Cortina d'Ampezzo, den 5. August 1930.

Sehr geehrter Herr Professor!

In der letzten Zeit habe ich mich mit der Eindeutigkeitsfrage der Lösungen der Vertauschungsrelation

$$PQ - QP = \frac{h}{2\pi i} 1,$$

bzw. Ihrer Gleichungen

$$U(\alpha)V(\beta) = e^{i\alpha\beta} \cdot V(\beta)\,U(\alpha)$$

($U(\alpha) = e^{\frac{2\pi i}{h}\alpha P}$, $V_\beta = e^{i\beta Q}$) beschäftigt, und die Eindeutigkeit mit einer ziemlich einfachen Methode bewiesen.*) Da dieselbe an Ihre Behandlung der kontinuierlichen geschlossenen Gruppen, mit Hilfe der den „Gruppenzahlen" entsprechenden Integralgleichungen, anlehnt, wird sie Sie vielleicht interessieren, und ich erlaube mir sie im Folgenden zu skizzieren.

Ich führe die unitäre Schar

$$S(\alpha,\beta) = e^{-\frac{1}{2}i\alpha\beta} \cdot U(\alpha)V(\beta) = e^{\frac{1}{2}i\alpha\beta} \cdot V(\beta)\,U(\alpha)$$

ein, für die die Multiplikations-Relationen

$$S(\alpha,\beta)\,S(\gamma,\delta) = e^{\frac{1}{2}i(\alpha\delta-\beta\gamma)}\,S(\alpha+\gamma,\beta+\delta)$$

lautet, und betrachte Operatoren

$$A = \iint_{-\infty}^{+\infty} a(\alpha,\beta)\,S(\alpha,\beta)\,d\alpha\, d\beta,$$

mit ~~also~~ (über die ganze α,β-Ebene) absolut integrierbarem „Kern" $a(\alpha,\beta)$. Es ist leicht, die Rechenregeln für diese Kerne anzugeben, insbesondere ist

$$\left(\iint a(\alpha,\beta)\,S(\alpha,\beta)\,d\alpha\, d\beta\right)^* = \iint \overline{a(-\alpha,-\beta)}\,S(\alpha,\beta)\,d\alpha\, d\beta,$$

$$\iint \cdots \quad S(\mu,\nu) = \iint e^{\frac{1}{2}i(\nu\alpha-\mu\beta)}\,a(\alpha-\mu,\beta-\nu)\,S(\alpha,\beta)\,d\alpha\, d\beta,$$

$$S(\mu,\nu) \iint \cdots = \iint e^{-\frac{1}{2}i(\nu\alpha-\mu\beta)}\,a(\alpha-\mu,\beta-\nu)\,S(\alpha,\beta)\,d\alpha\, d\beta,$$

$$\iint a(\alpha,\beta)\,S(\alpha,\beta)\,d\alpha\, d\beta \cdot \iint b(\alpha,\beta)\,S(\alpha,\beta)\,d\alpha\, d\beta = \iint c(\alpha,\beta)\,S(\alpha,\beta)\,d\alpha\, d\beta$$

mit $c(\alpha,\beta) = \iint e^{\frac{1}{2}i(\beta\xi-\alpha\eta)}\,a(\xi,\eta)\,b(\alpha-\xi,\beta-\eta)\,d\xi\, d\eta.$

Ferner folgt aus $\iint a(\alpha,\beta)\,S(\alpha,\beta)\,d\alpha\, d\beta = 0$ $\quad S(-\mu,-\nu)\iint \cdots S(\mu,\nu) = 0$, d. h. $\iint e^{i(\nu\alpha-\mu\beta)} \cdot a(\alpha,\beta)\,S(\alpha,\beta)\,d\alpha\, d\beta = 0$ für alle μ,ν — und hieraus leicht $a(\alpha,\beta) \equiv 0$. Der Kalkül mit den „Kernen" ist also demjenigen mit ihren Operatoren gleichwertig.

Nun setze ich

$$A = \iint e^{-\frac{1}{4}\alpha^2 - \frac{1}{4}\beta^2}\,S(\alpha,\beta)\,d\alpha\, d\beta.$$

---

*) Der von Stone Proc. Nat. Acad. angekündigte Beweis scheint, wie mir Stone mitteilte, noch nicht lückenlos zu sein.

dann erkennt man durch leichte Rechnungen

$$A \neq 0, \quad A = A^*, \quad A\,S(u,v)\,A = 2\pi\, e^{-\frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{4}v^2} A.$$

Also ist insbesondere $\frac{1}{2\pi}A$ ein Projektions-Operator $\neq 0$ ($u = v = 0$), sei f eine Lösung von $\frac{1}{2\pi}Af = f$, $|f| = 1$. Alle $f_{\alpha,\beta} = S(\alpha,\beta)f$ bestimmen einen Raum $\mathfrak{M}$, der gegenüber allen $S(\gamma,\delta)$, d.h. allen $U(\gamma)$, $V(\delta)$, invariant ist, also (Irreducibilität!) der volle Hilbertsche Raum.

Nun ist

$$(f_{\alpha,\beta}, f_{\gamma,\delta}) = (S(\alpha,\beta)f, S(\gamma,\delta)f) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}(S(\alpha,\beta)Af, S(\gamma,\delta)Af) = \frac{1}{4\pi^2}(A\,S(-\gamma,-\delta)\,S(\alpha,\beta)Af, f) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{4}(\alpha-\gamma)^2 - \frac{1}{4}(\beta-\delta)^2 + \frac{1}{2}i(\alpha\delta-\beta\gamma)}(Af, f) = e^{\cdots\cdots}(f,f) =$$

I./ $$= e^{-\frac{1}{4}(\alpha-\gamma)^2 - \frac{1}{4}(\beta-\delta)^2 + \frac{1}{2}i(\alpha\delta-\beta\gamma)}$$

II./ $$S(u,v)\, f_{\alpha,\beta} = e^{\frac{1}{2}i(u\beta - v\alpha)}\, f_{\alpha+u,\beta+v}.$$

Dabei ist $\mathfrak{M}$ die Menge aller Häufungspunkte aller Linearaggregate irgendwelcher (endlich vieler) $f_{\alpha,\beta}$.

Dass aber zwei $\mathfrak{M}$ mit den Eigenschaften I./, II./ ein-eindeutig, längentreu und $S(\alpha,\beta)$-isomorph aufeinander beziehbar sind, ist evident (man lasse die $f_{\alpha,\beta}$ sich entsprechen, und erweitere linear-stetig auf ganz $\mathfrak{M}$).

Dieselbe Methode ist auch auf die mehrdimensionalen Vertauschungsrelationen, bzw. Ihre allgemeine Theorie der „bis auf einen Zahlenfaktor Abelschen" unitären Operatorengruppen anwendbar.

Werde ich Gelegenheit haben, Sie in Königsberg wiederzusehen? In der Hoffnung des Wiedersehens

bin ich Ihr sehr ergebener

Johann v. Neumann.

Budapest, V. Vilmos császár út 62.