Лабораторная работа №4

Вычисление наибольшего общего делителя

Доборщук Владимир Владимирович, НФИмд-02-22

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель и задачи работы

Изучить алгоритмы вычисления наибольшего общего делителя

Задачи:

- Реализовать все представленные алгоритмы вычисления наибольшего общего делителя.

2 Теоретическая информация

Целое число $d \neq 0$ называется *наибольшим общим делителем* целых чисел $a_1, a_2, \dots, a_k \quad$ (Обозначатеся $d = \text{НОД}(a_1, a_2, \dots, a_k))$, если выполняются следующие условия:

1. каждое из чисел $a_1, a_2, \dots, a_k$ делится на d;
2. если $d_1 \neq 0$ - другой общий делитель чисел $a_1, a_2, \dots, a_k$, то d делится на d_1.

Для любых целых чисел $a_1, a_2, \dots, a_k$ существует наибольший общий делитель d и его можно представить в виде *линейной комбинации* этих чисел:

$$d = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_k a_K, \quad c_i \in \mathbb{Z} \quad (\mathbb{Z} - \text{множество целых чисел}) \quad (2.1)$$

Существует ряд алгоритмов, позволяющих вычислить значение наибольшего общего делителя для пары целых чисел $\text{НОД}(a, b)$:

- Алгоритм Евклида;
- Бинарный алгоритм Евклида;
- Расширенный алгоритм Евклида;
- Расширенный бинарный алгоритм Евклида.

3 Выполнение лабораторной работы

Для реализации шифров мы будем использовать Python, так как его синтаксис позволяет быстро реализовать необходимые нам алгоритмы.

На вход каждой функции реализации алгоритмов у нас на вход подается пара ненулевых целых чисел a и b. Также мы учитываем, что если у нас выполняется неравенство $a < b$, то мы меняем значения соответствующих переменных местами, для корректности выполнения алгоритмов.

Все реализации соответствуют алгоритмам, представленным в описании лабораторной работы.

3.1 Реализация алгоритма Евклида

Алгоритм Евклида реализуем в виде функции `euclid` следующего вида:

```python
# --- Euclid Algorithm ---
def euclid(a: int, b: int):
    if a == 0 or b == 0:
        print("Non zero numbers should be used")
        return

    r_0 = a
    r_1 = b

    if a < b:
```

```
        r_0, r_1 = r_1, r_0

    while True:
        r =  r_0 % r_1
        if r == 0:
            return r_1

        r_0 = r_1
        r_1 = r
```

3.2 Реализация бинарного алгоритма Евклида

Бинарный алгоритм Евклида реализуем в виде функции `binary_euclid` следующего вида:

```
# --- Binary Euclid Algorithm ---
def binary_euclid(a: int, b: int):
    if a == 0 or b == 0:
        print("Non zero numbers should be used")
        return

    r_0 = a
    r_1 = b

    if a < b:
        r_0, r_1 = r_1, r_0

    g = 1

    while r_0 % 2 == 0 and r_1 % 2 == 0:
```

```
        r_0 = int(r_0 / 2)
        r_1 = int(r_1 / 2)
        g = 2*g

    u, v = r_0, r_1

    while u != 0:
        while u % 2 == 0:
            u = int(u / 2)
        while v % 2 == 0:
            v = int(v / 2)
        if u >= v:
            u = u - v
        else:
            v = v - u

    return g*v
```

3.3 Реализация расширенного алгоритма Евклида

Расширенный алгоритм Евклида реализуем в виде функции `extended_euclid` следующего вида:

```
# --- Extended Euclid Algorithm ---
def extended_euclid(a: int, b: int):
    if a == 0 or b == 0:
        print("Non zero numbers should be used")
        return

    r_0, r_1 = a, b
```

```
x = [1, 0]
y = [0, 1]

if a < b:
    r_0, r_1 = r_1, r_0
    x, y = y, x

while True:
    r =  r_0 % r_1
    if r == 0:
        return (r_1, x[1], y[1])

    q = int((r_0 - r)/r_1)
    r_0 = r_1
    r_1 = r

    x_ = x[0] - q*x[1]
    x[0] = x[1]
    x[1] = x_

    y_ = y[0] - q*y[1]
    y[0] = y[1]
    y[1] = y_
```

3.4 Реализация расширенного бинарного алгоритма Евклида

Расширенный бинарный алгоритм Евклида реализуем в виде функции `extended_binary_euclid` следующего вида:

```
# --- Extended Binary Euclid Algorithm ---
def extended_binary_euclid(a: int, b: int):
    if a == 0 or b == 0:
        print("Non zero numbers should be used")
        return

    r_0 = a
    r_1 = b

    A, B, C, D = 1, 0, 0, 1

    if a < b:
        r_0, r_1 = r_1, r_0

    g = 1

    while r_0 % 2 == 0 and r_1 % 2 == 0:
        r_0 = int(r_0 / 2)
        r_1 = int(r_1 / 2)
        g = 2*g

    u, v = r_0, r_1

    while u != 0:
```

```
        while u % 2 == 0:
            u = int(u / 2)
            if A % 2 ==0 and B % 2 == 0:
                A = int(A / 2)
                B = int(B / 2)
            else:
                A = int((A + r_1) / 2)
                B = int((B - r_0) / 2)
        while v % 2 == 0:
            v = int(v / 2)
            if C % 2 ==0 and D % 2 == 0:
                C = int(C / 2)
                D = int(D / 2)
            else:
                C = int((C + r_1) / 2)
                D = int((D - r_0) / 2)
        if u >= v:
            u = u - v
            A = A - C
            B = B - D
        else:
            v = v - u
            C = C - A
            D = D - B

    if a < b:
        C, D = D, C

    return (g*v, C, D)
```

3.5 Тестирование

Для тестирования мы создали следующие функции, которые вызываем в блоке *Main*:

```python
# --- Tests ---

def test_euclid(a: list, b: list):
    print("EUCLID ALGORITHM\n---")
    result = list(map(lambda a, b: euclid(a, b), a, b))
    for i in range(0, len(a)):
        print(f'НОД({a[i]}, {b[i]}) = {result[i]}')
    print("---\n")

def test_binary_euclid(a: list, b: list):
    print("BINARY EUCLID ALGORITHM\n---")
    result = list(map(lambda a, b: binary_euclid(a, b), a, b))
    for i in range(0, len(a)):
        print(f'НОД({a[i]}, {b[i]}) = {result[i]}')
    print("---\n")

def test_extended_euclid(a: list, b: list):
    print("EXTENDED EUCLID ALGORITHM\n---")
    result = list(map(lambda a, b: extended_euclid(a, b), a, b))
    for i in range(0, len(a)):
        print(f'НОД({a[i]}, {b[i]}) = {a[i]} * ({result[i][1]}) +
         ↪  {b[i]} * ({result[i][2]}) = {result[i][0]}')
    print("---\n")

def test_extended_binary_euclid(a: list, b: list):
```

```
    print("EXTENDED BINARY EUCLID ALGORITHM\n---")
    result = list(map(lambda a, b: extended_binary_euclid(a, b), a, b))
    for i in range(0, len(a)):
        print(f'НОД({a[i]}, {b[i]}) = {a[i]} * ({result[i][1]}) + {b[i]} * ({result[i][2]}) = {result[i][0]}')
    print("---\n")
```

Данные тесты получают на вход списки чисел $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ и $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ и возврщают строки с результатом нахождения НОД(a_i, b_i) в качестве результата.

Для расширенных алгоритмов, мы также получаем линейные комбинации пар чисел для получения наибольшего общего делителя.

Для их вызова, реализуем функцию `main` следующим образом:

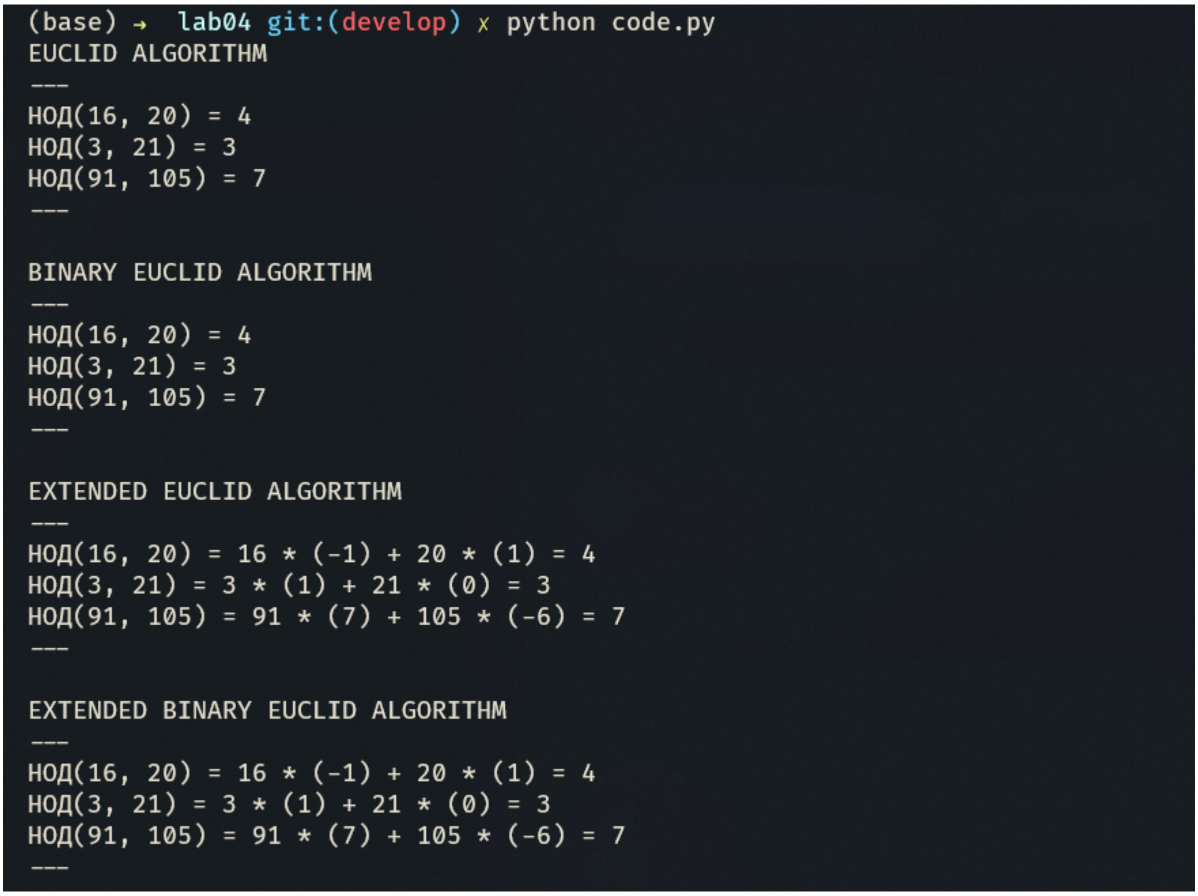
```
# --- Main ---

def main():
    a = [16, 3, 91]
    b = [20, 21, 105]

    test_euclid(a,b)
    test_binary_euclid(a,b)
    test_extended_euclid(a,b)
    test_extended_binary_euclid(a,b)
```

3.6 Результаты тестирования

Запустив наш программный код, получим результат, изображенный на рисунке 3.1.



```
(base) → lab04 git:(develop) ✗ python code.py
EUCLID ALGORITHM
---
НОД(16, 20) = 4
НОД(3, 21) = 3
НОД(91, 105) = 7
---

BINARY EUCLID ALGORITHM
---
НОД(16, 20) = 4
НОД(3, 21) = 3
НОД(91, 105) = 7
---

EXTENDED EUCLID ALGORITHM
---
НОД(16, 20) = 16 * (-1) + 20 * (1) = 4
НОД(3, 21) = 3 * (1) + 21 * (0) = 3
НОД(91, 105) = 91 * (7) + 105 * (-6) = 7
---

EXTENDED BINARY EUCLID ALGORITHM
---
НОД(16, 20) = 16 * (-1) + 20 * (1) = 4
НОД(3, 21) = 3 * (1) + 21 * (0) = 3
НОД(91, 105) = 91 * (7) + 105 * (-6) = 7
---
```

Рис. 3.1: Вывод результата тестирования алгоритмов нахождения НОД(a, b)

Явно получим вот такой результат:

```
EUCLID ALGORITHM

---

НОД(16, 20) = 4

НОД(3, 21) = 3

НОД(91, 105) = 7

---


BINARY EUCLID ALGORITHM

---

НОД(16, 20) = 4
```

```
НОД(3, 21) = 3
НОД(91, 105) = 7
---

EXTENDED EUCLID ALGORITHM
---
НОД(16, 20) = 16 * (-1) + 20 * (1) = 4
НОД(3, 21) = 3 * (1) + 21 * (0) = 3
НОД(91, 105) = 91 * (7) + 105 * (-6) = 7
---

EXTENDED BINARY EUCLID ALGORITHM
---
НОД(16, 20) = 16 * (-1) + 20 * (1) = 4
НОД(3, 21) = 3 * (1) + 21 * (0) = 3
НОД(91, 105) = 91 * (7) + 105 * (-6) = 7
---
```

Ручная проверка дает идентичные результаты, из чего можем сделать вывод, что алгоритмы реализованы корректно.

4 Выводы

В рамках выполненной лабораторной работы мы изучили и реализовали алгоритмы вычисления наибольшего общего делителя.

Список литературы