

## 1 方法描述

### 1.1 Butterworth 低通滤波器

Butterworth 低通滤波器是一种低通频域滤波器，主要用于获取低分辨率特征，用于图像压缩。这种滤波采用公式(2)对频域上的图像进行变换，公式(2)中的 $D_{x,y}$ 由公式(1)获得。 $D_0$ 为常数， $n$ 为变换的阶数。

$$D_{x,y} = \sqrt{\left(x - \frac{width}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{height}{2}\right)^2} \quad (1)$$

$$H_{x,y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{D_{x,y}}{D_0}\right)^{2n}} \quad (2)$$

具体的滤波过程如下：(1) 将图像用 0 填充到原图像的两倍，并以 $(-1)^{x+y}$ 乘以输入图像进行中心变换。(2) 对填充和中心化后的图像进行离散傅里叶变换(DFT)到频域。(3) 在频域上进行滤波变换。(4) 对变换好的图像进行逆傅里叶变换(IDFT)到空域。(5) 对图像进行反中心化，并取左上方的四分之一作为最终结果。

如图 1 为 Butterworth 低通滤波器的频域图像。

### 1.2 同态滤波器

正常图像是在均匀光照强度下获得的图像，但实际上由于光照不均匀，图像的一些部分会因为光照强度不足而丢失信息。同态滤波可以解决光照不均匀的问题，实现图像增强，显示图像细节。

一张由物理过程产生的图像 $f(x, y)$ 包含照射分量 $f_i(x, y)$ 和反射分量 $f_r(x, y)$ ，光照影响不是加法模型而是乘法模型，不能直接对图像进行滤波。因此根据公式(3)，同态滤波将图像先利用公式(4)取对数转换为加法模型，后使用滤波器在对数域上对图像进行滤波，消除光照影响，最后进行指数变换对图像进行恢复。

照射分量 $f_i(x, y)$ 变化缓慢，频率集中在低频部分，而反射分量 $f_r(x, y)$ 包含物体的各种信息，高频分量丰富。同态滤波器是一个类高通滤波器，它可以增强高频的贡献，减少低频的贡献，加强反射分量，从而解决光照不均匀的问题。和 Butterworth 高通滤波器相比，它保留了一些低频成分，使得图像的表达式更完整。

为了获取最佳的显示效果，滤波后的图像会根据公式(6)进行归一处理。其中  $\max$  为图像的像素最大值， $\min$  为最小值。

公式(5)为同态滤波的表达式，其中 $D_{x,y}$ 由公式(1)推得， $\gamma_H$ 和 $\gamma_L$ 分别表示高频和低频的强度， $c$ 和 $D_0$ 为参数。

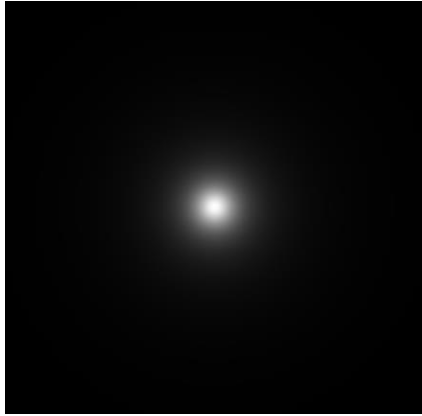
如图 2 为 Butterworth 低通滤波器的频域图像。

$$\text{FFT}(\ln(f(x, y))) = \text{FFT}(\ln(f_i(x, y))) + \text{FFT}(\ln(f_r(x, y))) \quad (3)$$

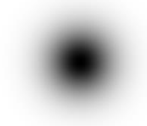
$$y = \ln(x) + 1 \quad (4)$$

$$H_{x,y} = (\gamma_H - \gamma_L) \left[ 1 - e^{-c \left( \frac{D_{x,y}^2}{D_0^2} \right)} \right] + \gamma_L \quad (5)$$

$$f_{x,y} = 255 * \frac{f_{x,y} - \min}{\max - \min} \quad (6)$$



(图 1)



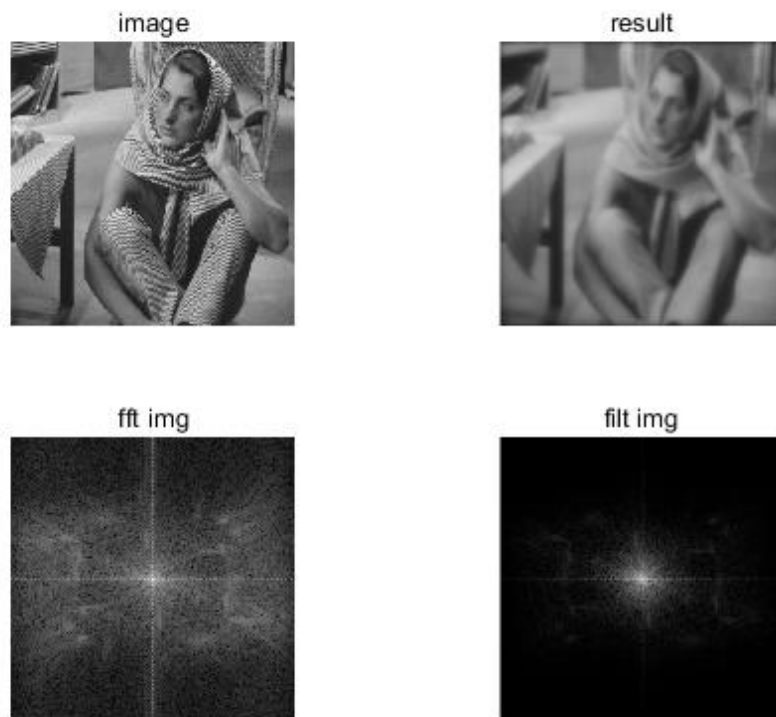
(图 2)

## 2 实验结果

### 2.1 Butterworth 低通滤波

本次实验要求实现一阶 Butterworth 低通滤波器，所以设  $n=1$ 。

首先取  $D_0=40$  进行变换，如图 3 为空域和频域上的原图和变换结果。可以看到在空域上图像变模糊了，在频域上高频部分被抑制了。

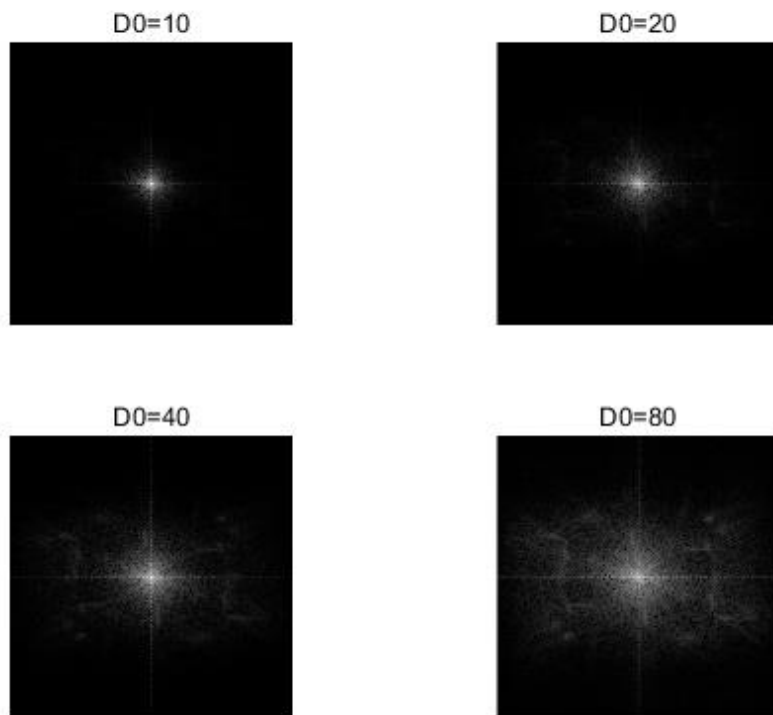


(图 3)

接着枚举  $D_0=10, 20, 40, 80$  进行实验。图 4 为空域上的结果，可以看到当  $D_0=10$  的时候图像很模糊，随着  $D_0$  的上升，图像也越来越清晰，细节特征越来越多。图 5 为频域上的结果，可以看到随着  $D_0$  的上升，保留的频度信息也越来越多。



(图 4)



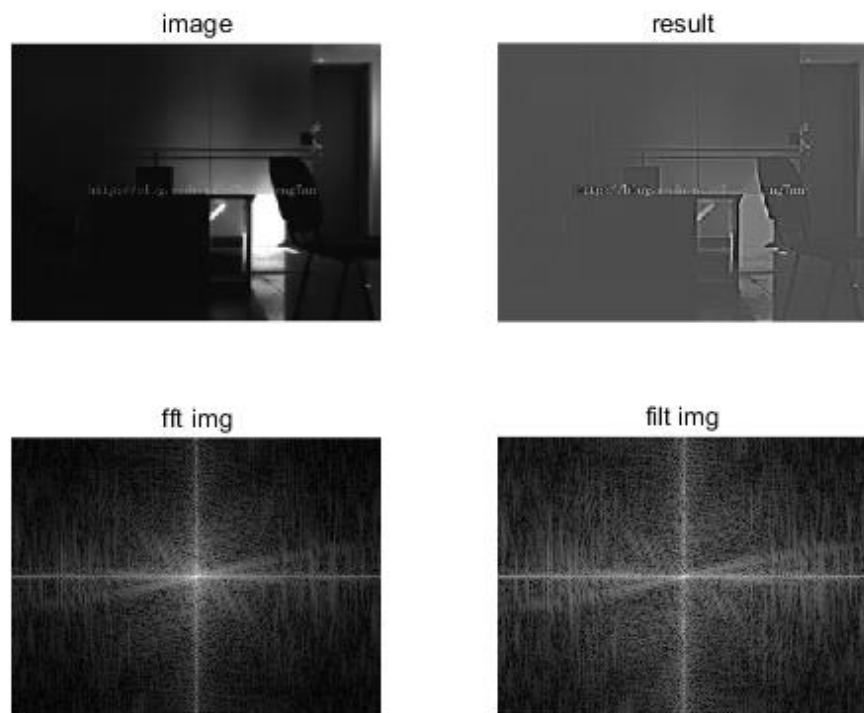
(图 5)

## 2.2 同态滤波

对于同态滤波，根据作业文档统一取 $\gamma_H=2$ ， $\gamma_L=0.25$ ， $C=1$ 。

首先取 $D_0=100$  进行同态滤波，如图 6 为空域和频域上的原图和变换结果。可以看到在空域上经过同态滤波的图像可以显示更多的细节，在频域上图像的低频部分被抑制，高频部

分被加强。

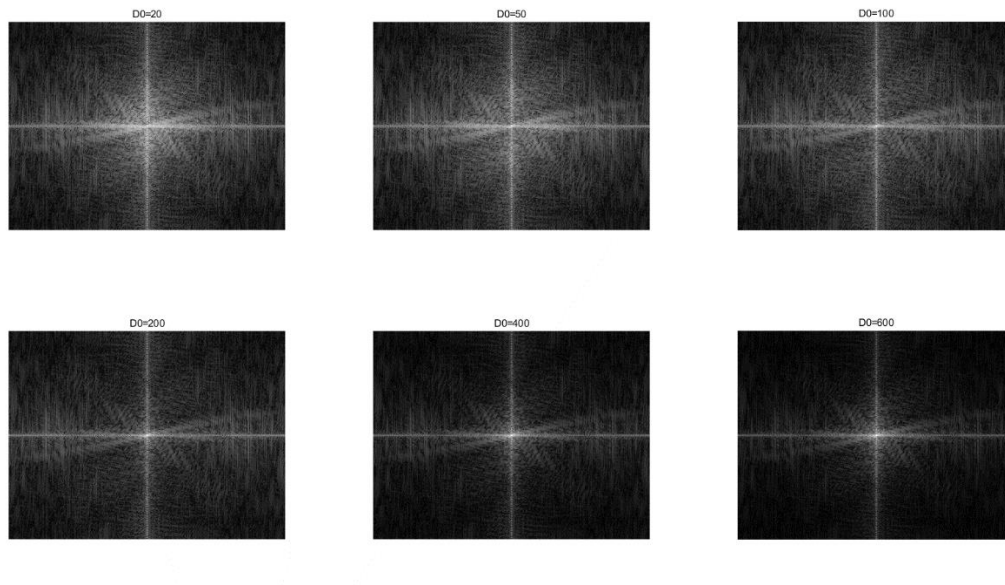


(图 6)

接下来我尝试枚举 $D_0=20,50,100,200,400,600$  进行同态滤波并绘制频域和空域上的图像。图 7 为空域上的结果, 图 8 为频域上的结果。可以看到当 $D_0=200$  的时候效果最好。 $D_0$ 过大, 高频部分会被抑制, 滤波结果趋近于原图。 $D_0$ 过小, 低频部分也会被加强, 图像会有比较严重的振铃现象。在频域上效果更清晰了, 对于 $D_0$ 较小的图像在频率较低的时候点就开始浓密, 对于 $D_0$ 较大的图像基本没有浓密点, 和原图差不多。

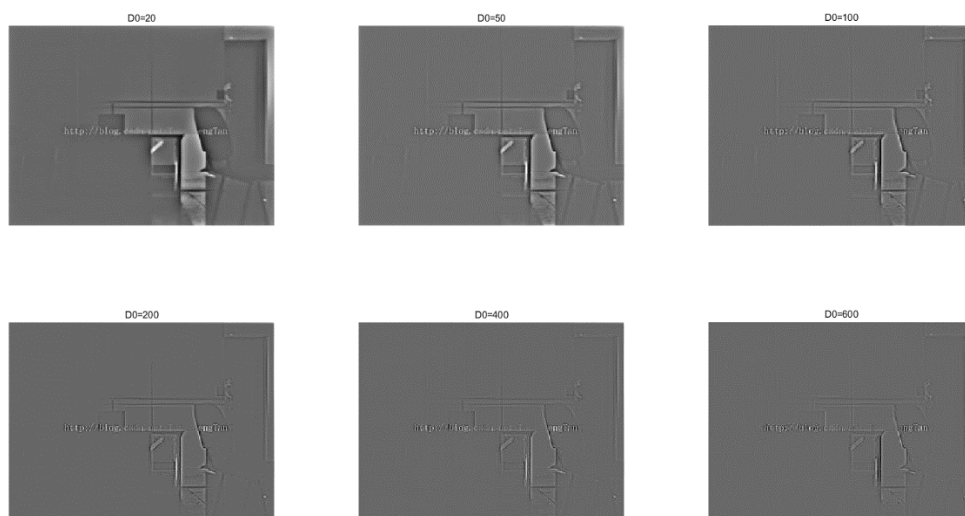


(图 7)

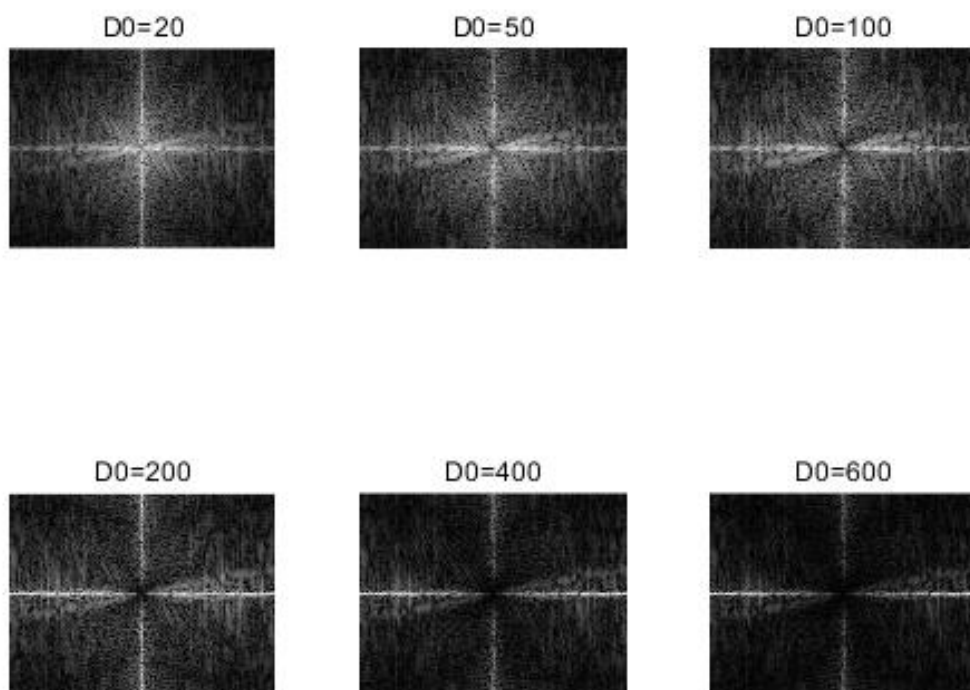


(图 8)

最后我尝试将同态滤波器替换为一阶高通 Butterworth 滤波器，并比较了滤波结果。如图 9,10 可以看到，使用一阶高通 Butterworth 滤波器只保留了轮廓特征，低频部分的特征被削平了。



(图 9)



(图 10)