

Artificial Intelligence in Theorem Proving Homework 1

Witalis Domitrz witekdomitrz@gmail.com

Transformacja Tseytina

Przypomnienie

$$\begin{aligned}(a &\iff \neg b) \iff (b \vee a) \wedge (\neg a \vee \neg b) \\(a &\iff (b \wedge c)) \iff (\neg b \vee \neg c \vee a) \wedge (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \\(a &\iff (b \vee c)) \iff (\neg b \vee a) \wedge (\neg c \vee a) \wedge (\neg a \vee b \vee c) \\(a &\iff (b \implies c)) \iff (b \vee a) \wedge (\neg c \vee a) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c) \\(a &\iff (b \iff c)) \iff (\neg b \vee \neg c \vee a) \wedge (b \vee c \vee a) \wedge (\neg c \vee b \vee \neg a) \wedge (\neg b \vee c \vee \neg a)\end{aligned}$$

1.

$$(x \wedge \neg y) \iff (x \implies (y \wedge \neg z))$$

Wprowadzam nowe zmienne tak, że

- $a_1 \iff \neg y$
- $a_2 \iff (x \wedge a_1)$
- $a_3 \iff \neg z$
- $a_4 \iff (y \wedge a_3)$
- $a_5 \iff (x \implies a_4)$
- $a_6 \iff (a_2 \iff a_5)$

Teraz formuła z treści jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy spełnialna jest formuła:

$$\begin{aligned}&(a_1 \iff \neg y) \wedge \\&(a_2 \iff (x \wedge a_1)) \wedge \\&(a_3 \iff \neg z) \wedge \\&(a_4 \iff (y \wedge a_3)) \wedge \\&(a_5 \iff (x \implies a_4)) \wedge \\&(a_6 \iff (a_2 \iff a_5)) \wedge \\&a_6\end{aligned} \tag{1}$$

Co po przekształceniu jak z przypomnienia jest w CNF-ie:

$$\begin{aligned}
& (y \vee a_1) \wedge (\neg a_1 \vee \neg y) \wedge \\
& (\neg x \vee \neg a_1 \vee a_2) \wedge (\neg a_2 \vee x) \wedge (\neg a_2 \vee a_1) \wedge \\
& (z \vee a_3) \wedge (\neg a_3 \vee \neg z) \wedge \\
& (\neg y \vee \neg a_3 \vee a_4) \wedge (\neg a_4 \vee y) \wedge (\neg a_4 \vee a_3) \wedge \\
& (x \vee a_5) \wedge (\neg a_4 \vee a_5) \wedge (\neg a_5 \vee \neg x \vee a_4) \wedge \\
& (\neg a_2 \vee \neg a_5 \vee a_6) \wedge (a_2 \vee a_5 \vee a_6) \wedge (\neg a_5 \vee a_2 \vee \neg a_6) \wedge (\neg a_2 \vee a_5 \vee \neg a_6) \wedge \\
& a_6
\end{aligned} \tag{2}$$

2.

$$(y \wedge (x \iff \perp)) \iff (\neg x \vee y)$$

Wprowadzam nowe zmienne:

- $a_1 \iff (x \iff \perp)$
- $a_2 \iff (y \wedge a_1)$
- $a_3 \iff \neg x$
- $a_4 \iff (a_3 \vee y)$
- $a_5 \iff (a_2 \iff a_4)$

Teraz formuła z zadania jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy spełnialna jest formuła:

$$\begin{aligned}
& (a_1 \iff (x \iff \perp)) \wedge \\
& (a_2 \iff (y \wedge a_1)) \wedge \\
& (a_3 \iff \neg x) \wedge \\
& (a_4 \iff (a_3 \vee y)) \wedge \\
& (a_5 \iff (a_2 \iff a_4)) \wedge \\
& a_5
\end{aligned} \tag{3}$$

Co po przekształceniu jak z przypomnienia jest już prawie w CNF-ie:

$$\begin{aligned}
& (\neg x \vee \neg \perp \vee a_1) \wedge (x \vee \perp \vee a_1) \wedge (\neg \perp \vee x \vee \neg a_1) \wedge (\neg x \vee \perp \vee \neg a_1) \wedge \\
& (\neg y \vee \neg a_1 \vee a_2) \wedge (\neg a_2 \vee y) \wedge (\neg a_2 \vee a_1) \wedge \\
& (x \vee a_3) \wedge (\neg a_3 \vee \neg x) \wedge \\
& (\neg a_3 \vee a_4) \wedge (\neg y \vee a_4) \wedge (\neg a_4 \vee a_3 \vee y) \wedge \\
& (\neg a_2 \vee \neg a_4 \vee a_5) \wedge (a_2 \vee a_4 \vee a_5) \wedge (\neg a_4 \vee a_2 \vee \neg a_5) \wedge (\neg a_2 \vee a_4 \vee \neg a_5) \wedge \\
& a_5
\end{aligned} \tag{4}$$

A po wyeliminowaniu symbolu \perp i $\neg \perp$ jest w CNF-ie.

$$\begin{aligned}
& (x \vee a_1) \wedge (\neg x \vee \neg a_1) \wedge \\
& (\neg y \vee \neg a_1 \vee a_2) \wedge (\neg a_2 \vee y) \wedge (\neg a_2 \vee a_1) \wedge \\
& (x \vee a_3) \wedge (\neg a_3 \vee \neg x) \wedge \\
& (\neg a_3 \vee a_4) \wedge (\neg y \vee a_4) \wedge (\neg a_4 \vee a_3 \vee y) \wedge \\
& (\neg a_2 \vee \neg a_4 \vee a_5) \wedge (a_2 \vee a_4 \vee a_5) \wedge (\neg a_4 \vee a_2 \vee \neg a_5) \wedge (\neg a_2 \vee a_4 \vee \neg a_5) \wedge \\
& a_5
\end{aligned} \tag{5}$$

Warto zauważyć, że można by też wyeliminować \perp na początku (bo $(x \iff \perp) \iff \neg x$) i wtedy mamy

$$\begin{aligned}
& (a_1 \iff \neg x) \wedge \\
& (a_2 \iff (y \wedge a_1)) \wedge \\
& (a_4 \iff (a_1 \vee y)) \wedge \\
& (a_5 \iff (a_2 \iff a_4)) \wedge \\
& a_5
\end{aligned} \tag{6}$$

co się sprowadza do:

$$\begin{aligned}
& (x \vee a_1) \wedge (\neg x \vee \neg a_1) \wedge \\
& (\neg y \vee \neg a_1 \vee a_2) \wedge (\neg a_2 \vee y) \wedge (\neg a_2 \vee a_1) \wedge \\
& (\neg a_1 \vee a_4) \wedge (\neg y \vee a_4) \wedge (\neg a_4 \vee a_1 \vee y) \wedge \\
& (\neg a_2 \vee \neg a_4 \vee a_5) \wedge (a_2 \vee a_4 \vee a_5) \wedge (\neg a_4 \vee a_2 \vee \neg a_5) \wedge (\neg a_2 \vee a_4 \vee \neg a_5) \wedge \\
& a_5
\end{aligned} \tag{7}$$