Praca domowa z Teorii Informacji

Witalis Domitrz 393711

Oznaczenia

Oznaczam:

- zmienną wchodzącą do kanału przez X z dowma wartościami x_0 i x_1,
- zmienną wychodzącą z kanału przez Y z dowma wartościami y_0 i y_1,
- $p \coloneqq P(X = x_1)$

Obliczenia wstępne

- $P(X = x_0) = \bar{p} = 1 - p$,
- $P(Y = y_0) = \bar{p} + p/2 = 1 - p + p/2 = 1 - p/2$,
- $P(Y = y_1) = p/2$,
- $H(Y) = H(p/2)$
- $H(Y|X) = P(X = x_0)H(Y|X = x_0) + P(X = x_1)H(Y|X = x_1) = \bar{p}H(1) + pH(1/2) = \bar{p} * 0 + p * 1 = p$
- $I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(p/2) - p$.

Rozwiązanie części B

Wiemy, że dla $p = 1$ i dla $p = 0$ przepustowość kanału wynosi 0, co jest minimalną możliwą wartością, więc maksimum będzie miała tam, gdzie pochodna $\frac{dI(X;Y)}{dp}$ się zeruje.

$\frac{dI(X;Y)}{dp} = (H(p/2) - p)' = -\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{p/2}{1-p/2}\right) - 1 = -\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{p}{2-p}\right) - 1$

Więc $\frac{dI(X;Y)}{dp} = 0 \iff \log_2\left(\frac{2-p}{p}\right) = 2$, czyli dla $p = 2/5$.

Czyli rozkład zmiennej wejściowej realizujączy przepustowość to $(3/5, 2/5)$.

Rozwiązanie części A

Już wiemy, że przepustowość jest realizowana dla $p = 2/5$. Teraz wystarczy policzyć, że gdy $p = 2/5$, to

$H(Y) = H(1/5) = -4/5 \log_2(4/5) - 1/5 \log_2(1/5) = \log_2(5) - 8/5$, więc

$I(X;Y) = H(1/5) - 2/5 = \log_2(5) - 2$.

Czyli dany kanał ma przepustowość $\log_2(5) - 2 \approx 0.321928$.

Rozwiązanie części C

Protokół

Będziemy przesyłali bit po bicie:

- Jeśli mamy przesłać 0, to wysyłamy 0000.
- Jeśli mamy przesłać 1, to maksymalnie 4 razy próbujemy wysłać 1, to znaczy:
  - wysyłamy 1,
    * jeśli przesłało się 1, to już koniec.
    * jeśli przesłało się 0, to wracamy do punktu "wysyłamy 1". Tą próbę poprawienia błędu wykonujemy maksymalnie 4 razy.

Teraz odkodowywujemy w taki sposób, że dostajemy ciąg 0 i 1, a przesłane poszczególne fragmenty tworzą kod bezprefiksowy $K = \{0000, 1, 01, 001, 0001\}$.

Wiadomość odczytujemy bardzo prosto. 0000 zamieniamy na 0, a 1, 01, 001 i 0001 zamieniamy na 1.

Do liczenia prawdopodobieństwa błędu i BitRate przyjmuję jednostajny rozdkład danych wejściowych (dla rozkadu wyliczonego w części B też działa).

Prawdopodobieństwo błędu

Błąd w naszym protokole pojawia się wtedy i tylko wtedy, gdy będziemy próbowali przesłać 1, ale 4 razy z rzędu prześlemy 0. Wtedy, zgodnie z działaniem protokołu, nie próbujemy dalej przesyłać 1, tylko akceptujemy to, że wystąpił błąd. Taka sytuacja zdarza się z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2} * \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{32} < \frac{1}{20} = 5\%$.

BitRate

Średnia długość wysyłanego słowa na literkę to $\frac{1}{2}*4+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}*1+\frac{1}{4}*2+\frac{1}{8}*3+\frac{1}{8}*4\right) = 2+\frac{1}{2}*\left(1+\frac{7}{8}\right) = 2+\frac{15}{16}$.

Więc bitrate wychodzi $\frac{1}{2+\frac{15}{16}} > \frac{19}{20} * (\log_2(5)+2) = 95\% * (\log_2(5)+2)$.

Czyli ten protokół spełnia warunki zadania.