Budapest, den 1. III. 1925.

N. P.

Sehr geehrter Herr Professor!

Während meiner Reise und nach meiner Ankunft in Budapest ist es mir gelungen die in Lenzerheide berührte Frage von der Wirkung eines Massenpunktes auf die De Sittersche Hyperbelwelt zu erledigen.

Das Resultat ist das folgende:

Darzustellen ist der Raum der r, θ, φ, t mit dem Streckenelement

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2m}{r}-r^2\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2 + \left(1-\frac{2m}{r}-r^2\right) dt^2.$$

Wenn $0 < m < \frac{1}{3\sqrt{3}}$ ist so hat $1-\frac{2m}{r}-r^2$ 1 negati[illegible] und 2 positive Wurzeln r_{-1}, r_0, r_1. Für $r_0 < r < r_1$ ist dann diese Lösung brauchbar.

Mit der Transformation

$$x_1 = \frac{r}{r_1}\cos(\theta) \qquad x_4 = \sqrt{1-\frac{r^2}{r_1^2}}\, \mathrm{Ch}\left(\left(r_1 - \frac{m}{r_1^2}\right)t\right)$$

$$x_2 = \frac{r}{r_1}\sin(\theta)\cos(\varphi) \qquad x_5 = \sqrt{1-\frac{r^2}{r_1^2}}\, \mathrm{Sh}\left(\left(r_1 - \frac{m}{r_1^2}\right)t\right)$$

$$x_3 = \frac{r}{r_1}\sin(\theta)\sin(\varphi)$$

wird dieser Raum r, ϑ, φ, t auf den Raum der x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 mit

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 = 1$$

(das De Sittersche Hyperboloid) abgebildet, d.h. auf seinen Teil mit $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1$. und das Streckenelement wird

$$ds^2 = -f(\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2})\,(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) -$$
$$- g(\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2})\,(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2 -$$
$$- h(\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2})\,(dx_4^2 - dx_5^2)$$

wobei f, g, h folgendermaßen definiert sind:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= r_1^2 \\ g(x) &= \frac{1}{Q(x)\,x\,(1-x)} - \frac{4Q(x)}{Q(1)^2\,x\,(x+1)^2(1-x)} - \frac{r_1^2}{x^2} \\ h(x) &= \frac{4Q(x)}{Q^2(1)\,x\,(x+1)} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} Q(x) &= (x-\tfrac{r_{-1}}{r_1})\cdot \\ &\cdot(x-\tfrac{r_0}{r_1}) = \\ &= x^2 + x - \tfrac{2m}{r_1^3} \end{aligned}$$

Daß f, h für $x > \frac{r_0}{r_1}$ endlich und positiv sind ist ohne weiteres klar, für $g(x)$ folgt dies aus der Darstellung

$$g(x) = \frac{1}{x^2}\,\frac{x\varphi(x) - \varphi(1)}{x-1}, \quad \varphi(x) = \frac{Q(x)}{(x+1)^2} - \frac{1}{Q(x)} - r_1^2.$$

Also ist diese Hyperbelwelt für $x > \frac{r_0}{r_1}$, d.h. außerhalb einer Umgebung ~~und~~ des Massenpunktes und <u>seiner Antipode</u> regulär.

Da für $x \to \infty$ $\quad f(x) \to r_1^2$, $g(x) \to 0$, $h(x) \to \frac{4}{Q^2(1)} = \frac{1}{(1-\frac{2m}{r_1^3})^2}$ verschwindet die Wirkung des Massenpunktes selbst im unendlichfernen, außerhalb der ~~aktiven~~

Vergangenheit oder der Zukunft liegenden Weltgebieten nicht: die Welt ist dort räumlich im Verhältniße $r_1 : 1$ verkleinert, zeitlich im Verhältniße $\frac{1}{1-\frac{m}{r_3}} : 1$ beschleunigt.
Die Discussion dieser Lösung ist auch sonst ganz einfach. —

Ich habe noch die angenehme Pflicht Herrn Professor und ihrer w. Familie meinen Dank für die angenehmen Tage auszusprechen, die ich in ihrem Kreise in Lenzerheide verbrachte. Indem ich Herrn Professor bitte Ihrer Frau Gemahlin meinen Handkuß übergeben zu wollen

verbleibe ich hochachtungsvoll

Ihr ganz ergebener

Hans v. Neumann.

P. S.

Ich weiß nicht wie die Symmetrie der Antipoden zu deuten ist. Die radikalste Lösung wäre stets zwei Antipoden x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 und $-x_1, -x_2, -x_3, -x_4, -x_5$ zu identificiren. Diese Operation (deren teilweises Analo-

gon ja in der Einsteinschen Zylinderwelt
auch betrachtet wird) hätte aber die Wirkung
daß man keine eindeutige Zeitrichtung Vergan-
genheit → Zukunft (für alle Weltlinien)
festlegen könnte.

Diese Richtung müßte vielmehr für die Weltlinie
jedes Atoms einzeln definiert werden. Um mit
der Causalität in Einklang zu bleiben muß man
erklären: Signale A → B (unterlichtgeschwindig-
keit) sind nur möglich wenn A in B-s Vergangen-
heit und B in A-s Zukunft liegt. Zwischen Welt-
linien mit entgegengesetzten Zeitrichtungen
gibt es also keine Signale.

Für jede Weltlinie umfaßt sowohl Vergangen-
heit wie Zukunft die ganze Hyperbelwelt, der-
art daß von jeder andern Weltlinie ein Teil
gleichgerichtete, ~~der~~ andere aber entgegengesetz-
te Zeitrichtungt hat. Also werden entfernte
Himmelsobjecte auch hier zunächst sichtbar
sein, sich immer schneller entfernen und
immer stärkere Zeitverlangsamung zeigen,
und nie über einen gewißen Zeitpunkt hinaus
verfolgbar sein. Auf dem Sterne geschieht natür-
lich nichts, der Beobachter wird erklären
daß zunächst Stehenbleiben, sodann Umkehr
der Zeit erfolgte. Hochachtungsvoll H. v. Neumann.