$$\therefore AQ = \frac{2}{3}$$

এখন, সংখ্যারেখায় A এর মান = 1

∴ সংখ্যারেখায় P এর মান = $1 + \frac{1}{3} = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}$

∴ সংখ্যারেখায় Q এর মান = $1 + \frac{2}{3} = \frac{3+2}{3} = \frac{5}{3}$

৫. নিচের সংখ্যাগুলো মূলদ নাকি অমূলদ যুক্তিসহ ব্যাখ্যা দাও।

৮. $\sqrt[3]{29292} \dots, 0.1010010001 \dots, 6538.789789 \dots$

২. $\sqrt[3]{281828}, 0.122303 \dots$

সমাধান: (i) $\sqrt[3]{29292} \dots$

এটি একটি পৌনঃপুনিক দশমিক সংখ্যা।

অর্থাৎ একে p/q আকারে প্রকাশ করা যাবে যেখানে p ও q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$ ।

∴ এটি একটি মূলদ সংখ্যা।

(ii) $0.1010010001 \dots$

এটি পৌনঃপুনিক দশমিক সংখ্যা নয়।

অর্থাৎ একে p/q আকারে প্রকাশ করা যাবে না যেখানে p ও q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$ ।

∴ এটি একটি অমূলদ সংখ্যা।

(iii) $6538.789789 \dots$

এটি একটি পৌনঃপুনিক দশমিক সংখ্যা।

অর্থাৎ একে p/q আকারে প্রকাশ করা যাবে যেখানে p ও q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$ ।

∴ এটি একটি মূলদ সংখ্যা।

(iv) $\sqrt[3]{281828}$

এটি একটি পৌনঃপুনিক দশমিক সংখ্যা।

অর্থাৎ একে p/q আকারে প্রকাশ করা যাবে যেখানে p ও q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$ ।

∴ এটি একটি মূলদ সংখ্যা।

(v) $0.122303 \dots$

এটি একটি পৌনঃপুনিক দশমিক সংখ্যা।

অর্থাৎ একে p/q আকারে প্রকাশ করা যাবে যেখানে p ও q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$ ।

∴ এটি একটি মূলদ সংখ্যা।

৬। $\sqrt[3]{2+5\sqrt{8}}$ এবং $\sqrt[3]{8-5\sqrt{2}}$ সংখ্যা দুটির যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ করে সংখ্যারেখায় উপস্থাপন করো।

সমাধান: ১ম সংখ্যা

$$= \sqrt[3]{2+5\sqrt{8}}$$

$$= \sqrt[3]{2+5\sqrt{(2\times 2)\times 2}}$$

$$= \sqrt[3]{2+5\times 2\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt[3]{2+10\sqrt{2}}$$

$$= 12\sqrt[3]{2}$$

২য় সংখ্যা

$$\begin{aligned}
 & 9\sqrt{8}-8\sqrt{2} \\
 & = 9/(2 \times 2 \times 2) - 8\sqrt{2} \\
 & = 9 \cdot 2\sqrt{2} - 8\sqrt{2} \\
 & = 18\sqrt{2} - 8\sqrt{2} \\
 & = 10\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

∴ ১ম ও ২য় সংখ্যার যোগঃ

$$\begin{aligned}
 & 12\sqrt{2} + 10\sqrt{2} \\
 & = 22\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

∴ ১ম ও ২য় সংখ্যার বিয়োগঃ

$$\begin{aligned}
 & 12\sqrt{2} - 10\sqrt{2} \\
 & = 2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

∴ ১ম ও ২য় সংখ্যার গুণঃ

$$\begin{aligned}
 & 12\sqrt{2} \times 10\sqrt{2} \\
 & = 12 \times 10 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \\
 & = 12 \times 10 \times 2 \\
 & = 240
 \end{aligned}$$

∴ ১ম ও ২য় সংখ্যার ভাগঃ

$$\begin{aligned}
 & 12\sqrt{2} \div 10\sqrt{2} \\
 & = 12 \div 10 \\
 & = 6/5 \\
 & = 1.2
 \end{aligned}$$

সংখ্যারেখায় উপস্থাপনঃ

পরে যুক্ত করা হবে; এই সমাধান পেতে আমাদেরকে লিখে জানাও-তাহলে আমরা দ্রুত এটার সমাধান নিয়ে আসব।

৭। সরল করোঃ $\sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}\right)} + \sqrt[3]{\frac{9}{5}} - \sqrt[3]{81}$

$$\begin{aligned}
 \text{সমাধান: } & \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}\right)} + \sqrt[3]{\frac{9}{5}} - \sqrt[3]{81} \\
 & = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}\right)} + \sqrt[3]{\frac{9}{5}} - 3 \cdot \sqrt[3]{3} \\
 & = \frac{3}{5} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}\right)} + \sqrt[3]{\frac{9}{5}} + \frac{3}{5} \cdot (-3 \cdot \sqrt[3]{3}) \\
 & = \frac{3}{5} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}\right)} + 3\sqrt[3]{\frac{9}{5}} + 3(-3) \cdot 3\sqrt[3]{3} \\
 & = \frac{3}{5} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}\right)} + 3\sqrt[3]{\frac{9}{5}} - 27\sqrt[3]{3}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{-15 \cdot 3\sqrt[3]{3} + 5 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}\right)} + 3\sqrt[3]{3}}{5}$$

৮. নিশিত চাকমার দুইটি বর্গাকার সবজি বাগান আছে।



একটির দৈর্ঘ্য $2\sqrt{2}$ একক এবং অন্যটির ক্ষেত্রফল এটির ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ। তাহলে অন্য বাগানের দৈর্ঘ্য কত?

সমাধান: নিশিত চাকমার একটি বাগানের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য
= $2\sqrt{2}$ একক
∴ এই বাগানের ক্ষেত্রফল
= $(2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2})$ বর্গ একক
= $2 \times 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$ বর্গ একক
= 8×2 বর্গ একক
= 8 বর্গ একক

শর্তমতে, অন্য বাগানের ক্ষেত্রফল = 2×8 বর্গ একক = 16
বর্গ একক

∴ অন্য বাগানের দৈর্ঘ্য = $\sqrt{16}$ একক = 4 একক।

৯. তোমার দুইটি ঘনক আকৃতির বক্স আছে। একটির আয়তন 16 ঘনফুট এবং অন্যটির আয়তন 11 ঘনফুট।
প্রতিটি বক্সের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য কত? যদি উক্ত বক্স দুটি
ভেজে তাদের আয়তনের যোগফলের সমান আয়তনের
একটি ঘনক আকৃতির বক্স বানানো হয় তবে সেটির প্রতি
বাহুর দৈর্ঘ্য কত হবে?

সমাধান: আমার 1ম ঘনক আকৃতির বক্স এর আয়তন = 16 ঘনফুট

∴ 1ম বক্সের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য = $\sqrt[3]{16}$ ফুট = $\sqrt[3]{(2 \times 2 \times 2)}$

ফুট = 2 ফুট।

আবার,

আমার 2য় ঘনক আকৃতির বক্স এর আয়তন = 11 ঘনফুট

∴ ২য় বক্সের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য = $\sqrt[3]{11}$ ফুট

এখন, ১ম ও ২য় বক্সের আয়তনের যোগফল = (১৬+১১)

ঘনফুট = ২৭ ঘনফুট

অর্থাৎ, দুইটি বক্স ভেঙে যে নতুন বক্স বানানো হয় তার

আয়তন = ২৭ ঘনফুট

∴ নতুন বক্সের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য = $\sqrt[3]{27}$ ফুট

= $\sqrt[3]{(3 \times 3 \times 3)}$ ফুট = ৩ ফুট।

ঘনবস্তুতে দ্বিপদী ও ত্রিপদী রাশি খুঁজি

১. নিচের কোনটি দ্বিপদী রাশি নয়? তোমার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও।

- ক) $xy+3x$ খ) xy গ) $x+y-1$ ঘ) x^2-2x+1 ঙ) y^2

সমাধানঃ ক) $xy+3x$ একটি দ্বিপদী রাশি কারণ এই রাশিটিতে দুইটি পদ xy ও $3x$ আছে।

খ) xy একটি দ্বিপদী রাশি নয় কারণ এই রাশিটিতে ১টি পদ xy আছে।

গ) $x+y-1$ একটি দ্বিপদী রাশি নয় কারণ এই রাশিটিতে ৩টি পদ x , y , 1 আছে।

ঘ) x^2-2x+1 একটি দ্বিপদী রাশি নয় কারণ এই রাশিটিতে ৩টি পদ x^2 , $2x$, 1 আছে।

ঙ) y^2 একটি দ্বিপদী রাশি নয় কারণ এই রাশিটিতে ১টি পদ y^2 আছে।

২. নিচের দ্বিপদী রাশিগুলো থেকে এক চলক ও দুই চলকবিশিষ্ট দ্বিপদী রাশি চিহ্নিত করো।

- ক) $x+1$ খ) $3x+5$ গ) $x-3$ ঘ) $5x-2$
 ঙ) $2x+3y$ চ) x^2+1 ছ) x^2-y জ) x^2+y^2

সমাধানঃ ক) $x+1$ হলো একটি এক চলক বিশিষ্ট দ্বিপদী রাশি।

- খ) $3x+5$ হলো একটি এক চলক বিশিষ্ট দ্বিপদী রাশি।

- গ) $x-3$ হলো একটি এক চলক বিশিষ্ট দ্বিপদী রাশি।

- ঘ) $5x-2$ হলো একটি এক চলক বিশিষ্ট দ্বিপদী রাশি।

- ঙ) $2x+3y$ হলো একটি দুই চলক বিশিষ্ট দ্বিপদী রাশি।

- চ) x^2+1 হলো একটি এক চলক বিশিষ্ট দ্বিপদী রাশি।

- ছ) x^2-y হলো একটি দুই চলক বিশিষ্ট দ্বিপদী রাশি।

- জ) x^2+y^2 হলো একটি দুই চলক বিশিষ্ট দ্বিপদী রাশি।

৩. নিচের বীজগাণিতিক রাশি থেকে এক চলক, দুই চলক ও তিন চলকবিশিষ্ট ত্রিপদী রাশি চিহ্নিত করো।

- ক) $x+y+3$ খ) x^2+3x+5 গ) $xy+z-3$
 ঘ) $5x+y^2-2$ ঙ) $2x+3y-z$ চ) y^2-y+1
 ছ) x^2-yz+2 জ) x^2+y^2-y

সমাধানঃ ক) $x+y+3$ হলো একটি দুই চলক বিশিষ্ট ত্রিপদী রাশি।

- খ) x^2+3x+5 হলো একটি এক চলক বিশিষ্ট ত্রিপদী রাশি।

- গ) $xy+z-3$ হলো একটি তিন চলক বিশিষ্ট ত্রিপদী রাশি।

- ঘ) $5x+y^2-2$ হলো একটি দুই চলক বিশিষ্ট ত্রিপদী রাশি।

- ঙ) $2x+3y-z$ হলো একটি তিন চলক বিশিষ্ট ত্রিপদী রাশি।

- ছ) y^2-y+1 হলো একটি এক চলক বিশিষ্ট ত্রিপদী রাশি।

ঘ) x^2-yz+2 হলো একটি তিন চলক বিশিষ্ট ত্রিপদী রাশি।

জ) x^2+y^2-y হলো একটি দুই চলক বিশিষ্ট ত্রিপদী রাশি।

৪. নিচের ত্রিপদী রাশির ঘন নির্ণয় করো।

ক) $x+y+3$

সমাধানঃ $(x+y+3)^3$

$$\begin{aligned} &= \{(x+y)+3\}^3 \\ &= (x+y)^3 + 3(x+y)^2 \times 3 + 3(x+y) \times 3^2 + 3^3 [সূত্রানুসারে] \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + 3(x^2 + 2xy + y^2) \times 3 + 3(x+y) \times 9 + 27 \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + 9(x^2 + 2xy + y^2) + 27(x+y) + 27 \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + 9x^2 + 18xy + 9y^2 + 27x + 27y + 27 \end{aligned}$$

খ) $2x+3y-z$

সমাধানঃ $(2x+3y-z)^3$

$$\begin{aligned} &= \{(2x+3y)-z\}^3 \\ &= (2x+3y)^3 - 3(2x+3y)^2 \times z + 3(2x+3y) \times z^2 - z^3 [সূত্রানুসারে] \\ &= (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x \cdot (3y)^2 - (3y)^3 - \\ &3\{(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2\} \times z + 3z^2(2x+3y) - z^2 \\ &= 8x^3 + 36x^2y + 6x \cdot 9y^2 + 27y^3 - \\ &3(4x^2 + 12xy + 9y^2) \times z + 6z^2x + 9z^2y - z^2 \\ &= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 - 12x^2z - 36xyz - \\ &27y^2z + 6z^2x + 9z^2y - z^2 \end{aligned}$$

গ) x^2+3x+5

সমাধানঃ $(x^2+3x+5)^3$

$$\begin{aligned} &= \{(x^2+3x)+5\}^3 \\ &= (x^2+3x)^3 + 3(x^2+3x)^2 \cdot 5 + 3(x^2+3x) \cdot 5^2 + 5^3 \\ &= (x^2)^3 + 3 \cdot (x^2)^2 \cdot 3x + 3x^2 \cdot (3x)^2 + (3x)^3 + 15(x^2+3x)^2 + 3(x^2+3x) \cdot 25 + 125 \\ &= x^6 + 3x^4 \cdot 3x + 3x^2 \cdot 9x^2 + 27x^3 + 15\{(x^2)^2 + 2x^2 \cdot 3x + (3x)^2\} + 75(x^2+3x) + 125 \\ &= x^6 + 9x^5 + 27x^4 + 27x^3 + 15x^4 + 90x^3 + 135x^2 + 75x^2 + 225x + 125 \\ &= x^6 + 9x^5 + 42x^4 + 117x^3 + 210x^2 + 225x + 125 \end{aligned}$$

ঘ) $xy+z-3$

সমাধানঃ $(xy+z-3)^3$

$$\begin{aligned} &= \{(xy+z)-3\}^3 \\ &= (xy+z)^3 - 3(xy+z)^2 \cdot 3 + 3(xy+z) \cdot 3^2 - 3^3 \\ &= (xy)^3 + 3(xy)^2 \cdot z + 3xy \cdot z^2 + z^3 - 9\{(xy)^2 + 2xyz + z^2\} + 3(xy+z) \cdot 9 - 27 \\ &= x^3y^3 + 3x^2y^2z + 3xyz^2 + z^3 - 9\{x^2y^2 + 2xyz + z^2\} + 27(xy+z) - 27 \\ &= x^3y^3 + 3x^2y^2z + 3xyz^2 + z^3 - 9x^2y^2 - 18xyz - 9z^2 + 27xy + 27z - 27 \end{aligned}$$

৫. বীজগাণিতিক নিয়ম ব্যবহার করে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করোঃ

ক) $x^3 + 1$

সমাধানঃ $x^3 + 1$

$$= x^3 + 1^3$$

$$= (x+1)(x^2 - x \cdot 1 + 1^2)$$

$$= (x+1)(x^2 - x + 1)$$

খ) $x^3 - 1$

সমাধানঃ $x^3 - 1$

$$= x^3 - 1^3$$

$$= (x-1)(x^2 + x \cdot 1 + 1^2)$$

$$= (x-1)(x^2 + x + 1)$$

গ) $x^6 - 729$

সমাধানঃ $x^6 - 729$

$$= (x^3)^2 - 27^2$$

$$= (x^3 - 27)(x^3 + 27)$$

$$= (x^3 - 3^3)(x^3 + 3^3)$$

$$= (x-3)(x^2 + x \cdot 3 + 3^2)(x+3)(x^2 - x \cdot 3 + 3^2)$$

$$= (x-3)(x^2 + 3x + 9)(x+3)(x^2 - 3x + 9)$$

ঘ) $x^3 + 3x^2 + 3x + 9$

সমাধানঃ $x^3 + 3x^2 + 3x + 9$

$$= x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 + 1^3 + 8$$

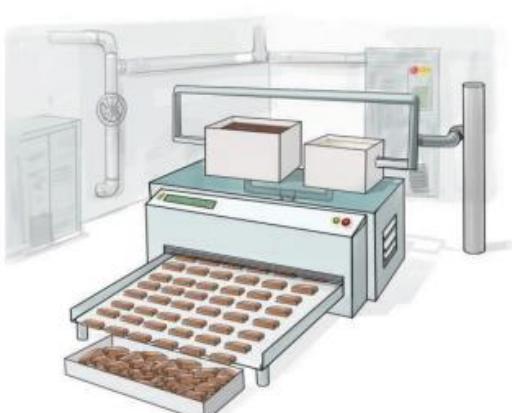
$$= (x+1)^3 + 2^3$$

$$= (x+1+2)\{(x+1)^2 - (x+1) \cdot 2 + 2^2\}$$

$$= (x+3)(x^2 + 2x + 1 - 2x - 2 + 4)$$

$$= (x+3)(x^2 + 3)$$

৬. একটি চকলেট তৈরির ফ্যাট্রিরিতে 2 ফুট এবং 3 ফুট দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট দুইটি ঘনক আকৃতির কন্টেইনারে পূর্ণকরে চকলেটের কাচামাল রাখা আছে।



ক) কোনো কাঁচামাল নষ্ট না হলে, দুইটি কন্টেইনারের কাচামালকে একত্র করে $1'' \times 1'' \times 2''$ আকারের কতগুলো চকলেট তৈরি করা যাবে?

সমাধানঃ আমরা জানি,

$$1 \text{ ফুট} = 12 \text{ ইঞ্চি}$$

$$\therefore 2 \text{ ফুট} = 12 \times 2 = 24 \text{ ইঞ্চি}$$

$$\therefore 3 \text{ ফুট} = 12 \times 3 = 36 \text{ ইঞ্চি}$$

তাহলে, 2 ফুট দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট ঘনক আকৃতির কন্টেইনারের আয়তন
= $24 \times 24 \times 24$ ঘন ইঞ্চি = 13824 ঘন ইঞ্চি।

এবং, 3 ফুট দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট ঘনক আকৃতির কন্টেইনারের আয়তন
= $36 \times 36 \times 36$ ঘন ইঞ্চি = 46656 ঘন ইঞ্চি।

\therefore দুইটি কন্টেইনারের মোট আয়তন = $13824 + 46656$
= 60480 ঘন ইঞ্চি।

এখন, একটি চকলেটের আয়তন বা আকার = $1'' \times 1'' \times 2''$
= 2 ঘন ইঞ্চি।

\therefore পরিপূর্ণ দুইটি কন্টেইনারের কাচামালে চকলেট তৈরি করা
যাবে $(60480 \div 2)$ টি = 30240 টি।

খ) কোনো কাঁচামাল নষ্ট না হলে, দুইটি কন্টেইনারের
কাচামালকে একত্র করে $5'' \times 7'' \times 1''$ আকারের কতগুলো
চকলেট তৈরি করা যাবে?

সমাধানঃ ক হতে পাই,

$$\text{দুইটি কন্টেইনারের মোট আয়তন } 60480 \text{ ঘন ইঞ্চি।}$$

এখন, একটি চকলেটের আয়তন বা আকার = $5'' \times 7'' \times 1'' = 35$
ঘন ইঞ্চি।

\therefore পরিপূর্ণ দুইটি কন্টেইনারের কাচামালে চকলেট তৈরি করা
যাবে $(60480 \div 35)$ টি = 1728 টি।

গ) $5'' \times 7'' \times 1''$ আকারের 1440 টি চকলেট বার তৈরি হলে
কী পরিমাণ কাঁচামাল নষ্ট হয়েছে।

সমাধানঃ $5'' \times 7'' \times 1'' = 35$ ঘন ইঞ্চি;

$\therefore 5'' \times 7'' \times 1''$ আকারের 1440 টি চকলেট বার এর মোট
আয়তন = 35×1440 ঘন ইঞ্চি = 50400 ঘন ইঞ্চি।

এখন, ক হতে পাই,

$$\text{দুইটি কন্টেইনারের মোট আয়তন } 60480 \text{ ঘন ইঞ্চি};$$

অর্থাৎ, পরিপূর্ণ কন্টেইনারে 60480 ঘন ইঞ্চি পরিমাণ কাঁচামালের
থেকে 50400 ঘন ইঞ্চি দিয়ে চকলেট বার তৈরি হয়েছে।
এবং বাকী অংশ নষ্ট হয়েছে।

∴ কাঁচামাল নষ্ট হয়েছে = $(60480 - 50400)$ ঘন ইঞ্চি = 10080

ঘন ইঞ্চি।

৭. লতার বাবার একটি মাছ চামের খামার আছে। খামারে একটি
পুরুর আছে যার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও পানির গভীরতা যথাক্রমে 50
মিটার, 40 মিটার এবং 5 মিটার। আয়তন ঠিক রেখে পানির
গভীরতা 3 মিটার কমালে দৈর্ঘ্য কী পরিমাণ বাড়বে?

সমাধানঃ ১ম শর্তে, পুরুরের আয়তন

$$\begin{aligned} &= \text{দৈর্ঘ্য} \times \text{প্রস্থ} \times \text{গভীরতা} \\ &= 50 \times 40 \times 5 \text{ ঘন মিটার} \\ &= 10000 \text{ ঘন মিটার} \end{aligned}$$

২য় শর্তমতে,

$$\text{গভীরতা} = 5-3 \text{ মিটার} = 2 \text{ মিটার};$$

$$\text{প্রস্থ} = 40 \text{ মিটার};$$

$$\text{দৈর্ঘ্য} = x \text{ (ধরি)};$$

$$\text{আয়তন} = 10000 \text{ ঘন মিটার}.$$

$$\therefore x \cdot 40 \cdot 2 = 10000$$

$$\text{বা, } 80x = 10000$$

$$\text{বা, } x = \frac{10000}{80} = 125$$

∴ আয়তন ঠিক রেখে পানির গভীরতা 3 মিটার কমালে দৈর্ঘ্য
বাড়বে = $125 - 50$ মিটার = 75 মিটার।

ক্ষুদ্র সঞ্চয়ে ভবিষ্যৎ গড়ি

১। রইস ৩৫০০০ টাকা ও বছরের জন্য ব্যাংকে জমা রাখল। যদি সরল মুনাফার হার ৭% হয়, তবে ৩ বছর পরে রইছের কত টাকা মুনাফা হবে? [এটা ক্ষুদ্র সঞ্চয়ে ভবিষ্যৎ গড়ি এর ১ম প্রশ্ন]

সমাধান: সরল মুনাফার সূত্র থেকে আমরা জানি,

$$I = Pnr$$

যেখানে,

আসল, $P = 35000$ টাকা;

সময়, $n = ৩$ বছর;

মুনাফার হার, $r = ৭\% = \frac{৭}{১০০}$

$$\therefore \text{মুনাফা } I = 35000 \times ৩ \times \left(\frac{৭}{১০০}\right) \text{ টাকা} \\ = ৭৩৫০ \text{ টাকা।}$$

তাহলে, ৩ বছর পরে রইছের মুনাফা হবে ৭৩৫০ টাকা।

২। জেবিন তার বন্ধুর সঙ্গে ব্যবসার শেয়ার থেকে ৬ মাসে ২৩০০০ টাকা মুনাফা পেল। মুনাফার হার ৮% হলে, ঐ ব্যবসায় জেবিনের মূলধন কত?

সমাধান: দেওয়া আছে,

সময়, $n = ৬$ মাস = $\frac{১}{২}$ বছর;

মুনাফা, $I = ২৩০০০$ টাকা;

মুনাফার হার, $r = ৮\% = \frac{৮}{১০০} = 0.08$

আসল, $P = ?$

এখন, সরল মুনাফার ক্ষেত্রে,

$$I = Pnr$$

$$\text{বা, } P = \frac{I}{nr}$$

$$\text{বা, } P = \frac{২৩০০০}{\left(\frac{১}{২} \times 0.08\right)}$$

$$\text{বা, } P = ৫৭৫০০ \text{ টাকা।}$$

\therefore ঐ ব্যবসায় জেবিনের মূলধন ৫৭৫০০০ টাকা।

৩। শিমুল ৮০০০০ টাকা কোনো ব্যবসায় খাটিয়ে ২ বছরে ১৭৫০০০ টাকা মুনাফা পেল। শিমুলের শতকরা কত টাকা মুনাফা হলো?

সমাধান: দেওয়া আছে,

সময়, $n = ২$ বছর;

মুনাফা, $I = ১৭৫০০০$ টাকা;

আসল, $P = ৮০০০০$ টাকা

মুনাফার হার, $r = ?$

এখন, সরল মুনাফার ক্ষেত্রে,

$$I = Pnr$$

$$\text{বা, } r = \frac{I}{Pn}$$

$$\text{বা, } r = \frac{১৭৫০০০}{(৮০০০০ \times ২)}$$

$$\text{বা, } r = ১.০৯৩৭৫ = ১০.৯৩৭৫\%$$

\therefore শিমুলের শতকরা মুনাফা হলো ১০.৯৩৭৫%।

৪। জনি ৫০০০০ টাকা ব্যাংকে জমা রাখল। মুনাফার হার ৭.৫% হলে কত বছরে জনি ৩০০০০০ টাকা মুনাফা পাবে?

সমাধান: দেওয়া আছে,

মুনাফা, $I = ৩০০০০০$ টাকা;

আসল, $P = ৫০০০০$ টাকা;

মুনাফার হার, $r = ৭.৫\% = 0.০৭৫$;

সময়, $n = ?$

এখন, সরল মুনাফার ক্ষেত্রে,

$$I = Pnr$$

$$\text{বা, } n = \frac{I}{Pr}$$

$$\text{বা, } n = \frac{৩০০০০০}{(৫০০০০ \times 0.০৭৫)}$$

$$\text{বা, } n = ৮০ \text{ বছর}$$

\therefore নির্ণেয় সময় = ৮০ বছর।

৫। ১০% মুনাফা হারে ৩ লক্ষ টাকা কত বছরের মুনাফা-আসলে দ্বিগুণ হবে?

সমাধান: দেওয়া আছে,

মুনাফার হার, $r = ১০\% = 0.১$

আসল, $P = ৩০০০০০$ টাকা

মুনাফা-আসল = ৩০০০০০×২ টাকা = ৬০০০০০ টাকা

মুনাফা, $I = \text{মুনাফা-আসল} - \text{আসল} = (৬০০০০০ - ৩০০০০০)$ টাকা = ৩০০০০০ টাকা।

সময়, $n = ?$

এখন, আমরা জানি,

$$I = Pnr$$

$$\text{বা, } n = \frac{I}{Pr}$$

$$\text{বা, } n = \frac{৩০০০০০}{(৩০০০০০ \times 0.১)}$$

$$\text{বা, } n = ১০ \text{ বছর।}$$

∴ ১০% মুনাফা হারে ৩ লক্ষ টাকা ১০ বছরের মুনাফা-আসলে দিগুণ হবে।

৬। ৫০০০০ টাকা ৭ বছরে মুনাফা-আসলে ১২০০০০ টাকা হলে মুনাফার হার কত?

সমাধান: দেওয়া আছে,

$$\text{মুনাফা-আসল} = 120000 \text{ টাকা}$$

$$\text{আসল, } P = 50000 \text{ টাকা}$$

$$\therefore \text{মুনাফা, } I = (120000 - 50000) \text{ টাকা} = 70000 \text{ টাকা।}$$

এবং, $n = 7$ বছর;

মুনাফার হার, $r = ?$

এখন, আমরা জানি,

$$I = Pnr$$

$$\text{বা, } r = \frac{I}{Pn}$$

$$\text{বা, } r = \frac{70000}{(50000 \times 7)}$$

$$\text{বা, } r = 0.2 = 20\%$$

∴ মুনাফার হার ২০%

৭। কোনো মূলধন ৫ বছরে যে মুনাফা হারে মুনাফা-আসলে দিগুণ হয়, সেই মুনাফা হারে ৮ বছরে মুনাফা-আসলে ২৬০০০ টাকা হবে। মূলধন কত?

সমাধান: ধরি, মূলধন = x এবং মুনাফা হার = r

$$\therefore x \text{ মূলধনে } 5 \text{ বছরে } r \text{ হারে মুনাফা} = 5xr \text{ টাকা।}$$

১ম শর্তমতে,

$$5xr = 2x [\because \text{মূলধন মুনাফা-আসলে দিগুণ হয়}]$$

$$\text{বা, } 5r = 2$$

$$\text{বা, } r = \frac{2}{5} = 0.4$$

আবার,

$$x \text{ মূলধনে } 8 \text{ বছরে } 0.4 \text{ হারে মুনাফা} = 8 \times x \times 0.4 \text{ টাকা}$$

$$3.2x \text{ টাক।}$$

$$\therefore x \text{ মূলধনে } 8 \text{ বছরে } 0.4 \text{ হারে মুনাফা-আসল}$$

$$= (x + 3.2x) \text{ টাকা} = 8.2x \text{ টাকা।}$$

আবার, ২য় শর্তমতে,

$$8.2x = 26000$$

$$\text{বা, } x = \frac{26000}{8.2} = 6190.47619 \text{ টাকা।}$$

$$\therefore \text{মূলধন} = 6190.47619 \text{ টাকা।}$$

৮. ৯% হারে ২০০০ টাকার ১০ বছরের মুনাফা, ৮% হারে ৫০০০ টাকার কত বছরের মুনাফার সমান?

সমাধান: ৯% হারে ২০০০ টাকার ১০ বছরের মুনাফা
 $= 2000 \times 10 \times 9\% \text{ টাকা}$
 $= 2000 \times 10 \times 0.09 \text{ টাকা}$
 $= 1800 \text{ টাকা।}$

আবার,

$$\begin{aligned} & 8\% \text{ হারে } 5000 \text{ টাকার } n \text{ বছরের মুনাফা} \\ & = 5000 \times n \times 8\% \text{ টাকা} \\ & = 5000 \times n \times 0.08 \text{ টাকা} \\ & = 800n \text{ টাকা।} \end{aligned}$$

শর্তমতে,

$$800n = 1800$$

$$\text{বা, } n = \frac{1800}{800} = 8.5 \text{ বছর।}$$

∴ নির্ণেয় সময় = 8.5 বছর।

৯. ১৩% হারে ২৫০০০ টাকার ৬ বছরের মুনাফা, কত মুনাফা হারে ২০০০০ টাকার ৮ বছরের মুনাফার সমান?

সমাধান: ১৩% হারে ২৫০০০ টাকার ৬ বছরের মুনাফা
 $= 25000 \times 6 \times 13\% \text{ টাকা}$
 $= 25000 \times 6 \times 0.13 \text{ টাকা}$
 $= 19500 \text{ টাকা।}$

আবার,

$$\begin{aligned} & 8\% \text{ হারে } 20000 \text{ টাকার } 8 \text{ বছরের মুনাফা} \\ & = 20000 \times 8 \times r \text{ টাকা} \\ & = 160000r \text{ টাকা।} \end{aligned}$$

শর্তমতে,

$$160000r = 19500$$

$$\text{বা, } r = \frac{19500}{160000} = 0.121875 = 12.1875\%$$

∴ নির্ণেয় মুনাফা হার = 12.1875%

১০. তানজিলা ৩০ হাজার টাকা ৫ বছরের জন্য এবং রায়হান ২০ হাজার টাকা ৭ বছরের জন্য ব্যাংকে জমা রাখল। যদি উভয়ের জন্য মুনাফা হার ৮% হয়, তবে কে এবং কত বেশি লাভবান হবে?

সমাধান: ৮% হারে ৩০০০০ টাকার ৫ বছরের মুনাফা

$$\begin{aligned}
 &= 30000 \times 5 \times 8\% \text{ টাকা} \\
 &= 30000 \times 5 \times 0.08 \text{ টাকা} \\
 &= 12000 \text{ টাকা} .
 \end{aligned}$$

আবার,

$$\begin{aligned}
 8\% \text{ হারে } 20000 \text{ টাকার ৭ বছরের মুনাফা} \\
 &= 20000 \times 7 \times 8\% \text{ টাকা} \\
 &= 20000 \times 7 \times 0.08 \text{ টাকা} \\
 &= 11200 \text{ টাকা} .
 \end{aligned}$$

∴ তানজিলা বেশি লাভবান হবে এবং এই বেশি লাভের পরিমাণ = (12000-11200) টাকা = 800 টাকা।

১১। শরিফা ৭০ হাজার টাকা ৮% মুনাফা হারে এবং জহির ৫০ হাজার টাকা ১২% মুনাফা হারে ব্যাংকে জমা রাখল। ৬ বছর পরে কে এবং কত বেশি লাভবান হবে?

সমাধান: ৭০ হাজার টাকা ৮% মুনাফা হারে ৬ বছরের মুনাফা

$$\begin{aligned}
 &= 70000 \times 6 \times 8\% \text{ টাকা} \\
 &= 70000 \times 6 \times 0.08 \text{ টাকা} \\
 &= 33600 \text{ টাকা} .
 \end{aligned}$$

আবার,

$$\begin{aligned}
 50 \text{ হাজার টাকা } 12\% \text{ মুনাফা হারে } 6 \text{ বছরের মুনাফা} \\
 &= 50000 \times 6 \times 12\% \text{ টাকা} \\
 &= 50000 \times 6 \times 0.12 \text{ টাকা} \\
 &= 36000 \text{ টাকা} .
 \end{aligned}$$

∴ জহির বেশি লাভবান হবে এবং এই বেশি লাভের পরিমাণ = (36000-33600) টাকা = 2400 টাকা।

১২। ৮% মুনাফা হারে ৭৫ হাজার টাকার ৫ বছরের -
(ক) সরল মুনাফা কত?

সমাধান: এখানে,

$$\begin{aligned}
 r &= 8\% = 0.08; \\
 P &= 75000 \text{ টাকা}; \\
 n &= 5 \text{ বছর}; \\
 \therefore \text{সরল মুনাফা, } I &= Pnr \\
 &= 75000 \times 5 \times 0.08 \\
 &= 30000 \text{ টাকা} .
 \end{aligned}$$

(খ) চক্রবৃদ্ধি মুনাফা কত?

সমাধান: এখানে,

$$\begin{aligned}
 r &= 8\% = 0.08; \\
 P &= 75000 \text{ টাকা}; \\
 n &= 5 \text{ বছর}; \\
 \therefore \text{চক্রবৃদ্ধি মুনাফা, } C &= P[(1+r)^n - 1] \\
 &= 75000[(1+0.08)^5 - 1] \\
 &= 75000[1.08^5 - 1] \\
 &= 35199.606 \text{ টাকা} .
 \end{aligned}$$

(গ) সরল মুনাফা এবং চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য কত?

সমাধান: ক ও খ হতে প্রাপ্তি তথ্য থেকে পাই,
চক্রবৃদ্ধি মুনাফা - সরল মুনাফা

$$\begin{aligned}
 &= 35199.606 \text{ টাকা} - 30000 \text{ টাকা} \\
 &= 5199.606 \text{ টাকা} .
 \end{aligned}$$

∴ সরল মুনাফা এবং চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য ৫১৯৯.৬০৬ টাকা।

(ঘ) ৪ মাস অন্তর মুনাফাভিত্তিক চক্রবৃদ্ধি মুনাফা কত?

সমাধান: এখানে,

$$\begin{aligned}
 4 \text{ মাস} &= \frac{4}{12} \text{ বছর} = \frac{1}{3} \text{ বছর} . \\
 \text{এক বছরে মুনাফা প্রাপ্তির সংখ্যা} &= 12 \div 4 = 3 \text{ বার} . \\
 \therefore 5 \text{ বছরে মুনাফা প্রাপ্তির সংখ্যা} &= 3 \times 5 = 15 \text{ বার} \\
 \text{অর্থাৎ } n &= 15
 \end{aligned}$$

৪ মাস বা $\frac{1}{3}$ বছরে চক্রবৃদ্ধি মুনাফার হার,

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{8\%}{3} = \frac{8}{300} = \frac{2}{75} \\
 \therefore \text{চক্রবৃদ্ধি মুনাফা, } C &= P[(1+r)^n - 1] \\
 &= 75000[(1+\frac{2}{75})^{15} - 1] \\
 &= 36302.0625 \text{ টাকা} .
 \end{aligned}$$

(ঙ) ৩ মাস অন্তর মুনাফাভিত্তিক চক্রবৃদ্ধি মুনাফা কত?

সমাধান: এখানে,

$$\begin{aligned}
 3 \text{ মাস} &= \frac{3}{12} \text{ বছর} = \frac{1}{4} \text{ বছর} . \\
 \text{এক বছরে মুনাফা প্রাপ্তির সংখ্যা} &= 12 \div 3 = 4 \text{ বার} . \\
 \therefore 5 \text{ বছরে মুনাফা প্রাপ্তির সংখ্যা} &= 4 \times 5 = 20 \text{ বার} \\
 \text{অর্থাৎ } n &= 20
 \end{aligned}$$

$$3 \text{ মাস বা } \frac{1}{4} \text{ বছরে চক্রবৃদ্ধি মুনাফার হার, } r = \frac{8\%}{4} = 0.02$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{চক্রবৃদ্ধি মুনাফা, } C \\ = P[(1+r)^n - 1] \\ = 75000[(1+0.02)^6 - 1] \\ = 36886.055 \text{ টাকা।}\end{aligned}$$

১৩। জুবায়ের এবং রিয়া উভয়ে ৭% হারে ৬ বছরের জন্য ২৫ হাজার টাকা করে ব্যাংকে জমা রাখল। যদি জুবায়ের সরল হারে এবং রিয়া চক্রবৃদ্ধি হারে মুনাফা পায়, তবে কে বেশি লাভবান হবে এবং ৬ বছর পরে মুনাফা-আসলে কার কত টাকা হবে?



সমাধান: এখানে,

$$\begin{aligned}r &= 7\% = 0.07 \\n &= 6 \\P &= 25000\end{aligned}$$

জুবায়েরের ক্ষেত্রে,

সরল মুনাফা, I

$$\begin{aligned}&= Pnr \\&= 25000 \times 6 \times 0.07 \\&= 10500 \text{ টাকা।}\end{aligned}$$

এবং মুনাফা-আসল = $(25000 + 10500)$ টাকা = ৩৫৫০০ টাকা।

আবার,

$$\begin{aligned}&\text{রিয়ার ক্ষেত্রে,} \\&\text{চক্রবৃদ্ধির মুনাফা, } C \\&= P[(1+r)^n - 1] \\&= 25000[(1+0.07)^6 - 1] \\&= 12518.2587 \text{ টাকা।}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{এবং মুনাফা-আসল} &= (25000 + 12518.2587) \text{ টাকা} \\&= 37518.2587 \text{ টাকা।}\end{aligned}$$

∴ উপরোক্ত প্রাপ্তি তথ্য হতে পাই,

১২৫১৮.২৫৮৭ > ১০৫০০; অর্থাৎ, রিয়া বেশি লাভবান হবে।

জুবায়ের এর মুনাফা-আসল হবে = ৩৫৫০০ টাকা

এবং,

রিয়া এর মুনাফা-আসল হবে = ৩৭৫১৮.২৫৮৭ টাকা।

১৪। আহসান এবং তাহসিনা উভয়ে ১১% মুনাফা হারে ৫ বছরের জন্য ২০ হাজার টাকা করে ব্যাংকে জমা রাখল। যদি আহসান ৬ মাস অন্তর মুনাফাভিত্তিক এবং তাহসিনা ৪ মাস অন্তর মুনাফাভিত্তিক চক্রবৃদ্ধি হারে মুনাফা পায়, তবে কে বেশি লাভবান হবে এবং ৫ বছর পরে কার কত টাকা মূলধন হবে?

সমাধান: ৬ মাস অন্তর মুনাফার ক্ষেত্রেঃ

$$\begin{aligned}6 \text{ মাস} &= \frac{6}{12} \text{ বছর} = \frac{1}{2} \text{ বছর।} \\এক বছরে মুনাফা প্রাপ্তির সংখ্যা &= 12 \div 6 = 2 \text{ বার।} \\∴ 5 \text{ বছরে মুনাফা প্রাপ্তির সংখ্যা} &= 2 \times 5 = 10 \text{ বার} \\অর্থাৎ } n &= 10 \\6 \text{ মাস বা } \frac{1}{2} \text{ বছরে চক্রবৃদ্ধি মুনাফার হার, } r &= \frac{1}{2} \times 11\% \\&= 0.055\end{aligned}$$

∴ চক্রবৃদ্ধি মুনাফা, C

$$\begin{aligned}&= P[(1+r)^n - 1] \text{ [এখানে, } P=20000] \\&= 20000[(1+0.055)^{10} - 1] \\&= 14162.8892 \text{ টাকা।}\end{aligned}$$

∴ মুনাফা-আসল বা মূলধন = $(20000 + 14162.8892)$ টাকা = ৩৪১৬২.৮৮৯২ টাকা।

৮ মাস অন্তর মুনাফার ক্ষেত্রেঃ

$$\begin{aligned}8 \text{ মাস} &= \frac{8}{12} \text{ বছর} = \frac{2}{3} \text{ বছর।} \\এক বছরে মুনাফা প্রাপ্তির সংখ্যা &= 12 \div 8 = 3 \text{ বার।} \\∴ 5 \text{ বছরে মুনাফা প্রাপ্তির সংখ্যা} &= 3 \times 5 = 15 \text{ বার} \\অর্থাৎ } n &= 15 \\8 \text{ মাস বা } \frac{2}{3} \text{ বছরে চক্রবৃদ্ধি মুনাফার হার, } r &= \frac{1}{3} \times 11\% = \frac{11}{300} \\∴ চক্রবৃদ্ধি মুনাফা, C &= P[(1+r)^n - 1] \text{ [এখানে, } P=20000]\end{aligned}$$

$$= 20000[(1+\frac{11}{100})^{12}-1]$$

$$= 18325.511 \text{ টাকা।}$$

$$\therefore \text{মুনাফা-আসল বা মূলধন} = (20000+18325.511) \text{ টাকা} \\ = 38325.511 \text{ টাকা।}$$

∴ উপরোক্ত প্রাপ্তি তথ্য হতে পাই,

$18162.8892 < 18325.511$; অর্থাৎ, তাহসিনা বেশি লাভবান হবে।

∴ ৫ বছর পর আহসান এবং তাহসিনা এর মূলধন হবে যথাক্রমে 38162.8892 এবং 38325.511 টাকা।

১৫। এক ব্যক্তি একটি খণ্ডন সংস্থা থেকে 11% চক্রবৃদ্ধি হারে প্রতি মাস অন্তর মুনাফা ভিত্তিক 50 হাজার টাকা খণ্ডন নিলেন। যদি এই ব্যক্তি প্রতি মাসে 12000 টাকা করে খণ্ডন পরিশোধ করে, তবে-

(ক) ১ মাস পরে আর কত টাকা খণ্ডন থাকবে?

(খ) ২ মাস পরে আর কত টাকা খণ্ডন থাকবে?

(গ) ৩ মাস পরে আর কত টাকা খণ্ডন থাকবে?

সমাধান: ১ মাস অন্তর খণ্ডের ক্ষেত্রেঃ

$$1 \text{ মাস} = \frac{1}{12} \text{ বছর।}$$

$$\text{এক বছরে খণ্ড বৃদ্ধির সংখ্যা} = 12 \div 1 = 12 \text{ বার।}$$

∴ প্রতি মাসে ১ বার করে খণ্ড বৃদ্ধি হবে অর্থাৎ $n =$ মাস সংখ্যা।

১ মাস বা $\frac{1}{12}$ বছরে চক্রবৃদ্ধি খণ্ড বৃদ্ধির হার,

$$r = \frac{1}{12} \times 11\% = \frac{11}{1200}$$

(ক) ১ মাস পর চক্রবৃদ্ধি মূলখণ্ড, A_1

$$= P(1+r)^n \quad [\text{এখানে, } P=50000]$$

$$= 50000(1+\frac{11}{1200})^1$$

$$= 50858.3305 \text{ টাকা।}$$

এই ব্যক্তি ১ মাসে খণ্ড শোধ করে = 12000 টাকা।

∴ ১ মাস পরে এই ব্যক্তির আর খণ্ড থাকবে = $(50858.3305 - 12000)$ টাকা = 38858.3305 টাকা।

(খ) ২ মাস পর চক্রবৃদ্ধি মূলখণ্ড, A_2

$$= P(1+r)^n \quad [\text{এখানে, } P=50000]$$

$$= 50000(1+\frac{11}{1200})^2$$

$$= 50920.8685 \text{ টাকা।}$$

এই ব্যক্তি ২ মাসে খণ্ড শোধ করে = 12000×2 টাকা = 24000 টাকা।

∴ ২ মাস পরে এই ব্যক্তির আর খণ্ড থাকবে = $(50920.8685 - 24000)$ টাকা = 26920.8685 টাকা।

(গ) ৩ মাস পর চক্রবৃদ্ধি মূলখণ্ড, A_3

$$= P(1+r)^n \quad [\text{এখানে, } P=50000]$$

$$= 50000(1+\frac{11}{1200})^3$$

$$= 51387.6825 \text{ টাকা।}$$

এই ব্যক্তি ৩ মাসে খণ্ড শোধ করে = 12000×3 টাকা = 36000 টাকা।

∴ ৩ মাস পরে এই ব্যক্তির আর খণ্ড থাকবে = $(51387.6825 - 36000)$ টাকা = 15387.6825 টাকা।

১৬. করিম 9% চক্রবৃদ্ধি মুনাফা হারে ৫ বছরের জন্য 50 হাজার টাকা এবং মরিয়ম 7% চক্রবৃদ্ধি মুনাফা হারে ৫ বছরের জন্য 80 হাজার টাকা ব্যাংকে জমা রাখল। ব্যাংক থেকে কার বেশি আয় হবে এবং কত টাকা বেশি আয় হবে?

সমাধান: করিমের আয়ের ক্ষেত্রে,

$$r = 9\% = 0.09;$$

$$n = 5;$$

$$P = 50000;$$

∴ চক্রবৃদ্ধি মুনাফা, $C = P[(1+r)^n - 1]$

$$= 50000[(1+0.09)^5 - 1]$$

$$= 26931.1975 \text{ টাকা।}$$

আবার,

মরিয়মের আয়ের ক্ষেত্রে,

$$r = 7\% = 0.07;$$

$$n = 5;$$

$$P = 80000;$$

∴ চক্রবৃদ্ধি মুনাফা, $C = P[(1+r)^n - 1]$

$$= 80000[(1+0.07)^5 - 1]$$

$$= 32208.1388 \text{ টাকা।}$$

এখন, $32208.1388 > 26931.1975$

∴ মরিয়মের বেশি আয় হবে যার পরিমাণ

= (৩২২০৪.১৩৮৪ - ২৬৯৩১.১৯৭৫) টাকা

= ৫২৭২.৯৪০৯ টাকা।

১৭। তাহসিনা ৩৫০ টাকা দরে ৮টি মুরগি ক্রয় করে মোট ২৫০০ টাকায় বিক্রয় করলে কত লাভ বা ক্ষতি হবে? তাহসিনার মূলধন কত?

সমাধান: তাহসিনা ১টি মুরগি ক্রয় করে ৩৫০ টাকায়

∴ তাহসিনা ৮টি মুরগি ক্রয় করে 350×8 টাকায় = ২৮০০ টাকায়।

এবং ৮টি মুরগি বিক্রয় করে ২৫০০ টাকায়।

তাহলে, তাহসিনার ক্ষতি হয় $(2800 - 2500) = 300$ টাকা।

তাহসিনার মূলধনঃ

তাসসিনার মূলধন ২৮০০ টাকা।

১৮। একজন মাছচাষি তার পুরুরে ৫০০০ টাকার পোনামাছ ছাড়লেন। সে মাছের খাবারের জন্য ৬০০০০ টাকা এবং মাছচাষের শ্রমিকের জন্য ২৫০০০ টাকা খরচ করলো। ঐ মাছচাষির মূলধন কত? যদি তিনি তার পুরুরের মাছ ২০০০০০ টাকা বিক্রি করেন, তবে তার কত টাকা লাভ হবে।

সমাধান: প্রশ্নমতে মাছ চাষির মোট বিনিয়োগ

= $(5000 + 60000 + 25000)$ টাকা

= ৯০০০০ টাকা।

∴ ঐ মাছচাষির মূলধন = ৯০০০০ টাকা।

তার লাভের পরিমাণ

= মাছ বিক্রয়মূল্য - মোট বিনিয়োগ

= $(200000 - 90000)$ টাকা

= ১১০০০০ টাকা।

১৯। একজন কৃষক এক দোকানে ৪০ কেজি ধান দিয়ে ২০ কেজি চাল, ৫ কেজি আটা এবং ১ কেজি ডাল নিল। যদি এক কেজি ধানের দাম ১২ টাকা, এক কেজি চালের দাম ১৬ টাকা, এক কেজি আটার দাম ১৮ টাকা এবং এক কেজি ডালের দাম ২৮ টাকা হয়, তবে কৃষকের কত টাকা লাভ বা ক্ষতি হলো?

সমাধান: ১ কেজি ধানের দাম ১২ টাকা

∴ ৪০ কেজি ধানের দাম 12×40 টাকা = ৪৮০ টাকা।

আবার,

১ কেজি চালের দাম ১৬ টাকা

∴ ২০ কেজি চালের দাম 20×16 টাকা = ৩২০ টাকা।

১ কেজি আটার দাম ১৮ টাকা

∴ ৫ কেজি আটার দাম 18×5 টাকা = ৯০ টাকা।

এবং ১ কেজি ডালের দাম ২৮ টাকা।

তাহলে,

২০ কেজি চাল, ৫ কেজি আটা, ১ কেজি চালের মোট দাম

= $(320 + 90 + 28)$ টাকা = ৪৩৮ টাকা।

∴ কৃষকের ক্ষতি হলো $(480 - 438)$ টাকা = ৪২ টাকা।

২০। একজন ফলবিক্রেতা ১৫০০০ টাকা দিয়ে ১২০ শত লিচু ক্রয় করলেন। যাতায়াতের সময় ৬ শত লিচু নষ্ট হয়ে গেল। বাকি প্রতি শত লিচু কত টাকা দরে বিক্রয় করলে তার মোট ২০০০ টাকা লাভ হবে?

সমাধান: ফলবিক্রেতা ক্রয় করেন ১২০ শত লিচু

যাতায়াতে নষ্ট হয় ৬ শত লিচু

∴ লিচু ভালো থাকে = $(120 - 6)$ শত = ১১৪ শত

এখন,

লিচুর ক্রয়মূল্য = ১৫০০০ টাকা

শর্তমতে, বিক্রয়মূল্য হতে হবে $(15000 + 2000)$

= ১৭০০০ টাকা।

এবং,

১১৪ শত লিচুর বিক্রয়মূল্য হবে ১৭০০০ টাকা

∴ ১ শত লিচুর বিক্রয়মূল্য হবে $= \frac{17000}{114}$ টাকা
= ১৪৯.১২২৮ টাকা (প্রায়)।

২১। একটি সাইকেল ৫,০০০ টাকা দিয়ে ক্রয় করে ১২% লাভে বিক্রয় করলে মোট কত টাকা লাভ হবে? সাইকেলটির বিক্রয়মূল্য কত?

সমাধান: ১২% লাভে,

সাইকেলের ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা সাইকেল বিক্রয়ে লাভ ১২ টাকা

∴ সাইকেলের ক্রয়মূল্য ১ টাকা সাইকেল বিক্রয়ে
লাভ $\frac{12}{100}$ টাকা

∴ সাইকেলের ক্রয়মূল্য ৫০০০ টাকা সাইকেল বিক্রয়ে
লাভ $\frac{1}{2}/\frac{1}{100} \times ৫০০০$ টাকা = ৬০০ টাকা।

অতএব,

মোট লাভ = ৬০০ টাকা

এবং বিক্রয়মূল্য = (৫০০০+৬০০) টাকা = ৫৬০০ টাকা।

২২. একজন ব্যবসায়ী তার পণ্য ৫% ক্ষতিতে বিক্রয় করলেন। যদি তিনি ১২৩০ টাকা বেশি দামে বিক্রি করতে পারতেন তবে তার ৫% লাভ হতো, ব্যবসায়ীর পণ্যের ক্রয়মূল্য কত?

সমাধান: ধরি, পন্যটির ক্রয়মূল্য = ক টাকা।

৫% ক্ষতিতে,

পন্যটির বিক্রয়মূল্য = (ক - ক×৫%) টাকা = (ক - ক×০.০৫) টাকা = ০.৯৫কে টাকা।

৫% লাভে,

পন্যটির বিক্রয়মূল্য = (ক + ক×৫%) টাকা = (ক + ক×০.০৫) টাকা = ১.০৫কে টাকা।

শর্তমতে,

$$0.95কে + 1230 = 1.05কে$$

$$\text{বা, } 1.05কে - 0.95কে = 1230$$

$$\text{বা, } 0.1ক = 1230$$

$$\text{বা, } ক = \frac{1230}{0.1} = 12300$$

∴ পন্যটির ক্রয়মূল্য = ১২৩০০ টাকা।

২৩। উৎপন্নকারী, পাইকারী বিক্রেতা এবং খুচরা বিক্রেতা সকলে ৫% লাভে একটি পণ্য বিক্রয় করেন। একজন খরিদ্দার পণ্যটি খুচরা বিক্রেতার কাছ থেকে ১০৫০ টাকা দিয়ে ক্রয় করলে এর উৎপন্ন খরচ কত?

সমাধান:

এখানে, পন্যটি তিন ধাপে বিক্রি হয় অর্থাৎ $n = 3$;

লাভের চক্ৰবৃদ্ধিৰ হার, $r = ৫\% = 0.05$

চক্ৰবৃদ্ধিৰ হারে সৰ্বশেষ বিক্রয়মূল্য, $A = ১০৫০$ টাকা।

তাহলে, উৎপন্ন খরচ P হলে সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$A = P(1+r)^n$$

$$\text{বা, } ১০৫০ = P(1+0.05)^3$$

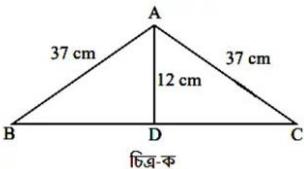
$$\text{বা, } ১০৫০ = P \times 1.157625$$

বা, $P = \frac{১০৫০}{1.157625} = ৯০৭.০৩$ টাকা (প্রায়)।

∴ উৎপন্ন খরচ = ৯০৭.০৩ টাকা (প্রায়)

জমির নকশায় ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ

১। চিত্র ক-এ প্রদত্ত আকৃতি পরিমাপের ক্ষেত্রে কীভাবে সমকোণী ত্রিভুজের বৈশিষ্ট্য ব্যবহার করবে? সমস্যাটি সমাধান করো এবং পিথাগোরাসের উপপাদ্য কীভাবে সাহায্য করল যুক্তি দাও। $AD = 12 \text{ cm}$ হলে BC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।



সমাধানঃ চিত্র ক-এ প্রদত্ত আকৃতি পরিমাপের ক্ষেত্রে সমকোণী ত্রিভুজের একটি বৈশিষ্ট্য ব্যবহার করা যায়। সেটি হলোঃ- সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

এখনে, দুইটি সমকোণী ত্রিভুজ $\triangle ABD$ ও $\triangle ACD$ আছে; তাহলে উপরোক্ত সমকোণী ত্রিভুজের বৈশিষ্ট অনুসারে আমরা লিখতে পারি-

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 \quad \dots \dots \text{(i)}$$

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \quad \dots \dots \text{(ii)}$$

এবং এই দুই সমীকরণ থেকে আমরা চিত্র ক-এ প্রদত্ত আকৃতি পরিমাপ করতে পারি।

BC এর মান নির্ণয়ঃ

(i) নং এ, $AD = 12 \text{ cm}$; $AC = 37 \text{ cm}$ বসিয়ে পাই,

$$37^2 = 12^2 + DC^2$$

$$\text{বা, } DC^2 = 37^2 - 12^2$$

$$\text{বা, } DC^2 = 1225$$

$$\text{বা, } DC = \sqrt{1225} = 35$$

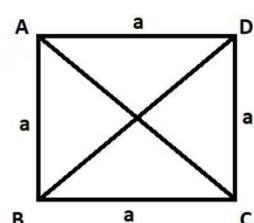
অনুরূপভাবে, (ii) নং থেকে পাই,

$$BD = 35$$

$$\therefore BC = BD + DC = 35 + 35 = 70 \text{ cm}$$

২। চিত্র একে বা কাগজ কেটে প্রমাণ করো- বর্গের কর্ণদ্঵য় পরস্পর সমান।

সমাধানঃ



মনে করি, ABCD একটি বর্গ যাদের AC ও BD দুইটি কর্ণ। নিম্নের চিত্রে বর্গ ও তার কর্ণদ্বয়কে একে দেখানো হলো।

এখন এই চিত্র থেকে প্রমাণ করতে হবে যে, $AC = BD$.

প্রমাণঃ

$ABCD$ বর্গে, $AB = BC = CD = DA = a$ [\because বর্গের চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য সমান হয়];

আবার, $\angle BCD = 90^\circ$ [যেহেতু, ABCD একটি বর্গ]

$\therefore \triangle BCD$ হতে পিথাগোরাসের সূত্রানুসারে পাই,

$$BD^2 = BC^2 + DC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$\text{বা, } BD = \sqrt{(2a^2)} = \sqrt{2.a} \quad \dots \dots \text{(i)}$$

অনুরূপভাবে,

$$AC^2 = CD^2 + DA^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

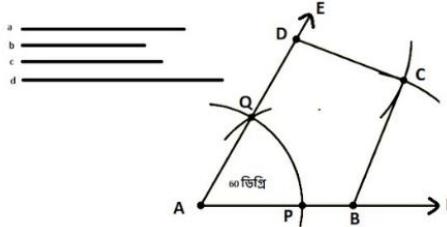
$$\text{বা, } AC = \sqrt{(2a^2)} = \sqrt{2.a} \quad \dots \dots \text{(ii)}$$

এখন, (i) ও (ii) হতে পাই,

$$AC = BD \quad [\text{প্রমাণিত}]$$

৩। ধরো চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে $4 \text{ cm}, 3 \text{ cm}, 3.5 \text{ cm}, 5 \text{ cm}$ এবং যে কোনো একটি কোণ দেওয়া আছে 60° ডিগ্রি। চতুর্ভুজটি অঙ্কন করো। [জমির নকশায় ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ এর ও নং প্রশ্ন এটি; পর্যায়ক্রমে সব দেয়া হয়েছে।]

সমাধানঃ



চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে $a = 4 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$, $c = 3.5 \text{ cm}$, $d = 5 \text{ cm}$ এবং যে কোনো একটি কোণ দেওয়া আছে 60° ডিগ্রি দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণঃ

(ক) যেকোনো একটি রশ্মি AF নেই এবং A কে কেন্দ্র করে যেকোনো ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি যা AF কে P বিন্দুতে ছেদ করে।

(খ) P কে কেন্দ্র করে ঐ একই ব্যাসার্ধ নিয়ে আরও একটি বৃত্তচাপ আঁকি যা পূর্বের বৃত্তচাপকে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

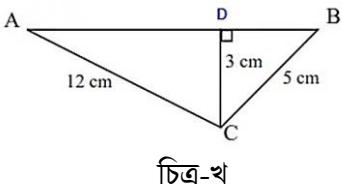
(গ) A, Q যোগ করে AE রশ্মি আঁকি। তাহলে $\angle EAF = 60^\circ$ অঙ্কিত হলো।

(ঘ) এখন, AF থেকে $AB = a$ এবং AE থেকে $AD = d$ অংশ কেটে নিই।

(গ) B কে কেন্দ্র করে b ও D কে কেন্দ্র করে c এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle DAB$ এর অভ্যন্তরে দুটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পরকে C বিন্দুতে ছেদ করে।

(চ) D,C; B,C যোগ করি; তাহলে ABCD নির্ণয় চতুর্ভুজ অঙ্কিত হলো।

৮। চিত্র : খ-এ $AB = ?$



চিত্র-খ

সমাধানঃ অঙ্কনঃ

C বিন্দু থেকে AB এর উপর লম্ব AB কে যে বিন্দুতে ছেদ করে তাকে D দ্বারা চিহ্নিত করি।

AB নির্ণয়ঃ চিত্রানুসারে, ΔBCD -এ,

$$BD^2 + CD^2 = CB^2 \quad [\text{পিথাগোরাসের সূত্রানুসারে}]$$

$$\text{বা, } BD^2 = CB^2 - CD^2$$

$$\text{বা, } BD^2 = 5^2 - 3^2$$

$$\text{বা, } BD^2 = 25 - 9$$

$$\text{বা, } BD^2 = 16$$

$$\text{বা, } BD = 4 \text{ cm} \quad [\text{বর্গমূল করে}]$$

আবার, ΔACD -এ,

$$AD^2 + CD^2 = AC^2 \quad [\text{পিথাগোরাসের সূত্রানুসারে}]$$

$$\text{বা, } AD^2 = AC^2 - CD^2$$

$$\text{বা, } AD^2 = 12^2 - 3^2$$

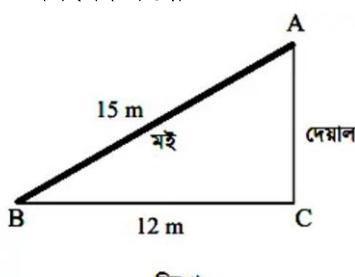
$$\text{বা, } AD^2 = 144 - 9$$

$$\text{বা, } AD^2 = 135$$

$$\text{বা, } BD = 3\sqrt{15} \quad [\text{বর্গমূল করে}]$$

$$\therefore AB = AD + BD = (3\sqrt{15} + 4) \text{ cm}$$

৫। তোমার স্কুলের একটি দেয়াল রঙ করার জন্য যদি 15 m একটি মহিকে দেয়াল থেকে 12 m দূরত্বে স্থাপন করা হয় (চিত্র: গ)। তাহলে ভূমি থেকে মহিয়ের শীর্ষবিন্দু পর্যন্ত দেয়ালের উচ্চতা নির্ণয় করো।



চিত্র-গ

সমাধানঃ চিত্র অনুসারে,

$$AB = \text{মহিয়ের দৈর্ঘ্য} = 15 \text{ m}$$

$$BC = \text{ভূমির দৈর্ঘ্য} = 12 \text{ m}$$

AC = ভূমি থেকে মহিয়ের শীর্ষবিন্দু পর্যন্ত দেয়ালের উচ্চতা এখন, AB, BC, AC মিলিত হয়ে একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করেছে যেখানে, $\angle BCA = 90^\circ$ ।

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$\text{বা, } AC^2 = AB^2 - BC^2$$

$$\text{বা, } AC^2 = 15^2 - 12^2$$

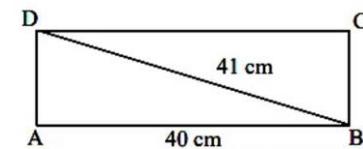
$$\text{বা, } AC^2 = 225 - 144$$

$$\text{বা, } AC^2 = 81$$

$$\text{বা, } AC = 9 \quad [\text{বর্গমূল করে}]$$

\therefore ভূমি থেকে মহিয়ের শীর্ষবিন্দু পর্যন্ত দেয়ালের উচ্চতা 9m.

৬। চিত্র : ঘ এর আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা নির্ণয় করো।



সমাধানঃ চিত্র অনুসারে, ΔABD -এ,

$$BD^2 = AD^2 + AB^2$$

$$\text{বা, } AD^2 = BD^2 - AB^2$$

$$\text{বা, } AD^2 = 41^2 - 40^2$$

$$\text{বা, } AD^2 = 1681 - 1600$$

$$\text{বা, } AD^2 = 81$$

$$\text{বা, } AD = 9 \quad [\text{বর্গমূল করে}]$$

অর্থাৎ,

$$\text{আয়তক্ষেত্রটির প্রস্থ} = AD = BC = 9 \text{ cm};$$

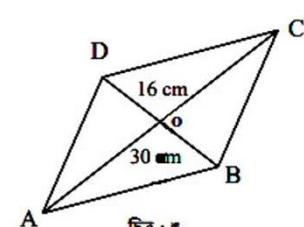
$$\text{আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য} = AB = CD = 40 \text{ cm}.$$

\therefore আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা

$$= 2(\text{দৈর্ঘ্য} + \text{প্রস্থ}) \text{ একক}$$

$$= 2(40+9) \text{ cm} = 2 \times 49 \text{ cm} = 98 \text{ cm}$$

৭। চিত্র : গ এর রম্বসের কর্ণ $AC = 30 \text{ cm}$. ও $BD = 16 \text{ cm}$. হলে রম্বসের পরিধি নির্ণয় করো।



সমাধানঃ আমরা জানি,

রম্পসের কর্ণদুয় নিজেদের ছেদবিন্দুতে নিজেদেরকে সমান দৈর্ঘ্যে দ্বিখন্ডিত করে এবং একে অপরের সাথে লম্বভাবে অবস্থান করে।

এখন, AC ও BD এর ছেদবিন্দু O হলে,

$$AO = \frac{1}{2} \times 30 \text{ cm} = 15 \text{ cm};$$

$$BO = \frac{1}{2} \times 16 \text{ cm} = 8 \text{ cm};$$

$\therefore \Delta ABO$ -এ,

$$AB^2 = AO^2 + OB^2$$

$$\text{বা, } AB^2 = 15^2 + 8^2$$

$$\text{বা, } AB^2 = 225 + 64$$

$$\text{বা, } AB^2 = 289$$

$$\text{বা, } AB = 17 \text{ [বর্গমূল করে]}$$

অর্থাৎ, রম্পসটির বাহুর দৈর্ঘ্য = 17 cm

\therefore রম্পসটির পরিধি = $4 \times 17 \text{ cm} = 68 \text{ cm}$.

৮। যদি (3, 4 ও 5) পিথাগোরিয়ান ত্রয়ী হয়, তবে $(3k, 4k$ ও $5k)$ পিথাগোরিয়ান ত্রয়ী হবে, যেখানে k যে কোনো ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। উক্তিটির যথার্থতা যাচাই করো।

সমাধানঃ যেহেতু (3, 4 ও 5) পিথাগোরিয়ান ত্রয়ী সেহেতু, $3^2 + 4^2 = 5^2$

এখন, $(3k)^2 + (4k)^2 = (5k)^2$ এর ক্ষেত্রে k এর জন্য ধনাত্মক ও ঋণাত্মক মান ধরে হিসাব করি-

$K=1$ হলে,

$$(3.1)^2 + (4.1)^2 = (5.1)^2$$

$$\text{বা, } 3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$\text{বা, } 9+16=25$$

$$\text{বা, } 25=25, \text{ যা যথার্থ।}$$

আবার, $K=-1$ হলে,

$$(3.-1)^2 + (4.-1)^2 = (5.-1)^2$$

$$\text{বা, } (-3)^2 + (-4)^2 = (-5)^2,$$

কিন্তু সমকোণী ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্যের মান ঋণাত্মক হতে পারে না।

আবার, $K=2$ হলে,

$$(3.2)^2 + (4.2)^2 = (5.2)^2$$

$$\text{বা, } 6^2 + 8^2 = 10^2$$

$$\text{বা, } 36+64=100$$

$$\text{বা, } 100=100 \text{ যা যথার্থ।}$$

আবার, $K=-2$ হলে,

$$(3.-2)^2 + (4.-2)^2 = (5.-2)^2$$

$$\text{বা, } (-6)^2 + (-8)^2 = (-10)^2$$

কিন্তু সমকোণী ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্যের মান ঋণাত্মক হতে পারে না।
অর্থাৎ, k এর মান ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হতে পারে না কিন্তু সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হতে পারে [উক্তিটির যথার্থতা যাচাই করা হলো]

৯। যেকোনো ত্রিভুজের দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক। যে কোনো আকৃতির ত্রিভুজ তৈরি করে বা কাগজ কেটে পরিমাপের মাধ্যমে উক্তিটির সত্যতা নিশ্চিত করো।

সমাধানঃ যেকোনো আকৃতির ত্রিভুজ ABC তৈরি করি এবং AB ও AC এর মধ্যবিন্দু P ও Q সংযুক্ত করি। এখন নিচের সারণিতে বাহুর দৈর্ঘ্য পরিমাণ করে নিম্নোক্ত তথ্যগুলি পূরণ করে প্রদত্ত উক্তিটির সত্যতা নিশ্চিত করি।

বাহুর দৈর্ঘ্য	বাহুর দৈর্ঘ্য	অনুপাত
$AP = 2.5 \text{ cm}$	$BP = 2.5 \text{ cm}$	$AP/BP = 1$
$AQ = 2.5 \text{ cm}$	$CE = 2.5 \text{ cm}$	$AQ/CE = 1$
$BC = 4 \text{ cm}$	$PQ = 2 \text{ cm}$	$BC/PQ = 2$

সারণি থেকে পাই,

$$BP = CQ = 2.5 \text{ cm},$$

$\therefore BC \parallel PQ$

আবার,

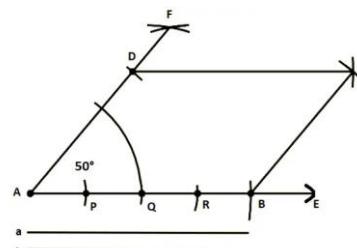
$$BC/PQ = 2$$

$$\text{বা, } PQ = \frac{1}{2}BC$$

অর্থাৎ, প্রদত্ত উক্তিটির সত্যতা যাচাই করা হলো।

১০। সামন্তরিকের দুইটি সম্পর্কিত বাহুর দৈর্ঘ্য 6 cm ও 5 cm এবং বাহুবয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ 50° হলে সামন্তরিকটি অঙ্কন করো।

সমাধানঃ



মনে করি, একটি সামন্তরিকের দুইটি সম্পর্কিত বাহুর দৈর্ঘ্য $a = 6 \text{ cm}$ ও $b = 5 \text{ cm}$ এবং এই বাহুবয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ 50° ।
সামন্তরিকটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনঃ

(ক) যেকোনো রশ্মি AE লই।

(খ) A কে কেন্দ্র করে যেকোনো ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি যা AE কে P বিন্দুতে ছেদ করে। এবং অনুরূপভাবে AP এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে P কে কেন্দ্র করে Q, Q কে কেন্দ্র করে R ছেদ বিন্দু লই।

(গ) Q ও R কে কেন্দ্র করে AE এর একই দিকে AR এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি যারা পরস্পরকে F বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, $\angle EAF = 50^\circ$ অঙ্কিত হলো।

(ঘ) A, F যোগ করি।

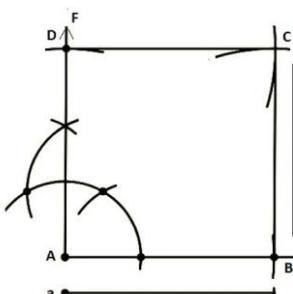
(ঙ) AE থেকে AB = a, AF থেকে AD = b কেটে নিই।

(চ) D কে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ ও B কে কেন্দ্র করে b এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle DAB$ এর অভ্যন্তরে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি যারা পরস্পরকে C বিন্দুতে ছেদ করে।

(ছ) D,C ও A,B যোগ করি। তাহলে, ABCD-ই নির্ণয় সামন্তরিক।

১১। একটি বর্গের এক বাহুর দৈর্ঘ্য 5 cm হলে বর্গটি অঙ্কন করো।

সমাধানঃ



মনে করি একটি বর্গের এক বাহুর দৈর্ঘ্য $a = 5 \text{ cm}$ দেওয়া আছে, বর্গটি আঁকতে হবে।

অংকনঃ

(ক) যেকোনো রশ্মি AE নিই।

(খ) AE থেকে AB = a কেটে নিই।

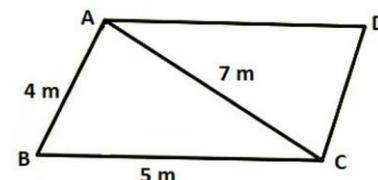
(গ) A বিন্দুতে AF লম্ব আঁকি এবং AF থেকে AD=a কেটে নিই।

(ঘ) B ও D কে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle DAB$ এর অভ্যন্তরে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি যারা পরস্পরকে C বিন্দুতে ছেদ করে।

(ঙ) D,C ও B,C যোগ করি। তাহলে ABCD-ই নির্ণয় বর্গ।

১২. একটি সামান্তরিক আকৃতির জমির দুটি সমিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য 4 m ও 5 m এবং একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 7 m। সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমাধানঃ প্রদত্ত গাণিতিক প্রশ্ন অনুসারে নিম্নোক্ত মডেল চিত্রটি অঙ্কন করি-



মডেল চিত্র

চিত্র অনুসারে, ΔABC -এ

$$\text{পরিসীমা} = (4+5+7) \text{ m} = 16 \text{ m};$$

$$\therefore \text{অর্ধ-পরিসীমা}, s = \frac{16}{2} \text{ m} = 8 \text{ m};$$

এবং, তিনটি বাহু a,b, c এর মান যথাক্রমে 4m, 5m, 7m;

$\therefore \Delta ABC$ -এর ক্ষেত্রফল

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ বর্গ একক}$$

$$= \sqrt{(8 \times 4 \times 3 \times 1)} \text{ m}^2$$

$$= \sqrt{96} \text{ m}^2$$

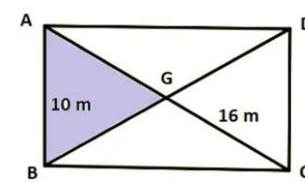
$$= 96 \text{ m}^2$$

এখন, সামন্তরিকের যেকোনো কর্ণ সামন্তরিকটিকে দুইটি সমান ত্রিভুজ ক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

$$\therefore \text{সামন্তরিকটির ক্ষেত্রফল} = 2 \times \sqrt{96} \text{ m}^2 = 19.5959 \text{ m}^2 \text{ (প্রায়)}$$

১৩। ABCD আয়তাকার জমির AB = 10 m এবং কর্ণ AC = 16 m। কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু G হলে ΔAGB এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমাধানঃ প্রদত্ত প্রশ্নের একটি গাণিতিক মডেল চিত্র অঙ্কন করি যা নিম্নরূপঃ



মডেল চিত্র

চিত্র বা শর্ত অনুসারে, আয়তাকার জমির কর্ণ $= AC = BD = 16m$ [যেহেতু আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় সমান];

এবং $AG = BG = \frac{16}{2} \text{ m} = 8 \text{ m}$ [যেহেতু আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় একে আপরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে];

$\therefore \Delta AGB$ -এর ক্ষেত্রে,

$$\text{তিনটি বাহু } a, b, c \text{ এর দৈর্ঘ্য} = 10\text{m}, 8\text{m}, 8\text{m};$$

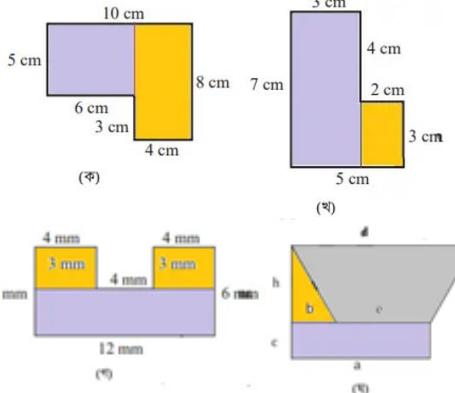
$$\text{পরিসীমা} = (10+8+8) \text{ m} = 26 \text{ m};$$

$$\therefore \text{অর্ধ-পরিসীমা, } s = \frac{26}{2} \text{ m} = 13 \text{ m};$$

$\therefore \Delta AGB$ -এর ক্ষেত্রফল

$$\begin{aligned} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ বর্গ একক} \\ &= \sqrt{13(13-10)(13-8)(13-8)} \text{ m}^2 \\ &= \sqrt{(13 \times 3 \times 5 \times 5)} \text{ m}^2 \\ &= \sqrt{975} \text{ m}^2 \\ &= 31.22499 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

১৪। প্রদত্ত আকৃতিগুলোর ক্ষেত্রফল পরিমাপ করো:



সমাধানঃ (ক)

ক-আকৃতিকে আমরা দুইটি অংশে বিভক্ত করি-
তাহলে,

ক-আকৃতির ক্ষেত্রফল

$$\begin{aligned} &= 1\text{ম আয়তের ক্ষেত্রফল} + 2\text{য আয়তের ক্ষেত্রফল} \\ &= 6\text{cm} \times 5\text{cm} + 8\text{cm} \times 4\text{cm} \\ &= 30\text{cm}^2 + 32\text{cm}^2 \\ &= 62\text{cm}^2 \end{aligned}$$

(খ) খ-আকৃতিকে আমরা দুইটি অংশে বিভক্ত করি-
তাহলে,

খ-আকৃতির ক্ষেত্রফল

$$\begin{aligned} &= 1\text{ম আয়তের ক্ষেত্রফল} + 2\text{য আয়তের ক্ষেত্রফল} \\ &= 7\text{cm} \times 3\text{cm} + 2\text{cm} \times 3\text{cm} \\ &= 21\text{cm}^2 + 6\text{cm}^2 \\ &= 27\text{cm}^2 \end{aligned}$$

(গ) গ-আকৃতিকে আমরা তিনটি অংশে বিভক্ত করি-
তাহলে,

গ-আকৃতির ক্ষেত্রফল

$$\begin{aligned} &= 1\text{ম আয়তের ক্ষেত্রফল} + 2\text{য আয়তের ক্ষেত্রফল} + 3\text{য আয়তের ক্ষেত্রফল} \\ &= 4\text{cm} \times 3\text{cm} + 4\text{cm} \times 3\text{cm} + 12\text{cm} \times 3\text{cm} \end{aligned}$$

$$= 12\text{cm}^2 + 12\text{cm}^2 + 36\text{cm}^2$$

$$= 60\text{cm}^2$$

(ঘ) ঘ-আকৃতিকে আমরা তিনটি অংশে বিভক্ত করি-
তাহলে,

ঘ-আকৃতির ক্ষেত্রফল

$$\begin{aligned} &= 1\text{ম ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} + 2\text{য ট্রিপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল} \\ &\quad + 3\text{য আয়তের ক্ষেত্রফল} \\ &= \frac{1}{2} \times b \times h + \frac{1}{2} (d+e)h + a \times c \\ &= \frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}dh + \frac{1}{2}eh + ac \\ &= \frac{1}{2}h(b+d+e) + ac \end{aligned}$$

অবস্থান মানচিত্রে স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

১. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো যার ঢাল -2 এবং
রেখাটি (4, -5) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

সমাধানঃ আমরা জানি,

$$m \text{ ঢালবিশিষ্ট } (x_1, y_1) \text{ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ } y - y_1 = m(x - x_1)$$

পদক্ষেপ প্রশ্নে দেওয়া আছে, $m = -2$ ও $(x_1, y_1) = (4, -5)$

$$\therefore y - (-5) = -2(x - 4) \quad [\text{মান বসিয়ে}]$$

$$\text{বা, } y + 5 = -2x + 8$$

$$\text{বা, } y = -2x + 8 - 5$$

$$\text{বা, } y = -2x + 3 \quad [\text{ইহাই নির্গেয় সমীকরণ}]$$

২. $A(3, -3)$ ও $B(4, -2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো। সরলরেখাটির ঢাল কত?

সমাধানঃ আমরা জানি, সরলরেখার ঢাল, m

$$\begin{aligned} &= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad [\text{এখানে, } (x_1, y_1) = (3, -3); (x_2, y_2) = (4, -2)] \\ &= \frac{-3 - (-2)}{3 - 4} \\ &= \frac{-1}{-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

আবার, m ঢালবিশিষ্ট (x_1, y_1) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\text{অর্থাৎ, } y - (-3) = 1(x - 3) \quad [A(3, -3) \text{ বিন্দুর প্রেক্ষিতে}]$$

$$\text{বা, } y + 3 = x - 3$$

$$\text{বা, } y = x - 3 - 3$$

$$\text{বা, } y = x - 6$$

$\therefore A(3, -3)$ ও $B(4, -2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ: $y = x - 6$ এবং ঢাল $m = 1$.

৩. দেখাও যে, $A(0, -3)$, $B(4, -2)$ এবং $C(16, 1)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ। [এটা হলো অবস্থান মানচিত্রে স্থানাঙ্ক জ্যামিতি এর ৩ নং প্রশ্ন, নিচে বিস্তারিত দেয়া আছে।]

সমাধানঃ আমরা জানি, m ঢালবিশিষ্ট (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ:

$$y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2).$$

$\therefore m$ ঢালবিশিষ্ট $A(0, -3)$ ও $B(4, -2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার
সমীকরণ: $-3 - (-2) = m(0 - 4)$

$$\text{বা, } -3 + 2 = -4m \quad \text{বা, } -1 = -4m \quad \text{বা, } m = \frac{1}{4}$$

আবার,

m ঢালবিশিষ্ট $B(4, -2)$ এবং $C(16, 1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার
সমীকরণঃ

$$-2 - 1 = m(4 - 16)$$

$$\text{বা, } -3 = m(-12)$$

$$\text{বা, } m = \frac{-3}{-12}$$

$$\text{বা, } m = \frac{1}{4}$$

অর্থাৎ, $A(0, -3)$ ও $B(4, -2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল এবং
 $B(4, -2)$ ও $C(16, 1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল একই।

$\therefore A(0, -3)$, $B(4, -2)$ এবং $C(16, 1)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ
[দেখানো হলো]।

৪. $A(1, -1)$, $B(t, 2)$ এবং $C(t^2, t + 3)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ
হলে t এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় করো।

সমাধানঃ m ঢালবিশিষ্ট (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুগামী
সরলরেখার সমীকরণঃ

$$y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2)$$

$\therefore m$ ঢালবিশিষ্ট $A(1, -1)$ ও $B(t, 2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার
সমীকরণঃ

$$-1 - 2 = m(1 - t)$$

$$\text{বা, } -3 = m(1 - t)$$

$$\text{বা, } m = \frac{-3}{(1-t)} \dots\dots\dots(i)$$

আবার,

m ঢালবিশিষ্ট $B(t, 2)$ এবং $C(t^2, t+3)$ বিন্দুগামী সরলরেখার
সমীকরণঃ

$$2 - (t+3) = m(t - t^2)$$

$$\text{বা, } 2 - t - 3 = m(t - t^2)$$

$$\text{বা, } -t - 1 = m(t - t^2)$$

$$\text{বা, } m = \frac{(-t-1)}{(t-t^2)} \dots\dots\dots(ii)$$

এখন, প্রদত্ত বিন্দু তিনটি সমরেখ; অতএব প্রত্যেক জোড় বিন্দুর
সরলরেখার ঢাল এর মান সমান হবে।

$\therefore (i)$ ও (ii) হতে পাই,

$$-3/(1-t) = (-t-1)/(t-t^2)$$

$$\text{বা, } -3(t-t^2) = (1-t)(-t-1)$$

$$\text{বা, } -3t + 3t^2 = -(1-t)(1+t)$$

$$\text{বা, } -3t + 3t^2 = -(1-t^2)$$

$$\text{বা, } -3t + 3t^2 = -1 + t^2$$

$$\text{বা, } -3t + 3t^2 + 1 - t^2 = 0$$

$$\text{বা, } 2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2t^2 - 2t - t + 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2t(t-1) - 1(t-1) = 0$$

$$\text{বা, } (2t-1)(t-1) = 0$$

$$\text{বা, } 2t-1 = 0 \text{ অথবা, } t-1 = 0$$

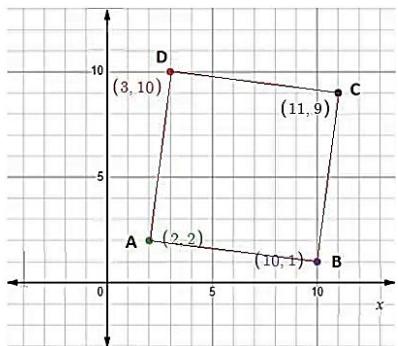
$$\text{বা, } 2t = 1 \text{ বা, } t = 1$$

$$\text{বা, } t = \frac{1}{2}$$

$$\therefore t = (1, \frac{1}{2})$$

৫. A(2, 2), B(10, 1), C(11, 9) এবং D(3, 10) এই বিন্দুগুলো লেখচিত্রে বসাও এবং AB, BC, CD, AD রেখাংশ আঁকো। এই রেখাগুলো দ্বারা কী ধরনের ক্ষেত্র তৈরি হয়েছে? তোমার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও।

সমাধান: লেখচিত্রে x ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে 1 একক ধরে A(2, 2), B(10, 1), C(11, 9) এবং D(3, 10) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। এবং AB, BC, CD, AD রেখাংশ আঁকি।



এই রেখাগুলো দ্বারা একটি বর্গক্ষেত্র তৈরি হয়েছে।

যুক্তি:

দুইটি বিন্দুর স্থানাংকের ভিত্তিতে,

$$AB = \sqrt{(10-2)^2 + (1-2)^2}$$

$$= \sqrt{(8)^2 + (-1)^2}$$

$$= \sqrt{(64+1)}$$

$$= \sqrt{65}$$

$$BC = \sqrt{(11-10)^2 + (9-1)^2}$$

$$= \sqrt{(1)^2 + (8)^2}$$

$$= \sqrt{(1+64)}$$

$$= \sqrt{65}$$

$$CD = \sqrt{(3-11)^2 + (10-9)^2}$$

$$= \sqrt{(-8)^2 + (1)^2}$$

$$= \sqrt{(64+1)} = \sqrt{65}$$

$$AD = \sqrt{(2-3)^2 + (2-10)^2}$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (-8)^2}$$

$$= \sqrt{(1+64)}$$

$$= \sqrt{65}$$

অর্থাৎ, AB = BC = CD = AD

একইভাবে,

$$AC = \sqrt{(11-2)^2 + (9-2)^2}$$

$$= \sqrt{(9)^2 + (7)^2}$$

$$= \sqrt{(81+49)}$$

$$= \sqrt{130}$$

$$BD = \sqrt{(3-10)^2 + (10-1)^2}$$

$$= \sqrt{(-7)^2 + (9)^2}$$

$$= \sqrt{(49+81)}$$

$$= \sqrt{130}$$

অর্থাৎ, ABCD এর কর্ণদ্বয় (AC ও BD) পরস্পর সমান।

∴ AB, BC, CD, AD রেখাগুলো দ্বারা একটি বর্গক্ষেত্র তৈরি হয়েছে।

৬. তিনটি বিন্দুর স্থানাংক A(-2, 1), B(10, 6) এবং C(a, -6).

যদি AB = BC হয়, তবে a এর সম্ভাব্য মানসমূহ নির্ণয় করো।
a এর প্রতিটি মানের জন্য গঠিত ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমাধান: দেওয়া আছে,

তিনটি বিন্দুর স্থানাংক A(-2, 1), B(10, 6) এবং C(a, -6).

দুইটি বিন্দুর স্থানাংকের ভিত্তিতে পাই,

$$AB = \sqrt{(10+2)^2 + (6-1)^2}$$

$$= \sqrt{(12)^2 + (5)^2}$$

$$= \sqrt{(144+25)}$$

$$= \sqrt{169}$$

$$= 13$$

$$\text{এবং, } BC = \sqrt{(a-10)^2 + (-6-6)^2}$$

$$= \sqrt{(a-10)^2 + (-12)^2}$$

$$= \sqrt{(a-10)^2 + 144}$$

প্রশ্ন অনুসারে, AB = BC

$$\text{বা, } 13 = \sqrt{(a-10)^2 + 144}$$

$$\text{বা, } 169 = (a-10)^2 + 144 \text{ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } (a-10)^2 = 169-144$$

$$\text{বা, } (a-10)^2 = 25$$

$$\text{বা, } a^2 - 20a + 10^2 - 25 = 0$$

$$\text{বা, } a^2 - 20a + 100 - 25 = 0$$

$$\text{বা, } a^2 - 15a - 5a + 75 = 0$$

$$\text{বা, } a(a-15) - 5(a-15) = 0$$

$$\text{বা, } (a-5)(a-15) = 0$$

$$\text{বা, } a-5 = 0 \text{ অথবা, } a-15=0$$

$$\text{বা, } a=5 \quad \text{বা, } a = 15$$

$$\therefore a = (5, 15)$$

এখন,

$a=5$ হলে, তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $A(-2, 1)$, $B(10, 6)$ এবং $C(5, -6)$;

$\therefore \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)] \text{ [সূত্রানুসারে]}$$

$$= \frac{1}{2}[-2(6+6)+10(-6-1)+5(1-6)]$$

$$= \frac{1}{2}[-2 \times 12 + 10(-7) + 5(-5)]$$

$$= \frac{1}{2}[-24 - 70 - 25]$$

$$= \frac{1}{2} \times (-119)$$

$$= -59.5$$

কিন্তু ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক হয় না।

$\therefore a=5$ হলে, ΔABC এর ক্ষেত্রফল 59.5 বর্গ একক।

আবার,

$a=15$ হলে, তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $A(-2, 1)$, $B(10, 6)$ এবং

$C(15, -6)$;

$\therefore \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)] \text{ [সূত্রানুসারে]}$$

$$= \frac{1}{2}[-2(6+6)+10(-6-1)+15(1-6)]$$

$$= \frac{1}{2}[-2 \times 12 + 10(-7) + 15(-5)]$$

$$= \frac{1}{2}[-24 - 70 - 75]$$

$$= \frac{1}{2} \times (-169)$$

$$= -84.5$$

কিন্তু ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক হয় না।

$\therefore a=15$ হলে, ΔABC এর ক্ষেত্রফল 84.5 বর্গ একক।

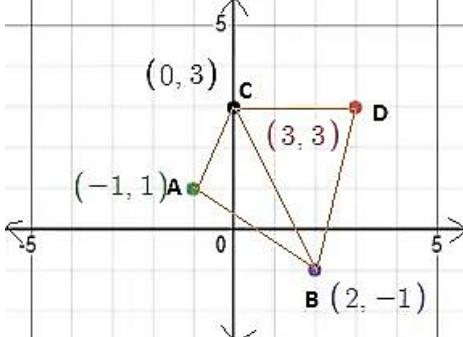
৭. চারটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $A(-1, 1)$, $B(2, -1)$, $C(0, 3)$ ও $D(3, 3)$ ।

বিন্দুগুলো দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমাধানঃ দেওয়া আছে,

চারটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $A(-1, 1)$, $B(2, -1)$, $C(0, 3)$ ও $D(3, 3)$ ।

বিন্দুগুলোকে গ্রাফ কাগজে বসালে নিম্নোক্ত চতুর্ভুজ $ABDC$ পাই।



$\therefore \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)] \text{ [সূত্রানুসারে]}$$

$$= \frac{1}{2}[-1(-1-3)+2(3-1)+0(1+1)]$$

$$= \frac{1}{2}[-1 \times (-4)+2(2)+0(2)]$$

$$= \frac{1}{2}[4+4+0]$$

$$= \frac{1}{2} \times (8)$$

$$= 4 \text{ বর্গ একক।}$$

এবং,

ΔBDC এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)] \text{ [সূত্রানুসারে]}$$

$$= \frac{1}{2}[2(3-3)+3(3+1)+0(-1-3)]$$

$$= \frac{1}{2}[2 \times 0 + 3(4) + 0(-4)]$$

$$= \frac{1}{2}[0+12+0]$$

$$= \frac{1}{2} \times (12)$$

$$= 6 \text{ বর্গ একক।}$$

\therefore বিন্দুগুলো দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল

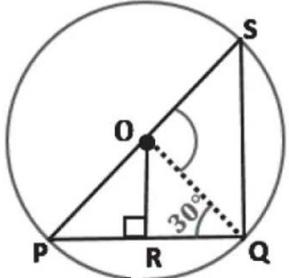
$$= \Delta ABC \text{ এর ক্ষেত্রফল} + \Delta BDC \text{ এর ক্ষেত্রফল}$$

$$= (4+6) \text{ বর্গ একক}$$

$$= 10 \text{ বর্গ একক।}$$

বৃত্তের খুঁটিনাটি

১। ০ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে জ্যা $PQ = x \text{ cm}$ এবং $OR \perp PQ$ ।



ক) $\angle QOS$ এর পরিমাণ কত?

সমাধানঃ ΔPOQ -এ,

$PO = OQ$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]

$\therefore \angle QPO = \angle PZO = 30^\circ$ [সমিদ্বিবাহু ত্রিভুজের বাহুদ্বয়ের বিপরীত কোণদ্বয় সমান]

এখন,

$\angle QPO + \angle PZO + \angle POZ = 180^\circ$ [ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180°]

$$\text{বা, } 30^\circ + 30^\circ + \angle POZ = 180^\circ$$

$$\text{বা, } \angle POZ = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ$$

$$\text{বা, } \angle POZ = 120^\circ \dots\dots\dots(i)$$

আবার,

$$\angle POS = 180^\circ \quad [\because 1 \text{ সরলকোণ} = 180^\circ]$$

$$\text{বা, } \angle QOS + \angle POZ = 180^\circ$$

$$\text{বা, } \angle QOS = 180^\circ - \angle POZ$$

$$\text{বা, } \angle QOS = 180^\circ - 120^\circ \quad [(i) \text{ নং হতে মান বসিয়ে]$$

$$\therefore \angle QOS = 60^\circ$$

খ) $OR = (\frac{x}{2} - 2) \text{ cm}$ হলে, x এর মান নির্ণয় করো।

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $OR = (\frac{x}{2} - 2) \text{ cm}$;

$$PQ = x \text{ cm};$$

এখন,

ΔPOR ও ΔQOR -এ,

OR সাধারণ বাহু;

$PO = QO$ [\because একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$\angle ORP = \angle ORQ = 90^\circ$ [$\because OR \perp PQ$]

$\therefore \Delta POR \cong \Delta QOR$

$\therefore PR = QR$

$$\therefore PR = \frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}x \dots\dots\dots(i)$$

আবার,

ΔPOR -এ,

$$\angle ORP = 90^\circ \quad [\because OR \perp PQ]$$

$$\angle RPO = 30^\circ \quad [\because PQ = OR]$$

$$\therefore \angle POR = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$\therefore \angle POR = 2\angle RPO$$

$$\therefore PR = 2OR = 2(\frac{x}{2} - 2) \dots\dots\dots(ii)$$

এখন, (i) ও (ii) হতে পাই,

$$\frac{1}{2}x = 2(\frac{x}{2} - 2)$$

$$\text{বা, } \frac{1}{2}x = x - 4$$

$$\text{বা, } x = 2x - 8$$

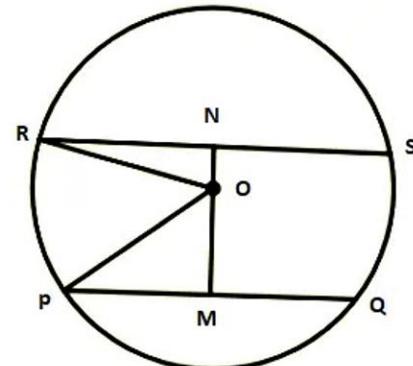
$$\text{বা, } x - 2x = -8$$

$$\text{বা, } -x = -8$$

$$\therefore x = 8$$

২। ১০ cm ও 24 cm দৈর্ঘ্যের PQ ও RS সমান্তরাল জ্যা দুইটি O কেন্দ্রীয় বৃত্তের কেন্দ্রের বিপরীত পাশে অবস্থিত। যদি PQ ও RS জ্যা দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব 17 cm হলে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো।

সমাধানঃ মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট $PQRS$ বৃত্তে PQ ও RS দুইটি সমান্তরাল জ্যা যারা O এর দুই বিপরীত পাশে অবস্থিত এবং $PQ = 10 \text{ cm}$ ও $RS = 24 \text{ cm}$. এবং PQ ও RS এর মধ্যবর্তী দূরত্ব 17 cm. বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে হবে।



অঙ্কনঃ

$O, R; O, P$ যোগ করি এবং O থেকে PQ এর উপর OM লম্ব এবং RS এর উপর ON লম্ব আঁকি।

বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয়ঃ

$$PQ = 10 \text{ cm}$$

$\therefore PM = \frac{10}{2} \text{ cm} = 5 \text{ cm}$ [বৃত্তের কেন্দ্র থেকে জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যা কে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

তাহলে, ΔOPM -এ,

$$OP^2 = PM^2 + OM^2$$

$$\therefore OP^2 = 5^2 + OM^2 \dots\dots\dots(i)$$

আবার,

$$RS = 24 \text{ cm}$$

$$\therefore RN = \frac{24}{2} \text{ cm} = 12 \text{ cm};$$

ΔNRO -এ,

$$RO^2 = RN^2 + ON^2$$

$$\therefore OP^2 = 12^2 + (MN - OM)^2 \dots(ii) [\because RO = OP = \text{বৃত্তের ব্যাসার্ধ}]$$

এখন,

(i) ও (ii) হতে পাই,

$$5^2 + OM^2 = 12^2 + (MN - OM)^2$$

$$\text{বা, } 5^2 + OM^2 = 12^2 + (17 - OM)^2$$

$$\text{বা, } 25 + OM^2 = 144 + 17^2 - 2 \cdot 17 \cdot OM + OM^2$$

$$\text{বা, } 25 + OM^2 = 144 + 289 - 34OM + OM^2$$

$$\text{বা, } 25 + OM^2 - 144 - 289 + 34OM - OM^2 = 0$$

$$\text{বা, } 34OM - 408 = 0$$

$$\text{বা, } 34OM = 408$$

$$\therefore OM = \frac{408}{34} = 12 \text{ cm}$$

এখন, OM এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$OP^2 = 5^2 + 12^2$$

$$\text{বা, } OP^2 = 25 + 144$$

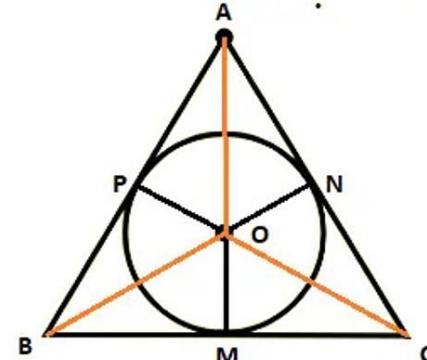
$$\text{বা, } OP^2 = 169$$

$$\text{বা, } OP = 13$$

$$\therefore \text{বৃত্তের ব্যাসার্ধ} = 13 \text{ cm.}$$

৩। ধরো, তোমাদের একটি ত্রিভুজাকৃতি জমি আছে। জমিটির পরিসীমা 124 মিটার। ঐ জমির সবচেয়ে বেশি জায়গা জুড়ে সবজি চাষ করতে চাও। যদি সবজি চাষের জায়গার পরিধি 84 মিটার হয়, তবে জমিটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমাধানঃ



ধরি, আমার একটি সবজি বাগান আছে যা নিম্নের চিত্রে ABC ত্রিভুজের ন্যায়। $AB+BC+CA = 124$ মিটার। ঐ জমির সবচেয়ে বেশি জায়গায় আমি সবজি করতে চাই, যার পরিধি 84 মিটার। এখন পরিধি বৃত্তক্ষেত্রের হয়ে থাকে অর্থাৎ বৃত্ত ক্ষেত্রটি এমন হবে যেন সেটি ত্রিভুজের সকল বাহুলে স্পর্শ করে ফলত সবজি চাষে বেশি জায়গা পাব। বৃত্তটি BC বাহুকে M; CA বাহুকে N; AB বাহুকে P বিন্দুতে স্পর্শ করে। বৃত্তের কেন্দ্র O; O,M; O,N; O,P যোগ করি। এখন,

O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হলে, প্রশ্নমতে,

$$2\pi r = 84$$

$$\text{বা, } r = \frac{84}{2\pi}$$

$$\text{বা, } r = 13.368984 [\because \pi=3.1416]$$

চিত্রনুসারে, $OM=ON=OP=r=13.368984$

এখন, আমরা জানি,

বৃত্তের কোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক, স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব।

$$\therefore OM \perp BC; ON \perp AC; OP \perp AB$$

তাহলে,

OM, OBC ত্রিভুজের উচ্চতা।

$\therefore \Delta OBC$ এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} \times BC \times OM$$

$$= \frac{1}{2} \times BC \times 13.368984$$

$$= 6.684492 \times BC$$

অনুরূপভাবে,

$$\Delta AOC \text{ এর ক্ষেত্রফল} = 6.684492 \times AC$$

$$\Delta AOB \text{ এর ক্ষেত্রফল} = 6.684492 \times AB$$

তাহলে,

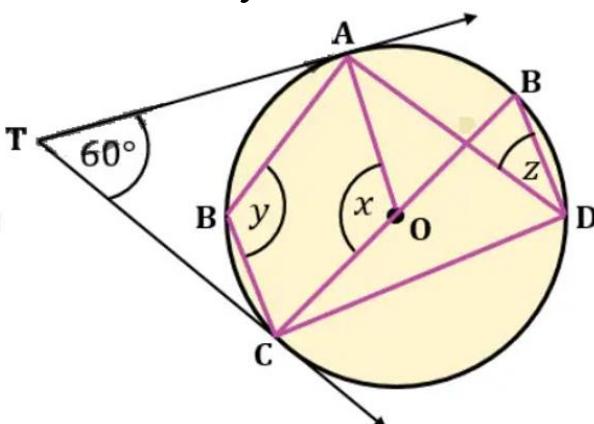
ΔABC এর ক্ষেত্রফল

= ΔOBC এর ক্ষেত্রফল + ΔAOC এর ক্ষেত্রফল + ΔAOB এর ক্ষেত্রফল

$$\begin{aligned} &= 6.684492 \times BC + 6.684492 \times ON + 6.684492 \times OP \\ &= 6.684492(BC + AC + AB) \\ &= 6.684492 \times 124 \\ &= 828.877008 \text{ বর্গ মিটার।} \end{aligned}$$

৪। চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং TA ও TC দুইটি স্পর্শক।

$\angle ATC = 60^\circ$ হলে, x, y ও z এর মান নির্ণয় করো।



সমাধানঃ

চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং TA ও TC দুইটি স্পর্শক;

\therefore ATCO-এ,

$$\angle OAT = 90^\circ; \angle OCT = 90^\circ$$

$$\therefore \angle OAT + \angle OCT + \angle ATC + \angle COA = 360^\circ \quad [\text{চতুর্ভুজের চার কোণের সমষ্টি} = 360^\circ]$$

$$\text{বা, } 90^\circ + 90^\circ + 60^\circ + x = 360^\circ$$

$$\text{বা, } 240^\circ + x = 360^\circ$$

$$\text{বা, } x = 360^\circ - 240^\circ$$

$$\therefore x = 120^\circ \dots\dots\text{(i)}$$

আবার,

$$x + \angle AOB = 180^\circ \quad [\text{এক সরলকোণ}]$$

$$\therefore \angle AOB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

আবার, কেন্দ্রস্থ $\angle AOC = 2 \times \text{পরিধিস্থ কোণের দিগ্নণ}$

$$\text{বা, } 120^\circ = 2 \times \angle ADC \quad [\text{(i) নং থেকে মান বসিয়ে}]$$

$$\therefore \angle ADC = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ \dots\dots\text{(ii)}$$

আবার,

কেন্দ্রস্থ $\angle COB = 2 \times \text{পরিধিস্থ কোণ পরিধিস্থ কোণের দিগ্নণ}$

$$\text{বা, } 180^\circ = 2 \times \angle CDB$$

$$\text{বা, } \angle CDB = \frac{180^\circ}{2}$$

$$\text{বা, } \angle CDB = 90^\circ$$

$$\text{বা, } \angle ADC + \angle ADB = 90^\circ$$

$$\text{বা, } 60^\circ + z = 90^\circ \quad [\text{(ii) নং থেকে মান বসিয়ে}]$$

$$\therefore z = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \dots\dots\text{(iii)}$$

আবার, $360^\circ - x$

$$= 360^\circ - 120^\circ$$

= 240° যা x কোণ এর বিপরীত দিকের কেন্দ্রস্থ কোণ

$$= 2 \times \text{পরিধিস্থ } \angle ABC$$

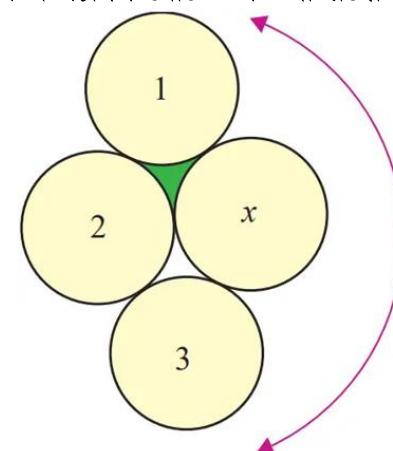
$$= 2 \times y$$

$$\therefore 2y = 240^\circ$$

$$\therefore y = 240^\circ / 2 = 120^\circ \dots\dots\text{(iv)}$$

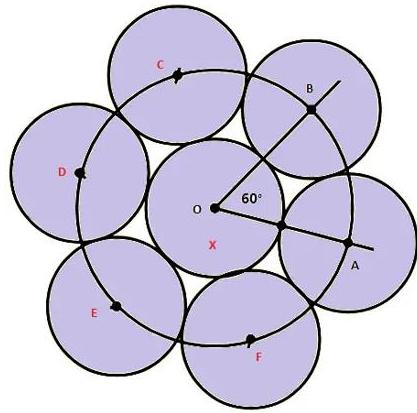
$$\text{অতএব, } x = 120^\circ; y = 120^\circ; z = 30^\circ$$

৫। একই আকারের (একই রকমের) কয়েকটি এক (১) টাকার কয়েন সংগ্রহ করো। কয়েনগুলোর যে কোনো একটিকে তোমার খাতার মাঝখানে রাখো। এবার এর চারপাশে পরস্পরকে স্পর্শ করে চিত্রের মতো কয়েনগুলো বসাও। অনেকটা ক্যারম বোর্ডে গুটি সাজানোর মতো।



ক) উপরের শর্ত মেনে 'x' চিহ্নিত কয়েনকে স্পর্শ করে চারপাশে সর্বোচ্চ কটি কয়েন বসানো যাবে? চিত্রটি সম্পূর্ণ করে তা নির্ণয় করো।

সমাধানঃ



ধরি, x কয়েনের ব্যাসার্ধ = a

এখন, x কয়েনের কেন্দ্রে $\angle BOA = 60^\circ$ আঁকি।

O কে কেন্দ্র করে 2a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত ABCDEF আঁকি যা অঙ্কিত কোণের দুই বাহুকে যথাক্রমে A ও B তে ছেদ করে।

এখন, ABCDEF এর পরিধি = $2\pi \cdot 2a = 4\pi a$

এবং, AB চাপের দৈর্ঘ্য = $\frac{60}{360} \times 4\pi a$

\therefore x কয়েনের চারপাশে সর্বোচ্চ কয়েন বসানো যাবে

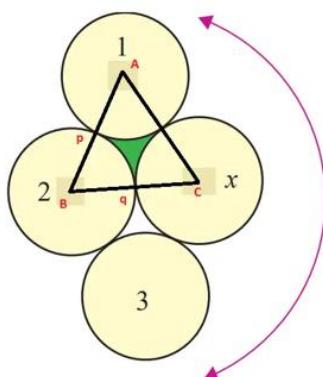
$$= 4\pi a \div \frac{60}{360} \times 4\pi a \text{ টি}$$

$$= 6 \text{ টি।}$$

উপরে চিত্রটি সম্পূর্ণ করা হলো এবং গণনা করে কয়েন সংখ্যা পেলাম 6 টি।

খ) চিত্রের '1', '2' ও 'x' চিহ্নিত বৃত্ত তিনিটির কেন্দ্রগুলো যোগ করো। যে ত্রিভুজটি পেলে তার পরিসীমা 18 সেমি। চিত্রের সবুজ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমাধানঃ



মনে করি,

কয়েন 1, 2 ও x এর কেন্দ্র যথাক্রমে A, B ও C. এবং প্রতিটি কয়েনের ব্যাসার্ধ = a.

তাহলে,

$$AB = a+a = 2a;$$

$$BC = a+a = 2a;$$

$$CA = a+a = 2a.$$

প্রশ্নমতে,

$$2a + 2a + 2a = 18$$

$$\text{বা, } 6a = 18$$

$$\therefore a = \frac{18}{6} = 3 \text{ সেমি।}$$

এবং, $AB = 2.3 = 6$; $BC = 2.3 = 6$; $CA = 2.3 = 6$;

অর্থাৎ, $AB=BC=CA = 6$ সেমি।

\therefore ABC এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (\text{বাহুর দৈর্ঘ্য})^2$ বর্গ একক [সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সূত্রমতে]

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 6^2 \text{ বর্গ সেমি}$$

$$= 15.58845 \text{ বর্গ সেমি (প্রায়)}$$

আবার,

সমবাহু ত্রিভুজের প্রতিটি কোণের পরিমাণ 60° .

এখন, 2 নং বৃত্তে PQ বৃত্তচাপ উৎপন্ন হয়েছে যার কেন্দ্রে কোণ 60° .

\therefore বৃত্তকলাটির ক্ষেত্রফল

$$= \frac{60}{360} \times \pi r^2 \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{60}{360} \times 3.1416 \times 3^2 \text{ বর্গ সেমি}$$

$$= 4.7124 \text{ বর্গ সেমি।}$$

অনুরূপভাবে 1, 2, x কয়েনে উৎপন্ন বৃত্তকলাত্রয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি

$$= 4.7124 \text{ বর্গ সেমি} + 4.7124 \text{ বর্গ সেমি} + 4.7124 \text{ বর্গ সেমি}$$

$$= 14.1372 \text{ বর্গ সেমি}$$

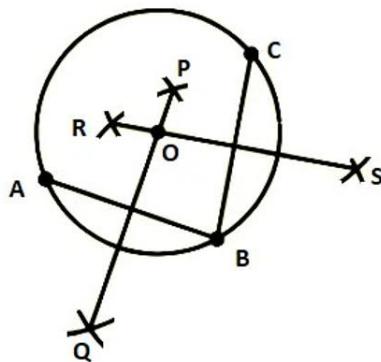
\therefore বৃত্তকলা বাদে সবুজ অংশের ক্ষেত্রফল

$$= 15.58845 \text{ বর্গ সেমি} - 14.1372 \text{ বর্গ সেমি}$$

$$= 1.45125 \text{ বর্গ সেমি}.$$

গ) খাতায় চিত্রের যে কোনো একটি কয়েন ছাপ দিয়ে বৃত্ত বানাও। তারপর বৃত্তটির কেন্দ্র নির্ণয় করো।

সমাধানঃ



খাতায় X কয়েনের ছাপ দিয়ে ABC বৃত্তটি বানাই। এখন, ABC এর কেন্দ্র নির্ণয় করি।

কেন্দ্র নির্ণয়ঃ

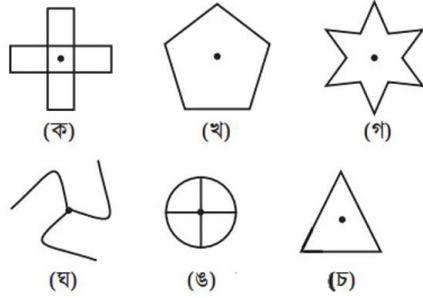
- (i) $A, B; B, C$ যোগ করি।
 - (ii) A কে কেন্দ্র করে AB এর অর্ধেকের বেশি ব্যাসার্ধ নিয়ে AB এর উভয় পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। এবং B কে কেন্দ্র এ একই ব্যাসার্ধ নিয়ে AB এর উভয় পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। ফলত, দুই পাশের দুইটি বৃত্তচাপ পরস্পরকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। P, Q যোগ করি।
 - (iii) একইভাবে, B ও C কেন্দ্র করে বৃত্তচাপ আঁকি ফলত R ও S বিন্দু পাই। R, S যোগ করি।
 - (iv) এখন, PQ ও RS পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, O -ই উক্ত বৃত্তের কেন্দ্র।
- ঘ) যে কোনো একটি কয়েনের ব্যাসার্ধের গুণিতক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুইটি বৃত্ত আঁকো। বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে বহিস্পর্শ করলে প্রমাণ করো যে, বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব তাদের সাধারণ ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ।

সমাধানঃ

এই গাণিতিক সমস্যায় বৃত্তের সাধারণ ব্যাসার্ধ বিষয়টি আমাদের বোধগম্য হয় নি; আরও সময় নিয়ে আমরা এই সমস্যা নিয়ে ভাবব। তোমরাও আমাদেরকে তোমাদের মতামত জানিও।

পরিমাপে প্রতিসমতার প্রয়োগ

১. নিচের চিত্রগুলোর ঘূর্ণন কোণ এবং ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা নির্ণয় করো।



সমাধানঃ (ক)

এখানে, $360^{\circ} \div 4 = 90^{\circ}$ [যেহেতু, চিত্রে সদৃশ অংশ 4টি]

\therefore ঘূর্ণন-কোণ = 90° এবং ঘূর্ণন-প্রতিসমতার মাত্রা = 4

(খ)

এখানে, $360^{\circ} \div 5 = 72^{\circ}$ [যেহেতু, চিত্রে সদৃশ অংশ 5টি]

\therefore ঘূর্ণন-কোণ = 72° এবং ঘূর্ণন-প্রতিসমতার-মাত্রা = 5

(গ)

এখানে, $360^{\circ} \div 6 = 60^{\circ}$ [যেহেতু, চিত্রে সদৃশ অংশ 6টি]

\therefore ঘূর্ণন-কোণ = 60° এবং ঘূর্ণন-প্রতিসমতার-মাত্রা = 6

(ঘ)

এখানে, $360^{\circ} \div 3 = 120^{\circ}$ [যেহেতু, চিত্রে সদৃশ অংশ 3টি]

\therefore ঘূর্ণন-কোণ = 120° এবং ঘূর্ণন-প্রতিসমতার-মাত্রা = 3

(ঙ)

এখানে, $360^{\circ} \div 4 = 90^{\circ}$ [যেহেতু, চিত্রে সদৃশ অংশ 4টি]

\therefore ঘূর্ণন কোণ = 90° এবং ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা = 4

(চ)

এখানে, $360^{\circ} \div 3 = 120^{\circ}$ [যেহেতু, চিত্রে সদৃশ অংশ 3টি]

\therefore ঘূর্ণন কোণ = 120° এবং ঘূর্ণন প্রতিসমতার-মাত্রা = 3

২. (ক) এক মাত্রার ঘূর্ণন প্রতিসমতা বলতে কী বোঝা?

একমাত্রার ঘূর্ণন প্রতিসমতার ঘূর্ণন কোণ কত? [পরিমাপে প্রতিসমতার প্রয়োগ অধ্যায়ের ২ নং এর ক প্রশ্ন এটি, উপরে নিয়ে সকল প্রশ্ন দেখ।]

সমাধানঃ কোণ বন্ধ-ঘূর্ণন-প্রতিসমতার মাত্রা 1 হলে, তাকে এক মাত্রার ঘূর্ণন প্রতিসমতা বলে।

এবং, একমাত্রার ঘূর্ণন প্রতিসমতার-ঘূর্ণন কোণ = $360^{\circ} \div 1 = 360^{\circ}$.

(খ) প্রতিসাম্য কোণ 20 ডিগ্রি হতে পারে কি? কারণ উল্লিখ করো।

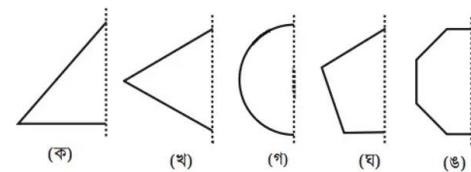
সমাধানঃ $360^{\circ} \div 20^{\circ} = 18$;

অর্থাৎ, কোণ বন্ধ-প্রতিসাম্য-কোণ 20° হলে, এর প্রতিসমতার-

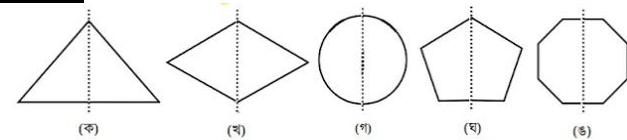
মাত্রা 18 হতে হবে।

∴ প্রতিসাম্য কোণ 20 ডিগ্রি হতে পারে।

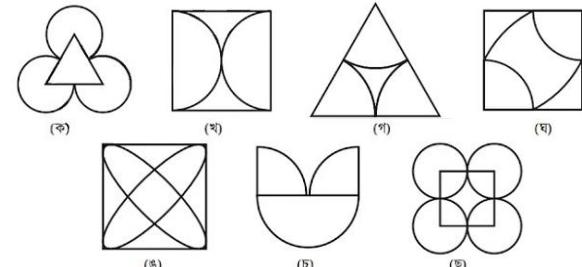
৩। নিচের চিত্রগুলোতে প্রতিসাম্য রেখা দেওয়া আছে। চিত্রগুলো সম্পূর্ণ করো।



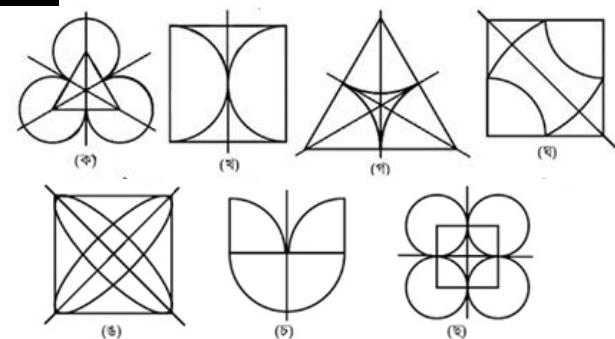
সমাধানঃ চিত্রগুলো সম্পূর্ণ করে নিচে দেওয়া হলোঃ



৪। নিচের চিত্রগুলোর প্রতিসাম্য রেখা অঙ্কন করো।



সমাধানঃ চিত্রগুলোর প্রতিসাম্য-রেখা-অঙ্কন করা হলোঃ



বাইনারি সংখ্যা পদ্ধতি

১। নিচের বাইনারি সংখ্যাগুলোকে দশভিত্তিক সংখ্যায় রূপান্তর করো।

- | | |
|-----------------|---------------------|
| i) 010101 | ii) 110011 |
| iii) 100011 | iv) 101000 |
| v) 101100 | vi) 001100.101 |
| vii) 010010.111 | viii) 0010111111.11 |

সমাধানঃ i) $(010101)_2$

$$\begin{aligned}
 &= 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\
 &= 0 + 16 + 0 + 4 + 0 + 1 \\
 &= (21)_{10}
 \end{aligned}$$

ii) $(110011)_2$

$$\begin{aligned}
 &= 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\
 &= 32 + 16 + 0 + 0 + 2 + 1 \\
 &= (51)_{10}
 \end{aligned}$$

iii) $(100011)_2$

$$\begin{aligned}
 &= 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\
 &= 32 + 0 + 0 + 0 + 2 + 1 \\
 &= (35)_{10}
 \end{aligned}$$

iv) $(101000)_2$

$$\begin{aligned}
 &= 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \\
 &= 32 + 0 + 8 + 0 + 0 + 0 \\
 &= (40)_{10}
 \end{aligned}$$

v) $(101100)_2$

$$\begin{aligned}
 &= 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \\
 &= 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 0 \\
 &= (44)_{10}
 \end{aligned}$$

vi) $(001100.101)_2$

$$\begin{aligned}
 &= 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + \\
 &\quad 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} \\
 &= 0 + 0 + 8 + 4 + 0 + 0 + 0.5 + 0 + 0.125 \\
 &= (12.625)_{10}
 \end{aligned}$$

vii) $(010010.111)_2$

$$\begin{aligned}
 &= 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times \\
 &\quad 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} \\
 &= 0 + 16 + 0 + 0 + 2 + 0 + 0.5 + 0.25 + 0.125 \\
 &= (18.875)_{10}
 \end{aligned}$$

viii) $(0010111111.11)_2$

$$\begin{aligned}
 &= 0 \times 2^9 + 0 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + \\
 &\quad 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} \\
 &= 0+0+128+0+32+16+8+4+2+1+0.5+0.25 \\
 &= (191.75)_{10}
 \end{aligned}$$

২। নিচের দশভিত্তিক সংখ্যাগুলোকে বাইনারিতে রূপান্তর করো।

- | | | | |
|--------|--------|---------|-----------|
| i) 6 | ii) 19 | iii) 56 | iv) 129 |
| v) 127 | vi) 96 | vii) 25 | viii) 200 |

সমাধানঃ i) 6:

$$6 \div 2 = 3; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$3 \div 2 = 1; \text{ ভাগশেষ } 1$$

$$1 \div 2 = 0; \text{ ভাগশেষ } 1$$

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 110

$$\therefore (6)_{10} = (110)_2$$

ii) 19:

$$19 \div 2 = 9; \text{ ভাগশেষ } 1$$

$$9 \div 2 = 4; \text{ ভাগশেষ } 1$$

$$4 \div 2 = 2; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$2 \div 2 = 1; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$1 \div 2 = 0; \text{ ভাগশেষ } 1$$

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 10011

$$\therefore (19)_{10} = (10011)_2$$

iii) 56:

$$56 \div 2 = 28; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$28 \div 2 = 14; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$14 \div 2 = 7; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$7 \div 2 = 3; \text{ ভাগশেষ } 1$$

$$3 \div 2 = 1; \text{ ভাগশেষ } 1$$

$$1 \div 2 = 0; \text{ ভাগশেষ } 1$$

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 111000

$$\therefore (56)_{10} = (111000)_2$$

iv) 129:

$$129 \div 2 = 64; \text{ ভাগশেষ } 1$$

$$64 \div 2 = 32; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$32 \div 2 = 16; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$16 \div 2 = 8; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$8 \div 2 = 4; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$4 \div 2 = 2$; ভাগশেষ 0

$2 \div 2 = 1$; ভাগশেষ 0

$1 \div 2 = 0$; ভাগশেষ 1

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 10000001

$$\therefore (129)_{10} = (10000001)_2$$

v) 127:

$127 \div 2 = 63$; ভাগশেষ 1

$63 \div 2 = 31$; ভাগশেষ 1

$31 \div 2 = 15$; ভাগশেষ 1

$15 \div 2 = 7$; ভাগশেষ 1

$7 \div 2 = 3$; ভাগশেষ 1

$3 \div 2 = 1$; ভাগশেষ 1

$1 \div 2 = 0$; ভাগশেষ 1

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 1111111

$$\therefore (127)_{10} = (1111111)_2$$

vi) 96:

$96 \div 2 = 48$; ভাগশেষ 0

$48 \div 2 = 24$; ভাগশেষ 0

$24 \div 2 = 12$; ভাগশেষ 0

$12 \div 2 = 6$; ভাগশেষ 0

$6 \div 2 = 3$; ভাগশেষ 0

$3 \div 2 = 1$; ভাগশেষ 1

$1 \div 2 = 0$; ভাগশেষ 1

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 1100000

$$\therefore (96)_{10} = (1100000)_2$$

vii) 25:

$25 \div 2 = 12$; ভাগশেষ 1

$12 \div 2 = 6$; ভাগশেষ 0

$6 \div 2 = 3$; ভাগশেষ 0

$3 \div 2 = 1$; ভাগশেষ 1

$1 \div 2 = 0$; ভাগশেষ 1

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 11001

$$\therefore (25)_{10} = (11001)_2$$

viii) 200:

$200 \div 2 = 100$; ভাগশেষ 0

$100 \div 2 = 50$; ভাগশেষ 0

$50 \div 2 = 25$; ভাগশেষ 0

$25 \div 2 = 12$; ভাগশেষ 1

$12 \div 2 = 6$; ভাগশেষ 0

$6 \div 2 = 3$; ভাগশেষ 0

$3 \div 2 = 1$; ভাগশেষ 1

$1 \div 2 = 0$; ভাগশেষ 1

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 11001000

$$\therefore (200)_{10} = (11001000)_2$$

৩। নিচের বাইনারি সংখ্যাগুলোর যোগফল নির্ণয় করো। [এটা

হলো বাইনারি সংখ্যা পদ্ধতি অধ্যায়ের তৃতীয় প্রশ্ন।]

i) $101111 + 101101$

ii) $10101 + 100010$

iii) $1010101 + 1000001$

সমাধানঃ (i)

$$\begin{array}{r} 101111 \\ + 101101 \\ \hline 1011100 \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{r} 10101 \\ + 100010 \\ \hline 110111 \end{array}$$

(iii)

$$\begin{array}{r} 1010101 \\ + 1000001 \\ \hline 10010110 \end{array}$$

৪। নিচের দশভিত্তিক সংখ্যাগুলোকে বাইনারিতে রূপান্তর করে যোগগুলো সম্পন্ন করো।

i) $6 + 19$

ii) $10 + 32$

iii) $56 + 16$

iv) $127 + 127$

সমাধানঃ (i) $6 + 19$

6 কে বাইনারিতে রূপান্তরঃ

$6 \div 2 = 3$; ভাগশেষ 0

$3 \div 2 = 1$; ভাগশেষ 1

$1 \div 2 = 0$; ভাগশেষ 1

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 110

$$\therefore (6)_{10} = (110)_2$$

19 কে বাইনারিতে রূপান্তরঃ

$19 \div 2 = 9$; ভাগশেষ 1

$9 \div 2 = 4$; ভাগশেষ 1

$4 \div 2 = 2$; ভাগশেষ 0

$2 \div 2 = 1$; ভাগশেষ 0

$1 \div 2 = 0$; ভাগশেষ 1

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 10011

$\therefore (19)_{10} = (10011)_2$

এখন, $(6)_{10} + (19)_{10}$

$= (110)_2 + (10011)_2$

$= (11001)_2$

(ii) $10 + 32$

10 কে বাইনারিতে রূপান্তরঃ

$10 \div 2 = 5$; ভাগশেষ 0

$5 \div 2 = 2$; ভাগশেষ 1

$2 \div 2 = 1$; ভাগশেষ 0

$1 \div 2 = 0$; ভাগশেষ 1

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 1010

$\therefore (10)_{10} = (1010)_2$

32 কে বাইনারিতে রূপান্তরঃ

$32 \div 2 = 16$; ভাগশেষ 0

$16 \div 2 = 8$; ভাগশেষ 0

$8 \div 2 = 4$; ভাগশেষ 0

$4 \div 2 = 2$; ভাগশেষ 0

$2 \div 2 = 1$; ভাগশেষ 0

$1 \div 2 = 0$; ভাগশেষ 1

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 100000

$\therefore (32)_{10} = (100000)_2$

এখন, $(10)_{10} + (32)_{10}$

$= (1010)_2 + (100000)_2$

$= (101010)_2$

iii) $56 + 16$

56 কে বাইনারিতে রূপান্তরঃ

$56 \div 2 = 28$; ভাগশেষ 0

$28 \div 2 = 14$; ভাগশেষ 0

$14 \div 2 = 7$; ভাগশেষ 0

$7 \div 2 = 3$; ভাগশেষ 1

$3 \div 2 = 1$; ভাগশেষ 1

$1 \div 2 = 0$; ভাগশেষ 1

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 111000

$\therefore (56)_{10} = (111000)_2$

16 কে বাইনারিতে রূপান্তরঃ

$16 \div 2 = 8$; ভাগশেষ 0

$8 \div 2 = 4$; ভাগশেষ 0

$4 \div 2 = 2$; ভাগশেষ 0

$2 \div 2 = 1$; ভাগশেষ 0

$1 \div 2 = 0$; ভাগশেষ 1

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 10000

$\therefore (16)_{10} = (10000)_2$

এখন, $(56)_{10} + (16)_{10}$

$= (111000)_2 + (10000)_2$

$= (1001000)_2$

iv) $127 + 127$

127 কে বাইনারিতে রূপান্তরঃ

$127 \div 2 = 63$; ভাগশেষ 1

$63 \div 2 = 31$; ভাগশেষ 1

$31 \div 2 = 15$; ভাগশেষ 1

$15 \div 2 = 7$; ভাগশেষ 1

$7 \div 2 = 3$; ভাগশেষ 1

$3 \div 2 = 1$; ভাগশেষ 1

$1 \div 2 = 0$; ভাগশেষ 1

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 1111111

$\therefore (127)_{10} = (1111111)_2$

এখন,

$(127)_{10} + (127)_{10}$

$= (1111111)_2 + (1111111)_2$

$= (11111110)_2$

৫। নিচের বাইনারি সংখ্যাগুলোর বিয়োগ করো। [এটা হলো বাইনারি সংখ্যা পদ্ধতি অধ্যায়ের ৪নং প্রশ্ন।]

i) $1001 - 101$

ii) $11001 - 1011$

iii) $1010010 - 111011$

সমাধানঃ

i) $1001 - 101 = 100$

ii) $11001 - 1011 = 1110$

iii) $1010010 - 111011 = 10111$

৬। নিচের দশভিত্তিক সংখ্যাগুলোর 10's Complement নির্ণয় করো।

- i) 2351
- ii) 90152
- iii) 10003
- iv) 9999

সমাধানঃ i) 2351

ধরি, $a = 2351$ তাহলে, 9999 এর সাপেক্ষে,
 $\because a$ এর 9's Complement, $a^* = 9999 - 2351 = 7648$
 $\because a$ এর 10's Complement, $a^{**} = 7648 + 1 = 7649$

ii) 90152

ধরি, $a = 90152$ তাহলে, 99999 এর সাপেক্ষে,
 $\because a$ এর 9's Complement, $a^* = 99999 - 90152 = 9847$
 $\because a$ এর 10's Complement, $a^{**} = 9847 + 1 = 9848$

iii) 10003

ধরি, $a = 10003$ তাহলে, 99999 এর সাপেক্ষে,
 $\because a$ এর 9's Complement, $a^* = 99999 - 10003 = 89996$
 $\because a$ এর 10's Complement, $a^{**} = 89996 + 1 = 89997$

iv) 9999

ধরি,
 $a = 9999$ তাহলে, 9999 এর সাপেক্ষে,

$\because a$ এর 9's Complement, $a^* = 9999 - 9999 = 0$
 $\because a$ এর 10's Complement, $a^{**} = 0 + 1 = 1$

৭। পূরক ব্যবহার করে নিচের দশভিত্তিক সংখ্যার বিয়োগফল নির্ণয় করো।

- i) 43101 - 5032
- ii) 70081 - 6919
- iii) 2173901 - 5835

সমাধানঃ i) 43101 - 5032

$$\begin{aligned} &= 43101 + (99999 - 5032) - 99999 \quad [\because a^* = 99999 - 5032] \\ &= 43101 + 94967 - 99999 \\ &= 43101 + (94967+1) - 99999 - 1 \quad [\because a^{**} = 94967+1] \\ &= 43101 + 94968 - 100000 \\ &= 38069 \end{aligned}$$

ii) 70081 - 6919

$$\begin{aligned} &= 70081 + (99999 - 6919) - 99999 \quad [\because a^* = 99999 - 6919] \\ &= 70081 + 93080 - 99999 \\ &= 70081 + (93080+1) - 99999 - 1 \quad [\because a^{**} = 93080+1] \\ &= 70081 + 93081 - 100000 \\ &= 63162 \end{aligned}$$

iii) 2173901 - 5835

$$\begin{aligned} &= 2173901 + (9999999 - 5835) - 9999999 \\ &\quad [\because a^* = 9999999 - 5835] \\ &= 2173901 + 9994164 - 9999999 \\ &= 2173901 + (9994164+1) - 9999999 - 1 \\ &\quad [\because a^{**} = 9994164+1] \\ &= 2173901 + 9994165 - 10000000 \\ &= 2168066 \end{aligned}$$

৮। নিচের বাইনারি সংখ্যাগুলোর 2's Complement নির্ণয় করো।

- i) 1111
- ii) 1011001
- iii) 1010101
- iv) 1000001

সমাধানঃ

i) 1111

ধরি, $a = 1111$; তাহলে,
 $\because a$ এর 1's complement, $a^* = 1111 - 1111 = 0$
 $\because a$ এর 2's complement, $a^{**} = 0 + 1 = 1$

ii) 1011001

ধরি, $a = 1011001$; তাহলে,
 $\because a$ এর 1's complement, $a^* = 1111111 - 1011001 = 0100110$
 $\because a$ এর 2's complement, $a^{**} = 0100110 + 1 = 0100111$

iii) 1010101

ধরি, $a = 1010101$; তাহলে,
 $\because a$ এর 1's complement, $a^* = 1111111 - 1010101 = 0101010$
 $\because a$ এর 2's complement, $a^{**} = 0101010 + 1 = 0101011$

iv) 1000001

ধরি, $a = 1000001$; তাহলে,
 $\because a$ এর 1's complement, $a^* = 1111111 - 1000001 = 0111110$
 $\because a$ এর 2's complement, $a^{**} = 0111110 + 1 = 0111111$

৯। পূরক ব্যবহার করে নিচের বাইনারি সংখ্যার বিয়োগফল নির্ণয় করো।

- i) 11001 - 1001
- ii) 100101 - 10011
- iii) 11000101 - 101101

সমাধানঃ

i) 11001 - 1001

$$\begin{aligned} &= 11001 + (11111 - 1001) - 11111 \quad [\because a^* = 11111 - 1001] \\ &= 11001 + 10110 - 11111 \\ &= 11001 + (10110+1) - 11111 - 1 \quad [\because a^{**} = 10110+1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 11001 + 10111 - 100000 \\
 &= 110000 - 100000 = 10000
 \end{aligned}$$

ii) $100101 - 10011$

$$\begin{aligned}
 &= 100101 + (111111 - 10011) - 111111 \\
 &\quad [\because a^* = 111111 - 10011] \\
 &= 100101 + 0101100 - 111111 \\
 &= 100101 + (0101100+1) - 111111 - 1 \\
 &\quad [\because a^{**} = 0101100+1] \\
 &= 100101 + 0101101 - 1000000 \\
 &= 01010010 - 1000000 \\
 &= 010010
 \end{aligned}$$

iii) $11000101 - 101101$

$$\begin{aligned}
 &= 11000101 + (11111111 - 101101) - 11111111 \\
 &= 11000101 + 11010010 - 11111111 \\
 &= 11000101 + (11010010 + 1) - 11111111 - 1 \\
 &= 11000101 + 11010011 - 100000000 \\
 &= 110011000 - 100000000 \\
 &= 10011000
 \end{aligned}$$

১০। নিচের দশভিত্তিক সংখ্যাগুলোকে বাইনারিতে রূপান্তর করে শুণ করে দেখাও।

i) 18×6	ii) 32×23
iii) 21×7	iv) 59×18
v) 118.2×46	vi) 180.50×65
vii) 192×22	viii) 111×101

সমাধান: i) 18×6

18 কে বাইনারিতে রূপান্তরঃ

$$\begin{aligned}
 18 \div 2 &= 9; \text{ ভাগশেষ } 0 \\
 9 \div 2 &= 4; \text{ ভাগশেষ } 1 \\
 4 \div 2 &= 2; \text{ ভাগশেষ } 0 \\
 2 \div 2 &= 1; \text{ ভাগশেষ } 0 \\
 1 \div 2 &= 0; \text{ ভাগশেষ } 1
 \end{aligned}$$

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 10010

$$\therefore (18)_{10} = (10010)_2$$

6 কে বাইনারিতে রূপান্তরঃ

$$\begin{aligned}
 6 \div 2 &= 3; \text{ ভাগশেষ } 0 \\
 3 \div 2 &= 1; \text{ ভাগশেষ } 1 \\
 1 \div 2 &= 0; \text{ ভাগশেষ } 1
 \end{aligned}$$

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 110

$$\therefore (6)_{10} = (110)_2$$

এখন, 10010×110 নির্ণয়ঃ

$$\begin{array}{r}
 10010 \\
 \times 110 \\
 \hline
 00000 \\
 10010x \\
 \hline
 10010xx \\
 \hline
 1101100
 \end{array}$$

$$\therefore (18)_{10} \times (6)_{10} = (1101100)_2$$

ii) 32×23

32 কে বাইনারিতে রূপান্তরঃ

$$\begin{aligned}
 32 \div 2 &= 16; \text{ ভাগশেষ } 0 \\
 16 \div 2 &= 8; \text{ ভাগশেষ } 0 \\
 8 \div 2 &= 4; \text{ ভাগশেষ } 0 \\
 4 \div 2 &= 2; \text{ ভাগশেষ } 0 \\
 2 \div 2 &= 1; \text{ ভাগশেষ } 0 \\
 1 \div 2 &= 0; \text{ ভাগশেষ } 1
 \end{aligned}$$

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 100000

$$\therefore (32)_{10} = (100000)_2$$

23 কে বাইনারিতে রূপান্তরঃ

$$\begin{aligned}
 23 \div 2 &= 11; \text{ ভাগশেষ } 1 \\
 11 \div 2 &= 5; \text{ ভাগশেষ } 1 \\
 5 \div 2 &= 2; \text{ ভাগশেষ } 1 \\
 2 \div 2 &= 1; \text{ ভাগশেষ } 0 \\
 1 \div 2 &= 0; \text{ ভাগশেষ } 1
 \end{aligned}$$

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 10111

$$\therefore (32)_{10} = (10111)_2$$

এখন, 100000×10111 নির্ণয়ঃ

$$\begin{array}{r}
 100000 \\
 \times 10111 \\
 \hline
 100000 \\
 100000x \\
 \hline
 100000xx \\
 000000xxx \\
 \hline
 100000xxxx \\
 \hline
 1011100000
 \end{array}$$

$$\therefore (32)_{10} \times (23)_{10} = (1011100000)_2$$

iii) 21×7

21 কে বাইনারিতে রূপান্তরঃ

$$21 \div 2 = 10; \text{ ভাগশেষ } 1$$

$$10 \div 2 = 5; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$5 \div 2 = 2; \text{ ভাগশেষ } 1$$

$$2 \div 2 = 1; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$1 \div 2 = 0; \text{ ভাগশেষ } 1$$

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 10101

$$\therefore (21)_{10} = (10101)_2$$

7 কে বাইনারিতে রূপান্তরঃ

$$7 \div 2 = 3; \text{ ভাগশেষ } 1$$

$$3 \div 2 = 1; \text{ ভাগশেষ } 1$$

$$1 \div 2 = 0; \text{ ভাগশেষ } 1$$

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 111

$$\therefore (7)_{10} = (111)_2$$

এখন, 10101×111 নির্ণয়ঃ

$$10101$$

$$(\times) 111$$

$$\underline{10101}$$

$$10101x$$

$$\underline{10101xx}$$

$$10010011$$

$$\therefore (21)_{10} \times (7)_{10} = (10010011)_2$$

iv) 59×18

59 কে বাইনারিতে রূপান্তরঃ

$$59 \div 2 = 29; \text{ ভাগশেষ } 1$$

$$29 \div 2 = 14; \text{ ভাগশেষ } 1$$

$$14 \div 2 = 7; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$7 \div 2 = 3; \text{ ভাগশেষ } 1$$

$$3 \div 2 = 1; \text{ ভাগশেষ } 1$$

$$1 \div 2 = 0; \text{ ভাগশেষ } 1$$

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 111011

$$\therefore (59)_{10} = (111011)_2$$

18 কে বাইনারিতে রূপান্তরঃ

$$18 \div 2 = 9; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$9 \div 2 = 4; \text{ ভাগশেষ } 1$$

$$4 \div 2 = 2; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$2 \div 2 = 1; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$1 \div 2 = 0; \text{ ভাগশেষ } 1$$

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 10010

$$\therefore (18)_{10} = (10010)_2$$

এখন, 111011×10010 নির্ণয়ঃ

$$111011$$

$$(\times) 10010$$

$$\underline{000000}$$

$$111011x$$

$$000000xx$$

$$000000xxx$$

$$\underline{111011xxxx}$$

$$10000100110$$

$$\therefore (59)_{10} \times (18)_{10} = (10000100110)_2$$

v) 118.2×46

118.2 কে বাইনারিতে রূপান্তরঃ

১ম অংশঃ

$$118 \div 2 = 59; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$59 \div 2 = 29; \text{ ভাগশেষ } 1$$

$$29 \div 2 = 14; \text{ ভাগশেষ } 1$$

$$14 \div 2 = 7; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$7 \div 2 = 3; \text{ ভাগশেষ } 1$$

$$3 \div 2 = 1; \text{ ভাগশেষ } 1$$

$$1 \div 2 = 0; \text{ ভাগশেষ } 1$$

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 1110110

$$\therefore (118)_{10} = (1110110)_2$$

২য় অংশঃ $0.2 \times 2 = 0.4$; পূর্ণসংখ্যা 0

$$0.4 \times 2 = 0.8; \text{ পূর্ণসংখ্যা } 0$$

$$0.8 \times 2 = 1.6; \text{ পূর্ণসংখ্যা } 1$$

$$0.6 \times 2 = 1.2; \text{ পূর্ণসংখ্যা } 1$$

$$0.2 \times 2 = 0.4; \text{ পূর্ণসংখ্যা } 0$$

$$0.4 \times 2 = 0.8; \text{ পূর্ণসংখ্যা } 0$$

$$0.8 \times 2 = 1.6; \text{ পূর্ণসংখ্যা } 1$$

$$0.6 \times 2 = 1.2; \text{ পূর্ণসংখ্যা } 1$$

উপর থেকে নিচে পূর্ণসংখ্যাগুলো সাজিয়ে পাই: 00110011...

$$\therefore (0.2)_{10} = (00110...)_2$$

তাহলে, $(118.2)_{10} = (1110110.00110011...)_2$

46 কে বাইনারিতে রূপান্তরঃ

$$46 \div 2 = 23; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$23 \div 2 = 11; \text{ ভাগশেষ } 1$$

$$11 \div 2 = 5; \text{ ভাগশেষ } 1$$

$$5 \div 2 = 2; \text{ ভাগশেষ } 1$$

$$2 \div 2 = 1; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$1 \div 2 = 0; \text{ ভাগশেষ } 1$$

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 101110

$$\therefore (46)_{10} = (101110)_2$$

এখন, $1110110.00110011\dots \times 101110$ নির্ণয়ঃ

$$1110110.00110011\dots$$

$$(\times) 101110$$

$$0000000.00000000\dots$$

$$11101100.0110011\dots$$

$$111011000.110011\dots$$

$$1110110001.10011\dots$$

$$00000000000.0000\dots$$

$$111011000110.011\dots$$

$$1010100111101.00110011\dots$$

$$\therefore (118.2)_{10} \times (46)_{10} = (1010100111101.00110011\dots)_2$$

$$vi) 180.50 \times 65$$

180.50 কে বাইনারিতে রূপান্তরঃ

১য় অংশঃ

$$180 \div 2 = 90; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$90 \div 2 = 45; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$45 \div 2 = 22; \text{ ভাগশেষ } 1$$

$$22 \div 2 = 11; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$11 \div 2 = 5; \text{ ভাগশেষ } 1$$

$$5 \div 2 = 2; \text{ ভাগশেষ } 1$$

$$2 \div 2 = 1; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$1 \div 2 = 0; \text{ ভাগশেষ } 1$$

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 10110100

$$\therefore (180)_{10} = (10110100)_2$$

২য় অংশঃ

$$0.5 \times 2 = 1.0; \text{ পূর্ণসংখ্যা } 1$$

$$\therefore (0.5)_{10} = (1)_2$$

তাহলে, $(180.5)_{10} = (10110100.1)_2$

65 কে বাইনারিতে রূপান্তরঃ

$$65 \div 2 = 32; \text{ ভাগশেষ } 1$$

$$32 \div 2 = 16; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$16 \div 2 = 8; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$8 \div 2 = 4; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$4 \div 2 = 2; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$2 \div 2 = 1; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$1 \div 2 = 0; \text{ ভাগশেষ } 1$$

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 1000001

$$\therefore (65)_{10} = (1000001)_2$$

এখন, $10110100.1 \times 1000001$ নির্ণয়ঃ

$$10110100.1$$

$$(\times) 1000001$$

$$10110100.1$$

$$000000000.0$$

$$0000000000.0$$

$$00000000000.0$$

$$000000000000.0$$

$$0000000000000.0$$

$$10110100100000.0$$

$$10110111010100.1$$

$$\therefore (180.5)_{10} \times (65)_{10} = (10110111010100.1)_2$$

$$vii) 192 \times 22$$

192 কে বাইনারিতে রূপান্তরঃ

$$192 \div 2 = 96; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$96 \div 2 = 48; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$48 \div 2 = 24; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$24 \div 2 = 12; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$12 \div 2 = 6; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$6 \div 2 = 3; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$3 \div 2 = 1; \text{ ভাগশেষ } 1$$

$$1 \div 2 = 0; \text{ ভাগশেষ } 1$$

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 11000000

$$\therefore (192)_{10} = (11000000)_2$$

22 কে বাইনারিতে রূপান্তরঃ

$$22 \div 2 = 11; \text{ ভাগশেষ } 0$$

$$11 \div 2 = 5; \text{ ভাগশেষ } 1$$

$5 \div 2 = 2$; ভাগশেষ 1

$2 \div 2 = 1$; ভাগশেষ 0

$1 \div 2 = 0$; ভাগশেষ 1

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 10110

$$\therefore (22)_{10} = (10110)_2$$

এখন, 11000000×10110 নির্ণয়ঃ

11000000

(\times) 10110

—————
00000000

11000000x

11000000xx

00000000xxx

11000000xxxx

—————
100001000000

$$\therefore (192)_{10} \times (22)_{10} = (100001000000)_2$$

viii) 111×101

111 কে বাইনারিতে রূপান্তরঃ

$111 \div 2 = 55$; ভাগশেষ 1

$55 \div 2 = 27$; ভাগশেষ 1

$27 \div 2 = 13$; ভাগশেষ 1

$13 \div 2 = 6$; ভাগশেষ 1

$6 \div 2 = 3$; ভাগশেষ 0

$3 \div 2 = 1$; ভাগশেষ 1

$1 \div 2 = 0$; ভাগশেষ 1

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 1101111

$$\therefore (111)_{10} = (1101111)_2$$

101 কে বাইনারিতে রূপান্তরঃ

$101 \div 2 = 50$; ভাগশেষ 1

$50 \div 2 = 25$; ভাগশেষ 0

$25 \div 2 = 12$; ভাগশেষ 1

$12 \div 2 = 6$; ভাগশেষ 0

$6 \div 2 = 3$; ভাগশেষ 0

$3 \div 2 = 1$; ভাগশেষ 1

$1 \div 2 = 0$; ভাগশেষ 1

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 1100101

$$\therefore (101)_{10} = (1100101)_2$$

এখন, 1101111×1100101 নির্ণয়ঃ

1101111

(\times) 1100101

—————
1101111

0000000x

1101111xx

0000000xxx

0000000xxxx

1101111xxxx

1101111xxxxx

—————
10101111001011

$$\therefore (111)_{10} \times (101)_{10} = (10101111001011)_2$$

১১। নিচের দশভিত্তিক সংখ্যাগুলোকে বাইনারিতে রূপান্তর করে ভাগ করে দেখাও।

i) $16 \div 4$

ii) $34 \div 17$

iii) $15 \div 3$

iv) $99 \div 99$

v) $157 \div 46$

vi) $180 \div 69$

vii) $192 \div 22$

viii) $111 \div 101$

সমাধানঃ

i) $16 \div 4$

16 কে বাইনারিতে রূপান্তরঃ

$16 \div 2 = 8$; ভাগশেষ 0

$8 \div 2 = 4$; ভাগশেষ 0

$4 \div 2 = 2$; ভাগশেষ 0

$2 \div 2 = 1$; ভাগশেষ 0

$1 \div 2 = 0$; ভাগশেষ 1

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 10000

$$\therefore (16)_{10} = (10000)_2$$

4 কে বাইনারিতে রূপান্তরঃ

$4 \div 2 = 2$; ভাগশেষ 0

$2 \div 2 = 1$; ভাগশেষ 0

$1 \div 2 = 0$; ভাগশেষ 1

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 100

$$\therefore (4)_{10} = (100)_2$$

এখন, $(10000)_2 \div (100)_2$ নির্ণয়ঃ

100)10000(100

$$\begin{array}{r} 100 \\ \hline 00 \\ 00 \\ \hline 0 \end{array}$$

\therefore নির্ণেয় ভাগফলঃ $(100)_2$

ii) $34 \div 17$

34 কে বাইনারতে রূপান্তরঃ

$34 \div 2 = 17$; ভাগশেষ 0

$17 \div 2 = 8$; ভাগশেষ 1

$8 \div 2 = 4$; ভাগশেষ 0

$4 \div 2 = 2$; ভাগশেষ 0

$2 \div 2 = 1$; ভাগশেষ 0

$1 \div 2 = 0$; ভাগশেষ 1

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 100010

$\therefore (34)_{10} = (100010)_2$

17 কে বাইনারতে রূপান্তরঃ

$17 \div 2 = 8$; ভাগশেষ 1

$8 \div 2 = 4$; ভাগশেষ 0

$4 \div 2 = 2$; ভাগশেষ 0

$2 \div 2 = 1$; ভাগশেষ 0

$1 \div 2 = 0$; ভাগশেষ 1

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 10001

$\therefore (17)_{10} = (10001)_2$

এখন, $(100010)_2 + (10001)_2$ নির্ণয়ঃ

10001)100010(10

$$\begin{array}{r} 10001 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}$$

\therefore নির্ণেয় ভাগফলঃ $(10)_2$

iii) $15 + 3$

15 কে বাইনারতে রূপান্তরঃ

$15 \div 2 = 7$; ভাগশেষ 1

$7 \div 2 = 3$; ভাগশেষ 1

$3 \div 2 = 1$; ভাগশেষ 1

$1 \div 2 = 0$; ভাগশেষ 1

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 1111

$\therefore (15)_{10} = (1111)_2$

3 কে বাইনারতে রূপান্তরঃ

$3 \div 2 = 1$; ভাগশেষ 1

$1 \div 2 = 0$; ভাগশেষ 1

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 11

$\therefore (3)_{10} = (11)_2$

এখন, $(1111)_2 + (11)_2$ নির্ণয়ঃ

11)1111(101

$$\begin{array}{r} 11 \\ \hline 11 \\ 11 \\ \hline 0 \end{array}$$

\therefore নির্ণেয় ভাগফলঃ $(101)_2$

iv) $99 + 99$

99 কে বাইনারতে রূপান্তরঃ

$99 \div 2 = 49$; ভাগশেষ 1

$49 \div 2 = 24$; ভাগশেষ 1

$24 \div 2 = 12$; ভাগশেষ 0

$12 \div 2 = 6$; ভাগশেষ 0

$6 \div 2 = 3$; ভাগশেষ 0

$3 \div 2 = 1$; ভাগশেষ 1

$1 \div 2 = 0$; ভাগশেষ 1

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 1100011

$\therefore (99)_{10} = (1100011)_2$

এখন, $(1100011)_2 + (1100011)_2$ নির্ণয়ঃ

1100011)1100011(1

$$\begin{array}{r} 1100011 \\ \hline 0 \end{array}$$

\therefore নির্ণেয় ভাগফলঃ $(1)_2$

v) $157 + 46$

157 কে বাইনারতে রূপান্তরঃ

$157 \div 2 = 78$; ভাগশেষ 1

$78 \div 2 = 39$; ভাগশেষ 0

$39 \div 2 = 19$; ভাগশেষ 1

$19 \div 2 = 9$; ভাগশেষ 1

$9 \div 2 = 4$; ভাগশেষ 1

$4 \div 2 = 2$; ভাগশেষ 0

$2 \div 2 = 1$; ভাগশেষ 0

$1 \div 2 = 0$; ভাগশেষ 1

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 10011101

$\therefore (157)_{10} = (10011101)_2$

46 কে বাইনারতে রূপান্তরঃ

$46 \div 2 = 23$; ভাগশেষ 0

$23 \div 2 = 11$; ভাগশেষ 1

$11 \div 2 = 5$; ভাগশেষ 1

$5 \div 2 = 2$; ভাগশেষ 1

$2 \div 2 = 1$; ভাগশেষ 0

$1 \div 2 = 0$; ভাগশেষ 1

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 101110

$\therefore (46)_{10} = (101110)_2$

এখন, $(10110100)_2 + (1000101)_2$ নির্ণয়ঃ

101110)10011101(011.011

$$\begin{array}{r}
 101110 \\
 \hline
 1000001 \\
 \hline
 101110 \\
 \hline
 1001000 \\
 \hline
 101110 \\
 \hline
 110100 \\
 \hline
 101110 \\
 \hline
 \end{array}
 \text{.....চলবে}$$

\therefore নির্ণেয় ভাগফলঃ $(11.011\dots)_2$

vi) $180 + 69$

180 কে বাইনারতে রূপান্তরঃ

$180 \div 2 = 90$; ভাগশেষ 0

$90 \div 2 = 45$; ভাগশেষ 0

$45 \div 2 = 22$; ভাগশেষ 1

$22 \div 2 = 11$; ভাগশেষ 0

$11 \div 2 = 5$; ভাগশেষ 1

$5 \div 2 = 2$; ভাগশেষ 1

$2 \div 2 = 1$; ভাগশেষ 0

$1 \div 2 = 0$; ভাগশেষ 1

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 10110100

$\therefore (180)_{10} = (10110100)_2$

69 কে বাইনারতে রূপান্তরঃ

$69 \div 2 = 34$; ভাগশেষ 1

$34 \div 2 = 17$; ভাগশেষ 0

$17 \div 2 = 8$; ভাগশেষ 1

$8 \div 2 = 4$; ভাগশেষ 0

$4 \div 2 = 2$; ভাগশেষ 0

$2 \div 2 = 1$; ভাগশেষ 0

$1 \div 2 = 0$; ভাগশেষ 1

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 1000101

$\therefore (69)_{10} = (1000101)_2$

এখন, $(10110100)_2 + (1000101)_2$ নির্ণয়ঃ

1000101)10110100(10.10011..

$$\begin{array}{r}
 1000101 \\
 \hline
 1010100 \\
 \hline
 1000101 \\
 \hline
 1111000 \\
 \hline
 1000101 \\
 \hline
 1100110 \\
 \hline
 1000101 \\
 \hline
 \end{array}
 \text{.....চলবে}$$

\therefore নির্ণেয় ভাগফলঃ $(10.10011\dots)_2$

vii) $192 + 22$

192 কে বাইনারতে রূপান্তরঃ

$192 \div 2 = 96$; ভাগশেষ 0

$96 \div 2 = 48$; ভাগশেষ 0

$48 \div 2 = 24$; ভাগশেষ 0

$24 \div 2 = 12$; ভাগশেষ 0

$12 \div 2 = 6$; ভাগশেষ 0

$6 \div 2 = 3$; ভাগশেষ 0

$3 \div 2 = 1$; ভাগশেষ 1

$1 \div 2 = 0$; ভাগশেষ 1

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 11000000

$\therefore (192)_{10} = (11000000)_2$

22 কে বাইনারতে রূপান্তরঃ

$22 \div 2 = 11$; ভাগশেষ 0

$11 \div 2 = 5$; ভাগশেষ 1

$5 \div 2 = 2$; ভাগশেষ 1

$2 \div 2 = 1$; ভাগশেষ 0

$1 \div 2 = 0$; ভাগশেষ 1

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 10110

$$\therefore (22)_{10} = (10110)_2$$

এখন, $(11000000)_2 + (10110)_2$ নির্ণয়ঃ

$$10110|11000000(1000.10111..)$$

$$\begin{array}{r}
 10110 \\
 \hline
 100000 \\
 10110 \\
 \hline
 101000 \\
 10110 \\
 \hline
 100100 \\
 10110 \\
 \hline
 \end{array}$$

.....চলবে

\therefore নির্ণেয় ভাগফলঃ $(1000.10111...)_2$

viii) $111 \div 101$

111 কে বাইনারতে রূপান্তরঃ

$111 \div 2 = 55$; ভাগশেষ 1

$55 \div 2 = 27$; ভাগশেষ 1

$27 \div 2 = 13$; ভাগশেষ 1

$13 \div 2 = 6$; ভাগশেষ 1

$6 \div 2 = 3$; ভাগশেষ 0

$3 \div 2 = 1$; ভাগশেষ 1

$1 \div 2 = 0$; ভাগশেষ 1

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 1101111

$$\therefore (111)_{10} = (1101111)_2$$

101 কে বাইনারতে রূপান্তরঃ

$101 \div 2 = 50$; ভাগশেষ 1

$50 \div 2 = 25$; ভাগশেষ 0

$25 \div 2 = 12$; ভাগশেষ 1

$12 \div 2 = 6$; ভাগশেষ 0

$6 \div 2 = 3$; ভাগশেষ 0

$3 \div 2 = 1$; ভাগশেষ 1

$1 \div 2 = 0$; ভাগশেষ 1

নিচ থেকে উপরে ভাগশেষগুলো সাজিয়ে পাই: 1100101

$$\therefore (101)_{10} = (1100101)_2$$

এখন, $(1101111)_2 + (1100101)_2$ নির্ণয়ঃ

$$1100101|1101111(1.00011..)$$

$$\begin{array}{r}
 1100101 \\
 \hline
 10100000 \\
 1100101 \\
 \hline
 1110110 \\
 1100101 \\
 \hline
 \end{array}$$

10001চলবে

\therefore নির্ণেয় ভাগফলঃ $(1.00011...)_2$

তথ্য বুরো সিদ্ধান্ত নিঃ

১। অষ্টম শ্রেণির কয়েকজন শিক্ষার্থীর উচ্চতার (সেন্টিমিটার)

ছক দেওয়া আছে। নিচের প্রশ্নগুলো সমাধান করো।

90, 140, 97, 125, 97, 134, 97, 97, 110, 125, 110, 134, 110, 125, 110, 140, 125, 134, 125, 125, 134, 110, 125, 97, 125, 110, 125, 97, 134, 125, 110, 134, 125, 134, 90, 140, 148, 148, 110, 125

ক) উপাত্তগুলোকে মানের উৎর্ধক্রম অনুসারে সাজাও।

সমাধানঃ

উপাত্তগুলোকে মানের উৎর্ধক্রম অনুসারে সাজিয়ে পাই-

90, 90, 97, 97, 97, 97, 110, 110, 110, 110, 125, 125, 125, 125, 125, 125, 125, 134, 134, 134, 134, 140, 140, 140, 148, 148

খ) উপাত্তগুলোকে মানের অধঃক্রম অনুসারে সাজাও।

সমাধানঃ উপাত্তগুলোকে মানের অধঃক্রম অনুসারে সাজিয়ে

পাই-

148, 148, 140, 140, 140, 134, 134, 134, 125, 125, 125, 125, 125, 125, 110, 110, 110, 110, 97, 97, 97, 97, 90, 90

গ) শিক্ষার্থীদের গড় উচ্চতা নির্ণয় করো।

সমাধানঃ শিক্ষার্থীদের উচ্চতাগুলোর যোগফল=

$$90+90+97+97+97+97+110+110+110+110+125+125+125+125+125+125+134+134+134+134+14+140+140+140+148+148 = 3755$$

এবং, শিক্ষার্থী সংখ্যা = 28

• শিক্ষার্থীদের গড় উচ্চতা = $\frac{3755}{28} = 134.107$ সেমি।

২। মিজান সাহেব একজন আম বিক্রেতা। তিনি 50 বক্স আম কিনলেন। প্রতিটি বক্সে আমের সংখ্যা সমান নয়। কিন্তু গড়ে প্রতিটি বক্সে কটি আম আছে জানা প্রয়োজন। নিচের সারণি থেকে 50 টি বক্সে গড়ে কটি আম আছে নির্ণয় করো। [এই প্রশ্ন ২য় তথ্য বুরো সিদ্ধান্ত নিঃ এর অধ্যায়ের চলমান প্রশ্ন]

আমের সংখ্যা	বক্সের সংখ্যা
51-53	6
54-56	14
57-59	16
60-62	9
63-65	5

50 টি বক্সে গড়ে কটি আম আছে তা নির্ণয়ের জন্য নিচের সারণি তৈরি করি-

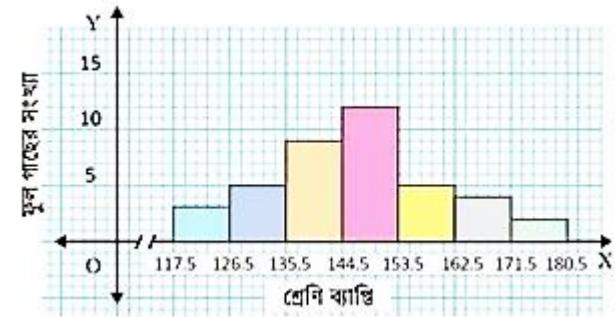
আমের সংখ্যা	বক্সের মধ্যমান (x_i)	বক্সের সংখ্যা (f_i)	$x_i f_i$
51-53	52	6	312
54-56	55	14	770
57-59	58	16	928
60-62	61	9	549
63-65	64	5	320
		n=50	$\sum x_i f_i = 2879$

∴ গড়, X

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum x_i f_i \\ = \frac{1}{50} \cdot 2879 \\ = 57.58$$

∴ 50 টি বক্সে গড়ে 57.58 টি আম আছে।

৩। পাশের লেখচিত্রটি লক্ষ করো।



ক) লেখচিত্রটির নাম লেখো। উত্তরঃ আয়তলেখ।

খ) লেখচিত্রের উপাত্তগুলো কোন ধরনের উপাত্ত? উত্তরঃ বিন্যস্ত।

গ) এর প্রচুরক শ্রেণি কত? উত্তরঃ 144.5-153.5

ঘ) লেখচিত্র থেকে শ্রেণি বিন্যস্ত সারণি তৈরি করো।

সমাধানঃ

লেখচিত্র থেকে শ্রেণি বিন্যস্ত সারণি নিম্নরূপঃ

শ্রেণি ব্যাস	মূল গাছের সংখ্যা
117.5-126.5	3
126.5-135.5	5
135.5-144.5	9
144.5-153.5	12
153.5-162.5	5
162.5-171.5	4
171.5-180.5	2

ঙ) সারণি থেকে গড়, মধ্যক ও প্রচুরক নির্ণয় করো।

সমাধানঃ

গড় নির্ণয়:

গড় নির্ণয়ের জন্য নিম্নোক্ত সারণি তৈরি করিঃ

শ্রেণি ব্যাস	শ্রেণি মধ্যমান (x_i)	মূল গাছের সংখ্যা (f_i)	$x_i f_i$
117.5-126.5	122	3	366
126.5-135.5	131	5	655
135.5-144.5	140	9	1260
144.5-153.5	149	12	1788
153.5-162.5	158	5	790
162.5-171.5	167	4	668
171.5-180.5	176	2	352
		n = 40	$\sum x_i f_i = 5879$

∴ গড়, X

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum x_i f_i \\ = \frac{1}{40} \cdot 5879 \\ = 146.975$$

মধ্যক নির্ণয়ের জন্য নিম্নোক্ত সারণি তৈরি করিঃ

শ্রেণি ব্যাসাংশ	ফুল গাছের সংখ্যা (f_i)	ক্রমবোক্তি গণসংখ্যা
117.5-126.5	3	3
126.5-135.5	5	8
135.5-144.5	9	17
144.5-153.5	12	29
153.5-162.5	5	34
162.5-171.5	4	38
171.5-180.5	2	40
$h = 9$	$n = 40$	

$$\text{এখানে, } n = 40; \frac{n}{2} = \frac{40}{2} = 20;$$

অর্থাৎ, 20তম পদ 144.5-153.5 শ্রেণিতে অবস্থিত।

মধ্যক শ্রেণির নিম্নমান, $L = 144.5$;

মধ্যক শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির ক্রমবজিত গণসংখ্যা, $F_c = 17$;

মধ্যক শ্রেণির গণসংখ্যা, $f_m = 29$;

শ্রেণি ব্যবধান, $h = 9$

: মধ্যক

$$\begin{aligned} &= L + \left(\frac{n}{2} - F_c \right) \left(\frac{h}{f_m} \right) \\ &= 144.5 + (20-17) \times \frac{9}{29} \\ &= 145.4310 \text{ (প্রায়)} \end{aligned}$$

প্রচুরক নির্ণয়

সারণি থেকে পাই,

যে এর সারণি হতে পাই,

সর্বোচ্চ ফুল গাছের সংখ্যা 12টি আছে 144.5-153.5 শ্রেণিতে।

প্রচুরক শ্রেণির নিম্নসীমা, $L = 144.5$

মোট গণসংখ্যা, $n = 40$

প্রচুরক শ্রেণির গণসংখ্যা ও তার পূর্ববর্তী শ্রেণিল গণসংখ্যার পার্থক্য $f_1 = 12-5 = 3$

প্রচুরক শ্রেণির গণসংখ্যা ও তার পরবর্তী শ্রেণির গণসংখ্যার পার্থক্য, $f_2 = 12 - 5 = 7$

শ্রেণি ব্যবধান, $h = 9$

: প্রচুরক

$$\begin{aligned} &= L + \{f_1/(f_1+f_2)\} \times h \\ &= 144.5 + \{3/(3+7)\} \times 9 \\ &= 147.2 \end{aligned}$$

8।

প্রশ্ন অনুসারে,

$$\text{বা, } \frac{2200+50p}{40+p} = 54$$

$$\text{বা, } (40+p) 54 = 2200 + 50p$$

$$\text{বা, } 2160 + 54p = 2200 + 50p$$

$$\text{বা, } 54p - 50p = 2200 - 2160$$

$$\text{বা, } 4p = 40$$

$$\text{বা, } p = \frac{40}{4} = 10 \text{ (Ans.)}$$

এখন, প্রাপ্ত $p = 10$ বসিয়ে, সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গাণিতিক গড় নির্ণয়ের সারণি তৈরি করি।

শ্রেণি ব্যাসাংশ	শ্রেণি মধ্যমান (x_i)	বক্সের সংখ্যা (f_i)	$u_i = (x_i - a)/h$	$f_i u_i$
0-20	10	7	-2	-14
20-40	30	11	-1	-11
40-60	50 = a	10	0	0
60-80	70	9	1	9
80-100	90	13	2	26
$h = 20$		$n = 50$		$\Sigma f_i u_i = 10$

: গাণিতিক গড়

$$= a + \left(\frac{\sum x_i u_i}{n} \right) \times h$$

$$= 50 + \left(\frac{10}{50} \right) \times 20$$

$$= 50 + 4$$

$$= 54 \text{ যা প্রশ্নে প্রদত্ত গাণিতিক মানের সমান।}$$

অর্থাৎ, $p = 10$ এই মান সত্য [যাচাই করা হলো]

৫। একটি পোশাক কারখানার শ্রমিকদের দৈনিক মজুরির (টাকায়) গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। উপাত্তের মধ্যক 556 হলে, x ও y এর মান নির্ণয় করো। কারখানায় শ্রমিকের মোট সংখ্যা 120 জন। [বিদ্রঃ তথ্য বুঝে সিদ্ধান্ত নিই অধ্যায়ের এই প্রশ্নে মধ্যক 525 দেয়া আছে, যা আমাদের কাছে অসামঞ্জস্য মনে হয়েছে, তাই 556 ধরে সমাধান করেছি, তোমাদের মতামত জানিও।]

সমাধানঃ

দেওয়া আছে,

$$12+20+x+30+y+5+4 = 120$$

$$\text{বা, } 71+x+y = 120$$

$$\text{বা, } y = 120-71-x = 49-x \dots \dots \dots \text{(i)}$$

মধ্যক নির্ণয়ের জন্য নিম্নোক্ত সারণি তৈরি করিঃ

টাকা মজুরির (টেকার)	শ্রমিকের সংখ্যা (f_i)	ক্রমবোক্তি গণসংখ্যা
300-400	12	12
400-500	20	32
500-600	x	$32+x$
600-700	30	$62+x$
700-800	y	$62+x+y$
800-900	5	$67+x+y$
900-1000	4	$71+x+y$
$n = 100$	$n = 120$ (দেওয়া আছে)	

$$\text{এখানে, } n = 120; \frac{n}{2} = \frac{120}{2} = 60;$$

অর্থাৎ, 60তম পদ 500-600 শ্রেণিতে অবস্থিত।

গণসংখ্যা নিবেশন তালিকার গাণিতিক গড় 54 হলে, প্রত্যক্ষ পদ্ধতিতে p এর মান নির্ণয় করো। তারপর সংক্ষিপ্ত পদ্ধতির সাহায্যে প্রাপ্ত p এর মানের সত্যতা যাচাই করো।

মধ্যক শ্রেণির নিম্নমান, $L = 500$;

মধ্যক শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা, $F_c = 32$;

মধ্যক শ্রেণির গণসংখ্যা $f_m = 32+x$;

শ্রেণি ব্যবধান, $h = 100$

\therefore মধ্যক

$$\begin{aligned} L + \left(\frac{n}{2} - F_c \right) \times \left(\frac{h}{f_m} \right) \\ = 500 + (60-32) \times \frac{100}{32+x} \\ = 500 + 28 \times \frac{100}{32+x} \\ = 500 + \frac{2800}{32+x} \end{aligned}$$

এখন, প্রশ্ন অনুসারে,

$$500 + \frac{2800}{32+x} = 556$$

$$\text{বা, } \frac{2800}{32+x} = 556 - 500$$

$$\text{বা, } \frac{2800}{32+x} = 56$$

$$\text{বা, } 56(32+x) = 2800$$

$$\text{বা, } 1792 + 56x = 2800$$

$$\text{বা, } 56x = 2800 - 1792$$

$$\text{বা, } 56x = 1008$$

$$\text{বা, } x = \frac{1008}{56} = 18$$

এখন, x এর এই মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$y = 49 - 18 = 31$$

$$\therefore (x, y) = (18, 31)$$

৬। একটি স্বাস্থ কেন্দ্রের 100 রোগীর বয়সের (বছরে) শ্রেণি ব্যাপ্তি ও ক্রমযোজিত গণসংখ্যার তালিকা থেকে শ্রেণি অনুসারে রোগীর সংখ্যা নির্ণয় করো। [এই প্রশ্ন ডষ্ট তথ্য বুঝে সিদ্ধান্ত নিই এর অধ্যায়ের চলমান প্রশ্ন।]

বয়স (বছরে)	রোগীর সংখ্যা	ক্রমযোজিত সংখ্যা
0-10		5
11-20		9
21-30		24
31-40		41
41-50		68
51-60		85
61-70		100

সমাধানঃ

নিচের সারণিতে রোগীর সংখ্যা নির্ণয় করা হলোঃ

বয়স (বছরে)	দোকানের সংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
0-10	5	5
11-20	9 - 5 = 4	9
21-30	24 - 9 = 15	24
31-40	41 - 24 = 17	41
41-50	68 - 41 = 27	68
51-60	85 - 68 = 17	85
61-70	100 - 85 = 15	100

৭। নাগরী বাজারের 100টি দোকানের দৈনিক লাভের (টাকায়) পরিমাণের ছকটি হলোঃ

প্রতি দোকানের লাভ (টাকা)	দোকানের সংখ্যা
300-350	10
350-400	16
400-450	28
450-500	22
500-550	18
550-600	6

ক) প্রদত্ত তথ্যের আলোকে ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি করোঃ

সমাধানঃ

প্রদত্ত তথ্যের আলোকে ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি করা হলোঃ

প্রতি দোকানের লাভ (টাকা)	দোকানের সংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
300-350	10	10
350-400	16	26
400-450	28	54
450-500	22	76
500-550	18	94
550-600	6	100

খ) কতগুলো দোকানে দৈনিক 500 টাকার কম লাভ হয়?

সমাধানঃ

ক হতে পাই,

$$450-500 \text{ শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা} = 76.$$

$\therefore 76$ টি দোকানে দৈনিক 500 টাকার কম লাভ হয়।

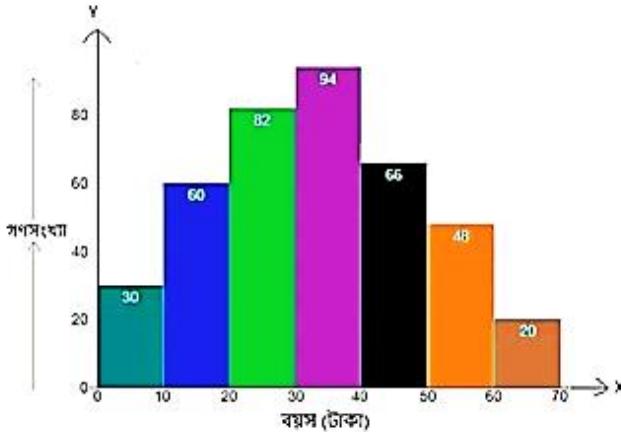
৮। অষ্টম শ্রেণির সকল শিক্ষার্থীর পরিবারের সদস্যদের বয়সের (বছরে) অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ বিন্যস্ত করে নিচের তালিকাটি তৈরি করা হয়েছে।

বয়স (বছরে)	সংখ্যা
0-10	30
10-20	60
20-30	82
30-40	94
40-50	66
50-60	48
60-70	20

ক) উপাত্তের আয়তলেখ অঙ্কন করোঃ

সমাধানঃ

ছক কাগজে x অক্ষ বরাবর 10 টি ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান প্রস্থবিশিষ্ট 7 টি আয়তক্ষেত্র আঁকি যেখানে আয়তক্ষেত্রগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে প্রদত্ত গণসংখ্যার সমান এবং আয়তক্ষেত্রগুলোর মাঝে কোন ফাঁকা জায়গা নেই। তাহলে, উপাত্তের আয়তলেখ অঙ্কিত হলোঃ

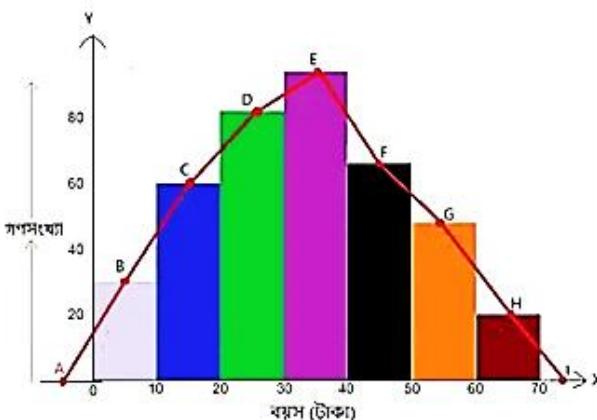


খ) উপাত্তের আয়তলেখ থেকে গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকো।

সমাধানঃ

অঙ্কিত আয়তসমূহের ভূমির সমান্তরাল বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুগুলো B, C, D, E, F, G দিয়ে চিহ্নিত করি। এখন বিন্দুগুলো পরস্পর সরলরেখাংশ দ্বারা যোগ করি। এখন ১ম আয়তক্ষেত্রের পূর্বে যদি আয়তক্ষেত্র থাকত, তাহলে তার ভূজ হতো $5-10 = 5$ যাকে A দ্বারা চিহ্নিত করি এবং A,B সরলরেখাংশ দ্বারা যোগ করি। আবার, শেষ আয়তক্ষেত্রের মধ্যবিন্দুর ভূজ 65; এই অনুসারে পরে আয়তক্ষেত্র থাকলে তার মধ্যবিন্দুর ভূজ হতো $65+10 = 75$ যাকে I দ্বারা চিহ্নিত করি এবং H,I সরলরেখাংশ দ্বারা যোগ করি।

তাহলে, ABCDEFGHI-ই নির্ণেয় গণসংখ্যা বহুভুজ।



গ) উপাত্তের আয়তলেখ ছাড়া গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকো।

সমাধানঃ

প্রদত্ত উপাত্তে বয়স (বছর) এর শ্রেণি-মধ্যমান বের করিঃ
বয়স (টাকা)

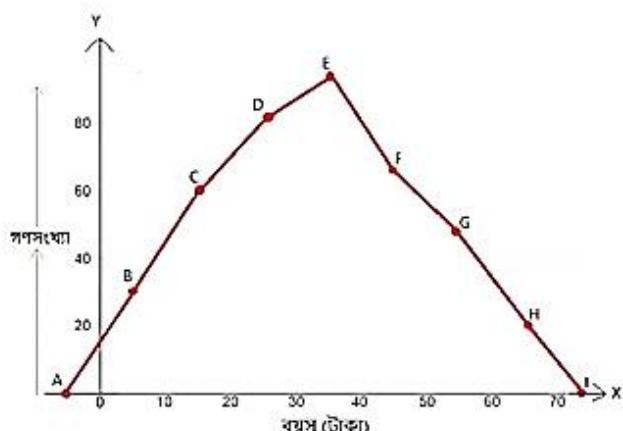
বয়স (বছর)	শ্রেণি মধ্যমান	গণসংখ্যা
0-10	5	30
10-20	15	60
20-30	25	82
30-40	35	94
40-50	45	66
50-60	55	48
60-70	65	20

এখন, সারণিতে শ্রেণি মধ্যমান কে ভূজ ও গণসংখ্যাকে কোটি ধরে নিচের বিন্দুগুলো পাই $(5,30)$; $(15,60)$; $(25,82)$; $(35,94)$; $(45,66)$; $(55,48)$; $(65,20)$ যেগুলোকে B, C, D, E, F, G, H দ্বারা চিহ্নিত

করে ছক কাগজে স্থাপন করি এবং বিন্দুগুলো পরস্পর সরলরেখাংশ দ্বারা যোগ করি।

এখন, ১ম শ্রেণি মধ্যমান 5 এর পূর্বের ও 65 এর পরের শ্রেণি মধ্যমান হবে $-5 \cdot 375$

এখন, $(5,0)$ কে A এবং $(75,0)$ কে I দ্বারা চিহ্নিত করে ছক কাগজে স্থাপন করে A, B, C, D, E, F, G, I সরলরেখাংশ দ্বারা যোগ করি। তাহলে, ABCDEFGHI-ই নির্ণেয় গণসংখ্যা বহুভুজ।



৯। সজল তার দাদুর সঙ্গে প্রতিদিন পার্শ্ববর্তী একটি পাকে প্রাতঃভ্রমণে যায়। সে মনে মনে ঠিক করেছে আজ যতজন প্রাতঃভ্রমণে এসেছে তাদের বয়স অনুযায়ী তথ্য সংগ্রহ করবে।
সজলের সংগ্রহ করা উপাত্তের ছকটি হলো:

বয়স (বছর)	গণসংখ্যা
41-45	12
46-50	15
51-55	25
56-60	18
61-65	10

ক) প্রত্যক্ষ ও সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে উপাত্তের গাণিতিক গড় নির্ণয় করো।

সমাধানঃ

প্রত্যক্ষ পদ্ধতিতে গাণিতিক গড় নির্ণয়ের জন্য নিম্নোক্ত সারণি তৈরি করি

বয়স (বছরে)	শ্রেণি মধ্যমান (x_i)	গণসংখ্যা (f_i)	$x_i f_i$
41-45	43	12	516
46-50	48	15	720
51-55	53	25	1325
56-60	58	18	1044
61-65	63	10	630
		n = 80	$\sum x_i f_i = 4235$

∴ গাণিতিক গড়

$$= \frac{\sum x_i f_i}{n}$$

$$= \frac{4235}{80}$$

$$= 52.9375$$

এখন, সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গাণিতিক গড় নির্ণয়ের সারণি তৈরি করিঃ

বয়স (বছরে)	শ্রেণি মধ্যমান (x_i)	গণসংখ্যা (f_i)	$u_i = (x_i - a)/h$	$f_i u_i$
41-45	43	12	-2	-24
46-50	48	15	-1	-15
51-55	53 = a	25	0	0
56-60	58	18	1	18
61-65	63	10	2	20
$h = 5$		$n = 80$		$\sum f_i u_i = -1$

∴ গাণিতিক গড়

$$= a + \left(\frac{\sum x_i f_i}{n} \right) \times h$$

$$= 53 + \left(-\frac{1}{80} \right) \times 5$$

$$= 53 - 0.0625$$

$$= 52.9375$$

খ) উপাত্তের মধ্যক নির্ণয় করো।

সমাধানঃ

মধ্যক নির্ণয়ের জন্য নিম্নোক্ত সারণি তৈরি করি

বয়স (বছরে)	শ্রমিকের সংখ্যা (f_1)	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
41-45	12	12
46-50	15	27
51-55	25	52
56-60	18	70
61-65	10	80
	$n = 80$	

$$\text{এখানে, } n = 80; \frac{n}{2} = \frac{80}{2} = 40$$

অর্থাৎ, 40তম পদ 51-55 শ্রেণিতে অবস্থিত।

মধ্যক শ্রেণির নিম্নমান, $L = 51$;

মধ্যক শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা, $F_c = 27$;

মধ্যক শ্রেণির গণসংখ্যা $f_m = 52$;

শ্রেণি ব্যবধান, $h = 5$

∴ মধ্যক

$$= L + \left(\frac{n}{2} - F_c \right) \times \left(h / f_m \right)$$

$$= 51 + (40-27) \times \frac{5}{52}$$

$$= 51 + 13 \times \frac{5}{52}$$

$$= 51 + 1.25$$

$$= 52.25$$

গ) সজলের তথ্য সংগ্রহের তালিকা ব্যবহার করে আয়তলেখ অঙ্কন করো।

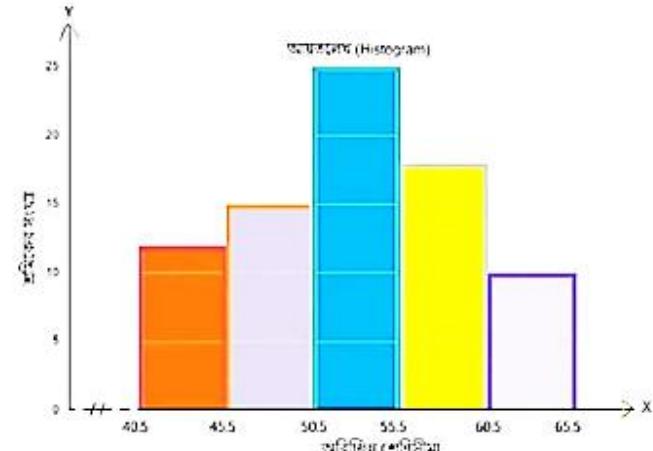
সমাধানঃ

সজলের সংগ্রহ করা বিচ্ছিন্ন শ্রেণিসীমাকে অবিচ্ছিন্ন শ্রেণিসীমা করে পাই,

বয়স (বছরে)	অবিচ্ছিন্ন শ্রেণিসীমা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা (f_1)
41-45	40.5-45.5	12
46-50	45.5-50.5	15
51-55	50.5-55.5	25
56-60	55.5-60.5	18
61-65	60.5-65.5	10

এখন, গ্রাফ কাগজে x অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 5টি বাহুর দৈর্ঘ্য সমান 5 একক ধরে সারণির অবিচ্ছিন্ন শ্রেণিসীমাগুলোর মানগুলোকে কোনো ফাঁকা না রেখে স্থাপন করি। যেহেতু 0 থেকে শুরু না করে 40.5 থেকে শুরু হয়েছে সেহেতু x অক্ষে পূর্ববর্তী ঘরগুলো বোঝাতে - // - চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে।

এখন y অক্ষ (উল্লম্ব রেখা) বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 1টি বাহুর দৈর্ঘ্য সমান 1 একক এবং গণসংখ্যা নিয়ে নিচের ছবির মতো কতকগুলো পরস্পর সংলগ্ন আয়তক্ষেত্র অঙ্কন করা করি যেখানে আয়তক্ষেত্রগুলোর প্রস্থ সারণির শ্রেণি ব্যবধান এবং দৈর্ঘ্য বা উচ্চতা অনুরূপ শ্রেণির গণসংখ্যার সমান। এভাবে সজলের সংগ্রহ করা উপাত্তক দ্বারা আয়তলেখ (Histogram) অঙ্কন করি।



ঘ) প্রচুরক নির্ণয় করো।

সমাধানঃ প্রচুরক নির্ণয়:

সজলের সংগ্রহ করা উপাত্তের ছক থেকে পাই,

সর্বোচ্চ গণসংখ্যা 25 আছে 51-55 শ্রেণিতে।

অতএব,

প্রচুরক শ্রেণির নিম্নসীমা, $L = 51$;

মোট গণসংখ্যা $n = 12+15+25+18+10 = 80$;

প্রচুরক শ্রেণির গণসংখ্যা ও তার পূর্ববর্তী শ্রেণির গণসংখ্যার

পার্থক্য $f_1 = 25-15 = 10$;

প্রচুরক শ্রেণির গণসংখ্যা ও তার পরবর্তী শ্রেণির গণসংখ্যার

পার্থক্য, $f_2 = 25-18 = 7$;

শ্রেণি ব্যবধান, $h = 5$;

\therefore প্রচুরক

$$L + \left\{ \frac{f_1}{(f_1+f_2)} \right\} \times h \\ = 51 + \left\{ \frac{10}{(10+7)} \right\} \times 5 \\ = 53.94117 \text{ (প্রায়)}$$

ঙ) উপাত্তের গণসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করো।

সমাধানঃ

পদ্ধতি উপাত্ত হতে পাই,

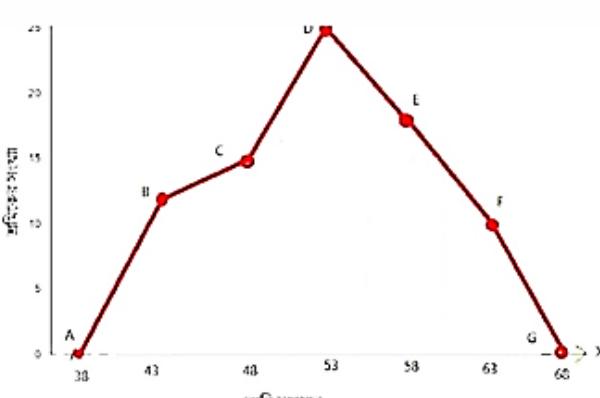
বয়স (বছরে)	শ্রেণি মধ্যমান (x_i)	গণসংখ্যা (f_i)
41-45	43	12
46-50	48	15
51-55	53	25
56-60	58	18
61-65	63	10

এখন শ্রেণি মধ্যমানকে ভূজ ও গণসংখ্যাকে কোটি ধরে, B(43, 12); C (48, 15); D (53,25) ; E (58, 18); F (63,10) ছক কাগজে চিহ্নিত করি।

এখন, সারণি অনুসারে, 1ম শ্রেণি মধ্যমানের পূর্বের শ্রেণি মধ্যমান = $(43-5) = 38$ এবং শেষ শ্রেণি মধ্যমানের পরের শ্রেণি মধ্যমান = $(63+5) = 681$

\therefore আরও দুটি বিন্দু A(38, 0); G (68, 0) ছক কাগজে চিহ্নিত করি।

এখন, A থেকে G পর্যন্ত বিন্দুগুলো পরস্পর সরলরেখাংশ দ্বারা যোগ করি। তাহলে, ABCDEFG-ই নির্ণেয় বহুভুজ হবে।



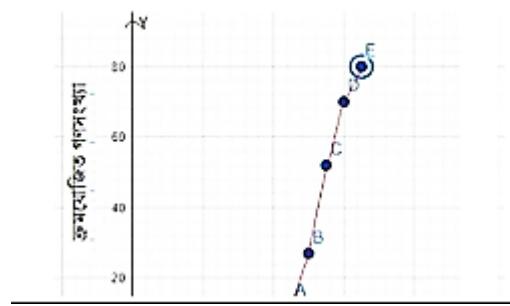
চ) উপাত্তের অজিভ রেখা অঙ্কন করো।

সমাধানঃ

উপাত্ত থেকে পাই,

বয়স (বছরে)	গ্রামকের সংখ্যা (f_i)	গ্রামফোর্ড গণসংখ্যা
41-45	12	12
46-50	15	27
51-55	25	52
56-60	18	70
61-65	10	80

প্রতিটি শ্রেণির উচ্চসীমাকে ভূজ ও ক্রমযোজিত গণসংখ্যাকে কোটি ধরে A(45, 12); B (50, 27) ; C (55, 52); D (60,70); E (65,80) বিন্দুগুলো ছক কাজে স্থাপন করি। এখন বিন্দুগুলো খালি হাতে পর্যায়ক্রমে যোগ করি। তাহলে প্রাপ্ত ABCDE বক্ররেখাই নির্ণেয় অজিভ রেখা।



১০। মনে করো তোমার এলাকায় মাঝেমাঝে বিদ্যুৎ থাকে না। সমস্যাটি কীভাবে সমাধান করবে, তার জন্য একটি পরিকল্পনা করো। পরিকল্পনা অনুসারে নিচের কাজগুলো করো:

ক) প্রতিবেশী পরিবারগুলোর এক মাসের বিদ্যুৎ খরচের তথ্য সংগ্রহ।

সমাধানঃ

প্রতিবেশী পরিবারগুলোর এক মাসের বিদ্যুৎ খরচের তথ্য নিম্নরূপঃ

মাসিক বিদ্যুৎ খরচ (টাকা)	পরিবার সংখ্যা
60	2
65	1
70	3
75	5
100	2
105	3
110	1
115	1
120	2
124	1

খ) প্রতিমাসে পরিবারগুলো গড়ে কী পরিমাণ বিদ্যুৎ খরচ করে তা জানার জন্য উপাত্তগুলোকে শ্রেণি বিন্যাসের মাধ্যমে সারণিবদ্ধ করে প্রত্যক্ষ ও সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি ব্যবহার করে গড় নির্ণয়।

সমাধানঃ

উপাত্তগুলোকে শ্রেণি বিন্যসের মাধ্যমে সারনিবদ্ধ করে পাই,

মাসিক বিদ্যুৎ খরচ (টাকা)	পরিবার সংখ্যা
৮০-৮৯	৩
৯০-৯৯	৮
১০০-১০৯	৫
১১০-১১৯	২
১২০-১২৯	৩

প্রত্যক্ষ পদ্ধতিতে গড় নির্ণয়

এর জন্য নিচের সারণিটি তৈরি করিঃ

মাসিক বিদ্যুৎ খরচ (টাকা) (x ₁)	শ্রেণি মধ্যমান (x̄ ₁)	পরিবার সংখ্যা (f ₁)	x ₁ f ₁
80-89	84.5	3	253.5
90-99	94.5	8	756
100-109	104.5	5	522.5
110-119	114.5	2	229
120-129	124.5	3	373.5
	n = 21		$\sum x_1 f_1 = 2134.5$

∴ গড়

$$= \frac{\sum x_1 f_1}{n}$$

$$= \frac{2134.5}{21}$$

= 101.6428 (প্রায়)

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয়

এর জন্য নিচের সারণিটি তৈরি করিঃ

মাসিক বিদ্যুৎ খরচ (টাকা)	শ্রেণি মধ্যমান (x̄ ₁)	পরিবার সংখ্যা (f ₁)	u ₁ = (a-x ₁)/h	f ₁ u ₁
৮০-৮৯	৮৪.৫	৩	-২	-৬
৯০-৯৯	৯৪.৫	৮	-১	-৮
১০০-১০৯	১০৪.৫ = a	৫	০	০
১১০-১১৯	১১৪.৫	২	১	২
১২০-১২৯	১২৪.৫	৩	২	৬
	h=10	n = 21		$\Sigma f_1 u_1 = -6$

∴ গড়

$$= a + \left(\frac{\sum f_1 u_1}{n} \right) \times h$$

$$= 104.5 + \left(\frac{-6}{21} \right) \times 10$$

= 101.6428 (প্রায়)

গ) বিদ্যুতের চাহিদা অনুসারে করণীয় সম্পর্কে তোমার মতামত বা প্রস্তাব উপস্থাপন

সমাধানঃ

- (১) শখের জন্য বিন্দুত ব্যবহার কমানো।
- (২) প্রয়োজন ছাড়া বাল্ব, ফ্যান বন্ধ রাখা।
- (৩) বিদ্যুৎ সাশ্রয়ী উপকরণ ব্যবহার করা।
- (৪) সর্বোপরি বিদ্যুৎ উৎপাদনে সক্ষমতা লাভ করা।

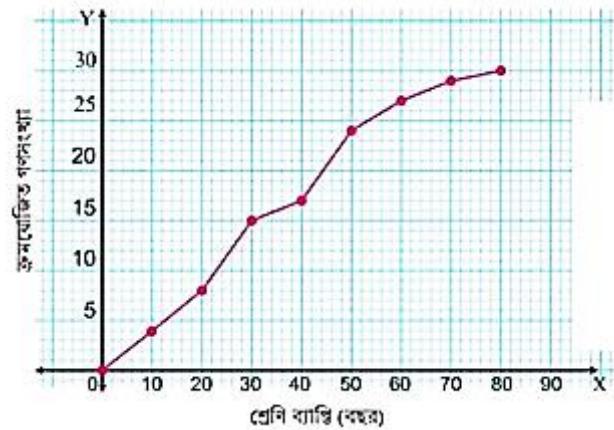
১১। (ক) তোমার পরিবারসহ নিকটাঞ্চীয় 25 জন সদস্যের বয়সের তথ্য (বছরে) সংগ্রহ করে লিপিবদ্ধ করো। (প্রয়োজনে অভিভাবকের সাহায্য নাও)

সমাধানঃ

আমার পরিবারসহ নিকটাঞ্চীয় 25 জন সদস্যের বয়সের তথ্য (বছরে) নিম্নরূপঃ

বয়স (বছর)	সদস্য সংখ্যা বা সদস্যের
৫-১৫	৩
১৫-২৫	৫
২৫-৩৫	৭
৩৫-৪৫	৩
৪৫-৫৫	২
৫৫-৬৫	৩
৬৫-৭৫	২

(খ) তোমার বস্তুর পরিবারসহ তার নিকটাঞ্চীয় 30 জন সদস্যের বয়সের (বছরে) সংগ্রহীত তথ্যের লেখচিত্রঃ



এর উপাত্ত ব্যবহার করে- একটি গণসংখ্যা সারণি তৈরি করো।

সমাধানঃ

আমার পরিবারসহ নিকটাঞ্চীয় 25 জন সদস্যের বয়সের তথ্য (বছরে) এর গণসংখ্যা সারণি নিম্নরূপঃ

বয়স (বছর)	গণসংখ্যা
৫-১৫	৩
১৫-২৫	৫
২৫-৩৫	৭
৩৫-৪৫	৩
৪৫-৫৫	২
৫৫-৬৫	৩
৬৫-৭৫	২

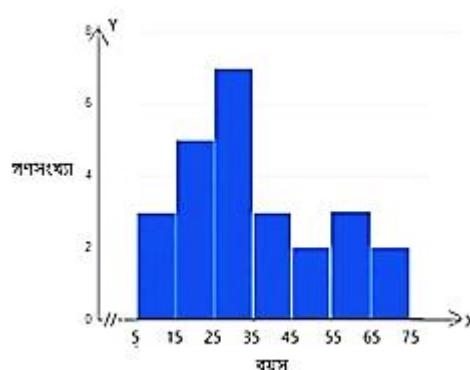
আয়তলেখ অঙ্কন করে আয়তলেখ থেকে গণসংখ্যা বহুভুজ ও প্রচুরক নির্ণয় করো।

সমাধানঃ আয়তলেখ অঙ্কনঃ

গ্রাফ কাগজে × অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 5টি বাহুর দৈর্ঘ্য সমান 10 একক ধরে সারণির অবিচ্ছিন্ন শ্রেণিসীমাগুলোর অর্থাৎ বয়সগুলোকে কোনো ফাঁকা না রেখে স্থাপন করি। যেহেতু 0 থেকে শুরু না করে 5 থেকে শুরু হয়েছে সেহেতু x অক্ষে পূর্ববর্তী ঘরগুলো বোঝাতে -// চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে।

এখন y অক্ষ (উল্লম্ব রেখা) বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 1টি বাহুর দৈর্ঘ্য সমান 1 একক এবং গণসংখ্যা নিয়ে নিচের ছবির মতো কতকগুলো পরস্পর সংলগ্ন আয়তক্ষেত্র অঙ্কন করা করি যেখানে আয়তক্ষেত্রগুলোর প্রস্থ সারণির শ্রেণি ব্যবধান এবং

দৈর্ঘ্য বা উচ্চতা অনুরূপ শ্রেণির গণসংখ্যার সমান। এভাবে নির্ণেয় আয়তলেখ (Histogram) অঙ্কন করি।

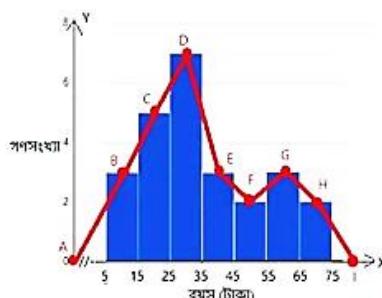


আয়তলেখ থেকে গণসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কনঃ

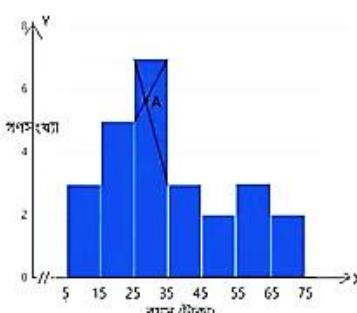
ছক কাগজে আয়তলেখের প্রত্যেকটি আয়তের ভূমির বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু B; C; D; E; F; G; H চিহ্নিত করি।

এখন, আয়তলেখে, ১ম বিন্দু 5 এর পূর্বের বিন্দু হবে $(5-10) = -5$ এবং $53-5$ এর মধ্যবিন্দু $= 0$ এছাড়া শেষ বিন্দু 70 এর পরের বিন্দু $= (75+10) = 85$ এবং 753 85 এর মধ্যবিন্দু $= 80$ ।
 \therefore এখন x অক্ষে দুটি বিন্দু A(0,0) : 1(85,0) ছক কাগজে চিহ্নিত করি।

এখন, A থেকে I পর্যন্ত বিন্দুগুলো পরস্পর সরলরেখাংশ দ্বারা যোগ করি। তাহলে, ABCDEFGHI-ই নির্ণেয় বহুভুজ হবে।



আয়তলেখ থেকে প্রচুরক নির্ণয়ঃ



আয়তলেখের সর্বোচ্চ আয়তের ভূমির বিপরীত বাহুর দুই বিন্দু থেকে উক্ত আয়তক্ষেত্রের দুই পাশের আয়তক্ষেত্রের ভূমির বিপরীত বাহুর যে বিন্দু সর্বোচ্চ আয়তক্ষেত্রের সংলগ্ন সেই বিন্দুবয়ের সাথে চিত্রমত সংযোগ রেখা আঁকি। দুই রেখাদ্বয় পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে। গ্রাফ থেকে A বিন্দুর ভূজ হলোঃ 28.33 (প্রায়)।

\therefore নির্ণেয় প্রচুরক 27.33 (প্রায়)।

গ) প্রত্যক্ষ ও সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করো।

সমাধানঃ

প্রত্যক্ষ পদ্ধতিতে গড় নির্ণয়ঃ

এর জন্য নিচের সারণিটি তৈরি করিঃ

বয়স (বছর)	শ্রেণি মধ্যমান (x_i)	সদস্য সংখ্যা (f_i)	$x_i f_i$
5-15	10	3	30
15-25	20	5	100
25-35	30	7	210
35-45	40	3	120
45-55	50	2	100
55-65	60	3	180
65-75	70	2	140
		$n = 25$	$\sum x_i f_i = 880$

\therefore গড়

$$= \frac{\sum x_i f_i}{n}$$

$$= \frac{880}{25}$$

$$= 35.2 \text{ (প্রায়)}$$

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয়ঃ

এর জন্য নিচের সারণিটি তৈরি করিঃ

বয়স (বছর)	শ্রেণি মধ্যমান (x_i)	সদস্য সংখ্যা (f_i)	$u_i = (x_i - \bar{x})/h$	$f_i u_i$
5-15	10	3	-2	-6
15-25	20	5	-1	-5
25-35	30 = a	7	0	0
35-45	40	3	1	3
45-55	50	2	2	4
55-65	60	3	3	9
65-75	70	2	4	8
$h = 10$		$n = 25$		$\sum f_i u_i = 13$

\therefore গড়

$$= a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{n} \right) \times h$$

$$= 30 + \left(\frac{13}{25} \right) \times 10$$

$$= 35.2 \text{ (প্রায়)}$$

ঘ) মধ্যক ও প্রচুরক নির্ণয় করো।

সমাধানঃ

মধ্যক নির্ণয়ঃ

মধ্যক নির্ণয়ের জন্য নিম্নোক্ত সারণি তৈরি করিঃ

বয়স (বছর)	সদস্য সংখ্যা (f_i)	ক্রমায়োক্তি গণসংখ্যা
5-15	3	3
15-25	5	8
25-35	7	15
35-45	3	18
45-55	2	20
55-65	3	23
65-75	2	25
$h = 10$	$n = 25$	

$$\text{এখানে, } n = 25; \frac{n}{2} = \frac{25}{2} = 12.5;$$

অর্থাৎ, 12 তম পদ 25-35 শ্রেণিতে অবস্থিত।

মধ্যক শ্রেণির নিম্নমান, $L = 25$;

মধ্যক শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা, $F_c = 8$;

মধ্যক শ্রেণির গণসংখ্যা, $f_m = 15$;

শ্রেণি ব্যবধান, $h = h$

\therefore মধ্যক

$$= L + \left(\frac{n}{2} - F_c \right) \times \left(h / f_m \right)$$

$$= 25 + (12.5-8) \times \frac{10}{15}$$

$$= 28$$

প্রচুরক নির্ণয়ঃ

সারণিটি হলোঃ

বয়স (বছরে)	সদস্য সংখ্যা (f_i)
5-15	3
15-25	5
25-35	7
35-45	3
45-55	2
55-65	3
65-75	2
$h = 10$	$n = 25$

যেখানে, সর্বোচ্চ সদস্য সংখ্যা 7 আছে 25-35 শ্রেণিতে।

অতএব, প্রচুরক শ্রেণির নিম্নসীমা, $L = 25$:

মোট গণসংখ্যা, $n = 25$;

প্রচুরক শ্রেণির গণসংখ্যা ও তার পূর্ববর্তী শ্রেণির গণসংখ্যার পার্থক্য $f_1 = 7-5 = 2$;

প্রচুরক শ্রেণির গণসংখ্যা ও তার পরবর্তী শ্রেণির গণসংখ্যার পার্থক্য, $f_2 = 7-3 = 4$;

শ্রেণি ব্যবধান, $h = 10$;

\therefore প্রচুরক

$$= L + \left\{ \frac{f_1}{(f_1+f_2)} \right\} \times h$$

$$= 25 + \left\{ \frac{2}{(2+4)} \right\} \times 10$$

$$= 28.33 \text{ (প্রায়)}$$

ঙ) (ii) এর চিত্র থেকে গণসংখ্যা সারণি তৈরি করো।

গণসংখ্যা সারণি তৈরি:

প্রদত্ত চিত্র হতে শ্রেণি ব্যাস্তি, ক্রমযোজিত গণসংখ্যা এবং ক্রমযোজিত গণসংখ্যা থেকে গণসংখ্যার সারণি তৈরি করি

চ) তোমার ও তোমার বন্ধুর পরিবারের সদস্যদের গড় বয়সের তুলনামূলক পার্থক্য লেখো। এক্ষেত্রে পরিবারের সদস্য সংখ্যা, বয়স ও শ্রেণি ব্যবধান গড়কে প্রভাবিত করে কি না ব্যাখ্যা করো।

সমাধানঃ

ছ) চিত্র ও ছক এর মধ্যে তথ্য উপস্থাপন সহজবোধ্য বলে তুমি মনে করো? উভয়ের সম্পর্কে ঘুর্ণি

দাও।

সমাধানঃ

চিত্র ও ছক এর মধ্যে চিত্রকে তথ্য উপস্থাপন এর জন্য সহজবোধ্য বলে আমি মনে করি। কারণঃ

একটি চিত্র হাজার শব্দের সমান। হাজার শব্দের প্রতিবেদনে বা ছকে যে কথাটি ফুটিয়ে তোলা যায় না, অনেক সময় একটি চিত্রই সেই ভাবনাটি সম্পূর্ণরূপে ফুটিয়ে তোলে।

শ্রেণি ব্যাস	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	গণসংখ্যা
0-10	4	4
10-20	8	$8 - 4 = 4$
20-30	15	$15 - 8 = 7$
30-40	17	$17 - 15 = 2$
40-50	24	$24 - 17 = 7$
50-60	27	$27 - 24 = 3$
60-70	29	$29 - 27 = 2$
70-80	30	$30 - 29 = 1$