Berlin, den 10.5.1931

W. 10 [illegible] 23.

Lieber Herr Professor Bernays!

Das uns interessierende Beispiel sieht so aus:

__Bezeichnungen:__

$\mathfrak{A}(xyz) \equiv (z=0) \to (x=y)$,

$\mathfrak{B}(xy) \equiv x=y$.

k eine effektive Zahl $\equiv 1, 2, 3, \cdots$.

$\mathfrak{L}(y) \equiv \mathfrak{A}(y, k, \varepsilon_u \mathfrak{B}(y+1, u))$,

$\vartheta(v) \equiv \mathfrak{B}(\varepsilon_y \mathfrak{L}(y), v)$.

__Kritische Formeln:__

__1.__ $\mathfrak{L}(k) \to \mathfrak{L}(\varepsilon_y \mathfrak{L}(y))$,

__2.__ $\vartheta(\varepsilon_y \mathfrak{L}(y)) \to \vartheta(\varepsilon_v \vartheta(v))$.

__2.__ hat den Rang 1, __1.__ den Rang 2.

__A.__ Nehmen wir an, dass in irgendeiner Phase des Verfahrens die $\varepsilon_u \mathfrak{B}(xu)$ definierende Funktion im Bereiche der $x = 0, \cdots, k$ so definiert ist: in der Menge $\mathfrak{M}$ gleich 0, sonst $\neq 0$.

__B.__ $\mathfrak{A}(y, k, \varepsilon_u \mathfrak{B}(y+1, u))$ ist für $y = k$ jedenfalls wahr, für $y = 0, \cdots, k-1$ dagegen nur dann wahr, wenn $y+1$ nicht in $\mathfrak{M}$ liegt. Wenn also $\mathfrak{M}$ eine Menge $0, \cdots, l$ $(l \leqq k)$ ist, so ist $y = l$ das erste y für welches es wahr wird, d.h. für welches $\mathfrak{L}(y)$ wahr wird. Da $\mathfrak{L}(k)$ wahr ist, muss nach __1.__ $\varepsilon_y \mathfrak{L}(y)$ gleich l gewählt werden.

__C.__ In __2.__ haben wir dann $\vartheta(v) \equiv \mathfrak{B}(l, v) \equiv (l = v)$ vor uns, also die kritische Formel

$$(l = l) \to (l = \varepsilon_v \vartheta(v)).$$

Es muss also $\varepsilon_v(\vartheta(v)) = l$ gemacht werden. Falls $l \neq 0$ ist, wird damit $y = l$ aus $\mathfrak{M}$ entfernt, $\mathfrak{M}$ geht in $0, \cdots, l-1$ über.

__D.__ Am Anfang des ganzen Verfahrens ist ~~[illegible]~~ $\varepsilon_u \mathfrak{B}(xu)$ für alle x gleich 0, d.h. $\mathfrak{M}$ die Menge $1, \cdots, k$, d.h. $l = k$.

Bei jedem weiteren Schnitt-Paar wird l um 1 erniedrigt, bis es nicht 0 geworden ist; bei $l=0$ ist der zweite Schnitt bereits gegenstandslos. Daher werden insgesamt $2k+1$ Schritte notwendig sein.

E. Somit hängt die Zahl der erforderlichen Schritte, ausser von der Gestalt der kritischen Formeln, auch noch von dem Zahlenwerte der Zahlen-Substituente $k = 1, 2, \dots$ ab.

Ich glaube, dass damit die Frage, die bei wir bei der Durchsprechung des modifizierten Ackermannschen Beweises zuletzt diskutierten, ob nämlich eine Längen-Abschätzung für das Korrigier-Verfahren unabhängig von der Grösse der Zahlen-Substituenten gleichmässig möglich sei, verneinend beantwortet ist. An diesem Punkte ist dann der Nachweis des endlichen Abbrechens dieses Verfahrens (für den nächsten Grad, d. h. 3) jedenfalls lückenhaft.

Mit den besten Grüssen

Ihr

J. v. Neumann.