

## 1 方法描述

### 1.1 运动模糊

运动模糊是指物体向一个方向线性运动产生的模糊。设原图像为  $f(x, y)$ ，物体沿  $(x_0, y_0)$  运动，曝光时间为  $T$ ，则可以得到模糊后的图像  $g(x, y)$  (1)。对其进行傅里叶变换并改变积分顺序，可以得到  $G(u, v)$  (2)。括号内是位移函数的傅里叶变换，代入相关变换式可以得到 (3)。因为  $F(u, v)$  与  $t$  无关，故可以得到退化函数  $H(u, v)$  (4)。假设图像做的是匀速直线运动，在  $x$  方向  $T$  时间内的运动距离为  $a$ ，在  $y$  方向  $T$  时间内的运动距离为  $b$ ，则可以得到 (5)，即本次实验使用的运动模糊公式。

$$g(x, y) = \int_0^T f[x - x_0(t), y - y_0(t)] dt \quad (1)$$

$$G(u, v) = \int_0^T \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f[x - x_0(t), y - y_0(t)] e^{-2j\pi(ux+vy)} dx dy \right] dt \quad (2)$$

$$G(u, v) = F(u, v) \int_0^T e^{-2j\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]} dt \quad (3)$$

$$H(u, v) = \int_0^T e^{-2j\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]} dt \quad (4)$$

$$H(u, v) = \frac{T}{\pi(ua + vb)} \sin[\pi(ua + vb)] e^{-j\pi(ua+vb)} \quad (5)$$

### 1.2 高斯噪声

高斯噪声是指符合高斯分布 (6) 的噪声，生成的噪声与原图像相加即可得到加噪后的图像。本次实验需要生成均值为 0 方差为 500 的高斯噪声，使用 matlab 的 randn 函数生成服从标准高斯分布的随机数再进行变换即可。

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (6)$$

### 1.3 逆滤波

我们假设图像的降质模型为 (7)，在不考虑噪声的情况下一种简单的复原方法就是直接将退化图像除以降质函数 (8)。这种方法对于噪声较小的图像可以取得不错的效果。这种方法存在一个问题，对于噪声较强的图像，当  $H(u, v)$  很小的时候，噪声对应的项会很大，噪声影响也会大大增强。一种简单的办法是使用伪逆滤波复原 (9)，即设定一个阈值  $\epsilon$ ，当  $|H(u, v)| < \epsilon$  时将其设为 0。

$$G(u, v) = H(u, v) * F(u, v) + N(u, v) \quad (7)$$

$$F(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)} - \frac{N(u, v)}{H(u, v)} \quad (8)$$

$$H^{-1}(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{H(u, v)} & |H(u, v)| > \epsilon \\ 0 & |H(u, v)| \leq \epsilon \end{cases} \quad (9)$$

## 1.4 维纳滤波

维纳滤波又称最小均方误差滤波, 核心思想是通过寻找最佳复原图像使得复原图像与原图像的均方误差(MSE)最小。假设原图像为  $f$ , 降质图像为  $g$ , 维纳滤波器为  $h_{win}$ , 可得最优化式(10), 经傅里叶变换得(11), 拆开得(12), 令  $\partial C / \partial H_{win}(u, v) = 0$ , 进一步推导得(13)。其中  $S_n(u, v)$  为噪声的功率, 即  $|N(u, v)|^2$ ,  $S_f(u, v)$  为降质图像的功率, 即  $|F(u, v)|^2$ 。这个方法需要的先验知识太多, 很多信息在实际应用中难以获得。因此在实际应用中一般将  $S_n(u, v)/S_f(u, v)$  用参数  $K$  代替(14)。

$$C = E\{|f - h_{win}g|^2\} \quad (10)$$

$$C = E\{|F(u, v) - H_{win}(u, v)G(u, v)|^2\} \quad (11)$$

$$C = E\{|F(u, v)|^2\} - H_{win}(u, v)E\{F^*(u, v)G(u, v)\} - H_{win}^*(u, v)E\{F^*(u, v)G(u, v)\} + |H_{win}(u, v)|^2E\{|G(u, v)|^2\} \quad (12)$$

$$H_{win}(u, v) = \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + S_n(u, v)/S_f(u, v)} * \frac{G(u, v)}{H(u, v)} \quad (13)$$

$$H_{win}(u, v) = \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + K} * \frac{G(u, v)}{H(u, v)} \quad (13)$$

## 2 实验结果

### 2.1 运动模糊与高斯噪声

使用 1.1 中的运动模糊公式(5), 根据作业要求取  $a=0.1, b=0.1, T=1$ , 可以得到运动模糊图像。使用 1.2 中的高斯公式, 取均值为 0 方差为 500 可以得到加了高斯噪声的图像。如图 1, 从左往右依次为原图像, 模糊图像, 加噪图像。



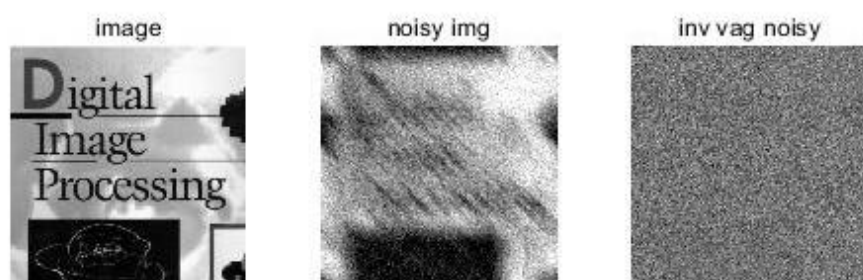
(图 1)

### 2.2 逆滤波

使用 1.1 节的运动模糊公式(5)作为退化函数, 并使用 1.3 节中的公式(9), 取  $\text{eps}=1e-2$  对退化函数的逆进行防止除以 0 问题, 对模糊图像和噪声图像分别做逆滤波。图 2 为模糊图像逆滤波的结果, 图 3 为模糊加噪图像逆滤波的结果。可以看到对于模糊图像使用逆滤波可以基本恢复原图的特征, 对于模糊加噪图像使用逆滤波则完全不能恢复原图特征, 噪声会被放大。



(图 2)



(图 3)

## 2.2 维纳滤波

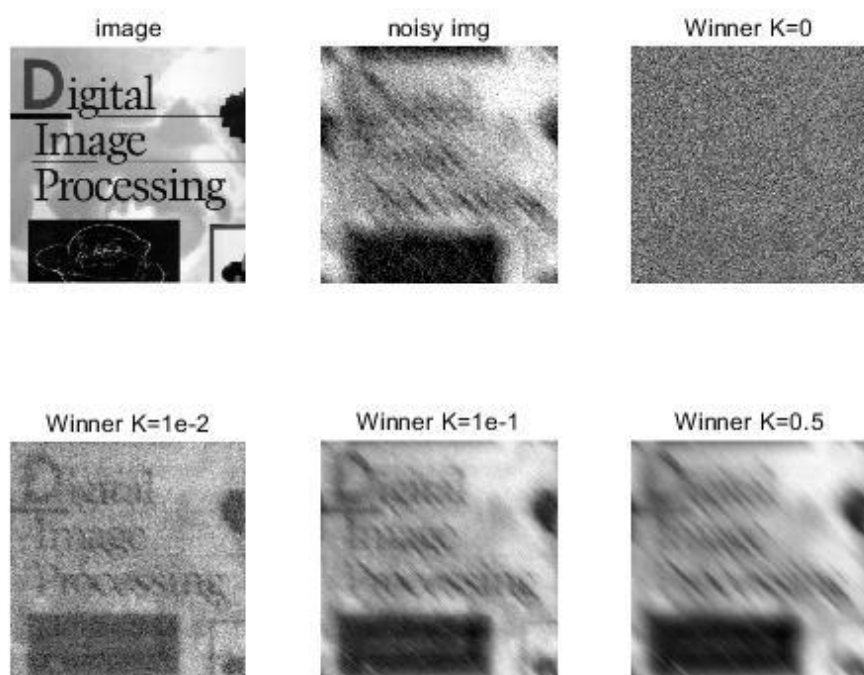
我使用带参数的维纳滤波公式(14)构造滤波器，并取运动模糊公式(5)作为退化函数。我枚举  $K=0, 1e-2, 1e-1, 0.5$ ，分别对模糊图像和模糊噪声图像进行滤波，观察实验结果。图 4 为对模糊图像滤波的结果，无 5 为对模糊噪声图像滤波的结果。

如图 4 可以看到，当  $K=0$  时滤波效果和逆滤波相同。当  $K=1e-2$  时滤波效果也还算可以，基本图案和字母都能看清。当  $K$  较大时，因为该图像没有加噪，逆滤波时却考虑了噪声，所以滤波效果并不理想。



(图 4)

如图 5 可以看到，当  $K=0$  时恢复效果和逆滤波一样，当  $K=1e-2$  时可以看到运动模糊基本消失，几个字母能够清晰显示，但图像受噪声影响严重。当  $K=0.1$  时效果还算可以，图上的基本信息和图案都可以看到，噪声少了很多，不过字母显示没有  $K=1e-2$  时清晰。当  $L=0.5$  时过分考虑噪声，噪声基本被滤掉但运动模糊还存在。



(图 5)