

中图分类号:

学校代码: 10055

UDC:

密级: 公开

南开大学
博士 学位 论文

结构化环境下多模态特征无缝融合的
移动机器人同时定位与建图

Simultaneous Localization and Mapping Based on Seamless
Fusion of Heterogeneous Multi-Modal Features

论文作者 孙沁璇

指导教师 苑晶 教授

申请学位 工学博士

培养单位 人工智能学院

学科专业 控制科学与工程

研究方向 移动机器人同时定位与建图

答辩委员会主席 刘作军 教授

评 阅 人 匿名评审

南开大学研究生院

二〇二一年五月

南开大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下进行研究工作所取得的研究成果。除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人创作的、已公开发表或者没有公开发表的作品的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本学位论文原创性声明的法律责任由本人承担。

学位论文作者签名： 孙云璇 2021 年 6 月 7 日

非公开学位论文标注说明

(本页表中填写内容须打印)

根据南开大学有关规定，非公开学位论文须经指导教师同意、作者本人申请和相关部门批准方能标注。未经批准的均为公开学位论文，公开学位论文本说明为空白。

论文题目								
申请密级	<input type="checkbox"/> 限制 (<2 年) <input type="checkbox"/> 秘密 (<10 年) <input type="checkbox"/> 机密 (<20 年)							
保密期限	20	年	月	日至	20	年	月	日
审批表编号		批准日期		20	年	月	日	

南开大学学位评定委员会办公室盖章 (有效)

注：限制 ★2 年 (可少于 2 年); 秘密 ★10 年 (可少于 10 年); 机密 ★20 年 (可少于 20 年)

南开大学学位论文使用授权书

本人完全了解《南开大学关于研究生学位论文收藏和利用管理办法》关于南开大学(简称“学校”)研究生学位论文收藏和利用的管理规定,同意向南开大学提交本人的学位论文电子版及相应的纸质本。

本人了解南开大学拥有在《中华人民共和国著作权法》规定范围内的学位论文使用权,同意在以下几方面向学校授权。即:

1. 学校将学位论文编入《南开大学博硕士学位论文全文数据库》,并作为资料在学校图书馆等场所提供阅览,在校园网上提供论文目录检索、文摘及前16页的浏览等信息服务;
2. 学校可以采用影印、缩印或其他复制手段保存学位论文;学校根据规定向教育部指定的收藏和存档单位提交学位论文;
3. 非公开学位论文在解密后的使用权同公开论文。

本人承诺:本人的学位论文是在南开大学学习期间创作完成的作品,并已通过论文答辩;提交的学位论文电子版与纸质本论文的内容一致,如因不同造成不良后果由本人自负。

本人签署本授权书一份(此授权书为论文中一页),交图书馆留存。

学位论文作者暨授权人(亲笔)签字: 孙沁璇

2021年6月7日

南开大学研究生学位论文作者信息

论文题目	结构化环境下多模态特征无缝融合的				
姓名	孙沁璇	学号	1120160125	答辩日期	
论文类别	<input checked="" type="checkbox"/> 学历硕士 <input type="checkbox"/> 专业学位硕士 <input type="checkbox"/> 同等学力硕士 <input type="checkbox"/> 划勾选择				
学院(单位)	人工智能学院		学科/专业(专业学位)名称	控制科学与工程	
联系电话	18698467106		电子邮箱	sunqinxuan@outlook.com	
通讯地址(邮编):	天津市津南区同砚路38号(300350)				
非公开论文编号			备注		

注:本授权书适用我校授予的所有博士、硕士的学位论文。如已批准为非公开学位论文,须向图书馆提供批准通过的《南开大学研究生申请非公开学位论文审批表》复印件和“非公开学位论文标注说明”页原件。

本文研究工作得到以下项目资助

国家自然科学基金面上项目

项目名称：多重异构源的空地协作紧耦合环境感知与建图

项目编号：62073178

执行期限：2021.01-2024.12

国家自然科学基金面上项目

项目名称：以 RGB-D 图像序列为单位的移动机器人场景识别与环境建图

项目编号：61573196

执行期限：2016.01-2019.12

天津市杰出青年科学基金项目

项目名称：多传感信息紧耦合的异构多机器人协作的环境感知

项目编号：20JCJQJC00140

执行期限：2020.10-2024.09

山东省自然科学基金重大基础研究项目

项目名称：面向康养服务机器人的_{人-机-环境}共融基础理论与关键技术

项目编号：ZR2019ZD07

执行期限：2019.12-2024.12

天津市自然科学基金面上项目

项目名称：视觉-惯导融合的无人机运动目标识别与跟踪

项目编号：20JCYBJC01470

执行期限：2020.04-2023.03

天津市自然科学基金面上项目

项目名称：室内环境下基于 WiFi 无线信号场的移动机器人定位与导航

项目编号：15JCYBJC18800

执行期限：2015.04-2018.03

摘要

同时定位与建图 (Simultaneous Localization and Mapping, SLAM) 是通过对传感器信息的处理，在未知环境中对移动机器人进行定位，并建立环境地图的过程。近年来，随着移动机器人在家庭服务、自动驾驶等领域的应用，SLAM 技术也随之得到广泛的研究和发展。基于环境特征的机器人位姿求解与环境建模，是 SLAM 技术的主要实现途径。面向复杂多样的作业场景，不同种类的特征有着各自的优势和不足。特别是在结构化环境下，存在点、线、面等多模态特征，如何有效地组织、利用和融合这些特征，提升移动机器人对未知场景的适应性，逐渐成为 SLAM 领域的研究热点。

本文针对结构化环境下多模态特征无缝融合的移动机器人同时定位与建图问题进行研究，首先提出基于多假设框架的多模态特征混合关联算法，并针对多种模态特征对机器人位姿求解的约束进行分析，在此基础上，提出基于多模态特征无缝融合的机器人位姿估计算法。本文具体研究工作如下：

(1) 对 SLAM 中的多模态特征联合关联问题进行研究，提出基于多假设框架的面-线多模态特征混合关联方法，实现平面和直线两类高层几何特征的联合关联，基于此完成传感器位姿变换的解算。具体而言，设计基于多假设框架的假设树 (Interpretation Tree, IT) 结构及其构建方法，根据结点间一致性原则生成假设路径，对于每一条假设路径，增量式维护并更新一致变换模型 (Consistent Transformation Model, CTM)。当 IT 结构构建结束时，即可同时获得特征关联问题以及位姿解算问题的封闭解。接着，提出多模态特征联合优化方法，对传感器位姿的求解结果以及特征参数进行进一步优化，并针对不同种类的几何特征，使用有针对性的参数化方法完成特征参数的更新。在联合优化的过程中，考虑特征提取及拟合过程中的参数不确定性，对各类特征在目标函数中的贡献进行自适应设计，有效降低参数不确定性的影响。公开数据集上的大量实验结果证明了所提方法的准确性和鲁棒性。

(2) 对传感器位姿求解问题的退化情况与特征空间分布的对应关系进行研究，并提出结构化环境下基于面-线多模态特征自适应融合的视觉里程计 (Plane-Line-based Visual Odometry, PLVO)。首先，提出平面-直线混合关联图

摘要

(Plane-Line Hybrid Association Graph, PLHAG) 结构，充分考虑平面和平面、平面和直线之间的几何关系，全面刻画多模态几何特征的空间分布特性。然后，提出基于平面和直线主辅相济、自适应融合的传感器位姿估计方法。具体而言，基于平面特征空间分布与传感器位姿求解退化之间的对应关系，并根据直线特征的空间分布以及直线与平面特征之间的几何关系，提出直线特征自适应加权方法，利用直线特征对平面无法约束的位姿自由度进行补充，从而实现两类特征的融合，解决了传感器位姿求解时的退化问题。最后，通过公开数据集上的定量实验以及真实室内环境下的机器人本体实验，验证了所提方法的有效性。

(3) 针对基于面-线-点多模态特征无缝融合的 SLAM 问题进行研究。首先，提出平面以及直线特征参数的概率拟合算法，通过对传感器观测误差的建模与传递，降低了数据点观测噪声的影响，使得拟合的平面和直线特征参数对观测噪声具有更强的鲁棒性。接着，针对多模态特征对传感器位姿求解问题的约束情况进行严格地定量分析，在此基础上，提出基于面-线-点多模态特征无缝融合的 SLAM 方法，在充分利用环境结构信息的基础上，进一步增强了对视觉纹理信息的开发和利用，与此同时，提高了位姿求解问题的适定性 (well-posedness)。通过公开数据集上的定量实验对比，证明了多模态特征无缝融合方法的准确性和有效性。

关键词： 移动机器人；同时定位与建图；高层特征；多模态特征融合；多假设框架；自适应加权

Abstract

Simultaneous localization and mapping (SLAM) consists of the estimation of the robot pose as well as the map of the environment by processing the measurement data captured by on-board sensors. Nowadays, with an increasing demand for the application in domestic services, autonomous driving and so on, the SLAM techniques have gained rapid development. It is of great importance in a SLAM system to estimate the poses of the sensor and build a model of the scene using the features extracted from the environment. Different types of features have their own strengths and weaknesses in various scenes. Specifically, there exist multi-modal features such as points, lines and planes in the structured environments. Hence, to increase the effectiveness of the robot system in unknown scenes, the fusion of multiple types of features has become a hot topic in SLAM field.

This thesis focuses on the simultaneous localization and map building based on the seamless fusion of heterogeneous multi-modal features. First, a multi-modal feature association algorithm is proposed based on a multi-hypothesis framework. Then, the constraints provided by different types of features on the robot motion estimation are quantitatively analyzed. Based on the analysis results, a seamless fusion method is proposed to calculate the poses of the robot fusing heterogeneous multi-modal features. In this thesis, the major contributions are summarized in the following.

(1) The problem of multi-modal feature association is addressed. A multi-hypothesis framework-based feature matching algorithm is proposed to simultaneously associate different types of features (planes and lines) and further estimate the pose of the sensor. The multi-hypothesis framework is achieved by constructing an interpretation tree (IT) structure. Specifically, an inter-node consistency is proposed for generation of hypotheses and a consistent transformation model (CTM) for each hypothesis is explicitly expressed and incrementally updated. When the IT is constructed, a closed-form solution to the feature association and

Abstract

the pose estimation can be obtained. Then, a multi-modal feature joint optimization method is introduced to further refine the pose estimate and parameters of features. During the optimization, different types of geometric features are appropriately parameterized and the uncertainties arising from feature extraction are derived and used to balance the contributions of multiple types of features in the cost function. Extensive experiments are executed on public datasets and the results demonstrate that the proposed method can achieve higher accuracy and stronger robustness.

(2) A plane-line-based RGB-D visual odometry (PLVO) is proposed to address the correspondences between the degenerate cases in the pose estimation and the spatial configurations of features. First, the plane-line hybrid association graph (PLHAG) is proposed to describe the spatial configurations of different features as well as the geometric relationships between them. Then, the pose of the sensor is estimated based on the adaptive fusion of planes and lines. Specifically, an adaptive weighting algorithm is proposed based on correspondences between the degenerate cases and the spatial configurations of features, considering the geometric relationships between plane and line features. For the degrees of freedom (DoFs) of the pose that cannot be constrained by planes, the line features are supplementarily used to obtain the full 6DoF pose estimation of the sensor and solve the degenerate problem. Various experiments on public benchmarks as well as in real-world environments demonstrate the efficiency of the proposed method.

(3) A SLAM system is achieved based on a seamless fusion of heterogeneous multi-modal features (plane-line-point). First, a probabilistic fitting algorithm for the geometric feature is proposed to compute the parameters of planes and lines. By exploiting the error model of the depth sensor, the proposed probabilistic fitting is adaptive to various measurement noises corresponding to different depth measurements. As a result, the estimated parameters are more accurate and robust to the points with large uncertainties. Then, a constraint analysis is performed to quantitatively measure the constraints provided by different types of features on the pose estimation of a sensor. Using the results of the constraint analysis, a plane-line-point fusion-based SLAM method is proposed. Through

Abstract

the fusion of multi-modal features, both the structure and texture information is fully exploited and the problem of pose estimation remains well-posed in all circumstances. In addition, the comparison results of extensive experiments on public datasets demonstrate that the SLAM system seamlessly fusing multi-modal features can achieve high accuracy and robustness.

Key Words: Mobile robot; simultaneous localization and mapping; high-level feature; multi-modal feature fusion; multi-hypothesis framework; adaptive weighting

目录

摘要	I
Abstract	III
第一章 绪论	1
第一节 引言	1
第二节 研究背景	1
1.2.1 多模态特征融合的 SLAM 研究现状	2
1.2.2 多模态特征融合的 SLAM 研究现存主要问题	3
第三节 本文的研究内容	4
第四节 本文的结构安排	5
第二章 相关工作概述	9
第一节 引言	9
第二节 多模态特征的联合关联	9
第三节 基于多模态特征的传感器位姿解算	11
第四节 特征参数化方法	13
第三章 基于多假设框架的面-线多模态特征混合关联方法	17
第一节 引言	17
第二节 特征参数的最小二乘拟合估计	18
3.2.1 平面特征参数的最小二乘拟合估计	18
3.2.2 直线特征参数的最小二乘拟合估计	19
第三节 基于假设树的面-线特征混合关联	20
3.3.1 假设树结构	20
3.3.2 节点间一致性	21
3.3.3 一致变换模型	36
第四节 特征参数与传感器位姿的联合优化	40
3.4.1 平面参数化方法	40
3.4.2 直线参数化方法	41

3.4.3 多模态特征的联合优化	42
第五节 实验结果	42
3.5.1 实验设置	43
3.5.2 特征关联实验结果与分析	45
3.5.3 帧间配准实验结果与分析	48
3.5.4 视觉里程计实验结果与分析	50
3.5.5 SLAM 实验结果与分析	51
第六节 本章小结	53
第四章 基于面-线多模态特征自适应融合的视觉里程计	55
第一节 引言	55
第二节 平面-直线混合关联图	56
第三节 面-线多模态特征的自适应融合	61
4.3.1 6DoF 约束情况	62
4.3.2 5DoF 约束情况	63
4.3.3 3DoF 约束情况	64
第四节 实验结果	69
4.4.1 平面-直线混合关联图实验与分析	69
4.4.2 公开数据集视觉里程计实验结果与分析	70
4.4.3 移动机器人真实环境视觉里程计实验	75
第五节 本章小结	76
第五章 基于面-线-点多模态特征双层自适应融合的 SLAM	77
第一节 引言	77
第二节 特征参数的概率拟合算法	78
5.2.1 平面特征参数的概率拟合算法	78
5.2.2 直线特征参数的概率拟合算法	81
第三节 多模态特征对位姿求解的约束分析	83
5.3.1 平面特征对位姿求解的约束分析	83
5.3.2 直线特征对位姿求解的约束分析	85
第四节 面-线-点多模态特征的双层自适应融合	87
5.4.1 直线特征自适应权值的计算	87
5.4.2 点特征自适应权值的计算	88

目录

第五节 实验结果	90
5.5.1 特征参数拟合的实验结果与分析	90
5.5.2 视觉里程计实验结果与分析	92
5.5.3 SLAM 实验结果与分析	95
5.5.4 建图质量评价与分析	97
5.5.5 移动机器人真实环境视觉里程计实验	103
第六节 本章小结	104
第六章 总结与展望	107
第一节 本文工作总结	107
第二节 未来工作展望	108
附录 A: 函数 $\mathcal{S}'' = \text{Fuse}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ 具体流程	109
附录 B: 边缘点协方差 \mathbf{C}_{pk} 计算	115
参考文献	117
致谢	127
个人简介	129
在学期间科研成果	131

第一章 绪论

第一节 引言

同时定位与建图 (Simultaneous Localization and Mapping, SLAM)^[1-3] 和视觉里程计 (Visual Odometry, VO)^[4-6] 在移动机器人环境探索^[7, 8] 与导航^[9, 10] 等任务中发挥着越来越重要的作用。近年来，随着各领域科学技术的迅速发展，移动机器人面临着越来越复杂多样的探索任务和作业环境。对于不同的环境和场景，不同类型的特征有着各自的优势和不足。例如，多纹理且光照稳定的场景有利于视觉特征的稳定提取以及视觉特征描述符的计算^[11, 12]。对于低纹理、低光照或者光照剧烈变化的场景，视觉特征的使用受到很大的限制。相比而言，高层几何特征，如平面^[13]、曲面^[14]、直线^[15]、线段^[16] 等，对环境纹理缺失以及光照变化有着更强的鲁棒性^[17, 18]。另外，高层几何特征是对原始传感数据的高层参数化表示，因而能够在尽可能减小数据存储量的前提下，保留环境的结构信息，为机器人的自主导航及场景理解提供导航地图和语义描述。因此，多类特征的共同使用，对于提升机器人在不同作业场景中的适应性和鲁棒性，甚至进一步拓展机器人的任务类型，具有至关重要的作用。而对多特征融合问题的研究，则是为了在充分发挥多种特征各自优势的同时，尽量减少甚至避免单一特征的缺陷和不足，完成不同模态特征在 SLAM 或 VO 系统中的无缝融合。相比于使用单特征的 SLAM 或 VO 算法，基于多模态特征的系统框架能够有效融合和利用不同种类特征各自的优势，进一步提高系统的准确性、稳定性和适应性。

第二节 研究背景

在移动机器人面向日益多样化的任务和场景时，不同模态的特征有着各自的优势和不足，因此，多模态特征的融合逐渐成为 SLAM 领域的研究热点之一。本节对多模态特征融合的 SLAM 的研究现状进行简要概述，并指出目前存在的主要问题，为本文后续的研究工作指出背景和方向。

1.2.1 多模态特征融合的 SLAM 研究现状

对基于多模态特征的 SLAM 系统而言，如何在数据关联以及传感器位姿估计阶段实现不同特征的无缝融合，一直是多特征 SLAM 问题的研究难点。在特征关联阶段，目前多数 SLAM 和 VO 系统都分别对各类特征进行关联，没有考虑多特征共同的空间分布情况以及不同特征之间的几何关系对特征联合关联问题的影响。对于同时使用点特征和线特征实现 SLAM 或 VO 的方法，通常利用基于视觉特征描述子的技术，分别对点特征和线特征进行关联。在文献 [19–22] 中，使用 ORB (Oriented Fast and Rotated Brief) 特征描述子对视觉角点特征进行匹配，而对于直线特征，则使用 LBD (Line Band Descriptor) 特征描述子进行匹配，再根据直线方向和长度等几何信息对不正确的匹配结果进行筛选。在文献 [23] 和 [24] 中，使用 KLT (Kanade-Lucas-Tomasi) 光流跟踪方法对角点特征进行关联，再利用随机采样一致性 (RANdom SAmple Consensus, RANSAC) 算法，并考虑对极几何约束，对已关联点特征进行外点的移除。而对于直线特征，同样使用 LBD 特征描述子完成特征的匹配。除了点特征和线特征的共同使用之外，很多 SLAM 和 VO 系统选择使用点特征和平面特征进行里程计的计算。在文献 [25] 和 [26] 中，使用 ORB 特征描述子对角点特征进行关联，对于平面特征，基于平面几何距离进行最近邻搜索，寻找平面特征的匹配关系。文献 [27] 使用 SURF (Speeded Up Robust Feature) 描述子对角点特征进行关联，并采用基于平面几何距离的最近邻搜索算法对平面特征进行关联，再借助 RANSAC 算法排除不正确的关联结果。在文献 [28] 中，使用点、线、面三种特征完成 VO 的计算。在进行特征关联时，对于角点特征和线特征，分别通过 ORB 和 LBD 特征描述子进行关联，并且使用几何约束对不正确的匹配结果进行筛选。对于平面特征，使用基于几何距离约束的最近邻搜索进行关联，再利用平面参数之间的距离进行不正确匹配结果的移除。综上所述，在现有基于多特征的 SLAM 及 VO 系统中，通常对每种特征分别进行关联，未考虑不同特征之间的约束关系，以及联合关联对传感器位姿求解的影响，因而在特征关联阶段并没有实现真正的无缝融合。

在传感器位姿估计阶段，多数基于多特征的 SLAM 或 VO 系统中，使用多特征联合优化的方法对传感器位姿进行计算，同时对特征参数进行估计，完成特征地图的构建^[19–21, 23–25, 28–32]。在联合优化函数中，针对不同类型的特征，分别定义各自的重投影误差项，在这个过程中，通常不考虑不同类型特征对传感

器位姿估计的约束情况，以及特征之间的约束关系。在这种模式下，只是做到了多模态特征的“共同使用”，而非“无缝融合”。目前，在里程计计算中对多特征无缝融合问题的研究思路，主要集中在三个方面。其一是考虑不同特征之间的几何约束在多特征联合优化中的作用，比如在文献 [33] 中，特征联合优化目标函数的误差项包含点特征重投影误差、线特征重投影误差、点到平面距离、直线与平面之间距离及方向，考虑了特征之间的共面约束，从而利用了环境结构信息，获得了更加准确的 3D 点与空间直线参数估计结果。而在 [26] 中，对点特征中的共面点进行提取，在位姿估计中施加点到平面的约束，同样考虑了环境结构信息。其二是对不同类型特征在优化目标函数中的权值进行调节，进而控制各个特征对位姿求解的贡献。在文献 [22] 中，将观测噪声通过传感器模型进行误差传递，得到特征参数的协方差，通过协方差对优化目标函数中各个误差项进行加权，进而减小传感器观测噪声以及特征参数拟合误差对里程计精度的影响。其三是考虑不同类型特征对传感器位姿求解的约束情况。使用几何特征对传感器帧间相对位姿进行估计时，经常会遇到特征提供约束不足而导致的位姿求解退化的情况。以平面特征为例，三对非平行平面的法向量可以张成三维空间，进而得到位姿求解问题的唯一解。而当平面法向量共面或共线时，基于平面特征参数的传感器位姿求解问题存在退化情况，无法得到唯一解。文献 [34] 对无法得到唯一解的情况进行讨论，并且当平面特征数量不足时，使用点特征消除运动估计中的退化情况。文献 [27] 在进行帧间相对位姿的估计时，首先尝试使用三对匹配平面进行位姿的估计，当出现约束不足的情况时，减少平面的数量，依次尝试使用两个平面与一个点、一个平面和三个点进行求解。当平面特征不能为运动估计提供足够约束时，单独使用点特征进行相机位姿的求解。

1.2.2 多模态特征融合的 SLAM 研究现存主要问题

目前，视觉 SLAM 系统中的多特征融合研究已取得一定的进展和成果，但就其研究和应用而言，尚存在一些亟待解决的问题，概括如下：

- (1) 多模态特征联合关联阶段缺少无缝融合的问题。针对多模态特征融合的 SLAM 系统中的数据关联，现有方法中往往采用多类特征分别进行关联的方式^[19, 20, 27]，不考虑数据关联过程中不同特征之间的约束关系，这带来两个问题，一是降低了数据关联的准确率，二是无法保证已关联特征是否可以被统一的位姿变换配准到同一坐标系，进而影响到位姿求解的精确度，甚至会使得位姿求解问题无法收敛到正确的结果^[35]。

- (2) 缺少不同模态特征对传感器位姿求解的约束分析。在使用多种特征进行视觉里程计求解时，对不同特征在位姿空间各个方向上所提供约束进行严格的定量描述，是真正实现多模态特征无缝融合的基础^[36–38]。目前很多基于多特征的 SLAM 研究对相机位姿求解的退化情况进行了分析和讨论，并且利用多特征的融合解决了退化问题^[34, 39, 40]。这种研究思路在一定程度上发挥了多特征融合的优势，但是在很多情况下仍无法避免位姿估计中的病态解问题，没有从理论上提高求解结果的适定性。
- (3) 多模态特征联合优化中缺少无缝融合的问题。现有研究中，多数 SLAM 或 VO 系统都通过在优化目标函数中加入不同类型特征所对应的误差项，实现多特征在联合优化中的融合^[28, 30–32]。对于不同特征为位姿求解问题所提供约束的考虑，仅限于使用多种特征避免退化情况的出现^[27, 34]，而关于如何通过对约束情况的分析调整并控制不同模态特征在联合优化中的贡献，目前尚未在相关研究中被分析和讨论。

第三节 本文的研究内容

本文针对多模态特征无缝融合的 SLAM 问题进行研究。首先，提出面-线多模态特征混合关联方法，使用多假设框架，同时得到多模态特征联合关联问题以及传感器位姿解算问题的封闭解。然后，提出基于面-线多模态特征自适应融合的视觉里程计算法，考虑位姿求解退化情况与特征空间分布之间的关联性，实现面-线特征主辅相济的自适应融合框架。最后，提出基于面-线-点多模态特征双层自适应融合的 SLAM 算法，深入分析不同模态的特征对机器人位姿估计的约束，进一步发挥多模态特征的互补性优势。本文组织框架如图1.1所示，具体研究内容包括：

- (1) 针对多模态特征无缝融合的 SLAM 中的特征联合关联问题，提出基于多假设框架的面-线多模态特征混合关联方法，考虑不同种类特征之间的空间几何关系，使用假设树 (Interpretation Tree, IT) 结构对特征关联问题的解空间进行有效地搜索。具体而言，提出 IT 结构的增量式构建算法，基于节点间一致性原则生成假设路径，针对每一条假设路径，对一致变换模型 (Consistent Transformation Model, CTM) 进行增量式更新。在 IT 结构构建完成时，即可同时获得特征关联问题以及位姿解算问题的封闭解。正确的数据关联结果是 SLAM 系统性能的前提和保障，而如何对特征进行参数化，

也对定位和建图结果有着很大的影响。因此，特征的联合关联以及特征参数化方法的选择，是 SLAM 系统中多特征融合的基础。在本文提出的多特征联合关联方法中，对特征空间分布及特征间几何关系的考虑，也为后文研究中视觉里程计的计算以及基于特征约束分析的无缝融合算法提供了前提和基础。

- (2) 针对多模态特征无缝融合的 SLAM 中的传感器位姿解算问题，提出面-线多模态特征自适应融合算法，对传感器位姿求解退化情况与特征空间分布之间的关联性进行研究，解决了传感器位姿求解时的退化问题。具体而言，根据多特征的空间分布情况以及特征之间的几何关系，对目标函数中的权值进行自适应计算，调节不同特征在目标函数优化中的贡献，完成面-线多模态特征的自适应融合。目前为止，本文首次在特征空间分布与位姿求解退化的关联性研究的基础上，对面-线多模态特征进行自适应融合，进而完成视觉里程计的计算，为多模态特征融合的 SLAM 研究提供了新的思路和方向。
- (3) 针对面-线多模态特征自适应融合中缺乏对环境纹理信息的描述的问题，提出基于面-线-点多模态特征双层自适应融合的 SLAM 算法。具体而言，在解决了退化问题的基础上，为了进一步提高位姿求解问题的适定性，针对多模态特征对传感器位姿求解的约束情况，进行定量分析与深入研究，并通过基于约束分析的双层自适应加权算法，完成面-线-点多模态特征的无缝融合。相比于面-线特征自适应融合算法，面-线-点双层自适应融合框架通过视觉点特征的加入，增强了对环境纹理信息的开发和利用，考虑到特征的空间分布以及位姿求解退化情况，并且进一步融入了特征对传感器位姿求解的约束分析结果，充分发挥多模态特征的互补性优势，使得传感器位姿估计结果具有更高的准确性、稳定性和鲁棒性。

第四节 本文的结构安排

本文内容共分为六章，各章节内容与结构安排如下：

第一章 绪论，对机器人 SLAM 系统中多模态特征融合问题的研究背景及现状进行简要介绍，并提出本文的研究内容以及结构安排。

第二章 相关工作概述，主要对本文研究内容所涉及的已有工作进行介绍，其中包括多模态特征的联合关联，基于多模态特征的传感器位姿解算，以及特征参数化问题，为本文研究奠定基础。

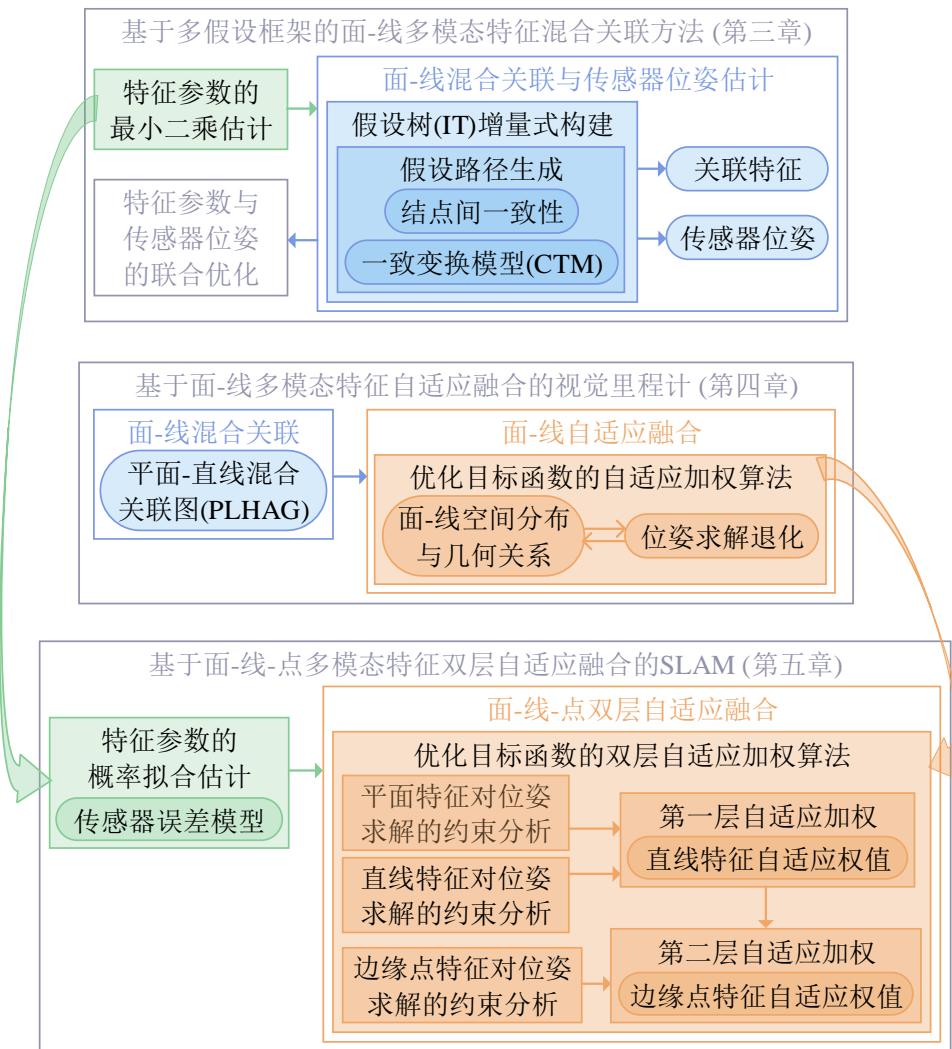


图 1.1 本文组织框架示意图

第三章 基于多假设框架的多模态特征混合关联方法，针对多模态特征联合关联问题进行深入研究，使用 IT 结构对特征关联问题的解空间进行表示，并通过对 IT 结构进行有效地搜索，完成多模态特征的混合关联，同时对传感器位姿进行解算。

第四章 基于面-线多模态特征自适应融合的视觉里程计，对传感器位姿求解退化情况与特征空间分布之间的关联性进行研究，提出面-线多模态特征的自适应融合算法，在主辅相济的融合框架中，发挥每种特征的优势，解决了位姿解算中的退化问题。

第五章 基于面-线-点多模态双层自适应融合的 SLAM，针对多种模态

特征对传感器位姿求解问题的约束进行定量地分析和研究，基于约束分析结果，提出面-线-点多模态特征的双层自适应融合框架，提高了位姿求解问题的适定性(well-posedness)，使得求解结果具有更高的准确性、稳定性和鲁棒性。

第六章 总结与展望，对本文的工作进行总结，并对下一步的研究工作进行展望。

第二章 相关工作概述

第一节 引言

SLAM 和 VO 都是机器人领域中的重要技术。在现有 SLAM 和 VO 系统中，视觉角点特征得到了广泛应用，并且实现了很好的系统性能^[11, 41]。然而，在低纹理环境中，视觉角点特征往往无法被大量及稳定地提取，导致仅仅使用视觉角点作为特征的 SLAM 和 VO 系统在这样的环境中无法获得准确的定位和建图效果^[20, 42]。近年来，多模态特征的结合在 SLAM 和 VO 研究中得到了越来越广泛的关注^[19, 20, 28]，高层几何特征的加入使得 SLAM 和 VO 系统对于低纹理环境以及光照变化有了更强的鲁棒性。另外，结构化环境多由规则物体组成，易于提取高层几何特征，如平面特征、直线特征等^[20, 21, 27]。与视觉角点特征相比，高层几何特征的数量往往较少^[40]，并且对于光照和视角变化都具有更高的鲁棒性^[21]。此外，高层几何特征还能够更好地描述场景的几何结构，并提供环境的高层语义信息，进而为机器人导航^[43, 44] 和物体识别^[45, 46] 提供了前提。

第二节 多模态特征的联合关联

特征关联是移动机器人 SLAM 及 VO 中的一个重要问题^[47]，正确的特征关联结果是保证机器人定位精度以及环境地图构建的基础。在基于多模态特征融合的 SLAM 系统中，常用的特征关联方法主要分为两类，一类是基于最近邻搜索算法的特征关联^[17, 39, 42]，另一类是基于 RANSAC 算法的特征关联^[27, 40, 48]。

在基于最近邻搜索算法的特征关联中，通常针对不同类型的特征分别进行关联，通过在特征空间中进行最近邻搜索，得到每个特征的最佳匹配结果。对于易于提取视觉描述子的特征，如角点特征、直线特征等，基于视觉描述子的最近邻搜索方法以其方便计算、易于实现等特点被广泛使用。目前 SLAM 和 VO 系统中最常用的角度特征和直线特征分别为 ORB 特征描述子^[49] 和 LBD 特征描述子^[50]，这些特征描述子在基于多特征融合的关联方法中也都有广泛应用^[19-22]。而对于不易计算视觉描述子且数量相对较少的特征，如平面特征，通

常使用基于几何距离的最近邻搜索算法。在文献 [17], [42] 和 [51] 中, 使用平面法向量之间的夹角、平面截距差以及平面之间重合区域定义平面特征之间的几何距离, 然后, 对所有可能的候选特征匹配对进行遍历搜索, 得到最终的特征关联结果。当传感器的帧间运动相对较小时, 基于几何距离的特征关联方法可以获得比较好的结果。然而, 当传感器运动较快, 即帧间位姿变化较快时, 基于几何距离的方法则很容易得到不正确的关联结果。在用最近邻搜索算法解决多模态特征关联问题时, 通常采用对每一类特征分别进行关联的方式, 未考虑特征之间的约束, 以及被关联的特征能否被统一的传感器变换配准到同一坐标系。由于关联的特征通常会同时参与传感器位姿求解, 所以, 如果存在错误关联, 会对位姿解算结果产生非常大的影响。

在使用 RANSAC 算法进行多特征关联时, 首先利用随机采样得到的匹配特征计算变换模型, 然后遍历所有特征找到满足所求变换模型的匹配结果, 迭代以上过程直到获得能够配准足够数量特征的变换模型。在文献 [27] 和 [40] 中, 使用 RANSAC 算法对平面特征和点特征进行关联。文献 [48] 从图像中提取直线特征并使用 RANSAC 算法进行关联以及传感器位姿的估计, 并利用非线性优化算法对位姿估计进行进一步的优化。基于 RANSAC 算法的特征关联方法可以保证被关联特征能够被统一的位姿变换配准到同一坐标系, 然而, RANSAC 算法有以下三方面的不足:

1. RANSAC 算法是一个迭代过程, 因此运行时间以及收敛情况受到外部因素的极大影响, 例如, 阈值、迭代次数、满足模型的内点在全部样本中比例, 等等。
2. 在每一次迭代中, 计算传感器变换模型所使用的特征匹配对是随机采样得到的, 因此, 如果满足错误的变换模型的匹配特征数量足够多, 使得迭代过程终止, 则算法会得到完全错误的关联结果^{[52][53]}。
3. 每次迭代都会重新进行随机采样并计算变换模型, 之前迭代过程中的信息完全被舍弃, 造成了严重的信息冗余和计算资源浪费。

针对上述问题, 本文第三章中对多模态特征的联合关联问题进行研究, 并提出基于多假设框架的多模态特征混合关联算法, 对结构化环境中最常见的平面和直线两类特征进行统一关联, 同时, 解算传感器位姿变换, 并保证特征关联结果与传感器位姿变换的一致性。

在本文的多模态特征融合研究中, 多特征混合关联方法是基于 IT 结构完成

的。完整的 IT 结构张成了数据关联问题的全部解空间^[54]，而寻找特征匹配关系的过程可以转化成 IT 结构中最大假设路径搜索问题。在文献 [55] 和 [56] 中，针对基于 IT 结构的二维线段特征的关联问题，提出关系表 (relation table) 结构对二维线段特征之间的几何关系进行存储，并以此为基础完成 IT 结构最长假设路径的搜索。在文献 [57] 中，首先利用独立于机器人位置的信息 (如特征之间的相对几何关系等) 对 IT 进行剪枝，接着，对于 IT 中每一条假设路径，当已关联特征能够提供足够的约束时，估计机器人位置并将其用于 IT 的剪枝，进一步缩减搜索空间。IT 结构在数据关联问题上的另一类重要应用是联合兼容分枝界定 (Joint Compatibility Branch and Bound, JCBB) 算法^[35]，使用分枝界定算法对 IT 结构进行遍历，搜索满足联合兼容条件、并且包含最多节点的假设路径。此外，还设计了协方差矩阵的增量式更新方法，将算法复杂度由 $O(n^3)$ 降低为 $O(n^2)$ ，其中 n 是特征数量。JCBB 算法被广泛应用于基于扩展卡尔曼滤波 (Extended Kalman Filter, EKF) 框架的 2D SLAM 系统^[58-61]。然而，IT 结构目前没有被应用于三维空间多模态特征的混合关联问题。此外，尽管上述方法中都包含对 IT 结构的遍历和搜索，但没有任何一种方法对被特征所约束的机器人位姿子空间以及特征空间分布之间的显式关联关系进行研究，而这些关联关系的显式表示对机器人主动导航和探索都具有重要意义。在本文第三章的研究中，同时对多特征关联问题和机器人位姿估计问题进行增量式求解，并对关联特征约束的机器人位姿子空间进行显式表示。

第三节 基于多模态特征的传感器位姿解算

平面特征、直线特征和点特征都是结构化环境中 SLAM 和 VO 系统常用的特征。其中平面和直线作为高层的几何特征，对于描述环境结构提供了丰富的信息，相比于视觉点特征，高层几何特征对光照变化具有很强的鲁棒性，因此在低纹理环境中有着很好的适用性^[17, 36]，而点特征则能够更多地描绘场景的视觉纹理信息^[11, 12]。

近年来，高层几何特征被广泛应用于结构化环境下移动机器人的定位及导航^[38, 39, 62]。由于几何特征在特定空间分布下，存在无法完全约束传感器位姿变换求解的情况，因此在使用高层几何特征求解传感器运动时，经常会产生退化情况或者病态解问题。文献 [34], [36], [38] 和 [63] 中，对传感器运动求解的退化解情况进行了研究和讨论。在作者的前期工作^[36] 中，根据平面法向量的空间

分布构造分布矩阵，并对该矩阵进行奇异值分解 (Singular Value Decomposition, SVD)，通过比较奇异值的大小，判断是否出现求解退化情况。当出现求解退化问题时，提出平面参数空间下基于统计信息网格结构的扫描匹配算法，对退化问题进行进一步的求解。文献 [63] 也涉及到位姿求解退化的问题。首先，假设典型室内场景都包含至少两个非平行平面，在此基础上，使用平面特征通过 EKF 生成五自由度 (Five Degree-of-Freedom, 5DoF) 位姿的假设，另外的一个平移自由度则通过基于平面特征和线段特征的投票机制获得。然而，在真实室内场景中，机器人一次观测的传感数据中包含至少两个非平行平面的假设未必成立。文献 [34] 将点特征与平面特征同时纳入 RANSAC 框架，计算得到传感器的位姿变换，并针对点特征与平面特征共同空间分布的非退化情况进行讨论。文献 [38] 对基于异构几何特征的惯性导航系统进行能观性分析，在此过程中也涉及到不同特征对位姿求解约束情况的讨论。

当高层几何特征无法为位姿变换求解提供足够的约束时，需要额外的信息进行补充。文献 [64] 使用惯性测量单元 (Inertial Measurement Unit, IMU) 提供额外的观测数据，解决基于平面特征的 RGB-D SLAM 中的位姿求解退化问题。然而，尽管 IMU 数据可以为传感器位姿求解施加额外的约束，但需要进一步解决多传感器标定与同步问题以及 IMU 测量数据漂移的问题。除此之外，另一种处理退化问题的方式是高层几何特征与视觉特征的结合^[39, 40, 65]。文献 [40] 在传感器位姿求解以及地图构建中同时使用了角点特征和平面特征。文献 [39] 则同时使用了角点、直线、平面三种不同种类特征进行帧间配准，并在后续工作^[65] 中，进行多特征的后端优化，进而构成了完整的 SLAM 系统。

在传感器位姿估计问题中，除了视觉角点特征外，边缘点特征也被广泛应用^[66–68]。文献 [66] 提出的 Canny-VO 系统通过基于最近邻场的 2D-3D 边缘点匹配计算视觉里程计。文献 [67] 提出基于边缘特征的 SLAM 系统，通过对关键帧进行局部滑动窗口优化，同时求解边缘点的深度信息、标定参数以及传感器位姿。而在 [68] 中提出的基于边缘特征的 RGB-D SLAM 系统中，提出静态加权算法，对边缘点进行加权，用来标识边缘点属于静态场景的概率。上述基于边缘点特征的 SLAM 及 VO 系统都证明了边缘点特征在位姿解算中的有效性。对于 RGB-D 传感器，可以提取两种不同类型的边缘点特征，即来自 RGB 图像的边缘点特征和来自深度图像的边缘点特征^[69]。与视觉角点特征类似，来自 RGB 图像的边缘点特征可以较好地描述环境纹理信息，但对环境的光照变化有着很

强的敏感性。而来自深度图像的边缘点特征则是提取自深度变化较大的区域，比如物体边缘及轮廓处，因此可以对环境结构进行描述。基于边缘点特征的传感器运动估计问题可以转化为 3D 曲线配准问题。由文献 [70] 中的相关论证可知，当进行 3D 曲线配准问题时，若在目标函数中不加区别地使用曲线上的所有点，则很有可能导致收敛速度变慢，甚至无法收敛到全局最优解。文献 [71] 和 [72] 对传感器位姿变换求解问题的解的稳定性进行了分析，在此基础上对参与配准的点进行筛选，以获得更高的稳定性。在文献 [73] 中，针对被广泛使用的迭代最近点 (Iterative Closest Point, ICP) 方法提出法向量空间采样 (Normal-Space Sampling, NSS) 算法，对参与运算的点进行筛选。NSS 算法的基本原理是使采样点对应的法向量在三维空间中均匀分布，从而使三维空间各个方向上平移变换的求解都可以被约束。文献 [70] 对 NSS 算法进行扩展，提出双重 NSS (Dual NSS, DNSS) 算法，不仅考虑采样点对平移变换的约束，而且考虑到对旋转变换的约束情况。上述研究中针对运动估计过程中边缘点所能提供的约束进行定量评价，并以此为基础，对参与运动估计运算的边缘点进行筛选。然而，在上述研究中，都只考虑了边缘点特征本身对于运动估计问题的贡献。而当边缘点特征与其它类型特征进行结合时，仅仅考虑边缘点特征本身所能提供的约束是不够的，此时需要分析多种模态特征共同的约束情况及其对目标函数的贡献，而这一问题至今很少被讨论和研究。在本文第四章和第五章中，针对多模态特征对传感器位姿的约束情况进行研究与分析，同时对特征空间分布与位姿求解退化之间的关联关系进行描述，在进行多模态特征融合时，同时考虑不同特征对位姿求解的约束情况，以此为基础，实现了多模态特征的无缝融合。

第四节 特征参数化方法

在基于特征的 VO 与 SLAM 中，特征的参数化发挥着重要作用。在常用的高层几何特征中，平面特征可以通过齐次坐标进行表示^[27, 53]。在三维空间中的平面方程可以表示为

$$\Pi_1X + \Pi_2Y + \Pi_3Z + \Pi_4 = 0. \quad (2.1)$$

可以看出，当平面方程(2.1)两边同乘非零数时，其代表的空间平面不会发生变化。因此，三维平面参数只有三个自由度，而 $\Pi = [\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4]^T \in \mathbb{P}^3$ (其中 \mathbb{P}^3 表示三维投影空间) 被称为平面特征的齐次坐标参数表示。齐次坐标的参

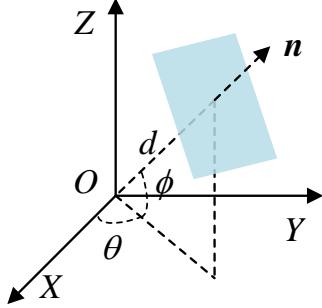


图 2.1 平面特征参数示意图

数表示在进行参数更新时，需要对冗余的自由度进行额外地处理^[74]。另一种常用的平面特征参数是海森标准型 $\pi = [\mathbf{n}^T, d]^T$ ，其中 $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2$ (其中 \mathbb{S}^2 表示三维欧氏空间 \mathbb{R}^3 中的单位球面) 为平面的单位法向量， $d \in \mathbb{R}$ 为坐标系原点到平面之间的垂直距离。海森标准型具有明确的几何意义，有利于对平面特征的坐标系变换进行表示，在目前 SLAM 系统中有着广泛应用^[25, 33]。若已知平面参数的齐次坐标表示，可以很容易得到对应的海森标准型表示，即

$$\pi = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{[\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3]^T}{\sqrt{\Pi_1^2 + \Pi_2^2 + \Pi_3^2}} \\ \frac{\Pi_4}{\sqrt{\Pi_1^2 + \Pi_2^2 + \Pi_3^2}} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

由于三维空间平面特征参数只有三个自由度，因此与齐次坐标类似，海森标准型的参数表示同样存在着冗余的自由度。从图2.1中可以看出，平面的单位法向量 \mathbf{n} 可以用两个角度 ϕ 和 θ 表示，其转换关系如式(2.3)所示。

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

因而平面特征也可以用角度 θ, ϕ 以及截距 d 三个参数表示，即球坐标参数形式 $\tau = [\theta, \phi, d]^T$ 。文献 [25] 将球坐标参数形式用于平面参数优化。球坐标参数虽然是平面的最小参数表示，但在优化的过程中会产生奇异性。式(2.4)给出了海森标准型参数形式 π 对球坐标参数形式 τ 的雅可比，可以看出当 $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$ 时，

式(2.4)出现不满秩的情况。

$$\frac{\partial \pi}{\partial \tau} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \cos \phi & -\cos \theta \sin \phi & 0 \\ \cos \theta \cos \phi & -\sin \theta \sin \phi & 0 \\ 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

最近点 (Closest Point, CP) 形式^[75] 也是一种常用的平面参数表示方法^[26, 28, 38], 具体形式为 $d\mathbf{n}$, 表示平面上与坐标系原点最近的点的 3D 坐标。CP 参数形式也是最小化参数表示, 而且具有明确的几何意义, 但在 $d = 0$ 时也存在奇异性的问题。

文献 [76] 针对基于平面特征因子图优化框架的 SLAM 系统, 提出平面特征的单位四元数参数表示方法 \mathbf{q}_π , 将平面特征参数表示为单位四元数的形式。单位四元数参数形式可以直接由海森标准型参数形式计算得到。

$$\mathbf{q}_\pi = \frac{\pi}{\|\pi\|} \in \mathbb{S}^3. \quad (2.5)$$

在因子图优化的过程中, 单位四元数形式的平面参数可以通过式(2.6)进行更新。

$$\mathbf{q}'_\pi = \delta \mathbf{q}_\pi \otimes \mathbf{q}_\pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\delta\theta_\pi \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}_\pi. \quad (2.6)$$

其中 $\theta_\pi \in \mathbb{R}^3$ 为空间平面最小参数表示。在基于图优化框架的 SLAM 系统中, 单位四元数参数表示得到了广泛应用^[17, 51]。

对于三维直线特征, 很多 SLAM 和 VO 系统使用观测线段的端点进行参数表示^[20, 28, 77, 78]。然而, 线段端点形式的参数表示不方便进行特征参数的更新, 而且对视角变换和端点遮挡比较敏感。另一种三维直线参数形式是 Plücker 矩阵^[53], 具体而言, 已知直线上任意两点的齐次坐标分别为 $\tilde{\mathbf{p}}_1$ 和 $\tilde{\mathbf{p}}_2$, 则 Plücker 矩阵 \mathbf{L} 可以计算为

$$\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{p}}_1 \tilde{\mathbf{p}}_2^T - \tilde{\mathbf{p}}_2 \tilde{\mathbf{p}}_1^T. \quad (2.7)$$

从式(2.7)可以看出, Plücker 矩阵 \mathbf{L} 是 4×4 齐次反对称矩阵, 且满足 $\det \mathbf{L} = 0$, 因此, \mathbf{L} 正好包含空间直线参数的四个自由度。另外, 对于一条给定的空间直线, 其 Plücker 矩阵参数表示 \mathbf{L} 独立于齐次坐标点 $\tilde{\mathbf{p}}_1$ 和 $\tilde{\mathbf{p}}_2$ 的选择, 换言之, 对于直线上不同于 $\tilde{\mathbf{p}}_1$ 和 $\tilde{\mathbf{p}}_2$ 的另外一个点 $\tilde{\mathbf{p}}_3$,

$$\tilde{\mathbf{p}}_3 = \tilde{\mathbf{p}}_1 + \mu \tilde{\mathbf{p}}_2, \mu \in \mathbb{R}, \quad (2.8)$$

有

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}' &= \tilde{\mathbf{p}}_1 \tilde{\mathbf{p}}_3^T - \tilde{\mathbf{p}}_3 \tilde{\mathbf{p}}_1^T \\
 &= \tilde{\mathbf{p}}_1 (\tilde{\mathbf{p}}_1^T + \mu \tilde{\mathbf{p}}_2^T) - (\tilde{\mathbf{p}}_1 + \mu \tilde{\mathbf{p}}_2) \tilde{\mathbf{p}}_1^T \\
 &= \tilde{\mathbf{p}}_1 \tilde{\mathbf{p}}_2^T - \tilde{\mathbf{p}}_2 \tilde{\mathbf{p}}_1^T = \mathbf{L}.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

需要说明的是，式(2.9)中的等号代表齐次矩阵的相等关系。与 Plücker 矩阵相对应的是 Plücker 坐标形式 $\tilde{\mathcal{L}}$ ，

$$\tilde{\mathcal{L}} = [l_{12}, l_{13}, l_{14}, l_{23}, l_{42}, l_{34}]^T \in \mathbb{P}^5. \tag{2.10}$$

其中 l_{ij} 是矩阵 \mathbf{L} 第 i 行第 j 列所对应的元素。Plücker 坐标 $\tilde{\mathcal{L}}$ 是一个六维齐次向量，由 $\det \mathbf{L} = 0$ 可知 Plücker 坐标满足

$$l_{12}l_{34} + l_{13}l_{42} + l_{14}l_{23} = 0. \tag{2.11}$$

Plücker 坐标参数形式在进行空间直线坐标变换的计算时有很好的便利性，因此在 SLAM 及 VO 系统中得到广泛应用^[23, 29, 33]。但是，Plücker 坐标仍是一种冗余的参数表示形式，无法直接进行直线参数的优化和更新。针对这个问题，文献 [79] 提出直线参数正交表示形式，被应用于 SLAM 系统中直线 Plücker 坐标的优化^[21, 80]。在本文第三章中，对平面以及直线进行参数化表示，并对其参数进行优化与更新。

第三章 基于多假设框架的面-线多模态特征混合关联方法

第一节 引言

近年来，对于结构化环境中 SLAM 和 VO 问题，高层几何特征的应用以及多模态特征的融合使用引起了越来越多的关注。相比于广泛应用的视觉角点特征，高层几何特征，例如平面^[81]、直线^[82]、线段^[22]等，包含了更多高层结构和语义信息，为机器人执行导航^[83]、避障^[84]、操作^[85]等任务提供了更有利的前提。多模态特征的融合则为发挥各类特征优势、弥补各自不足提供了可能。准确且稳定的数据关联是多模态特征无缝融合的 SLAM 方法的重要环节，也是传感器定位与地图构建的前提和基础。

目前基于多模态特征的 SLAM 和 VO 系统中，常用的特征关联方法主要有最近邻搜索算法^[17, 39, 42] 和 RANSAC 算法^[27, 40, 48]。其中，基于最近邻搜索算法的多模态特征关联通过在特征空间中的最近邻搜索得到每个特征的关联结果。最近邻搜索算法通常分别对不同类型的特征进行关联，未考虑不同模态特征之间的约束关系，并且无法保证被关联的特征被统一的传感器位姿变换配准到同一坐标系，进而可能对后续的传感器位姿估计结果产生不利的影响。而在多模态特征的无缝融合中，则应充分考虑关联特征与传感器位姿之间的一致性关系。RANSAC 算法在进行多模态特征关联时，首先对特征进行随机采样，并使用采样得到的特征计算得到传感器变换模型，然后，对所有的特征进行遍历，找到满足变换模型的特征关联结果，迭代上述过程，直到满足变换模型的关联特征数量达到一定阈值时，终止迭代，并得到特征关联以及传感器变换的估计结果。RANSAC 算法虽然可以保证被关联特征被统一的位姿变换配准到同一坐标系，然而，RANSAC 算法中的迭代过程以及随机采样的策略，都会使得算法收敛情况以及运行时间都受到阈值等外部因素的极大影响，并且造成信息的冗余和计算资源的浪费。

针对上述问题，本章提出基于假设树的多模态特征混合关联方法 (Interpretation Tree-based Heterogeneous Feature Association, IT-HFA)，对平面和直线两类最具代表性的高层几何特征进行联合关联，与此同时获得传感器位姿变换

表 3.1 不同特征关联方法比较

	最近邻搜索	RANSAC	IT-HFA
配准到同一坐标系	✗	✓	✓
封闭解	✓	✗	✓
用于计算变换模型的匹配对选择方法	-	随机采样	遍历所有可能的匹配对
变换模型计算方法	-	每次迭代重新计算	对结果进行增量式更新

的估计结果，并保持特征关联结果与传感器位姿变换的一致性。IT-HFA 方法与上述两种方法的对比情况如表3.1所示。与最近邻算法相比，IT-HFA 方法与基于 RANSAC 算法的方法均能确保匹配的特征被相同的变换模型配准到同一坐标系。而与 RANSAC 算法相比，IT-HFA 方法以 IT 结构对所有可能的特征关联假设进行组织，通过对 IT 结构的有效构建和搜索，得到特征关联以及传感器位姿的最优封闭解。另外，不同于 RANSAC 算法中每次迭代都要重新计算变换模型的方式，在 IT-HFA 方法中，对于每种假设的特征匹配结果，增量式地更新其对应的变换模型，有效地利用了历史信息，提高了计算效率。

第二节 特征参数的最小二乘拟合估计

本节使用最小二乘 (Least-Squares, LS) 算法分别对平面和直线特征的参数进行估计。平面特征参数采用海森标准型的形式，表示为 $\pi = [\mathbf{n}^T, d]^T$ ，其中 $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2$ 表示其单位法向量， $d \in \mathbb{R}$ 为坐标系原点到平面的垂直距离。而直线特征表示为 $\mathcal{L} = [\mathbf{u}^T, \mathbf{v}^T]^T$ ，其中向量 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ 的方向为该直线和坐标系原点构成平面的法向量方向，其大小为坐标系原点到该直线的垂直距离， $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^2$ 是直线的单位方向向量。

3.2.1 平面特征参数的最小二乘拟合估计

假设待求解平面为 π ，用来拟合平面的数据点坐标表示为 \mathbf{p}_π ，平面拟合的目标函数为

$$E_\pi^{LS}(\mathbf{n}, d) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{p\pi}} (\mathbf{n}^T \mathbf{p}_{\pi i} + d)^2, \quad (3.1)$$

s. t. $\mathbf{n}^T \mathbf{n} = 1.$

其中, $N_{p\pi}$ 表示用来拟合平面的数据点的数量。计算 $E_\pi^{LS}(\mathbf{n}, d)$ 相对于 d 的导数并令其等于零, 获得 d 的最优解为

$$d^* = -\mathbf{n}^T \mathbf{p}_{G\pi}^{LS}, \quad (3.2)$$

其中 $\mathbf{p}_{G\pi}^{LS}$ 为所有观测点坐标的中心。

$$\mathbf{p}_{G\pi}^{LS} = \frac{1}{N_{p\pi}} \sum_{i=1}^{N_{p\pi}} \mathbf{p}_{\pi i}. \quad (3.3)$$

将式(3.2)代入式(3.1)可得

$$E_\pi^{LS}(\mathbf{n}) = \frac{1}{2} \mathbf{n}^T \mathbf{S}_\pi^{LS} \mathbf{n}, \quad (3.4)$$

其中

$$\mathbf{S}_\pi^{LS} = \sum_{i=1}^{N_{p\pi}} (\mathbf{p}_{\pi i} - \mathbf{p}_{G\pi}^{LS})(\mathbf{p}_{\pi i} - \mathbf{p}_{G\pi}^{LS})^T. \quad (3.5)$$

单位法向量的最优解 \mathbf{n}^* 等于矩阵 \mathbf{S}_π^{LS} 最小特征值对应的特征向量。而平面特征参数 π 的协方差估计为参数最优解处海森矩阵的伪逆。

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_\pi^\dagger &= \mathbf{H}_\pi^{LS}|_{\mathbf{n}^*, d^*} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{H}_{nn}^{LS} & \mathbf{H}_{nd}^{LS} \\ \mathbf{H}_{nd}^{LS T} & \mathbf{H}_{dd}^{LS} \end{array} \right]_{n^*, d^*} \\ &= \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 E_\pi^{LS}}{\partial \mathbf{n}^2} & \frac{\partial^2 E_\pi^{LS}}{\partial d \partial \mathbf{n}} \\ \frac{\partial^2 E_\pi^{LS}}{\partial d \partial d} & \frac{\partial^2 E_\pi^{LS}}{\partial d^2} \end{array} \right]_{n^*, d^*} = \sum_{j=1}^{N_{p\pi}} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{\pi j} \mathbf{p}_{\pi j}^T & \mathbf{p}_{\pi j} \\ \mathbf{p}_{\pi j}^T & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.2.2 直线特征参数的最小二乘拟合估计

假设待求解直线参数为 \mathcal{L} , 用来拟合直线的数据点坐标为 $\mathbf{p}_{\mathcal{L}}$, 拟合目标函数为

$$E_{\mathcal{L}}^{LS}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{p\mathcal{L}}} \|\mathbf{u} - [\mathbf{p}_{\mathcal{L}i}] \times \mathbf{v}\|^2, \quad (3.7)$$

$$\text{s. t. } \mathbf{v}^T \mathbf{v} = 1, \mathbf{u}^T \mathbf{v} = 0.$$

其中 $N_{p\mathcal{L}}$ 代表拟合直线模型所用数据点的数量。计算目标函数 $E_{\mathcal{L}}^{LS}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 关于 \mathbf{u} 的导数并令其等于零, 可以得到参数 \mathbf{u} 的最优解为

$$\mathbf{u}^* = [\mathbf{p}_{G\mathcal{L}}^{LS}] \times \mathbf{v}, \quad (3.8)$$

其中

$$[\mathbf{p}_{G\mathcal{L}}^{LS}]_{\times} = \frac{1}{N_{p\mathcal{L}}} \sum_{i=1}^{N_{p\mathcal{L}}} [\mathbf{p}_{\mathcal{L}_i}^{LS}]_{\times}. \quad (3.9)$$

将式(3.8)代入式(3.7)可得

$$E_{\mathcal{L}}^{LS}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{S}_{\mathcal{L}}^{LS} \mathbf{v}, \quad (3.10)$$

其中

$$\mathbf{S}_{\mathcal{L}}^{LS} = \sum_{i=1}^{N_{p\mathcal{L}}} [\mathbf{p}_{\mathcal{L}_i} - \mathbf{p}_{G\mathcal{L}}^{LS}]^T [\mathbf{p}_{\mathcal{L}_i} - \mathbf{p}_{G\mathcal{L}}^{LS}]_{\times}. \quad (3.11)$$

此时，参数 \mathbf{v} 的最优估计等于矩阵 $\mathbf{S}_{\mathcal{L}}^{LS}$ 最小特征值对应的特征向量。而此时直线参数 \mathcal{L} 的协方差可以由其最优解处的海森矩阵计算得到。

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\mathcal{L}}^{\dagger} &= \mathbf{H}_{\mathcal{L}}^{LS}|_{\mathbf{v}^*, \mathbf{u}^*} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{H}_{uu}^{LS} & \mathbf{H}_{uv}^{LS} \\ \mathbf{H}_{uv}^{LS T} & \mathbf{H}_{vv}^{LS} \end{array} \right]_{\mathbf{v}^*, \mathbf{u}^*} \\ &= \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 E_{\mathcal{L}}^{LS}}{\partial \mathbf{u}^2} & \frac{\partial^2 E_{\mathcal{L}}^{LS}}{\partial \mathbf{v} \partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial^2 E_{\mathcal{L}}^{LS}}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{v}} & \frac{\partial^2 E_{\mathcal{L}}^{LS}}{\partial \mathbf{v}^2} \end{array} \right]_{\mathbf{v}^*, \mathbf{u}^*} = \sum_{j=1}^{N_{p\mathcal{L}}} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & [\mathbf{p}_{\mathcal{L}_j}]^T_{\times} \\ [\mathbf{p}_{\mathcal{L}_j}]_{\times} & [\mathbf{p}_{\mathcal{L}_j}]_{\times} \times [\mathbf{p}_{\mathcal{L}_j}]^T_{\times} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.12)$$

第三节 基于假设树的面-线特征混合关联

本节通过 IT-HFA 算法对平面、直线两种典型的高层几何特征进行联合关联，同时对传感器位姿进行解算。所有可能的特征关联结果都以 IT 结构的形式进行组织，充分考虑特征对传感器位姿的约束以及特征之间的几何关系信息。通过对 IT 结构进行增量式构建和剪枝，保留那些可以被同一变换配准的关联结果，保证了算法的有效性和实时性。

3.3.1 假设树结构

IT 是一种树型数据结构，其中包含了特征关联问题的全部解空间^[54]。IT 中的节点表示为 $\mathcal{N} = (\mathcal{F}_c, \mathcal{F}_r)$ ，其中 $\mathcal{F} \in \{\pi, \mathcal{L}\}$ ， c 和 r 分别表示当前帧与参考帧对应的传感器坐标系。节点 \mathcal{N} 代表来自当前帧和参考帧的两个特征 \mathcal{F}_c 和 \mathcal{F}_r 之间的匹配关系。从根节点到第 n 层节点之间的一条路径 $\mathcal{P}_n = \{\mathcal{N}^n, \mathcal{N}^{n-1}, \dots, \mathcal{N}^1\}$ 被称为长度为 n 的假设路径，代表两帧之间 n 对匹配的特征，其中上标 $j(j = 1, \dots, n)$ 表示节点所在层数。假设当前帧与参考帧中的特征数量分别为 N_c 和 N_r ，那么，构建 IT 的总层数为 N_r ，第 j 层包含来自参考帧中的第

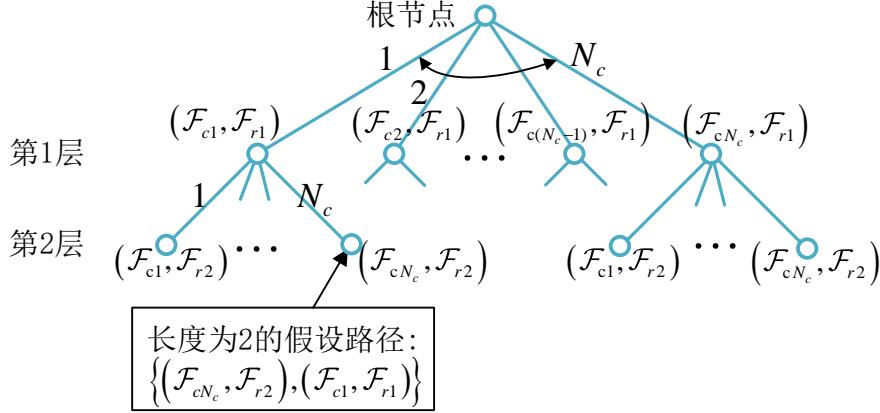


图 3.1 完全 IT 结构(前两层)示意图

$j(j = 1, \dots, N_r)$ 个特征 \mathcal{F}_{rj} 与来自当前帧特征之间所有可能的匹配对。每个节点的分支系数为 N_c , 即每个节点最多可能连接 N_c 个子节点。如果在一个 IT 结构中, 除了叶子节点之外的每个节点所连接的子节点个数都等于该节点的分支系数, 那么它被称为完全 IT 结构。图3.1给出了一个完全 IT 结构的示意图, 可以看出, 完全 IT 结构包含了两帧特征之间所有可能的关联关系, 因此, 完全 IT 是一种高度冗余的结构, 其中包含了大量的错误匹配关系^[86]。在本章提出算法中, 通过对 IT 节点间一致性的判断以及对假设路径的更新, 对 IT 的规模进行缩减, 去除冗余信息, 保留并更新有效信息, 保证算法的高效性和鲁棒性。

3.3.2 节点间一致性

对于一条假设路径上的两个节点, 当它们所代表的两个特征匹配对可由共同的传感器位姿变换配准到同一坐标系时, 称它们具有节点一致性。在假设路径 \mathcal{P}_n 的生成过程中, 对于一个新加入的节点 $\mathcal{N}^{n+1}, n = 1, \dots, N_r - 1$, 需要对 \mathcal{N}^{n+1} 与该假设路径 \mathcal{P}_n 中任一已有节点 $\mathcal{N}^i, i = 1, \dots, n$ 之间的节点间一致性进行判断, 并对满足该一致性的位姿变换进行解算。只有当这些节点间一致性全部满足时, 才将节点 \mathcal{N}^{n+1} 加入 \mathcal{P}_n 中, 得到一条新的假设路径 \mathcal{P}_{n+1} 。节点间一致性的判断保证了 IT 中某一条假设路径的任意两个节点所对应的特征匹配对都能被统一的传感器变换配准到同一坐标系。

定义 3.1【节点间一致性】对于一条假设路径上的两个节点 $\mathcal{N}^i = (\mathcal{F}_c^i, \mathcal{F}_r^i)$ 和 $\mathcal{N}^j = (\mathcal{F}_c^j, \mathcal{F}_r^j)$, 如果存在(唯一或多个)三维空间刚体变换 $\mathbf{R} \in \text{SO}(3), \mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$,

使得

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c^i &= T(\mathcal{F}_r^i, \mathbf{R}, \mathbf{t}), \\ \mathcal{F}_c^j &= T(\mathcal{F}_r^j, \mathbf{R}, \mathbf{t}),\end{aligned}\quad (3.13)$$

则称节点 N^i 和 N^j 对于变换 \mathbf{R}, \mathbf{t} 满足节点间一致性。其中， $T(\mathcal{F}, \mathbf{R}, \mathbf{t})$ 表示特征 \mathcal{F} 经过变换 \mathbf{R}, \mathbf{t} 得到的结果，其具体表达式如式(3.14)所示，式中 $[\mathbf{t}]_{\times}$ 代表向量 \mathbf{t} 所对应的反对称矩阵。

$$\begin{aligned}T(\pi, \mathbf{R}, \mathbf{t}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ -\mathbf{t}^T \mathbf{R} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ d \end{bmatrix}, \\ T(\mathcal{L}, \mathbf{R}, \mathbf{t}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{R} & [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (3.14)$$

从定义3.1中可以看出，要判断一条假设路径上两个节点之间的节点间一致性，需要对方程组(3.13)进行求解。如果其解集

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{R}, \mathbf{t} | \mathcal{F}_c^i = T(\mathcal{F}_r^i, \mathbf{R}, \mathbf{t}), \mathcal{F}_c^j = T(\mathcal{F}_r^j, \mathbf{R}, \mathbf{t}), \mathbf{R} \in \text{SO}(3), \mathbf{t} \in \mathbb{R}^3\} \quad (3.15)$$

不为空集，则根据定义3.1，节点 N^i 和 N^j 之间满足节点间一致性。从式(3.13)和(3.14)可以看出，平移变换 \mathbf{t} 的值不会影响旋转变换 \mathbf{R} 的求解结果，因此，对节点间一致性的求解问题可以解耦成旋转一致性和平移一致性两个问题。基于此，在后文中先对旋转一致性进行求解，然后对平移一致性进行求解。

旋转一致性

几何特征在三维空间中的旋转变换可以表示为

$$\mathbf{e}_c = \mathbf{R} \mathbf{e}_r, \quad (3.16)$$

其中 \mathbf{e} 为表征特征 \mathcal{F} 方向信息的单位向量。具体而言，当特征为平面，即 $\mathcal{F} = \pi$ 时， \mathbf{e} 为平面的单位法向量，即 $\mathbf{e} = \mathbf{n}$ ；当特征为直线，即 $\mathcal{F} = \mathcal{L}$ 时， \mathbf{e} 为直线的单位方向向量，即 $\mathbf{e} = \mathbf{v}$ 。旋转矩阵 \mathbf{R} 可以表示成式(3.17)的形式，

$$\mathbf{R} = \text{Rot}(\mathbf{r}, \theta) = \cos \theta \mathbf{I} + (1 - \cos \theta) \mathbf{r} \mathbf{r}^T + \sin \theta [\mathbf{r}]_{\times}, \quad (3.17)$$

其中 \mathbf{r} 表示单位旋转轴向量， θ 为绕旋转轴 \mathbf{r} 的旋转角度。已知旋转轴 \mathbf{r} 和一对匹配特征的单位方向向量 \mathbf{e}_c 和 \mathbf{e}_r (向量 \mathbf{r} 、 \mathbf{e}_c 和 \mathbf{e}_r 不共线)，将式(3.17)代入

式(3.16), 则可以得到旋转角 θ 的计算结果为

$$\theta = \Theta(\mathbf{r}, \mathbf{e}_c, \mathbf{e}_r) = \text{atan}2(\sin \theta, \cos \theta), \quad (3.18)$$

其中

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 1 - \frac{1 - \mathbf{e}_r^T \mathbf{e}_c}{1 - (\mathbf{r}^T \mathbf{e}_c)(\mathbf{r}^T \mathbf{e}_r)}, \\ \sin \theta &= \frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{e}_r)^T \mathbf{e}_c}{1 - (\mathbf{r}^T \mathbf{e}_c)(\mathbf{r}^T \mathbf{e}_r)}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

由式(3.13)和(3.14)可知, 已知两个节点 \mathcal{N}^i 和 \mathcal{N}^j , 需要求解旋转变换 $\mathbf{R} \in \text{SO}(3)$ 使得式(3.20)成立。

$$\begin{cases} \mathbf{e}_c^i = \mathbf{R} \mathbf{e}_r^i, \\ \mathbf{e}_c^j = \mathbf{R} \mathbf{e}_r^j. \end{cases} \quad (3.20)$$

向量夹角信息对三维空间刚体旋转变换有不变性, 即如果存在旋转变换 \mathbf{R} 使得式(3.20)成立, 则有

$$\langle \mathbf{e}_c^i, \mathbf{e}_c^j \rangle = \langle \mathbf{e}_r^i, \mathbf{e}_r^j \rangle, \quad (3.21)$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示两个向量之间的夹角。此外, 在三维空间刚体旋转的过程中, 被旋转的向量与旋转轴方向之间的夹角也保持不变。因此, 满足式(3.20)的所有可能的旋转轴的集合为

$$\{\mathbf{r} | \mathbf{r}^T \mathbf{e}_c^i = \mathbf{r}^T \mathbf{e}_r^i, \mathbf{r}^T \mathbf{e}_c^j = \mathbf{r}^T \mathbf{e}_r^j, \mathbf{r}^T \mathbf{r} = 1\}. \quad (3.22)$$

根据特征方向向量的空间分布情况, 对方程组(3.20)的求解可以分为四种情况, 下面分别给出每种情况的具体计算方法。算法3.1给出了旋转一致性计算的具体步骤, 其输出为满足旋转一致性的旋转变换解集 \mathcal{R} 。

算法 3.1 旋转一致性

输入: 节点 $\mathcal{N}^i, \mathcal{N}^j$ 所对应特征的四个单位方向向量 $\{\mathbf{e}_c^i, \mathbf{e}_r^i, \mathbf{e}_c^j, \mathbf{e}_r^j\}$.

输出: $\mathcal{R} = \{\mathbf{R} | \mathbf{e}_c^i = \mathbf{R} \mathbf{e}_r^i, \mathbf{e}_c^j = \mathbf{R} \mathbf{e}_r^j, \mathbf{R} \in \text{SO}(3)\}$.

1: function RotationConsistency($\mathbf{e}_c^i, \mathbf{e}_r^i, \mathbf{e}_c^j, \mathbf{e}_r^j$)

2: if $\langle \mathbf{e}_c^i, \mathbf{e}_c^j \rangle \neq \langle \mathbf{e}_r^i, \mathbf{e}_r^j \rangle$ then

3: $\mathcal{R} = \emptyset$.

4: else if $\mathbf{e}_c^i = \mathbf{e}_c^j$ and $\mathbf{e}_r^i = \mathbf{e}_r^j$ then

5: $\mathcal{R} = \{\mathbf{R} | \mathbf{R} = R(\varphi), \varphi \in \mathbb{R}\}$.

```

6:     else if  $\mathbf{e}_c^i = \mathbf{e}_r^i$  and  $\mathbf{e}_c^j = \mathbf{e}_r^j$  then
7:          $\mathcal{R} = \{\mathbf{I}\}.$ 
8:     else if  $\mathbf{e}_c^i = \mathbf{e}_r^i$  then
9:          $\mathcal{R} = \{\text{Rot}(\mathbf{e}_c^i, \Theta(\mathbf{e}_c^i, \mathbf{e}_c^j, \mathbf{e}_r^j))\}.$ 
10:    else if  $\mathbf{e}_c^j = \mathbf{e}_r^j$  then
11:         $\mathcal{R} = \{\text{Rot}(\mathbf{e}_c^j, \Theta(\mathbf{e}_c^j, \mathbf{e}_c^i, \mathbf{e}_r^i))\}.$ 
12:    else if  $(\mathbf{e}_c^i - \mathbf{e}_r^i) \times (\mathbf{e}_c^j - \mathbf{e}_r^j) = 0$  then
13:         $\mathbf{r} = \mathbf{r}_x^i \cos \gamma_i + \mathbf{r}_y^i \sin \gamma_i,$ 
14:         $\theta = \frac{1}{2} (\Theta(\mathbf{r}, \mathbf{e}_c^i, \mathbf{e}_r^i) + \Theta(\mathbf{r}, \mathbf{e}_c^j, \mathbf{e}_r^j)).$ 
15:         $\mathcal{R} = \{\text{Rot}(\mathbf{r}, \theta)\}.$ 
16:    else
17:         $\mathbf{r} = \eta(\mathbf{e}_c^i - \mathbf{e}_r^i) \times (\mathbf{e}_c^j - \mathbf{e}_r^j),$ 
18:        计算  $\theta_i = \Theta(\mathbf{r}, \mathbf{e}_c^i, \mathbf{e}_r^i)$  和  $\theta_j = \Theta(\mathbf{r}, \mathbf{e}_c^j, \mathbf{e}_r^j).$ 
19:        if  $\theta_i = \theta_j$  then
20:             $\mathcal{R} = \{\text{Rot}(\mathbf{r}, \frac{1}{2}(\theta_i + \theta_j))\}.$ 
21:        else
22:             $\mathcal{R} = \emptyset.$ 
23:        end if
24:    end if
25:    return  $\mathcal{R}.$ 
26: end function

```

Case I: 特征方向向量满足 $\mathbf{e}_c^i = \mathbf{e}_c^j$ 和 $\mathbf{e}_r^i = \mathbf{e}_r^j$ 。

在这种情况下，同一坐标系中的两个方向向量 \mathbf{e}_c^i 和 \mathbf{e}_c^j (或者 \mathbf{e}_r^i 和 \mathbf{e}_r^j) 彼此共线。表述简洁起见，令

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_c &= \mathbf{e}_c^i = \mathbf{e}_c^j, \\ \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_r^i = \mathbf{e}_r^j. \end{aligned} \tag{3.23}$$

如果 $\mathbf{e}_c = \mathbf{e}_r$ ，则满足式(3.20)的旋转变换的旋转轴即为 \mathbf{e}_c ，满足旋转一致性的旋转变换集合可以表示为

$$\mathcal{R} = \{\mathbf{R} | \mathbf{R} = \text{Rot}(\mathbf{e}_c, \varphi), \varphi \in \mathbb{R}\}. \tag{3.24}$$

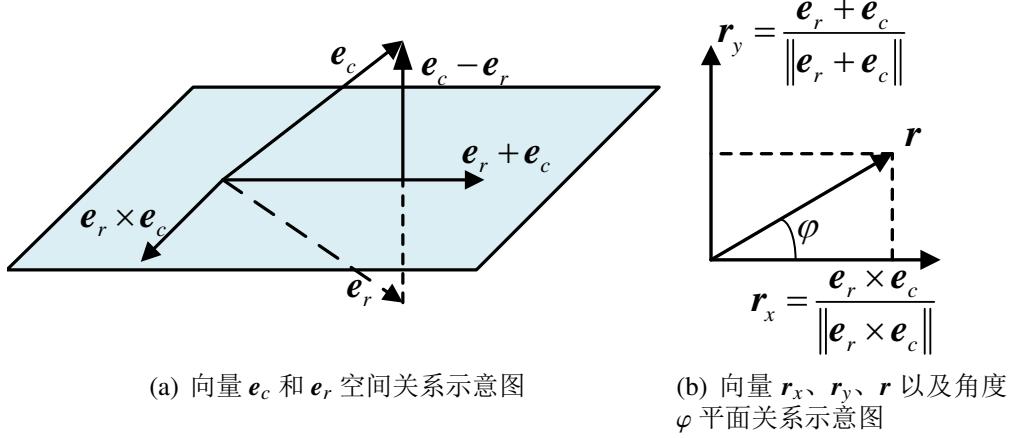


图 3.2 Case I 空间关系示意图

如果 $e_c \neq e_r$, 则式(3.22)中的旋转轴集合可以表示为

$$\{r | r^T(e_c - e_r) = 0, r^T r = 1\}. \quad (3.25)$$

由式(3.25)可知, 满足条件的旋转轴 r 位于垂直于向量 $e_c - e_r$ 的平面上, 其位置关系如图3.2所示。换言之, 这种情况下旋转轴 r 不能被完全确定, 1DoF 旋转变换无法被约束。不失一般性, 令

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{e_r \times e_c}{\|e_r \times e_c\|}, \\ r_y &= \frac{e_r + e_c}{\|e_r + e_c\|}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

可以看出 r_x 和 r_y 为垂直于向量 $e_c - e_r$ 的平面上的一组正交基底。满足式(3.25)的旋转轴可以被表示为

$$r(\varphi) = r_x \cos \varphi + r_y \sin \varphi, \varphi \in \mathbb{R}. \quad (3.27)$$

则 $\forall \varphi \in \mathbb{R}$, 可以计算得到对应于旋转轴 $r(\varphi)$ 的旋转角度为

$$\theta(\varphi) = \Theta(r(\varphi), e_c, e_r). \quad (3.28)$$

综上所述, 当特征方向向量满足 $e_c^i = e_c^j$ 和 $e_r^i = e_r^j$, 满足旋转一致性的刚体旋转变换有 1DoF 无法被约束。满足旋转一致性的解集可以表示为

$$\mathcal{R} = \{R | R = R(\varphi), \varphi \in \mathbb{R}\}, \quad (3.29)$$

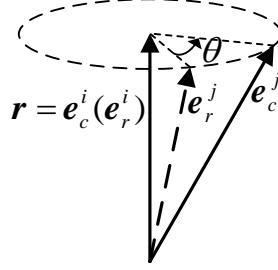


图 3.3 Case II 空间关系示意图 ($e_c^i = e_r^i, e_c^j \neq e_r^j$)

其中

$$R(\varphi) = \begin{cases} \text{Rot}(\mathbf{e}_c, \varphi), & \text{if } \mathbf{e}_c = \mathbf{e}_r; \\ \text{Rot}(\mathbf{r}(\varphi), \theta(\varphi)), & \text{if } \mathbf{e}_c \neq \mathbf{e}_r. \end{cases} \quad (3.30)$$

Case II: 特征方向向量至少满足 $\mathbf{e}_c^i = \mathbf{e}_r^i$ 和 $\mathbf{e}_c^j = \mathbf{e}_r^j$ 其中之一 ($\mathbf{e}_c^i \neq \mathbf{e}_c^j$)。

在这种情况下, 至少一对匹配特征的方向向量是彼此共线的(其中, 当特征方向向量满足 $\mathbf{e}_c^i = \mathbf{e}_r^i$ 和 $\mathbf{e}_c^j \neq \mathbf{e}_r^j$ 时, 其分布情况如图3.3所示)。此时, 满足旋转一致性的旋转变换可以计算为

$$\mathbf{R} = \begin{cases} \mathbf{I}, & \text{if } \mathbf{e}_c^i = \mathbf{e}_r^i \text{ and } \mathbf{e}_c^j = \mathbf{e}_r^j; \\ \text{Rot}\left(\mathbf{e}_c^i, \Theta(\mathbf{e}_c^i, \mathbf{e}_c^j, \mathbf{e}_r^j)\right), & \text{if } \mathbf{e}_c^i = \mathbf{e}_r^i \text{ and } \mathbf{e}_c^j \neq \mathbf{e}_r^j; \\ \text{Rot}\left(\mathbf{e}_c^j, \Theta(\mathbf{e}_c^j, \mathbf{e}_c^i, \mathbf{e}_r^i)\right), & \text{if } \mathbf{e}_c^i \neq \mathbf{e}_r^i \text{ and } \mathbf{e}_c^j = \mathbf{e}_r^j. \end{cases} \quad (3.31)$$

Case III: 特征方向向量满足 $(\mathbf{e}_c^i - \mathbf{e}_r^i) \times (\mathbf{e}_c^j - \mathbf{e}_r^j) = 0$ ($\mathbf{e}_c^i \neq \mathbf{e}_c^j, \mathbf{e}_c^i \neq \mathbf{e}_r^i, \mathbf{e}_c^j \neq \mathbf{e}_r^j$)。

在这种情况下, 旋转轴可以由式(3.32)计算得到。

$$\Theta(\mathbf{r}, \mathbf{e}_c^i, \mathbf{e}_r^i) = \Theta(\mathbf{r}, \mathbf{e}_c^j, \mathbf{e}_r^j). \quad (3.32)$$

将式(3.18)和式(3.19)代入式(3.32)可得

$$\begin{cases} 1 - \frac{1 - \mathbf{e}_r^i T \mathbf{e}_c^i}{1 - (\mathbf{r}^T \mathbf{e}_c^i)(\mathbf{r}^T \mathbf{e}_r^i)} = 1 - \frac{1 - \mathbf{e}_r^j T \mathbf{e}_c^j}{1 - (\mathbf{r}^T \mathbf{e}_c^j)(\mathbf{r}^T \mathbf{e}_r^j)}, \\ \frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{e}_r^i)^T \mathbf{e}_c^i}{1 - (\mathbf{r}^T \mathbf{e}_c^i)(\mathbf{r}^T \mathbf{e}_r^i)} = \frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{e}_r^j)^T \mathbf{e}_c^j}{1 - (\mathbf{r}^T \mathbf{e}_c^j)(\mathbf{r}^T \mathbf{e}_r^j)}. \end{cases} \quad (3.33)$$

令

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \frac{1}{2}\langle \mathbf{e}_r^i, \mathbf{e}_c^i \rangle, \quad \alpha_j = \frac{1}{2}\langle \mathbf{e}_r^j, \mathbf{e}_c^j \rangle, \\ \beta_i &= \langle \mathbf{r}, \mathbf{e}_r^i \rangle = \langle \mathbf{r}, \mathbf{e}_c^i \rangle, \quad \beta_j = \langle \mathbf{r}, \mathbf{e}_r^j \rangle = \langle \mathbf{r}, \mathbf{e}_c^j \rangle, \\ \gamma_i &= \langle \mathbf{r}, \mathbf{e}_r^i \times \mathbf{e}_c^i \rangle, \quad \gamma_j = \langle \mathbf{r}, \mathbf{e}_r^j \times \mathbf{e}_c^j \rangle.\end{aligned}\quad (3.34)$$

则式(3.33)可以化简为

$$\frac{\sin^2 \alpha_i}{\sin^2 \beta_i} = \frac{\sin^2 \alpha_j}{\sin^2 \beta_j}, \quad (3.35)$$

$$\frac{\cos \gamma_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i}{\sin^2 \beta_i} = \frac{\cos \gamma_j \sin \alpha_j \cos \alpha_j}{\sin^2 \beta_j}. \quad (3.36)$$

根据条件 $\mathbf{e}_c^i \neq \mathbf{e}_r^i$ 和 $\mathbf{e}_c^j \neq \mathbf{e}_r^j$, 有 $\sin \alpha_i \neq 0$ 和 $\sin \alpha_j \neq 0$ 。而根据 $\mathbf{e}_c^i \neq \mathbf{e}_c^j$ 可知, 如果 $\cos \alpha_i = 0$ 则 $\cos \alpha_j \neq 0$, 反之亦然。当 $\cos \alpha_i = 0$ 时, 由式(3.36)可知 $\cos \gamma_j = 0$, 则旋转轴是 $\mathbf{r} = \eta(\mathbf{e}_c^j + \mathbf{e}_r^j)$, 其中 η 表示归一化因子, 以保证 \mathbf{r} 为单位长度向量。类似地, 当 $\cos \alpha_j = 0$ 时, 有 $\mathbf{r} = \eta(\mathbf{e}_c^i + \mathbf{e}_r^i)$ 。

当满足 $\cos \alpha_i \neq 0$ 和 $\cos \alpha_j \neq 0$ 时, 联合式(3.35)和(3.36)可得

$$\frac{\cos \gamma_i}{\tan \alpha_i} = \frac{\cos \gamma_j}{\tan \alpha_j}. \quad (3.37)$$

不失一般性, 令

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_x^i &= \frac{\mathbf{e}_r^i \times \mathbf{e}_c^i}{\|\mathbf{e}_r^i \times \mathbf{e}_c^i\|}, \quad \mathbf{r}_y^i = \frac{\mathbf{e}_r^i + \mathbf{e}_c^i}{\|\mathbf{e}_r^i + \mathbf{e}_c^i\|}, \\ \mathbf{r}_x^j &= \frac{\mathbf{e}_r^j \times \mathbf{e}_c^j}{\|\mathbf{e}_r^j \times \mathbf{e}_c^j\|}, \quad \mathbf{r}_y^j = \frac{\mathbf{e}_r^j + \mathbf{e}_c^j}{\|\mathbf{e}_r^j + \mathbf{e}_c^j\|}.\end{aligned}\quad (3.38)$$

由(3.38)可以看出, 向量 \mathbf{r}_x^i 和 \mathbf{r}_y^i 相互垂直, 而向量 \mathbf{r} 和 \mathbf{r}_x^i 之间的夹角 γ_i 可以表示为

$$\gamma_i = \text{atan2}(\mathbf{r}^T \mathbf{r}_y^i, \mathbf{r}^T \mathbf{r}_x^i). \quad (3.39)$$

令

$$\delta = \text{atan2}(\mathbf{r}_x^{j^T} \mathbf{r}_y^i, \mathbf{r}_x^{j^T} \mathbf{r}_x^i). \quad (3.40)$$

由式(3.34)、(3.39)和(3.40), 可知 $\gamma_j = \gamma_i - \delta$, 如图3.4所示。将 γ_j 代入式(3.37), 可以得到

$$\gamma_i = \text{atan2}\left(\frac{\tan \alpha_j}{\tan \alpha_i} - \cos \delta, \sin \delta\right). \quad (3.41)$$

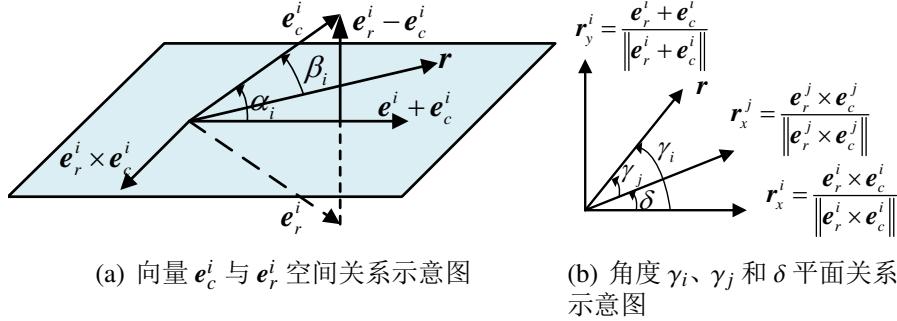


图 3.4 Case III 空间关系示意图

则可以计算旋转轴 \mathbf{r} 为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_x^i \cos \gamma_i + \mathbf{r}_y^i \sin \gamma_i. \quad (3.42)$$

需要说明的是，上文提到 $\cos \alpha_i = 0$ 和 $\cos \alpha_j = 0$ 所对应的两类特殊情况，其求解结果皆可统一包含于式(3.42)中。

Case IV: 一般情况 ($(\mathbf{e}_c^i - \mathbf{e}_r^i) \times (\mathbf{e}_c^j - \mathbf{e}_r^j) \neq 0$, $\mathbf{e}_c^i \neq \mathbf{e}_c^j$, $\mathbf{e}_c^i \neq \mathbf{e}_r^i$, $\mathbf{e}_c^j \neq \mathbf{e}_r^j$)。

根据式(3.22)，旋转轴同时位于垂直于向量 $\mathbf{e}_c^i - \mathbf{e}_r^i$ 和 $\mathbf{e}_c^j - \mathbf{e}_r^j$ 的平面上，即位于这两个平面的交线上。因此可得

$$\mathbf{r} = \eta(\mathbf{e}_c^i - \mathbf{e}_r^i) \times (\mathbf{e}_c^j - \mathbf{e}_r^j), \quad (3.43)$$

其中 η 为归一化因子。则使两组匹配特征方向向量配准到同一坐标系的旋转角度可以分别计算为

$$\theta_i = \Theta(\mathbf{r}, \mathbf{e}_c^i, \mathbf{e}_r^i), \quad (3.44)$$

和

$$\theta_j = \Theta(\mathbf{r}, \mathbf{e}_c^j, \mathbf{e}_r^j). \quad (3.45)$$

如果角度 θ_i 和 θ_j 满足 $\theta_i = \theta_j$ ，则使得节点 N^i 和 N^j 满足旋转一致性的旋转变换表示为

$$\mathbf{R} = \text{Rot}(\mathbf{r}, \theta_i). \quad (3.46)$$

至此，满足旋转一致性的旋转变换已经求解完毕。值得说明的是，在上述四种情况中，有三种情况可以求解得到 3DoF 旋转变换的唯一解。无法直接得到唯一解的情况只有 Case I，对应特征向量空间分布的一种特殊情况，即同一坐标系中的两个方向向量共线。

平移一致性

已知一条假设路径上的两个节点 \mathcal{N}^i 和 \mathcal{N}^j 以及满足旋转一致性的旋转变换集合 \mathcal{R} , 需要求解满足平移一致性的平移变换集合 \mathcal{T} , 使得 $\forall \mathbf{R} \in \mathcal{R}$ 和 $\forall \mathbf{t} \in \mathcal{T}$, 节点 \mathcal{N}^i 和 \mathcal{N}^j 对于变换 \mathbf{R}, \mathbf{t} 满足节点间一致性。不同于旋转一致性的求解, 在计算平移一致性时, 不同种类的特征需要分类讨论。本章使用平面特征和直线特征, 因此, 需要分别考虑三种情况, 即平面-平面, 直线-直线和平面-直线。算法3.2给出求解平移一致性的整个流程, 最终输出使节点 \mathcal{N}^i 和 \mathcal{N}^j 满足节点间一致性的变换集合 $\mathcal{S} = \mathcal{R} \cup \mathcal{T}$ 。

算法 3.2 平移一致性

输入: 来自一条假设路径的两个节点 $\mathcal{N}^i = (\mathcal{F}_c^i, \mathcal{F}_r^i)$, $\mathcal{N}^j = (\mathcal{F}_c^j, \mathcal{F}_r^j)$ 以及满足旋转一致性的旋转变换集合 \mathcal{R} .

输出: $\mathcal{S} = \mathcal{T} \cup \mathcal{R}' = \{\mathbf{t}, \mathbf{R}' | \mathcal{F}_c^i = T(\mathcal{F}_r^i, \mathbf{R}', \mathbf{t}), \mathcal{F}_c^j = T(\mathcal{F}_r^j, \mathbf{R}', \mathbf{t}), \mathbf{R}' \in \mathbb{SO}(3), \mathbf{t} \in \mathbb{R}^3\}$.

```

1: function TranslationConsistency({ $\mathcal{N}^i, \mathcal{N}^j$ },  $\mathcal{R}$ )
2:    $\mathcal{R}' = \mathcal{R}$ .
3:   if  $\mathcal{F}_c^i = \pi_c^i, \mathcal{F}_r^i = \pi_r^i, \mathcal{F}_c^j = \pi_c^j, \mathcal{F}_r^j = \pi_r^j$  then
4:     if  $\mathbf{n}_c^i = \mathbf{n}_c^j$  then
5:       if  $d_r^i - d_c^i = d_r^j - d_c^j$  then
6:          $\mathcal{T} = \{\mathbf{t} | \mathbf{t} = \mathbf{t}_{pp1} + [\mathbf{w}_{pp1}] \times \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^3\}$ .
7:       else
8:          $\mathcal{T} = \emptyset$ .
9:     end if
10:    else if  $\mathbf{n}_c^i \neq \mathbf{n}_c^j$  then
11:       $\mathcal{T} = \{\mathbf{t} | \mathbf{t} = \mathbf{t}_{pp2} + \mu \mathbf{w}_{pp2}, \mu \in \mathbb{R}\}$ .
12:    end if
13:    else if  $\mathcal{F}_c^i = \mathcal{L}_c^i, \mathcal{F}_r^i = \mathcal{L}_r^i, \mathcal{F}_c^j = \mathcal{L}_c^j, \mathcal{F}_r^j = \mathcal{L}_r^j$  then
14:      if  $\mathbf{v}_c^i = \mathbf{v}_c^j$  then
15:        令  $\mathbf{e}_c = \frac{\mathbf{u}_c^i - \mathbf{u}_c^j}{\|\mathbf{u}_c^i - \mathbf{u}_c^j\|}, \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{u}_r^i - \mathbf{u}_r^j}{\|\mathbf{u}_r^i - \mathbf{u}_r^j\|}$ .
16:         $\mathcal{R}' = \text{RotationConsistency}(\mathbf{v}_c, \mathbf{v}_r, \mathbf{e}_c, \mathbf{e}_r)$ .
17:        if  $\|\mathbf{u}_r^i - \mathbf{u}_r^j\| = \|\mathbf{u}_c^i - \mathbf{u}_c^j\| \& \& \mathcal{R}' \neq \emptyset$  then
18:           $\mathcal{T} = \{\mathbf{t} | \mathbf{t} = \mathbf{t}_{ll1} + \mu \mathbf{w}_{ll1}, \mu \in \mathbb{R}\}$ .

```

```

19:         else
20:              $\mathcal{T} = \emptyset.$ 
21:         end if
22:         else if  $\mathbf{v}_c^i \neq \mathbf{v}_c^j$  then
23:             if  $l(\mathcal{L}_r^i, \mathcal{L}_r^j) - l(\mathcal{L}_c^i, \mathcal{L}_c^j) = 0$  then
24:                  $\mathcal{T} = \{(A_{ll}^T A_{ll})^{-1} A_{ll}^T \mathbf{b}_{ll}\}.$ 
25:             else
26:                  $\mathcal{T} = \emptyset.$ 
27:             end if
28:         end if
29:         else if  $\mathcal{F}_c^i = \pi_c^i, \mathcal{F}_r^i = \pi_r^i, \mathcal{F}_c^j = \mathcal{L}_c^j, \mathcal{F}_r^j = \mathcal{L}_r^j$  then
30:             if  $\mathbf{n}_c^{i^T} \mathbf{v}_c^j = 0$  then
31:                 if  $l(\pi_r^i, \mathcal{L}_r^j) - l(\pi_c^i, \mathcal{L}_c^j) = 0$  then
32:                      $\mathcal{T} = \{\mathbf{t} | \mathbf{t} = \mathbf{t}_{pl1} + \mu \mathbf{w}_{pl1}, \mu \in \mathbb{R}\}.$ 
33:                 else
34:                      $\mathcal{T} = \emptyset.$ 
35:                 end if
36:             else if  $\mathbf{n}_c^i = \mathbf{v}_c^j$  then
37:                  $\mathcal{T} = \{\mathbf{t} | \mathbf{t} = \mathbf{t}_{pl2} + \mathbf{R} \mathbf{w}_{pl2}, \mathbf{R} \in \mathcal{R}\}.$ 
38:             else
39:                  $\mathcal{T} = \{(A_{pl}^T A_{pl})^{-1} A_{pl}^T \mathbf{b}_{pl}\}.$ 
40:             end if
41:         end if
42:         return  $\mathcal{S} = \mathcal{T} \cup \mathcal{R}'.$ 
43:     end function

```

平面-平面: $\mathcal{F}_c^i = \pi_c^i, \mathcal{F}_r^i = \pi_r^i, \mathcal{F}_c^j = \pi_c^j, \mathcal{F}_r^j = \pi_r^j$

已知两对平面特征对于旋转变换 $\mathbf{R} \in \mathcal{R}$ 满足旋转一致性, 则其平移一致性可以通过求解线性方程组(3.47)来进行计算。

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_c^{i^T} \mathbf{t} &= d_r^i - d_c^i, \\ \mathbf{n}_c^{j^T} \mathbf{t} &= d_r^j - d_c^j. \end{aligned} \tag{3.47}$$

将式(3.47)写成矩阵形式可得

$$\mathbf{A}_{pp}\mathbf{t} = \mathbf{b}_{pp}, \quad (3.48)$$

其中

$$\mathbf{A}_{pp} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_c^i \\ \mathbf{n}_c^j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{pp} = \begin{bmatrix} d_r^i - d_c^i \\ d_r^j - d_c^j \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

当平面特征法向量满足 $\mathbf{n}_c^i = \mathbf{n}_c^j = \mathbf{n}_c$ 时, 即同一坐标系中的平面相互平行, 则有 $\text{rank}(\mathbf{A}_{pp}) = 1$ 。在这种情况下, 线性方程组(3.48)有解的条件是 $\text{rank}([\mathbf{A}_{pp}|\mathbf{b}_{pp}]) = 1$, 即

$$d_r^i - d_c^i = d_r^j - d_c^j. \quad (3.50)$$

由 $\text{rank}([\mathbf{A}_{pp}|\mathbf{b}_{pp}]) = \text{rank}(\mathbf{A}_{pp}) = 1$ 可知, 线性方程组(3.48)有无穷多个解, 且其解空间中有 2DoF 无法被约束。

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_{pp1} + [\mathbf{w}_{pp1}]_{\times} \boldsymbol{\mu}, \quad (3.51)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{pp1} &= \mathbf{n}_c, \quad \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^3, \\ \mathbf{t}_{pp1} &= (\mathbf{A}_{pp1}^T \mathbf{A}_{pp1})^{-1} \mathbf{A}_{pp1}^T \mathbf{b}_{pp1}, \\ \mathbf{A}_{pp1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{pp} \\ [\mathbf{w}_{pp1}]_{\times} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{pp1} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{pp} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

当平面特征法向量满足 $\mathbf{n}_c^i \neq \mathbf{n}_c^j$ 时, 即同一坐标系中的两个平面非平行, 则有 $\text{rank}(\mathbf{A}_{pp}) = 2$ 。由 $\text{rank}([\mathbf{A}_{pp}|\mathbf{b}_{pp}]) = 2$ 可知, 线性方程组(3.48)有无穷多个解, 其解空间中有 1DoF 无法被约束。

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_{pp2} + \mu \mathbf{w}_{pp2}, \quad (3.53)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{pp2} &= \mathbf{n}_c^i \times \mathbf{n}_c^j, \quad \mu \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{t}_{pp2} &= (\mathbf{A}_{pp2}^T \mathbf{A}_{pp2})^{-1} \mathbf{A}_{pp2}^T \mathbf{b}_{pp2}, \\ \mathbf{A}_{pp2} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{pp} \\ \mathbf{w}_{pp2}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{pp2} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{pp} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

直线-直线: $\mathcal{F}_c^i = \mathcal{L}_c^i, \mathcal{F}_r^i = \mathcal{L}_r^i, \mathcal{F}_c^j = \mathcal{L}_c^j, \mathcal{F}_r^j = \mathcal{L}_r^j$

对于两对直线特征的情况，已知满足旋转一致性的旋转变换集合 $\mathbf{R} \in \mathcal{R}$ ，其平移一致性可以通过求解线性方程组(3.55)得到。

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}_c^i]_{\times} \mathbf{t} &= \mathbf{R}\mathbf{u}_r^i - \mathbf{u}_c^i, \\ [\mathbf{v}_c^j]_{\times} \mathbf{t} &= \mathbf{R}\mathbf{u}_r^j - \mathbf{u}_c^j. \end{aligned} \quad (3.55)$$

将(3.55)写成矩阵形式可得

$$\mathbf{A}_{ll} \mathbf{t} = \mathbf{b}_{ll}, \quad (3.56)$$

其中

$$\mathbf{A}_{ll} = \begin{bmatrix} [\mathbf{v}_c^i]_{\times} \\ [\mathbf{v}_c^j]_{\times} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{ll} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}\mathbf{u}_r^i - \mathbf{u}_c^i \\ \mathbf{R}\mathbf{u}_r^j - \mathbf{u}_c^j \end{bmatrix}. \quad (3.57)$$

当直线方向向量满足 $\mathbf{v}_c^i = \mathbf{v}_c^j = \mathbf{v}_c$ 时，即同一坐标系中两个直线特征相互平行，有 $\text{rank}(\mathbf{A}_{ll}) = 2$ 。此时，线性方程组(3.56)有解的充分必要条件为 $\text{rank}([\mathbf{A}_{ll} | \mathbf{b}_{ll}]) = 2$ ，即

$$\mathbf{R}\mathbf{u}_r^i - \mathbf{u}_c^i = \mathbf{R}\mathbf{u}_r^j - \mathbf{u}_c^j. \quad (3.58)$$

根据旋转矩阵 \mathbf{R} 的特性，式(3.58)等价于

$$\|\mathbf{u}_r^i - \mathbf{u}_r^j\| = \|\mathbf{u}_c^i - \mathbf{u}_c^j\|, \quad (3.59)$$

$$\mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{u}_r^i - \mathbf{u}_r^j}{\|\mathbf{u}_r^i - \mathbf{u}_r^j\|} = \frac{\mathbf{u}_c^i - \mathbf{u}_c^j}{\|\mathbf{u}_c^i - \mathbf{u}_c^j\|}. \quad (3.60)$$

由算法3.1可知，当 $\mathbf{v}_c^i = \mathbf{v}_c^j$ 时，满足旋转一致性的旋转变换 \mathbf{R} 有 1DoF 无法被约束。令 $\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_r^i = \mathbf{v}_r^j$ ，那么，在等式(3.59)成立的条件下，需要求解旋转变换使得式(3.60)与 $\mathbf{v}_c = \mathbf{R}\mathbf{v}_r$ 同时成立，即

$$\text{RotationConsistency}(\mathbf{v}_c, \mathbf{v}_r, \frac{\mathbf{u}_c^i - \mathbf{u}_c^j}{\|\mathbf{u}_c^i - \mathbf{u}_c^j\|}, \frac{\mathbf{u}_r^i - \mathbf{u}_r^j}{\|\mathbf{u}_r^i - \mathbf{u}_r^j\|}) \neq \emptyset. \quad (3.61)$$

此时，使得节点 \mathcal{N}^i 和 \mathcal{N}^j 满足平移一致性的平移变换有 1DoF 无法被约束。

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_{ll1} + \mu \mathbf{w}_{ll1}, \quad (3.62)$$

其中

$$\mathbf{w}_{ll1} = \mathbf{v}_c, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{ll1} &= (\mathbf{A}_{ll1}^T \mathbf{A}_{ll1})^{-1} \mathbf{A}_{ll1}^T \mathbf{b}_{ll1}, \\ \mathbf{A}_{ll1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ll} \\ \mathbf{w}_{ll1}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{ll1} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{ll} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

当直线方向向量满足 $\mathbf{v}_c^i \neq \mathbf{v}_c^j$ 时, 即同一坐标系中两个直线特征非平行, 则有 $\text{rank}(\mathbf{A}_{ll}) = 3$ 。此时, 线性方程组(3.56)有解的充分必要条件为 $\text{rank}([\mathbf{A}_{ll} | \mathbf{b}_{ll}]) = 3$, 即

$$l(\mathcal{L}_r^i, \mathcal{L}_r^j) - l(\mathcal{L}_c^i, \mathcal{L}_c^j) = (\mathbf{R}\mathbf{u}_r^i - \mathbf{u}_c^i)^T \mathbf{v}_c^j + (\mathbf{R}\mathbf{u}_r^j - \mathbf{u}_c^j)^T \mathbf{v}_c^i = 0, \quad (3.64)$$

其中 $l(\mathcal{L}^i, \mathcal{L}^j)$ 表示三维空间两条直线之间的垂直距离, 其计算方法为

$$l(\mathcal{L}^i, \mathcal{L}^j) = \mathbf{u}^{iT} \mathbf{v}^j + \mathbf{u}^{jT} \mathbf{v}^i. \quad (3.65)$$

式(3.64)表示当时帧两条直线之间的垂直距离等于参考帧两条直线之间的垂直距离。当式(3.64)成立时, 线性方程组(3.56)有唯一解为

$$\mathbf{t} = (\mathbf{A}_{ll}^T \mathbf{A}_{ll})^{-1} \mathbf{A}_{ll}^T \mathbf{b}_{ll}. \quad (3.66)$$

平面-直线: $\mathcal{F}_c^i = \pi_c^i, \mathcal{F}_r^i = \pi_r^i, \mathcal{F}_c^j = \mathcal{L}_c^j, \mathcal{F}_r^j = \mathcal{L}_r^j$

在这种情况下, 考虑一对平面特征 (π_c^i 和 π_r^i) 和一对直线特征 (\mathcal{L}_c^j 和 \mathcal{L}_r^j)。已知这两对特征的方向向量可以被旋转变换 $\mathbf{R} \in \mathcal{R}$ 配准到同一坐标系, 那么, 使得节点 \mathcal{N}^i 和 \mathcal{N}^j 满足节点间一致性的平移变换可以通过求解线性方程组(3.67)获得。

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_c^{iT} \mathbf{t} &= d_r^i - d_c^i, \\ [\mathbf{v}_c^j]_{\times} \mathbf{t} &= \mathbf{R}\mathbf{u}_r^j - \mathbf{u}_c^j. \end{aligned} \quad (3.67)$$

将(3.67)写成矩阵形式可得

$$\mathbf{A}_{pl} \mathbf{t} = \mathbf{b}_{pl}, \quad (3.68)$$

$$\mathbf{A}_{pl} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_c^{iT} \\ [\mathbf{v}_c^j]_{\times} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{pl} = \begin{bmatrix} d_r^i - d_c^i \\ \mathbf{R}\mathbf{u}_r^j - \mathbf{u}_c^j \end{bmatrix}. \quad (3.69)$$

当平面法向量和直线方向向量满足 $\mathbf{n}_c^{iT} \mathbf{v}_c^j = 0$, 即同一坐标系中的平面和直线相互平行时, 由于

$$\mathbf{n}_c^i \in \text{ColumnSpace}([\mathbf{v}_c^j]_{\times}), \quad (3.70)$$

因此有 $\text{rank}(\mathbf{A}_{pl}) = 2$ 。此时, $\text{rank}([\mathbf{A}_{pl} | \mathbf{b}_{pl}]) = 2$ 成立的充要条件为

$$l(\pi_r^i, \mathcal{L}_r^j) - l(\pi_c^i, \mathcal{L}_c^j) = \mathbf{n}_c^{iT} [\mathbf{v}_c^j]_{\times} (\mathbf{R}\mathbf{u}_r^j - \mathbf{u}_c^j) + (d_r^i - d_c^i) = 0, \quad (3.71)$$

其中 $l(\pi, \mathcal{L})$ 表示当平面 π 与直线 \mathcal{L} 平行时，它们之间的垂直距离，其计算方法为

$$l(\pi, \mathcal{L}) = \mathbf{n}^T [\mathbf{v}]_{\times} \mathbf{u} + d. \quad (3.72)$$

如果当前帧中平面与直线之间垂直距离等于参考帧中平面与直线之间垂直距离，则线性方程组(3.68)有无穷个解，且其解空间中有 1DoF 无法被约束。

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_{pl1} + \mu \mathbf{w}_{pl1}, \quad (3.73)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{pl1} &= \mathbf{v}_c^j, \quad \mu \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{t}_{pl1} &= (\mathbf{A}_{pl1}^T \mathbf{A}_{pl1})^{-1} \mathbf{A}_{pl1}^T \mathbf{b}_{pl1}, \\ \mathbf{A}_{pl1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{pl} \\ \mathbf{w}_{pl1}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{pl1} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{pl} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

当平面特征法向量与直线特征方向向量满足 $\mathbf{n}_c^i = \mathbf{v}_c^j$ 时，即同一坐标系中平面与直线特征相互垂直，此时有 $\text{rank}(\mathbf{A}_{pl}) = 3$ 。由算法3.1可知，在这种情况下，满足旋转一致性的旋转变换包含 1DoF 不能约束。直接求解方程组(3.68)可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= (d_r^i - d_c^i) \mathbf{n}_c^i - [\mathbf{v}_c^j]_{\times} (\mathbf{R} \mathbf{u}_r^j - \mathbf{u}_c^j) \\ &= (d_r^i - d_c^i) \mathbf{n}_c^i + \mathbf{v}_c^j \times \mathbf{u}_c^j + \mathbf{R} (\mathbf{u}_r^j \times \mathbf{v}_r^j) \\ &= \mathbf{t}_{pl2} + \mathbf{R} \mathbf{w}_{pl2}, \quad \mathbf{R} \in \mathcal{R}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

由(3.75)可知，旋转 \mathbf{R} 中包含的一个自由度 φ 也同时包含在平移变换 \mathbf{t} 中。

当平面特征法向量与直线特征方向向量同时满足 $\mathbf{n}_c^i \mathbf{v}_c^j \neq 0$ 和 $\mathbf{n}_c^i \neq \mathbf{v}_c^j$ 时，则有 $\text{rank}(\mathbf{A}) = 3$ 。在这种情况下， $\text{rank}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 3$ 成立。此时，满足平移一致性的平移变换有唯一解。

$$\mathbf{t} = (\mathbf{A}_{pl}^T \mathbf{A}_{pl})^{-1} \mathbf{A}_{pl}^T \mathbf{b}_{pl}. \quad (3.76)$$

至此，旋转一致性与平移一致性全部求解完毕。对于任意 $\mathbf{R} \in \mathcal{R}$ 以及 $\mathbf{t} \in \mathcal{T}$ ，满足方程组(3.13)，即节点 \mathcal{N}^i 和 \mathcal{N}^j 满足节点间一致性。算法3.3给出了求解节点间一致性的流程，其输入为 IT 中的两个节点 \mathcal{N}^i 和 \mathcal{N}^j ，其输出为满足节点间一致性的变换集合 \mathcal{S} 。

算法 3.3 节点间一致性

输入: 两个节点 $\mathcal{N}^i = (\mathcal{F}_c^i, \mathcal{F}_r^i)$, $\mathcal{N}^j = (\mathcal{F}_c^j, \mathcal{F}_r^j)$.
 输出: $\mathcal{S} = \{\mathbf{R}, \mathbf{t} | \mathcal{F}_c^i = T(\mathcal{F}_r^i, \mathbf{R}, \mathbf{t}), \mathcal{F}_c^j = T(\mathcal{F}_r^j, \mathbf{R}, \mathbf{t})\}$

```

1: function InterNodeConsistency({ $\mathcal{N}^i, \mathcal{N}^j$ })
2:     if  $\mathcal{F}_c^i = \pi_c^i, \mathcal{F}_r^i = \pi_r^i, \mathcal{F}_c^j = \pi_c^j, \mathcal{F}_r^j = \pi_r^j$  then
3:          $\mathbf{e}_c^i = \mathbf{n}_c^i, \mathbf{e}_r^i = \mathbf{n}_r^i, \mathbf{e}_c^j = \mathbf{n}_c^j, \mathbf{e}_r^j = \mathbf{n}_r^j$ .
4:     else if  $\mathcal{F}_c^i = \mathcal{L}_c^i, \mathcal{F}_r^i = \mathcal{L}_r^i, \mathcal{F}_c^j = \mathcal{L}_c^j, \mathcal{F}_r^j = \mathcal{L}_r^j$  then
5:          $\mathbf{e}_c^i = \mathbf{v}_c^i, \mathbf{e}_r^i = \mathbf{v}_r^i, \mathbf{e}_c^j = \mathbf{v}_c^j, \mathbf{e}_r^j = \mathbf{v}_r^j$ .
6:     else if  $\mathcal{F}_c^i = \pi_c^i, \mathcal{F}_r^i = \pi_r^i, \mathcal{F}_c^j = \mathcal{L}_c^j, \mathcal{F}_r^j = \mathcal{L}_r^j$  then
7:          $\mathbf{e}_c^i = \mathbf{n}_c^i, \mathbf{e}_r^i = \mathbf{n}_r^i, \mathbf{e}_c^j = \mathbf{v}_c^j, \mathbf{e}_r^j = \mathbf{v}_r^j$ .
8:     end if
9:      $\mathcal{R} = \text{RotationConsistency}(\mathbf{e}_c^i, \mathbf{e}_r^i, \mathbf{e}_c^j, \mathbf{e}_r^j)$ .
10:     $\mathcal{S} = \text{TranslationConsistency}(\{\mathcal{N}^i, \mathcal{N}^j\}, \mathcal{R})$ .
11:    return  $\mathcal{S}$ .
12: end function

```

根据平面和直线特征在三维空间的分布情况, 算法3.3的输出有以下四种形式, 其中 rDoF 和 tDoF 分别表示旋转自由度 (Rotational DoF) 和平移自由度 (Translational DoF)。

- (a) 1rDoF&2tDoFs 未约束: $\mathcal{S} = \{\mathbf{R}, \mathbf{t} | \mathbf{R} = R(\varphi), \varphi \in \mathbb{R}, \mathbf{t} = \mathbf{t}_0 + [\mathbf{w}]_{\times} \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^3\}$.
- (b) 1rDoF 未约束: $\mathcal{S} = \{\mathbf{R}, \mathbf{t} | \mathbf{R} = R(\varphi), \mathbf{t} = \mathbf{t}_0 + \mathbf{R}\mathbf{w}, \varphi \in \mathbb{R}\}$.
- (c) 1tDoF 未约束: $\mathcal{S} = \{\mathbf{R}, \mathbf{t} | \mathbf{R} = \text{Rot}(\mathbf{r}, \theta), \mathbf{t} = \mathbf{t}_0 + \boldsymbol{\mu}\mathbf{w}, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}\}$.
- (d) 完全约束: $\mathcal{S} = \{\mathbf{R}, \mathbf{t} | \mathbf{R} = \text{Rot}(\mathbf{r}, \theta), \mathbf{t} = \mathbf{t}_0\}$.

与这四种输出的形式所对应的特征空间分布情况列于表3.2。值得说明的是, 对于直线-直线的一般情况 ($\mathbf{v}_c^i \neq \mathbf{v}_c^j$) 以及平面-直线的一般情况 ($\mathbf{n}_c^i \neq \mathbf{v}_c^j, \mathbf{n}_c^{iT} \mathbf{v}_c^j \neq 0$), 满足节点间一致性的变换均可以被完全约束。在变换无法被完全约束时, 满足节点间一致性的变换有无穷个解, 而且算法3.3可以给出其未被约束的自由度的显示表达。而在后文假设路径更新的过程中, 会有更多节点, 即更多组特征参与到位姿的解算中, 直到位姿变换的求解结果收敛到唯一解, 这个过程进一步提升了系统的鲁棒性。

在 IT 结构的构建过程中, 对于一个已存在的假设路径 \mathcal{P}_n 和一个新加入的

表 3.2 算法3.3四种输出形式所对应的特征空间分布

	平面-平面	直线-直线	平面-直线
1rDoF&2tDoFs 未约束	$\mathbf{n}_c^i = \mathbf{n}_c^j$	-	-
1rDoF 未约束	-	-	$\mathbf{n}_c^i = \mathbf{v}_c^j$
1tDoF 未约束	$\mathbf{n}_c^i \neq \mathbf{n}_c^j$	$\mathbf{v}_c^i = \mathbf{v}_c^j$	$\mathbf{n}_c^{iT} \mathbf{v}_c^j = 0$
完全约束	-	$\mathbf{v}_c^i \neq \mathbf{v}_c^j$	$\mathbf{n}_c^{iT} \mathbf{v}_c^j \neq 0$

节点 \mathcal{N}^{n+1} , 计算 \mathcal{N}^{n+1} 与 \mathcal{P}_n 中每个节点之间的节点间一致性, 如式(3.77)所示。

$$\mathcal{S}_{(n+1)i} = \text{InterNodeConsistency}(\{\mathcal{N}^{n+1}, \mathcal{N}^i\}), \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.77)$$

如果 $\mathcal{S}_{(n+1)i} \neq \emptyset, \forall i \in \{1, \dots, n\}$, 则将节点 \mathcal{N}^{n+1} 加入 \mathcal{P}_n , 获得长度为 $n+1$ 的假设路径 $\mathcal{P}_{n+1} = \{\mathcal{N}^{n+1}\} \cup \mathcal{P}_n$ 。 \mathcal{P}_{n+1} 生成之后, 其中任意两个节点 \mathcal{N}^i 和 $\mathcal{N}^j (\forall i, j \in \{1, \dots, n+1\})$ 所对应的特征匹配对可以被变换 $\mathbf{R}, \mathbf{t} \in \mathcal{S}_{ij} = \text{InterNodeConsistency}(\{\mathcal{N}^i, \mathcal{N}^j\})$ 配准到同一坐标系。然而, 对于 $\forall i, j, k, l \in \{1, \dots, n+1\} (i \neq j \neq k \neq l)$, 其对应的变换集合 \mathcal{S}_{ij} 和 \mathcal{S}_{kl} 并不一定相等。换言之, 节点间一致性的计算无法使得一条假设路径上的全部节点所对应的特征都配准到同一坐标系。因此, 当一个新的节点加入一条假设路径后, 需要对满足节点间一致性的变换集合进行融合, 解算出能够使得路径上所有节点同时得到配准的坐标变换。在下一节中, 将对这个问题进行求解。

3.3.3 一致变换模型

对于 IT 中的每条假设路径, 定义其一致变换模型 (Consistent Transformation Model, CTM) 为使得这条假设路径上所有节点所对应的匹配特征配准到同一坐标系下的三维空间刚体变换的集合。

定义 3.2【一致变换模型 (CTM)】 对于一条长度为 n 的假设路径 $\mathcal{P}_n = \{\mathcal{N}^n, \mathcal{N}^{n-1}, \dots, \mathcal{N}^1\}$, 其 CTM 定义为

$$\mathcal{M}(\mathcal{P}_n, \mathcal{S}_n), \quad (3.78)$$

其中

$$\mathcal{S}_n = \{\mathbf{R}, \mathbf{t} | \mathcal{F}_c^i = T(\mathcal{F}_r^i, \mathbf{R}, \mathbf{t}), \forall i = 1, \dots, n\}. \quad (3.79)$$

当 $\mathcal{S}_n \neq \emptyset$ 时, $\forall \mathbf{R}, \mathbf{t} \in \mathcal{S}_n$, 称假设路径 \mathcal{P}_n 对于变换 \mathbf{R}, \mathbf{t} 是一致的。

根据定义3.2, 已知一条长度为 n 的假设路径 \mathcal{P}_n 的 CTM 为 $\mathcal{M}(\mathcal{P}_n, \mathcal{S}_n)$, 则对于 $\forall \mathbf{R}, \mathbf{t} \in \mathcal{S}_n$, \mathcal{P}_n 中所有节点所对应的特征都被变换 \mathbf{R}, \mathbf{t} 配准到同一坐标系。在 IT 的构建过程中, 维护每条假设路径的 CTM, 算法3.4给出了更新 CTM 的具体流程。

算法 3.4 变换模型更新算法

输入: 假设路径 \mathcal{P}_n 的 CTM $\mathcal{M}(\mathcal{P}_n, \mathcal{S}_n)$ 和新加入的节点 \mathcal{N}^{n+1} .

输出: 更新后假设路径 \mathcal{P}_{n+1} 的 CTM $\mathcal{M}(\mathcal{P}_{n+1}, \mathcal{S}_{n+1})$.

```

1: function Update( $\mathcal{M}(\mathcal{P}_n, \mathcal{S}_n), \mathcal{N}^{n+1}$ )
2:    $\mathcal{P}_{n+1} = \{\mathcal{N}^{n+1}\} \cup \mathcal{P}_n$ .
3:    $\mathcal{S} = \mathcal{S}_n$ .
4:   for  $i = 1$  to  $n$  do
5:      $\mathcal{S}_{(n+1)i} = \text{InterNodeConsistency}(\{\mathcal{N}^{n+1}, \mathcal{N}^i\})$ .
6:     if  $\mathcal{S}_{(n+1)i} = \emptyset$  then
7:        $\mathcal{S} = \emptyset$ .
8:       break.
9:     else
10:       $\mathcal{S} = \text{Fuse}(\mathcal{S}, \mathcal{S}_{(n+1)i})$ .
11:    end if
12:  end for
13:   $\mathcal{S}_{n+1} = \mathcal{S}$ .
14:  return  $\mathcal{M}(\mathcal{P}_{n+1}, \mathcal{S}_{n+1})$ .
15: end function

```

当一个新的节点 \mathcal{N}^{n+1} 加入 \mathcal{P}_n , 得到新的假设路径 \mathcal{P}_{n+1} 及其 CTM $\mathcal{M}(\mathcal{P}_{n+1}, \mathcal{S}_{n+1})$ 。

$$\mathcal{M}(\mathcal{P}_{n+1}, \mathcal{S}_{n+1}) = \text{Update}(\mathcal{M}(\mathcal{P}_n, \mathcal{S}_n), \mathcal{N}^{n+1}). \quad (3.80)$$

具体而言, \mathcal{P}_{n+1} 是 \mathcal{P}_n 和 $\{\mathcal{N}^{n+1}\}$ 的并集, 如算法3.4第 2 行所示。第 4-12 行是变换集合 \mathcal{S}_{n+1} 的增量求解过程, 其中函数 Fuse 计算的是两个变换集合 \mathcal{S}_n 和 $\mathcal{S}_{(n+1)i}$, ($\forall i \in \{1, \dots, n\}$) 的交集, 其具体流程请见附录 A。一条假设路径的一

致性变换集合的具体形式及其对应的特征方向向量空间分布情况如表3.2中所列。对于任意一种形式的输入，函数 Fuse 输出两个输入变换集合的交集。

经过算法3.4的 CTM 更新过程，假设路径 \mathcal{P}_{n+1} 中所有节点对于变换 $\mathbf{R}, \mathbf{t} \in \mathcal{S}_{n+1}$ 是一致的。当其输出结果不为空集，即 $\mathcal{S}_{n+1} \neq \emptyset$ 时， \mathcal{P}_{n+1} 保留在 IT 中，并且在后续树的构建过程中继续进行更新。而当 $\mathcal{S}_{n+1} = \emptyset$ 时，将假设路径 \mathcal{P}_{n+1} 从 IT 中删除（剪枝）。当一条假设路径上的节点所对应的特征不足以约束位姿变换的求解时，该假设路径的 CTM 包含无穷解。随着新节点的不断加入，CTM 的增量式更新为位姿变换的求解加入更多约束，其一致性变换也逐渐收敛至唯一解。

图3.5给出一种具体情况的示意图。图3.5(a) 中的平面特征构成两个节点 $\mathcal{N}^1 = (\mathcal{F}_c^1, \mathcal{F}_r^1)$ 和 $\mathcal{N}^2 = (\mathcal{F}_c^2, \mathcal{F}_r^2)$ ，由算法3.3可知，使这两个节点满足节点间一致性的变换集合为 $\mathcal{S}_{21} = \{\mathbf{R}, \mathbf{t} | \mathbf{R} = \text{Rot}(\mathbf{r}, \varphi), \varphi \in \mathbb{R}, \mathbf{t} = \mathbf{t}_0 + [\mathbf{r}]_{\times} \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^3\}$ ，其中 $\mathbf{r} = [0, 0, 1]^T$, $\mathbf{t}_0 = [0, 0, -1]^T$ 。可以看到，以向量 \mathbf{r} 为旋转轴的 1DoF 旋转变换以及垂直于 \mathbf{r} 平面上的 2DoF 平移变换无法被这两对平面特征约束。此时，这个长度为 2 的假设路径 $\mathcal{P}_2 = \{\mathcal{N}^2, \mathcal{N}^1\}$ 的 CTM 为 $\mathcal{M}(\mathcal{P}_2, \mathcal{S}_2)$ ，其中 $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_{21}$ 。在图3.5(b) 中，加入一对直线特征，构成新的节点 $\mathcal{N}^3 = (\mathcal{F}_c^3, \mathcal{F}_r^3)$ 。对于节点 \mathcal{N}^3 和 \mathcal{N}^2 ，满足其节点间一致性的变换集合为 $\mathcal{S}_{32} = \{\mathbf{R}, \mathbf{t} | \mathbf{R} = \mathbf{I}, \mathbf{t} = \mathbf{t}_0 + \mu \mathbf{w}_0, \mu \in \mathbb{R}\}$ ，其中 $\mathbf{w} = [0, 1, 0]^T$ 。对于节点 \mathcal{N}^3 和 \mathcal{N}^1 ，满足其节点间一致性的变换集合为 $\mathcal{S}_{31} = \mathcal{S}_{32}$ 。那么，这条长度为 3 的假设路径 $\mathcal{P}_3 = \{\mathcal{N}^3, \mathcal{N}^2, \mathcal{N}^1\}$ 的 CTM 为 $\mathcal{M}(\mathcal{P}_3, \mathcal{S}_3)$ ，其中 $\mathcal{S}_3 = \{\mathbf{R}, \mathbf{t} | \mathbf{R} = \mathbf{I}, \mathbf{t} = \mathbf{t}_0 + \mu \mathbf{w}_0, \mu \in \mathbb{R}\}$ (\mathcal{S}_3 的计算方法请见算法3.4)。可以看到，此时图3.5(a) 中无法被约束的 1DoF 旋转和 2DoF 平移变换中的一个 DoF 平移，由于节点 \mathcal{N}^3 的加入，已经得到了约束。而沿向量 \mathbf{w} 方向的 1DoF 平移变换还是无法被约束。在图3.5(c) 中，又加入一对直线特征，构成新的节点 $\mathcal{N}^4 = (\mathcal{F}_c^4, \mathcal{F}_r^4)$ 。对于节点 \mathcal{N}^4 和 \mathcal{N}^3 ，满足其节点间一致性的变换集合为 $\mathcal{S}_{43} = \{\mathbf{R}, \mathbf{t} | \mathbf{R} = \mathbf{I}, \mathbf{t} = \mathbf{t}_0\}$ 。对于节点 \mathcal{N}^4 和 \mathcal{N}^2 ，满足其节点间一致性的变换集合为 $\mathcal{S}_{42} = \{\mathbf{R}, \mathbf{t} | \mathbf{R} = \text{Rot}(\mathbf{r}, \varphi), \mathbf{t} = \mathbf{t}_1 + \mathbf{R} \mathbf{w}_1, \varphi \in \mathbb{R}\}$ ，其中 $\mathbf{t}_1 = [1, 0, -1]^T$, $\mathbf{w}_1 = [-1, 0, 0]^T$ 。而对于节点 \mathcal{N}^4 和 \mathcal{N}^1 ，满足其节点间一致性的变换集合为 $\mathcal{S}_{41} = \mathcal{S}_{42}$ 。这条长度为 4 的假设路径 $\mathcal{P}_4 = \{\mathcal{N}^4, \mathcal{N}^3, \mathcal{N}^2, \mathcal{N}^1\}$ 的 CTM 是 $\mathcal{M}(\mathcal{P}_4, \mathcal{S}_4)$ ，其中 $\mathcal{S}_4 = \{\mathbf{R}, \mathbf{t} | \mathbf{R} = \mathbf{I}, \mathbf{t} = \mathbf{t}_0\}$ 。很明显可以看出，至此，两帧之间的变换已经完全被约束。

需要说明的是，在大多数情况下，很少数量的节点就可以将一致性变换约

束至唯一解。甚至在某些情况下只需要两个节点，具体请见表3.2最后一行所列举的情况。而 CTM 的更新使得更多节点所对应的特征在变换模型下保持一致性，提高了算法对外点和噪声的鲁棒性。在 IT 构建完成后，包含最多节点的一条假设路径即为特征关联的结果。在算法的实现过程中，考虑到当前帧中可能会存在新观测到的特征，因此，IT 中的每个节点都连接一个 NULL 子节点作为通配 (wild card) 节点。

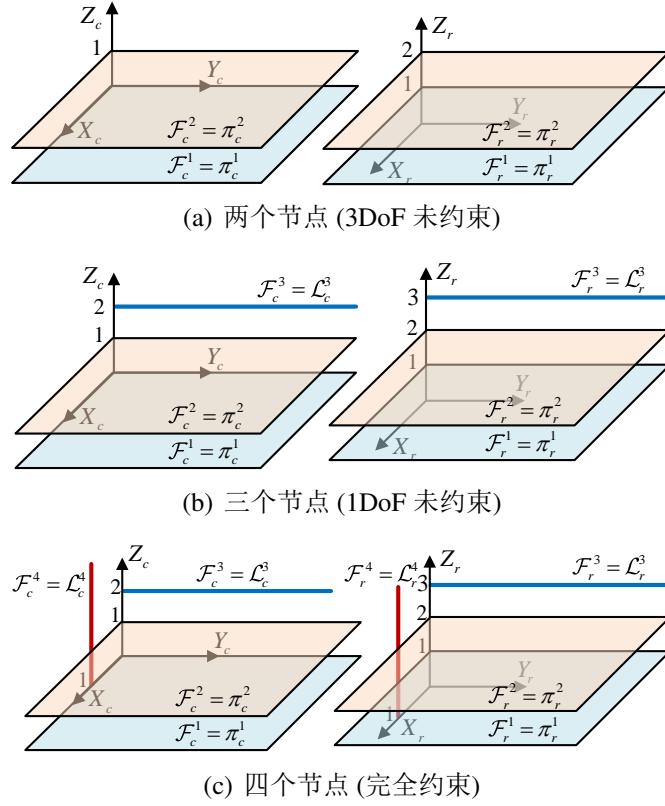


图 3.5 随着匹配特征对数量增加而约束增加的具体情况示意图

综上，本章以平面和直线这两类结构化环境 SLAM 中常用的特征为例，对 IT-HFA 算法的具体流程进行了说明。IT-HFA 算法将不同种类的特征融入到统一的特征关联框架，将关联问题的解空间用 IT 结构进行组织和存储，并充分考虑了特征之间的几何关系以及不同种类特征对于位姿变换求解的约束情况，不仅利用直线-直线、平面-平面的约束进行关联和位姿解算，而且充分利用了直线-平面约束，对多模态特征信息进行了有效地融合，既提高了位姿解算的准确性，也为机器人多模态地图的构建提供了前提和基础。

第四节 特征参数与传感器位姿的联合优化

在本章第三节中，提出了 IT-HFA 算法，对两帧中提取的平面和直线特征进行了一体化关联，并给出了传感器位姿变换的估计。然而，平面和直线特征的参数都是由被噪声干扰的观测数据拟合得到的，而参数的不确定性会影响传感器位姿变换求解结果的准确性。本节首先使用合适的特征参数化方法进行特征参数的优化，并定义特征的观测模型。然后，提出多模态特征联合优化框架，对 IT-HFA 算法输出的位姿变换估计以及地图中特征参数进行进一步优化。

3.4.1 平面参数化方法

在本章第三节中，平面特征参数表示为 $\pi = [\mathbf{n}^T, d]^T$ ，其中平面法向量 \mathbf{n} 满足 $\mathbf{n}^T \mathbf{n} = 1$ 。对于三维空间中一点 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ ，若满足方程 $\mathbf{n}^T \mathbf{p} + d = 0$ ，则该点位于平面 π 上。注意到，当这个方程两边同时乘以一个不为零的常数，其所代表的平面特征不会发生改变。由此可见，三维空间平面参数只有三个自由度。因此，平面参数可以表示为齐次坐标的形式 $\Pi \in \mathbb{P}^3$ 。对齐次坐标 Π 进行归一化可得 $\tilde{\pi} = \Pi / \|\Pi\| \in \mathbb{S}^3$ ，其中 \mathbb{S}^3 代表 \mathbb{R}^4 空间中的单位球面，同时在四元数乘法运算下构成李群。在平面参数 $\tilde{\pi} \in \mathbb{S}^3$ 的优化过程中，用指数映射将其最小参数化表示从 \mathbb{R}^3 空间映射到 \mathbb{S}^3 空间，

$$\exp(\zeta) = \begin{cases} \left[\frac{1}{\|\zeta\|} \sin\left(\frac{1}{2}\|\zeta\|\right) \hat{\zeta}, \cos\left(\frac{1}{2}\|\zeta\|\right) \right]^T, & \zeta \neq \mathbf{0}; \\ [0, 0, 0, 1]^T, & \zeta = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (3.81)$$

其中， $\zeta \in \mathbb{R}^3$ ， $\hat{\zeta} = \zeta / \|\zeta\|$ 。接着，用最小参数增量 ζ 对平面参数 $\tilde{\pi} \in \mathbb{S}^3$ 进行更新，

$$\tilde{\pi}' = \exp(\zeta) \circ \tilde{\pi}. \quad (3.82)$$

其中 \circ 符号表示四元数乘法运算。

平面特征的观测模型定义为

$$h_\pi(\mathbf{R}, \mathbf{t}, \tilde{\pi}_r) = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ -\mathbf{t}^T \mathbf{R} & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{\tilde{\pi}_r}{\|\tilde{\pi}_r\|}. \quad (3.83)$$

其中， $\tilde{\pi}_r = [\tilde{\mathbf{n}}_r^T, \tilde{d}_r]^T$ 表示需要进行更新的平面参数， $(\mathbf{R}, \mathbf{t}) \in \text{SE}(3)$ 表示传感器位姿变换。

3.4.2 直线参数化方法

对于直线特征，使用两种不同的参数表示方法^[80]：一种是 Plücker 坐标，用于直线特征参数的全局表达，另一种是正交表示参数，用于优化中的直线参数更新。Plücker 坐标表示为 $\tilde{\mathcal{L}} = [\tilde{\mathbf{u}}^T, \tilde{\mathbf{v}}^T]^T \in \mathbb{P}^5$ ，且满足 Plücker 约束 $\tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{v}} = 0$ 。向量 $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^3$ 的方向为直线与坐标系原点组成平面的法向量方向，而向量 $\tilde{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^3$ 为直线方向。直线的正交表示参数为 $(\mathbf{Q}, \mathbf{W}) \in \text{SO}(3) \times \text{SO}(2)$ 。对于一个 Plücker 坐标为 $\tilde{\mathcal{L}}$ 的三维空间直线，其正交表示 (\mathbf{Q}, \mathbf{W}) 可以通过 QR 分解得到。

$$[\tilde{\mathbf{u}} | \tilde{\mathbf{v}}] = \mathbf{Q} \Sigma, \quad (3.84)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} & \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} & \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|} \end{bmatrix} \in \text{SO}(3), \\ \Sigma &= \begin{bmatrix} \|\mathbf{u}\| & 0 \\ 0 & \|\mathbf{v}\| \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.85)$$

矩阵 \mathbf{W} 为

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & \sigma_1 \end{bmatrix} \in \text{SO}(2), \quad (3.86)$$

其中

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \|\mathbf{u}\|, \\ \sigma_2 &= \|\mathbf{v}\|. \end{aligned} \quad (3.87)$$

则直线的最小参数化表示为 $\rho = [\phi^T, \phi]^T$ ，其中 $\phi \in \mathbb{R}^3$ ， $\phi \in \mathbb{R}$ 。 (\mathbf{Q}, \mathbf{W}) 的更新方式为

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{Q} \exp([\phi]_{\times}), \\ \mathbf{W} &= \mathbf{W} \exp([\phi]_{\times}), \end{aligned} \quad (3.88)$$

其中， $[\phi]_{\times}$ 和 $[\phi]_{\times}$ 分别为 ϕ 和 ϕ 所对应的 3×3 和 2×2 反对称矩阵。当已知正交表示 (\mathbf{Q}, \mathbf{W}) 时，很容易得到其对应的 Plücker 坐标 $\tilde{\mathcal{L}}$ 。

$$\tilde{\mathcal{L}} = [\sigma_1 \mathbf{q}_1^T, \sigma_2 \mathbf{q}_2^T]^T, \quad (3.89)$$

其中， \mathbf{q}_i 表示矩阵 \mathbf{Q} 的第 i 列元素所构成的列向量。

直线特征的观测模型为

$$h_{\mathcal{L}}(\mathbf{R}, \mathbf{t}, \tilde{\mathcal{L}}_r) = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & [\mathbf{t}] \times \mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \cdot \frac{\tilde{\mathcal{L}}_r}{\tilde{v}_r}, \quad (3.90)$$

其中 $\tilde{\mathcal{L}}_r = [\tilde{\mathbf{u}}_r^T, \tilde{\mathbf{v}}_r^T]^T$ 表示需要进行更新的直线参数。

3.4.3 多模态特征的联合优化

在第三节中，对两帧中提取的平面和直线特征进行关联，得到已具有关联关系的平面特征 $\{\pi_{ci}, \pi_{ri}\}_{i=1, \dots, N_\pi}$ 和直线特征 $\{\mathcal{L}_{cj}, \mathcal{L}_{rj}\}_{j=1, \dots, N_{\mathcal{L}}}$ ，以及传感器位姿变换的求解结果 \mathbf{R}, \mathbf{t} 。为了降低参数的不确定性对传感器位姿求解以及地图构建的影响，对传感器位姿变换的估计以及地图中的特征参数进行进一步地优化。

多模态特征联合优化的目标函数为

$$\begin{aligned} F(\mathbf{R}, \mathbf{t}, \tilde{\pi}_{ri}, \tilde{\mathcal{L}}_{rj}) = & \sum_{i=1}^{N_\pi} \|h_{\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{t}, \tilde{\pi}_{ri}) - \pi_{ci}\|_{C_{\pi_{ci}}}^2 \\ & + \sum_{j=1}^{N_{\mathcal{L}}} \|h_{\mathcal{L}}(\mathbf{R}, \mathbf{t}, \tilde{\mathcal{L}}_{rj}) - \mathcal{L}_{cj}\|_{C_{\mathcal{L}_{cj}}}^2. \end{aligned} \quad (3.91)$$

其中 $\tilde{\pi}_r$ 和 $\tilde{\mathcal{L}}_r$ 分别代表加入地图中的平面特征和直线特征的参数，而 $h_{\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{t}, \tilde{\pi}_{ri})$ 和 $h_{\mathcal{L}}(\mathbf{R}, \mathbf{t}, \tilde{\mathcal{L}}_{rj})$ 分别代表平面特征和直线特征的观测模型，其具体形式分别在第3.4.1节与第3.4.2节给出。另外， $C_{\pi_{ci}}$ 和 $C_{\mathcal{L}_{cj}}$ 分别表示平面参数和直线参数的协方差，其具体计算方法在本章第二节给出。特征参数协方差不仅用于降低特征拟合误差的影响，还用于平衡不同参数空间中的特征参数在误差函数(3.91)中的贡献。

第五节 实验结果

本节对提出的多模态特征联合关联与优化方法进行验证。第3.5.1节对实验评测所用的公开数据集以及评测指标进行介绍。在第3.5.2节中，使用准确率与召回率作为评测标准对特征关联算法性能进行评测。在第3.5.3节中，通过计算帧间变换求解结果的旋转误差与平移误差，评价帧间配准方法的准确性。在第3.5.4节中，使用本章提出的IT-HFA算法计算视觉里程计（简写为IT-HFA-VO），并将其与三种视觉里程计方法进行比较与分析。第3.5.5节在IT-HFA-VO的基础上，加入后端优化的过程，构成完整的SLAM系统（简写为IT-HFA-SLAM），并将

其与八种先进的 SLAM 方法进行比较与分析。在本节实验中，平面特征提取使用文献 [87] 中提出的方法，直线特征提取使用文献 [88] 中的方法。

3.5.1 实验设置

实验使用两个公开数据集 TUM^[89] 和 ICL-NUIM^[90] 对本章提出的多模态特征联合关联与优化方法进行验证。实验所用的处理器为 Intel i7 CPU (1.8GHz)，运行内存为 8G。

数据集介绍

TUM 数据集中包含 39 个由 RGB-D 传感器 (Kinect 1.0, Asus Xtion) 在不同场景下、以不同的运动模式采集得到的图像序列，包含彩色图像和深度图像，图像分辨率均为 640×480 ，采集频率为 30Hz。采集场景主要包括办公室场景 ($6 \times 6m^2$) 和工业大厅场景 ($10 \times 12m^2$)，如图3.6(a) 和图3.6(b) 所示，运动模式主要包括 6DoF 无约束的手持传感器运动以及固定在移动机器人 (Prioneer 3) 平台上的运动，如图3.6(c) 和图3.6(d) 所示。与此同时，数据集中还包含了使用运动捕捉系统获取到的传感器位姿基准值 (groundtruth)，用于对 SLAM 或 VO 方法估计得到的传感器位姿的准确性进行评测。所使用的运动捕捉系统中包含八个高速相机，拍摄频率为 100Hz。

ICL-NUIM 数据集是在虚拟场景中使用 POVRay 技术^[91] 生成的 RGB-D 传感器观测的仿真数据，包含了两个虚拟场景，即起居室场景 (living room) 和办公室场景 (office room)，如图3.7(a) 和图3.7(b) 所示，并且为起居室场景提供了三维场景模型，如图3.7(c) 和图3.7(d)，可以用于地图重建的准确性的评估。在根据给定传感器轨迹生成模拟观测的仿真数据时，考虑了两种不同类型的传感器噪声，即深度观测噪声^[92] 以及 RGB 图像观测噪声^[91]。

实验评测标准

实验使用两种评测指标，即相对位姿误差 (Relative Pose Error, RPE) 和绝对轨迹误差 (Absolute Trajectory Error, ATE)^[89]，对 VO 及 SLAM 系统性能进行评价。RPE 指标计算在固定的时间间隔 Δ 内传感器位姿估计的累积误差。假设给定作为基准的传感器轨迹为 $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_n \in \mathbb{SE}(3)$ ，而 SLAM 系统输出的估计轨迹表示为 $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n \in \mathbb{SE}(3)$ ，并且相同的下标表示同一采样时刻。定义 i

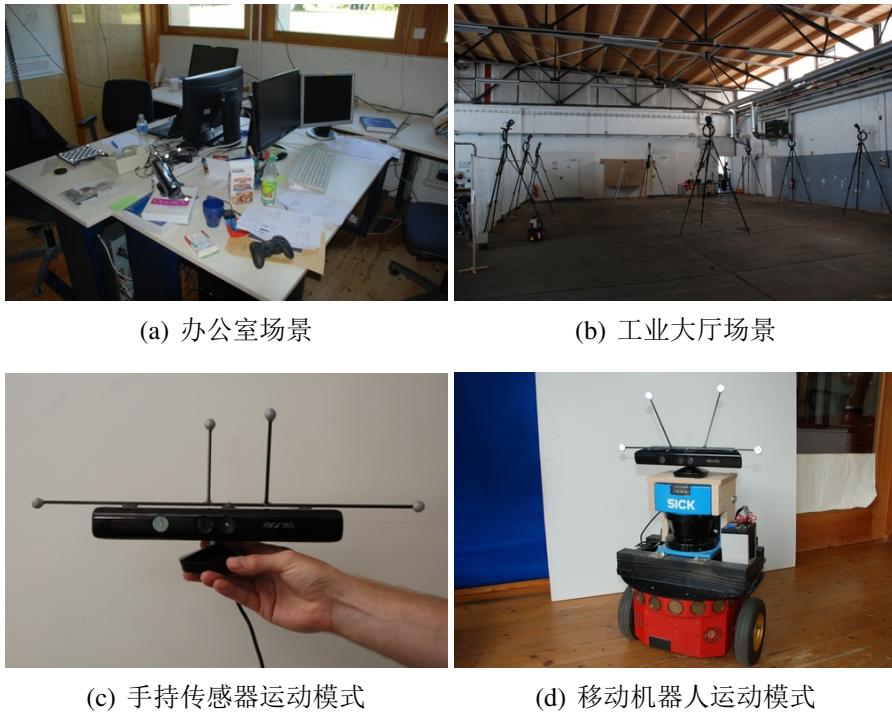


图 3.6 TUM 数据集采集场景与运动模式^[89]

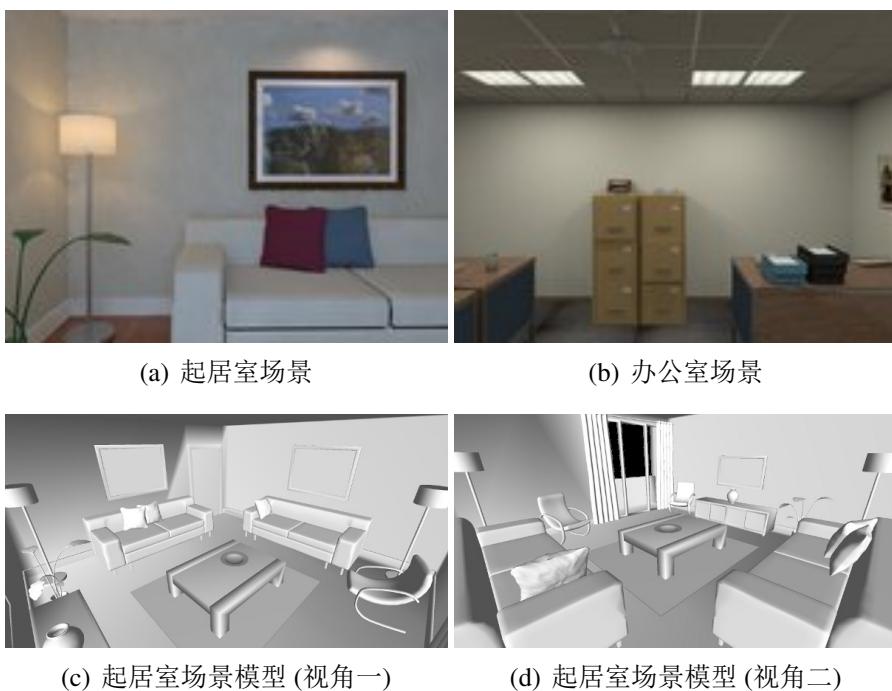


图 3.7 ICL-NUIM 数据集虚拟场景及起居室场景模型^[90]

时刻的相对误差向量为

$$\mathbf{E}_i = (\mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{Q}_{i+\Delta})^{-1} (\mathbf{P}_i^{-1} \mathbf{P}_{i+\Delta}). \quad (3.92)$$

对于包含 n 个传感器位姿的轨迹，可以获得 $m = n - \Delta$ 个时刻处的误差向量。接着，计算所有时刻的误差向量的均方根误差值 (Root Mean Square Error, RMSE) 为

$$\text{RMSE}(\mathbf{E}_{1:n}, \Delta) = \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|\text{trans}(\mathbf{E}_i)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.93)$$

其中 $\text{trans}(\mathbf{E}_i)$ 表示误差向量 \mathbf{E}_i 中的平移误差向量。

ATE 指标评价了 SLAM 方法估计的传感器轨迹与基准轨迹的全局一致性。首先，计算使这两个轨迹得到配准的刚体变换 \mathbf{S} ^[93]，然后，计算 i 时刻的绝对轨迹误差向量为

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{S} \mathbf{P}_i. \quad (3.94)$$

与相对位姿误差的计算类似，计算所有时刻的平移误差的 RMSE 为

$$\text{RMSE}(\mathbf{F}_{1:n}) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|\text{trans}(\mathbf{F}_i)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.95)$$

3.5.2 特征关联实验结果与分析

本节将 IT-HFA 算法分别与基于视觉特征的关联算法以及基于 RANSAC 的关联算法进行比较。为此，对实验所使用数据集中的匹配特征进行人工标注，以此作为真实值，用于实验评测和比较。算法对比的评测标准为准确率、召回率以及时间效率。

首先，将 IT-HFA 算法与基于视觉特征的关联算法进行对比，使用的视觉特征为 LBD 特征。LBD 是一种有效的视觉特征，对图像中提取的直线特征进行描述，广泛应用于 VO 和 SLAM 系统中^[20, 21, 28]。由于目前没有对平面特征进行有效描述的视觉特征，因此，公平起见，在 IT-HFA 算法中也只使用直线特征与基于 LBD 的关联算法进行对比。在实验中，对于每个图像序列，统计每帧特征关联结果的准确率、召回率和运行时间，并将统计结果绘制成箱线图，如图3.8(a) 所示。箱线图中，长方形上下边分别代表上四分位数和下四分位数，中间横线代表中位数，上下须 (whisker) 边缘分别代表最大观测值 (即上四分位数减去 1.5 倍上下四分位数之差) 和最小观测值 (即下四分位数减去 1.5 倍上下四

分位数之差), 红色加号所在点为异常值(即大于最大观测值或小于最小观测值的数据点)。

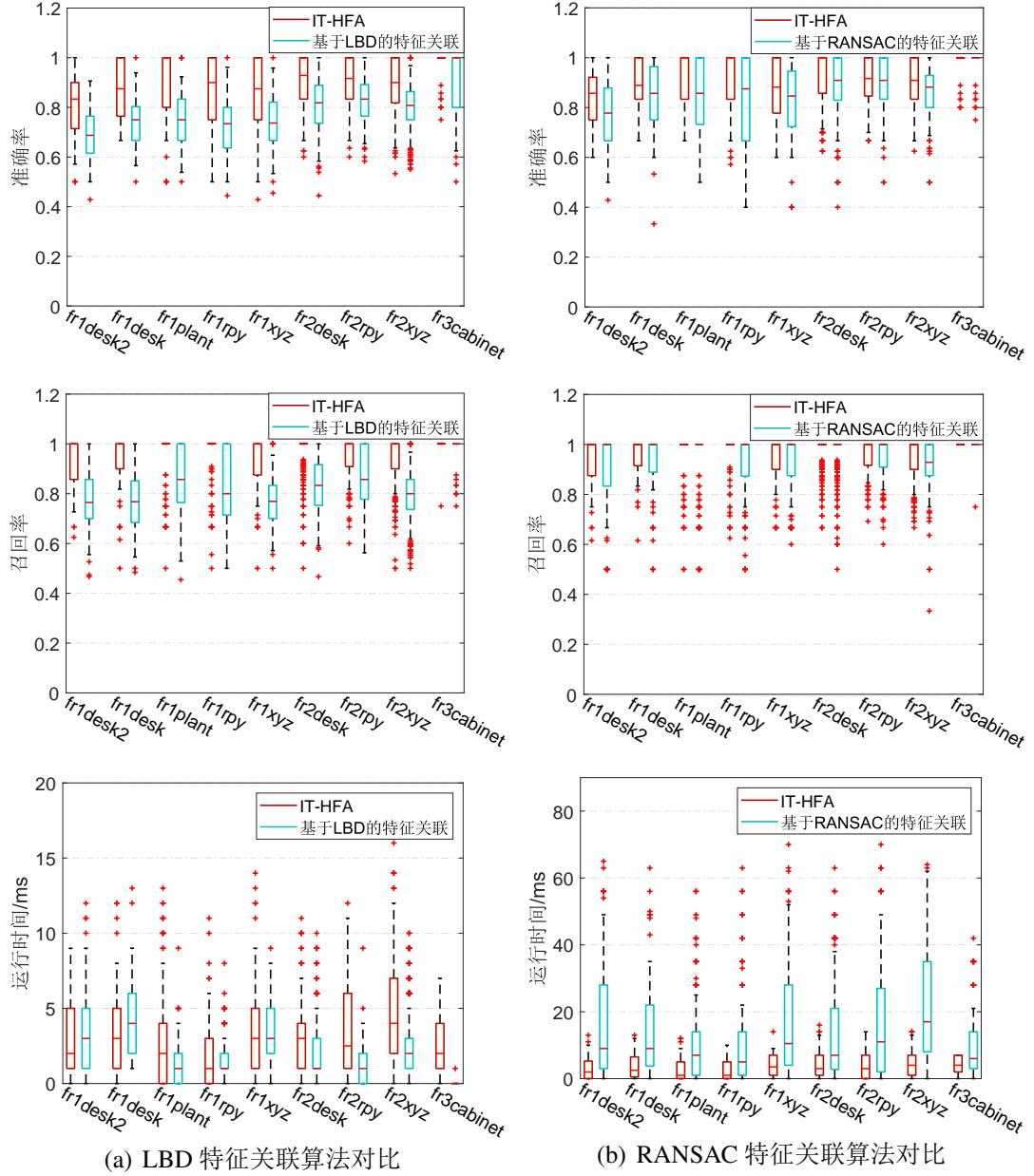


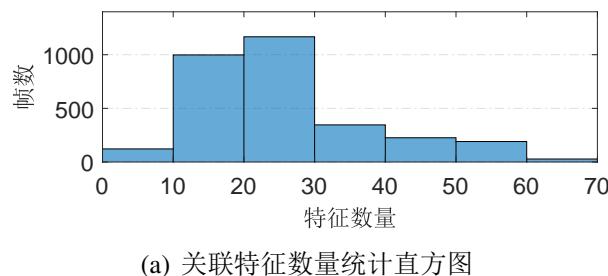
图 3.8 特征关联算法对比实验结果

从图中可以看出, IT-HFA 算法的准确率和召回率均高于 LBD 算法。由于 LBD 算法是对图像上二维直线附近的视觉纹理进行描述, 因此, 受到视角变化、光照变化以及运动模糊等因素的影响, 这也是多数视觉特征共同的劣势。相比

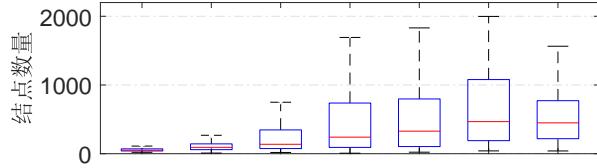
而言，本章提出的 IT-HFA 算法充分考虑到三维空间中高层特征之间的几何关系，这些几何关系很少受到视觉纹理的影响，因此，对视角与光照等因素有较强的鲁棒性。而从图3.8(a) 中运行时间统计箱线图中可以看出，这两种方法均具有较高的实时性。

接着，将 IT-HFA 算法与基于 RANSAC 算法的特征关联方法进行实验对比。RANSAC 算法被广泛应用于 VO 或 SLAM 系统中的特征关联过程^[27, 40]。在本章实验中，对比方法为文献 [27] 中所使用的基于 RANSAC 的平面与直线特征关联方法。准确率、召回率与运行时间的统计结果箱线图如图3.8(b) 所示。RANSAC 算法可以通过增加迭代次数获得较好的特征关联结果，从图中可以看到，基于 RANSAC 的特征关联方法也有着较高的准确率与召回率。然而，RANSAC 算法的时间性能明显低于 IT-HFA 算法，因为 RANSAC 算法是一个迭代的过程，通常需要较长的时间才能收敛到较好的结果。相比而言，IT-HFA 算法可以直接得到特征关联以及位姿变换的封闭解，而不正确的关联假设在 IT 构建过程中被剪枝，因此有着很高的运行效率。

另外，图3.9给出了每帧关联特征数量的统计直方图 (对应图3.8所列的九个图像序列) 及其每个统计区间内对应的 IT 节点数量的统计箱线图。从图中可以看出，每帧所关联特征的数量多分布于 10 到 30 之间，而其所对应的 IT 节点数量是比较少的。此外，尽管节点数量随着关联特征数量的增加而增加，其计算复杂度都维持在可接受范围内。



(a) 关联特征数量统计直方图



(b) 各个统计区间内对应 IT 节点数量统计箱线图

图 3.9 关联特征以及 IT 节点数量统计结果

整体而言，从图3.8及图3.9均可以明显看出，IT 结构的构建有着很好的实时性能。因为在 IT 构建的过程中，随着节点的加入，对位姿变换的约束也随之增加，在特征关联和位姿变换同时求解的过程中，绝大多数错误的关联假设都被及时剪枝，因而大幅度缩减了 IT 的搜索空间，使得 IT-HFA 具有很高的实时性。图3.10对两个典型室内场景中提取的特征所构建的 IT 结构进行绘制，从中可以看出绝大多数子树都在 IT 构建的早期被剪枝。

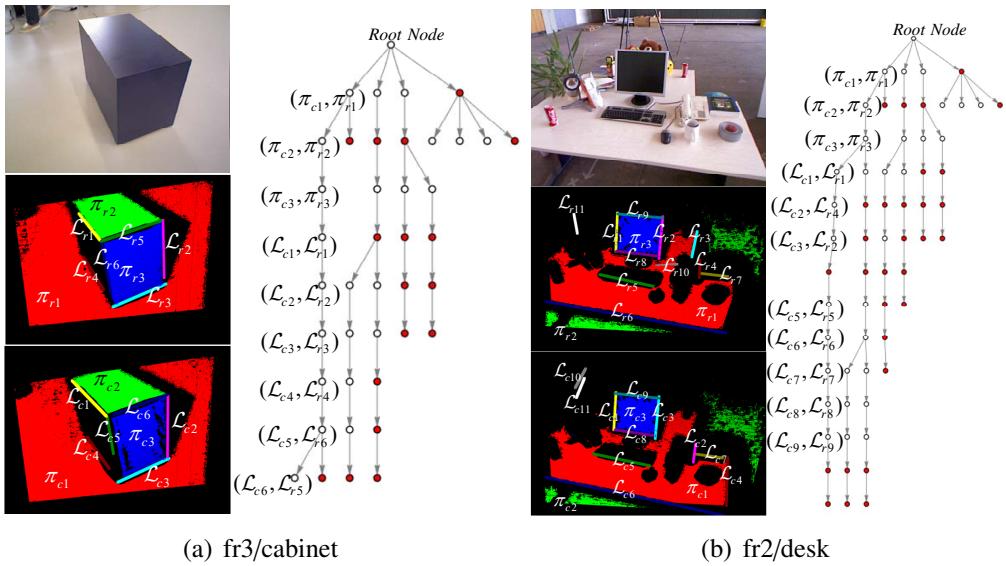


图 3.10 两个典型室内场景提取特征及其对应 IT 结构

3.5.3 帧间配准实验结果与分析

与基于视觉特征的关联方法不同，IT-HFA 算法和基于 RANSAC 的关联算法在进行特征匹配的同时也对传感器位姿变换进行计算。在 IT-HFA 算法中，对于每一条假设路径，都会维护其对应的 CTM，其中包含能够使假设路径上全部节点对应特征配准到同一坐标系的位姿变换。而基于 RANSAC 的特征关联算法则在每次迭代中对特征进行随机采样，并用这些采样得到的特征进行位姿变换的估计。在本节实验中，分别使用 IT-HFA 算法和基于 RANSAC 的算法进行平面与直线特征的联合关联，并对实验结果进行对比与分析。除此之外，IT-HFA 算法分别只对平面特征和只对直线特征进行关联，验证多模态特征融合对定位结果的提升作用。评测指标是传感器位姿变换估计的平移变换误差以及旋转变换误差，如图3.11所示。

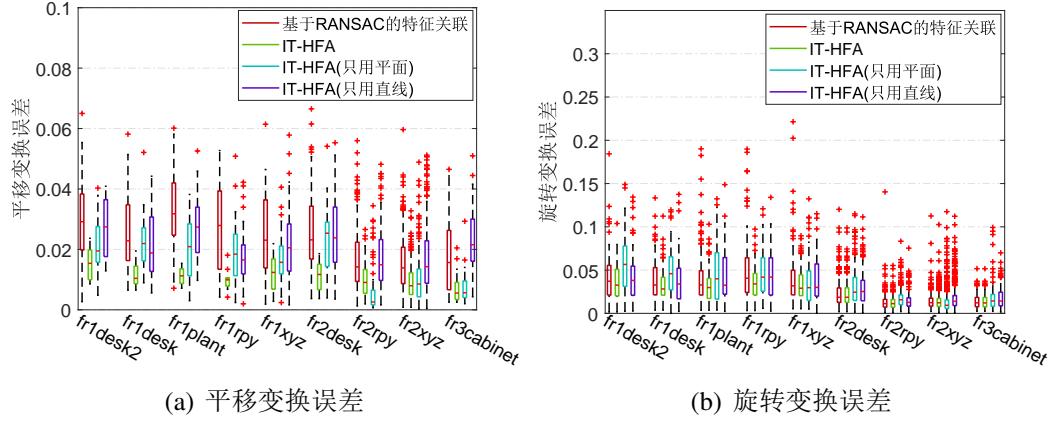


图 3.11 帧间匹配误差对比

从图3.11(a) 中可以看出，使用多模态特征融合的 IT-HFA 算法在多数图像序列上都获得了最小的平移变换误差。图3.11(b) 给出了旋转变换误差的对比结果。由于从图3.11(b) 无法明显地看出各个算法的差别，所以分别对每组数据的均值和方差进行统计并列于表3.3。从表中可以明显看出，与其他三组实验结果相比，使用多模态特征的 IT-HFA 算法在平移和旋转变换误差上获得了最小的均值和方差，证明了多模态特征融合的 IT-HFA 算法在帧间配准中表现出的准确性和稳定性。

在使用平面特征进行位姿计算时，由于平面特征通常数量较少，无法提供足够位姿解算的约束，经常会出现位姿求解退化的情况。在文献 [27], [36] 和 [51] 中，都对此问题进行了讨论和分析。需要说明的是，在图3.11中所示的 IT-HFA(只用平面) 结果中，未统计出现的位姿求解退化的情况。表3.4统计了 IT-HFA(只用平面) 实验中位姿求解退化情况所占比例，可以看出在全部图像序列的特征关联过程中，都出现过求解退化的现象。在只使用直线特征进行位姿求解时，理论上也存在退化现象。然而，场景中提取出的直线数量一般都较多，而且，只需要两条非平行直线即能完全约束位姿的解算结果，因此，在实际的实验过程中，极少出现退化情况。在图3.11中所统计的 IT-HFA(只用直线) 结果中，没有出现过退化情况。尽管如此，从图3.11可以看出 IT-HFA(只用直线) 的帧间匹配准确性要低于 IT-HFA(只用平面)，因为直线特征多数都提取于物体边缘或图像灰度值梯度较大处，这些位置的观测噪声通常较大^[28]。综上所述，基于多模态特征融合的特征关联和位姿解算不仅提升了位姿估计精度，而且还避免了退化问题的影响。

表 3.3 旋转误差均值和方差对比

	Mean(rad)			
	RANSAC	IT-HFA	IT-HFA(PLANE)	IT-HFA(LINE)
fr1/desk2	0.042	0.036	0.057	0.043
fr1/desk	0.039	0.034	0.048	0.038
fr1/plant	0.041	0.031	0.045	0.042
fr1/rpy	0.050	0.036	0.048	0.044
fr1/xyz	0.041	0.033	0.036	0.039
fr2/desk	0.023	0.023	0.030	0.029
fr2/rpy	0.013	0.012	0.017	0.014
fr2/xyz	0.014	0.013	0.013	0.017
fr3/cabinet	0.014	0.013	0.018	0.018
	Variance($\times 10^{-3} rad$)			
	RANSAC	IT-HFA	IT-HFA(PLANE)	IT-HFA(LINE)
fr1/desk2	0.782	0.413	1.048	0.851
fr1/desk	0.630	0.387	0.809	0.806
fr1/plant	1.056	0.341	0.979	0.829
fr1/rpy	1.485	0.365	0.725	0.813
fr1/xyz	1.104	0.358	0.639	0.677
fr2/desk	0.272	0.231	0.453	0.374
fr2/rpy	0.127	0.059	0.126	0.093
fr2/xyz	0.119	0.080	0.163	0.197
fr3/cabinet	0.083	0.083	0.342	0.198

表 3.4 只使用平面特征的 IT-HFA 算法中位姿求解退化情况所占比例

fr1/desk2	fr1/desk	fr1/plant	fr1/rpy	fr1/xyz	fr2/desk	fr2/rpy	fr2/xyz	fr3/cabinet
71.7%	79.8%	58.6%	70.1%	76.3%	64.8%	61.0%	79.0%	82.8%

3.5.4 视觉里程计实验结果与分析

在本节实验中，将 IT-HFA-VO 在公开数据集上的运行结果与三个 VO 算法进行比较：Prob-RGBD-VO^[28]，Canny-VO^[66] 以及 STING-VO^[36]。Prob-RGBD-VO 使用点、直线、平面三种特征进行 RGB-D 视觉里程计的计算，在位姿优化的过程中考虑特征不确定度的影响。Canny-VO 算法对两帧图像中提取的 Canny 边缘进行配准来获得传感器位姿估计的结果。STING-VO 算法通过配准两帧提取的平面特征计算帧间变换，而当平面特征无法提供足够约束的时候，使用基于统计信息网格结构的扫描匹配算法，对平面特征无法约束的自由度进行计算。

表3.5给出了三种算法的对比结果，评测指标为 ATE 和 RPE 的 RMSE，其中 Prob-RGBD-VO 和 Canny-VO 两种方法的结果分别取自文献 [28] 和 [66] 中

表 3.5 VO 实验对比结果

ATE				
	IT-HFA-VO	Prob-RGBD-VO	Canny-VO	STING-VO
fr1/desk	0.040m	0.040m	0.044m	0.041m
fr1/360	0.088m	0.091m	0.242m	0.122m
fr3/str_notext_far	0.031m	0.054m	0.031m	0.040m
fr3/cabinet	0.051m	0.200m	0.057m	0.070m
lr0	0.058m	0.059m	0.035m	0.071m
RPE				
	IT-HFA-VO	Prob-RGBD-VO	Canny-VO	STING-VO
fr1/desk	0.025m; 1.7deg	0.023m; 1.7deg	0.031m; 1.9deg	0.025m; 1.9deg
fr1/360	0.062m; 2.1deg	0.064m; 2.7deg	0.121m; 4.0deg	0.092m; 3.1deg
fr3/str_notext_far	0.014m; 0.5deg	0.019m; 0.7deg	0.027m; 0.5deg	0.014m; 0.8deg
fr3/cabinet	0.016m; 1.3deg	0.039m; 1.8deg	0.036m; 1.6deg	0.011m; 1.0deg
lr0	0.011m; 0.3deg	0.006m; 0.5deg	0.014m; 0.6deg	0.019m; 0.7deg

的公开结果。从表3.5中可以看出，IT-HFA-VO 算法在多数图像序列上都取得了最好的 VO 结果。尽管 Prob-RGBD-VO 算法也使用了多种特征进行 VO 的计算，但是并没有考虑特征之间的几何关系以及特征对位姿解算问题的约束情况。相比而言，IT-HFA 算法在进行多模态特征融合时，对特征之间的几何关系以及特征对位姿求解的约束都进行了定量的分析和充分的利用，因此在视觉里程计的应用中得到了很好的效果。

3.5.5 SLAM 实验结果与分析

为了进一步验证本章提出的 IT-HFA 算法的准确性和有效性，在 IT-HFA-VO 的基础上加入后端图优化过程，对里程计的累积误差进行校正，构成一个完整的视觉 SLAM 系统，即 IT-HFA-SLAM，并将其与八个不同种类的先进 SLAM 方法进行对比。由于视觉里程计系统 IT-HFA-VO 有着很高的准确性，因此在本节实验中，使用近邻搜索的方法寻找候选闭环，并对候选结果进行验证，完成闭环检测^[94, 95]，并使用 g2o 优化框架^[96] 完成后端图优化。表3.6列出所用对比方法及实验结果，其中包括一种基于点特征的 SLAM 系统 (ORB-SLAM2^[11])，两种基于几何特征的 SLAM 系统 (CPA-SLAM^[97], STING-SLAM^[36])，两种基于多特征融合的 SLAM 系统 (PL-SLAM^[30], PinpointSLAM^[98])，以及三种基于地图融合算法的 SLAM 系统 (ElasticFusion^[99], GC-SLAM^[100], PSM-SLAM^[101])。其中，ORB-SLAM2 是基于点特征的高效 SLAM 方法，也是目前被广泛认可和应

用的开源 SLAM 系统之一。CPA-SLAM 和 STING-SLAM 都是基于平面特征的 SLAM 系统。CPA-SLAM 通过与关键帧的直接图像匹配以及与全局平面模型的几何匹配对 RGB-D 相机进行定位，而 STING-SLAM 系统则直接用平面参数计算 RGB-D 相机的位姿。PL-SLAM 和 PinpointSLAM 方法均结合点特征和几何特征（平面或直线）来进行相机定位与地图构建。而 ElasticFusion、GC-SLAM 和 PSM-SLAM 则是基于地图融合和稠密对齐的 SLAM 系统。在实验中，使用不同数据集中采集自多种室内场景的图像序列，统计其结果的 ATE 与 RPE 性能指标，如表3.6所示，其中八个对比算法的实验数据均来源于各自论文中的公开结果 [30, 97–101]。

表 3.6 SLAM 实验对比结果

	IT-HFA-SLAM	ORB-SLAM2	Elastic Fusion	GC-SLAM	PSM-SLAM
fr1/xyz	0.011m	0.013m	0.011m	–	0.011m
fr1/rpy	0.020m	0.025m	0.025m	–	0.021m
fr1/desk	0.015m	0.016m	0.020m	0.019m	0.016m
fr1/desk2	0.020m	0.022m	0.048m	–	0.026m
fr1/room	0.045m	0.047m	0.068m	–	0.052m
fr2/xyz	0.011m	0.004m	0.011m	0.011m	–
fr2/desk	0.043m	0.009m	0.071m	–	0.080m
fr3/office	0.022m	0.010m	0.017m	0.026m	0.031m
fr3/nst	0.016m	0.019m	0.016m	0.016m	–
fr3/str	0.008m	0.015m	0.013m	–	–
kt0	0.009m	0.019m	0.009m	0.006m	0.005m
kt1	0.006m	0.058m	0.009m	0.006m	0.008m
kt2	0.008m	0.047m	0.014m	0.008m	0.054m
kt3	0.008m	0.037m	0.106m	0.010m	0.030m
	IT-HFA-SLAM	PL-SLAM	Pinpoint SLAM	CPA-SLAM	STING-SLAM
fr1/xyz	0.011m	0.012m	0.015m	0.011m	0.011m
fr1/rpy	0.020m	–	–	0.024m	0.025m
fr1/desk	0.015m	–	–	0.018m	0.030m
fr1/desk2	0.020m	–	–	0.029m	0.037m
fr1/room	0.045m	–	–	0.055m	0.083m
fr2/xyz	0.011m	0.004m	0.012m	0.014m	0.010m
fr2/desk	0.043m	–	0.063m	0.046m	0.053m
fr3/office	0.022m	0.019m	0.026m	0.025m	0.034m
fr3/nst	0.016m	0.020m	–	0.016m	0.018m
fr3/str	0.008m	0.009m	0.026m	–	0.009m
kt0	0.009m	–	0.004m	–	0.011m
kt1	0.006m	–	0.019m	–	0.006m
kt2	0.008m	–	0.008m	0.089m	0.021m
kt3	0.008m	–	0.016m	0.009m	0.015m

从表3.6可以看出，IT-HFA-SLAM 系统的性能在多数图像序列中要优于其它 SLAM 算法，说明了本章提出的多模态特征混合关联与位姿解算方法的准确性和鲁棒性。图3.12给出了 IT-HFA-SLAM 在其中三个图像序列上的 ATE 评测图以及相应的点云地图，直观地展示了 SLAM 结果的准确性。

第六节 本章小结

本章提出了基于多假设框架的多模态特征联合关联算法，具体而言，基于节点间一致性原则以及 CTM 更新算法，设计了 IT 结构增量式构建方法，同时给出数据关联问题以及传感器位姿解算问题的封闭解，避免了迭代求解中因收敛阈值设置不当而引起的误差的影响，也提高了算法的实时性能。本章所提出的多模态特征融合框架考虑了特征空间分布以及不同特征之间的几何关系，充分发挥了不同模态特征在 SLAM 方法中的互补优势。相比于广泛使用的基于最近邻算法以及 RANSAC 算法的多特征关联方法，本章所提框架将数据关联问题求解结果的所有可能假设都用 IT 结构进行有效地组织和存储，并通过考虑节点之间的约束以及特征对位姿的约束，有效缩减了数据关联问题的解空间，提高了算法效率，并且可以保证特征的关联结果可以被统一的位姿变换配准到同一坐标系，避免了特征关联结果与位姿解算结果不一致的问题，为多模态特征无缝融合提供了前提和基础。另外，本章所提算法具有很好的扩展性，理论上可以被扩展到任何能够参数化的高层几何特征，例如曲线、曲面等，进而应用于结构更复杂的结构化环境，甚至非结构化环境中。在多模态特征融合过程中，不同种类特征的互补优势被充分地开发和利用，不但提升了 SLAM 及 VO 系统的准确性，而且还避免了位姿求解退化的问题。本章在公开数据集上进行了大量实验，将所提方法与其他先进的 SLAM 方法进行了对比，验证了本文方法的有效性。

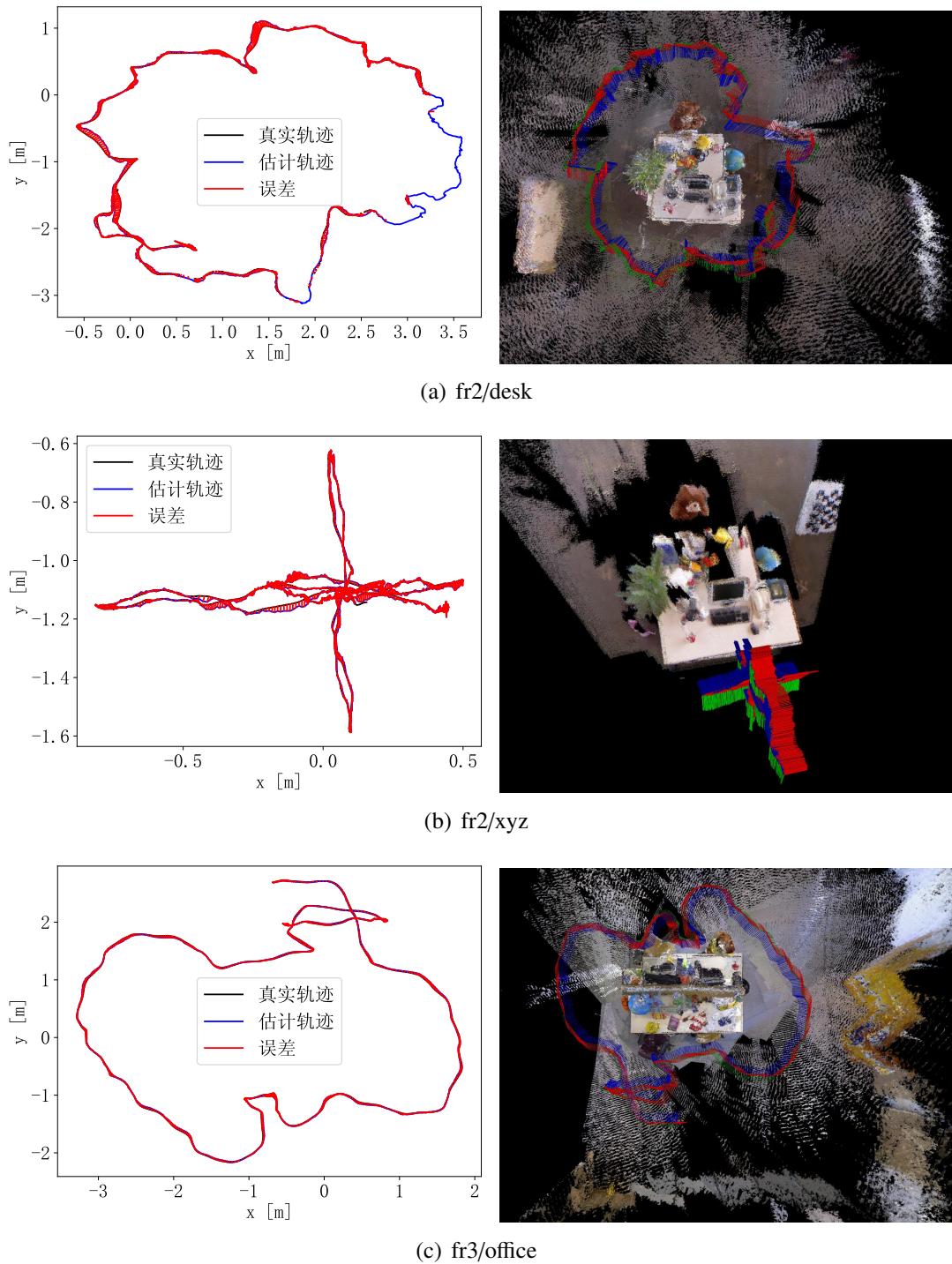


图 3.12 公开数据集上的 SLAM 实验结果 ATE 评测图与点云地图

第四章 基于面-线多模态特征自适应融合的视觉里程计

第一节 引言

视觉里程计 (Visual Odometry, VO) 在移动机器人定位和导航等任务中发挥着越来越重要的作用，准确的 VO 计算结果也是 SLAM 系统性能的前提和保障。结构化环境是移动机器人作业的重要环境类型，大部分室内环境都有结构化的特征，甚至很多室外环境中也存在结构化的区域。结构化环境包含很多的结构信息，非常有利于高层几何特征的提取。在众多高层几何特征 (平面、直线、线段、曲线、轮廓等) 中，平面特征和直线特征具有鲁棒性强、易于提取和参数形式简便等优势，因而在 SLAM 和 VO 领域得到了较好的应用。在使用平面参数计算视觉里程计时，会面临因约束不足而导致的传感器位姿求解退化问题^[34, 36, 38, 63]。与平面特征相比，通常结构化场景中提取出的直线特征数量更多^[19-21]，也更不容易出现退化情况 (只要存在两条非平行直线即可完全约束位姿的计算)，然而，通常情况下直线都分布于物体的边缘区域，导致其深度值与 RGB 值存在很大的观测噪声^[28]，因此，直线参数估计的准确性和稳定性不及平面特征。而在现有面-线融合算法^[28, 39] 中，多是在联合优化函数中分别定义不同类型特征的误差项，不考虑不同类型特征对传感器位姿约束的互补情况，没有做到真正意义上的“无缝融合”。

针对上述问题以及平面和直线在机器人位姿估计方面存在的互补性，本章提出基于面-线多模态特征自适应融合的视觉里程计算法，完成平面与直线特征在传感器位姿估计阶段的无缝融合。首先，针对第三章提出的 IT-HFA 算法缺乏对特征空间分布的描述的问题，并基于第三章中对多模态特征之间的几何关系的研究，提出平面-直线混合关联图 (Plane-Line Hybrid Association Graph, PLHAG)，描述同类特征之间以及不同类特征之间的几何关系，并完成特征的关联。然后，提出面-线多模态特征的自适应融合算法，根据平面特征参数估计的准确性和稳定性均优于直线特征的特性，设计了主辅相济的自适应融合框架，根据平面特征对位姿的约束情况来控制直线特征对位姿求解的贡献，使直线特征为平面特征提供补充，即使在使用平面特征时出现退化的情况，也尽可能使

平面特征起主导作用，从而充分利用平面特征良好的准确性和稳定性，保证位姿估计的准确性。

第二节 平面-直线混合关联图

文献 [36] 中提出的平面关联图 (Plane Association Graph, PAG) 是一种全连接结构，其节点表示一个平面特征，节点之间的边则代表平面之间的几何关系。本节对 PAG 进行扩展，针对多模态特征问题，提出 PLHAG，不仅考虑平面之间的几何关系，另外加入了直线与平面之间的几何关系，同时建立平面与平面、直线与直线之间的关联关系。

对于一帧中提取的平面集合 $\{\pi_i\}_{i=1,\dots,N_\pi}$ 与直线集合 $\{\mathcal{L}_j\}_{j=1,\dots,N_\mathcal{L}}$ ，其构建的 PLHAG 表示为 $G = (V, E)$ 。 V 表示节点的集合，包含两种类型，即平面节点 $v_{\pi,i} = \pi_i$ 和直线节点 $v_{\mathcal{L},j} = \mathcal{L}_j$ 。相应的，边的集合 E 也包含两种类型，即平面节点之间的边 (Plane-Plane Edge, PPE) $e_{\pi,ik}$ ，以及连接直线节点与平面节点的边 (Line-Plane Edge, LPE) $e_{\mathcal{L}\pi,jk}$ 。需要说明的是，与平面特征不同，直线特征多数分布在几何物体的边缘以及图像中 RGB 值变化剧烈的区域，故直线上的点对应像素的颜色信息受观测噪声影响较大，不适合用于对直线特征的描述。因此，本文不计算两个直线节点之间的颜色相似度，只计算其几何相似度，因而在构建的 PLHAG 中，直线节点和直线节点之间不进行连接。

PPE $e_{\pi,ik}$ 定义为

$$e_{\pi,ik} = (\omega_{\pi,ik}, \alpha_{\pi,ik}, d_{\pi,ik}), i, k \in 1, \dots, N_\pi, i \neq k. \quad (4.1)$$

其中 $\alpha_{\pi,ik}$ 为平面法向量 \mathbf{n}_i 和 \mathbf{n}_k 之间的夹角，如式(4.2)所示。

$$\alpha_{\pi,ik} = \arccos(\mathbf{n}_i^T \mathbf{n}_k). \quad (4.2)$$

枚举量 $\omega_{\pi,ik}$ 表示平面与平面之间的几何关系类型，包含平行关系 (parallel) 与非平行关系 (non-parallel)，如式(4.3)所示，其中 δ_{rad} 表示角度阈值，在本章实验中取值为 10° 。

$$\omega_{\pi,ik} = \begin{cases} \text{parallel}, & \text{if } \alpha_{\pi,ik} < \delta_{rad}; \\ \text{non-parallel}, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4.3)$$

$d_{\pi,ik}$ 定义为

$$d_{\pi,ik} = \begin{cases} |d_i - d_k|, & \text{if } \omega_{\pi,ik} = \text{parallel}; \\ \text{non-parallel}, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4.4)$$

类似地, LPE $e_{\mathcal{L}\pi,jk}$ 定义为

$$e_{\mathcal{L}\pi,jk} = (\omega_{\mathcal{L}\pi,jk}, \alpha_{\mathcal{L}\pi,jk}, d_{\mathcal{L}\pi,jk}), j \in 1, \dots, N_{\mathcal{L}}, k \in 1, \dots, N_{\pi}. \quad (4.5)$$

其中 $\alpha_{\mathcal{L}\pi,jk}$ 表示直线方向向量 \mathbf{v}_j 与平面法向量 \mathbf{n}_k 之间的夹角, 如式(4.6)所示。

$$\alpha_{\mathcal{L}\pi,jk} = \arccos(\mathbf{v}_j^T \mathbf{n}_k). \quad (4.6)$$

枚举量 $\omega_{\mathcal{L}\pi,jk}$ 表示直线与平面之间的几何关系类型, 如式(4.7)所示。

$$\omega_{\mathcal{L}\pi,jk} = \begin{cases} \text{parallel}, & \text{if } |\frac{\pi}{2} - \alpha_{\mathcal{L}\pi,jk}| < \delta_{rad}; \\ \text{non-parallel}, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4.7)$$

$d_{\mathcal{L}\pi,jk}$ 定义为

$$d_{\mathcal{L}\pi,jk} = \begin{cases} |\mathbf{n}_k^T [\mathbf{v}_j]_{\times} \mathbf{u}_j + d_k|, & \text{if } \omega_{\mathcal{L}\pi,jk} = \text{parallel}; \\ \text{non-parallel}, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4.8)$$

假设机器人从相邻两帧传感数据中提取的特征集合 (平面和直线) 分别表示为 $\{\pi_{ci}, \mathcal{L}_{cj}\}_{i=1, \dots, N_{\pi c}, j=1, \dots, N_{\mathcal{L}c}}$ 和 $\{\pi_{rm}, \mathcal{L}_{rn}\}_{m=1, \dots, N_{\pi r}, n=1, \dots, N_{\mathcal{L}r}}$, 其中下标 c 和 r 分别代表当前帧和参考帧, 对于这两帧特征集合分别构建平面-直线混合关联图 $G_c = (V_c, E_c)$ 和 $G_r = (V_r, E_r)$, 通过计算 G_c 中节点和 G_r 中节点之间的相似度, 建立两帧特征之间的匹配关系。

在计算节点相似度之前, 分别定义两个 PPE 之间和两个 LPE 之间的关系, 如式(4.9)与式(4.10)所示, 其中阈值 δ_{dist} 在本章实验中取值为 0.06m。

$$\begin{cases} e_{\pi c,ik} = e_{\pi r,ml} & \text{if } \omega_{\pi c,ik} = \omega_{\pi r,ml} \text{ and } |\alpha_{\pi c,ik} - \alpha_{\pi r,ml}| < \delta_{rad} \\ & \text{and } |d_{\pi c,ik} - d_{\pi r,ml}| < \delta_{dist}, \\ e_{\pi c,ik} \neq e_{\pi r,ml} & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\begin{cases} e_{\mathcal{L}\pi c,jk} = e_{\mathcal{L}\pi r,pl} & \text{if } \omega_{\mathcal{L}\pi c,jk} = \omega_{\mathcal{L}\pi r,pl} \text{ and } |\alpha_{\mathcal{L}\pi c,jk} - \alpha_{\mathcal{L}\pi r,pl}| < \delta_{rad} \\ & \text{and } |d_{\mathcal{L}\pi c,jk} - d_{\mathcal{L}\pi r,pl}| < \delta_{dist}, \\ e_{\mathcal{L}\pi c,jk} \neq e_{\mathcal{L}\pi r,pl} & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4.10)$$

满足 $e_{\pi c,ik} = e_{\pi r,ml}$ 关系的两个 PPE，以及满足 $e_{\mathcal{L}\pi c,jk} = e_{\mathcal{L}\pi r,pl}$ 关系的两个 LPE，被称为相似边。相似边代表其所连接的两个平面节点之间，或直线节点和平面节点之间相似的几何关系，用于后文中对节点的几何相似度的定义。

接着，对平面和直线节点分别定义节点之间的相似度。两个平面节点 $v_{\pi c,i} \in V_c$ 和 $v_{\pi r,m} \in V_r$ 之间的相似度 $s_\pi(v_{\pi c,i}, v_{\pi r,m})$ 由两部分组成，即颜色相似度 $s_{\pi,\text{col}}(v_{\pi c,i}, v_{\pi r,m})$ 与几何相似度 $s_{\pi,\text{geo}}(v_{\pi c,i}, v_{\pi r,m})$ 。

$$s_\pi(v_{\pi c,i}, v_{\pi r,m}) = s_{\pi,\text{col}}(v_{\pi c,i}, v_{\pi r,m}) + s_{\pi,\text{geo}}(v_{\pi c,i}, v_{\pi r,m}). \quad (4.11)$$

颜色相似度 $s_{\pi,\text{col}}(v_{\pi c,i}, v_{\pi r,m}) \in [0, 1]$ 为

$$s_{\pi,\text{col}}(v_{\pi c,i}, v_{\pi r,m}) = \frac{1}{1 + \tilde{s}_{\pi,\text{col}}(v_{\pi c,i}, v_{\pi r,m})} \quad (4.12)$$

其中 $\tilde{s}_{\pi,\text{col}}(v_{\pi c,i}, v_{\pi r,m}) \in [0, \infty)$ 定义为两个平面上的数据点所对应的图像像素点的 RGB 值分布的巴氏距离（即颜色相异度）。

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{\pi,\text{col}}(v_{\pi c,i}, v_{\pi r,m}) &= \frac{1}{8} (\mathbf{r}_{\pi c,i} - \mathbf{r}_{\pi r,m})^T \mathbf{S}_\pi^{-1} (\mathbf{r}_{\pi c,i} - \mathbf{r}_{\pi r,m}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{|\mathbf{S}_\pi|}{\sqrt{|\mathbf{S}_{\pi c,i}| \cdot |\mathbf{S}_{\pi r,m}|}} \right), \end{aligned} \quad (4.13)$$

其中

$$\mathbf{S}_\pi = \frac{1}{2} (\mathbf{S}_{\pi c,i} + \mathbf{S}_{\pi r,m}). \quad (4.14)$$

考虑到具有关联关系的平面特征与其所在扫描帧中其它关联特征之间应具有相同的几何关系，基于此，通过以相似边连接的平面节点的颜色相似度计算节点之间的几何相似度 $s_{\pi,\text{geo}}(v_{\pi c,i}, v_{\pi r,m})$ 。

$$s_{\pi,\text{geo}}(v_{\pi c,i}, v_{\pi r,m}) = \frac{1}{|I_{im}|} \sum_{(k,l) \in I_{im}} s_{\pi,\text{col}}(v_{\pi c,k}, v_{\pi r,l}). \quad (4.15)$$

其中 I_{im} 表示索引对的集合，索引到 V_c 和 V_r 中分别与节点 $v_{\pi c,i}$ 和 $v_{\pi r,m}$ 以相似边（式(4.9)）连接的平面节点。

$$I_{im} = \{(k, l) | e_{\pi c,ik} = e_{\pi r,ml}, k \in 1, \dots, N_{\pi c}, k \neq i, l \in 1, \dots, N_{\pi r}, l \neq m\}. \quad (4.16)$$

$|I_{im}|$ 则代表 I_{im} 中元素的个数。

对于两个直线节点 $v_{\mathcal{L}c,j} \in V_c$ 和 $v_{\mathcal{L}r,p} \in V_r$, 它们之间的节点相似度 $s_{\mathcal{L}}(v_{\mathcal{L}c,j}, v_{\mathcal{L}r,p})$ 定义为

$$s_{\mathcal{L}}(v_{\mathcal{L}c,j}, v_{\mathcal{L}r,p}) = s_{\mathcal{L},\text{geo}}(v_{\mathcal{L}c,j}, v_{\mathcal{L}r,p}), \quad (4.17)$$

其中 $s_{\mathcal{L},\text{geo}}(v_{\mathcal{L}c,j}, v_{\mathcal{L}r,p})$ 表示直线节点的几何相似度, 由以相似边 (式(4.10)) 连接的平面节点的颜色相似度计算。由于相比于平面特征, 直线特征上的点对应像素的颜色信息受观测噪声影响较大, 因此, 不计算两个直线节点之间的颜色相似度, 而是通过与直线节点相连的平面节点, 计算其几何相似度。由于平面特征的颜色信息具有较高的准确性, 因此, 通过与平面节点的连接关系计算得到的直线节点几何相似度也具有较高的准确性。

$$s_{\mathcal{L},\text{geo}}(v_{\mathcal{L}c,j}, v_{\mathcal{L}r,p}) = \frac{1}{|I_{jp}|} \sum_{(k,l) \in I_{jp}} s_{\pi,\text{col}}(v_{\pi c,k}, v_{\pi r,l}). \quad (4.18)$$

$$I_{jp} = \{(k, l) | e_{\mathcal{L}c,jk} = e_{\mathcal{L}r,pl}, k \in 1, \dots, N_{\pi c}, l \in 1, \dots, N_{\pi r}\}. \quad (4.19)$$

其中 $|I_{jp}|$ 为索引集合 I_{jp} 中元素的个数。

在使用 PLHAG 进行平面和直线特征匹配时, 根据式(4.11)与式(4.17)分别对来自当前帧与参考帧的每一对平面节点之间以及直线节点之间的节点相似度进行计算, 通过比较节点相似度的大小来寻找最佳匹配关系, 具体算法流程如算法4.1所示。

算法 4.1 基于 PLHAG 的平面-直线特征匹配

输入: 两帧 PLHAG: G_c 和 G_r .

输出: 平面特征匹配对集合 Π 与直线特征匹配对集合 L .

- 1: 初始化: $\Pi = \emptyset$, $L = \emptyset$.
- 2: for $i = 1 \rightarrow N_{\pi c}$ do
- 3: $m_i = \arg \max_m s_{\pi}(v_{\pi c,i}, v_{\pi r,m})$, 其中 m 满足 $m \in 1, \dots, N_{\pi r}$ 以及 $I_{im} \neq \emptyset$.
- 4: if $s_{\pi}(v_{\pi c,i}, v_{\pi r,m_i}) > \delta_s$ then
- 5: $\Pi = \Pi \cup \{v_{\pi c,i}, v_{\pi r,m_i}\}$.
- 6: end if
- 7: end for
- 8: for $j = 1 \rightarrow N_{\mathcal{L}c}$ do
- 9: $p_j = \arg \max_p s_{\mathcal{L}}(v_{\mathcal{L}c,j}, v_{\mathcal{L}r,p})$, 其中 p 满足 $p \in 1, \dots, N_{\mathcal{L}r}$ 以及 $I_{jp} \neq \emptyset$.

```

10:     if  $s_{\mathcal{L}}(v_{\mathcal{L}c,j}, v_{\mathcal{L}r,p_j}) > \delta_s$  then
11:          $\mathbf{L} = \mathbf{L} \cup \{v_{\mathcal{L}c,j}, v_{\mathcal{L}r,p_j}\}$ .
12:     end if
13: end for

```

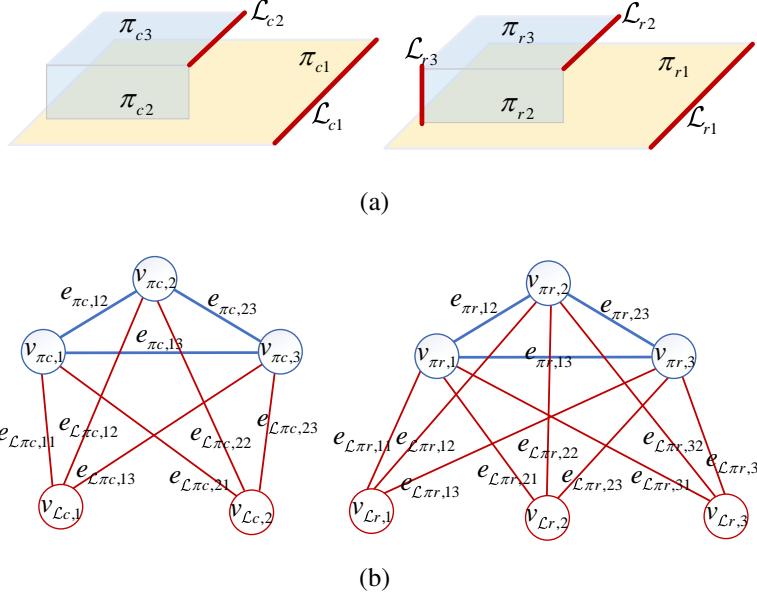


图 4.1 PLHAG 结构示意图

需要说明的是，算法第 4 行与第 10 行中阈值 δ_s 的作用是对不正确的匹配关系进行排除，比如对于当前帧中新观测到的特征，参考帧中不存在任何特征与其匹配，这种情况就需要通过对节点相似度数值的限制进行排除。由于关联特征与非关联特征所对应节点的节点相似度数值相差较大，因此，算法中阈值 δ_s 的选择对算法结果的影响非常小。本文实验中 δ_s 取值为 0.99。在图4.1中，针对场景中某种具体的特征分布情况，给出了 PLHAG 结构的示意图，其中图4.1(b) 中蓝色和红色分别标识了平面和直线节点。对于图4.1(a) 中平面，假设有

$$\begin{aligned}
 s_{\pi,\text{col}}(v_{\pi c,1}, v_{\pi r,1}) &= s_{\pi,\text{col}}(v_{\pi c,2}, v_{\pi r,2}) = s_{\pi,\text{col}}(v_{\pi c,3}, v_{\pi r,3}) = \eta, \\
 s_{\pi,\text{col}}(v_{\pi c,1}, v_{\pi r,2}) &= s_{\pi,\text{col}}(v_{\pi c,1}, v_{\pi r,3}) = \epsilon,
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

其中， η 接近 1， ϵ 充分小。以节点 $v_{\mathcal{L}c,1}$ 和 $v_{\mathcal{L}r,1}$ 为例，从图4.1(a) 中特征之间

位置关系可以看出，

$$\begin{aligned} e_{\mathcal{L}\pi c,11} &= e_{\mathcal{L}\pi r,11}, \\ e_{\mathcal{L}\pi c,12} &= e_{\mathcal{L}\pi r,12}, \\ e_{\mathcal{L}\pi c,13} &= e_{\mathcal{L}\pi r,13}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

则 $v_{\mathcal{L}c,1}$ 和 $v_{\mathcal{L}r,1}$ 所对应的索引集合为

$$I_{11} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}, \quad (4.22)$$

根据式(4.17)可知，

$$s_{\mathcal{L}}(v_{\mathcal{L}c,1}, v_{\mathcal{L}r,1}) = \eta. \quad (4.23)$$

同理可知，

$$s_{\mathcal{L}}(v_{\mathcal{L}c,1}, v_{\mathcal{L}r,2}) = s_{\mathcal{L}}(v_{\mathcal{L}c,1}, v_{\mathcal{L}r,3}) = \frac{1}{3}(\eta + 2\epsilon). \quad (4.24)$$

则根据算法4.1可知 $\{\mathcal{L}_{c1}, \mathcal{L}_{r1}\}$ 为一对匹配的直线特征。基于 PLHAG 的多特征匹配方法利用图结构充分考虑特征之间的几何关系，提高了特征匹配的鲁棒性。与 PAG 相比，PLHAG 对原有的单一节点类型进行了拓展，将平面和直线特征纳入统一框架，同时考虑了不同特征之间的约束关系，提升了算法的鲁棒性和适用性。

第三节 面-线多模态特征的自适应融合

对于 RGB-D 传感器，平面特征比直线特征具有更强的稳定性和鲁棒性，因为平面特征多提取于规则几何物体表面，如地面、墙面、桌面等，而直线特征多分布于物体边缘，对应的点云观测噪声显著高于来自规则物体表面的点云观测噪声。为此，本文主要使用平面特征计算传感器位姿。然而，由于 RGB-D 传感器的观测视野较小，且观测距离有限，导致能够提取出的平面特征数量不够充足，因此，经常出现平面特征无法完全约束 6DoF 传感器位姿计算的情况，产生位姿求解的退化问题。针对此问题，本文提出基于平面和直线自适应融合的 RGB-D 传感器 6DoF 位姿估计方法，在平面特征无法提供全部约束时，使用直线特征作为平面特征的补充，完成 6DoF 位姿的计算。

假设具有关联关系的平面特征集合表示为 $\Pi = \{\pi_{ci}, \pi_{ri}\}_{i=1, \dots, N_\pi}$ ，直线特征集合为 $\mathbf{L} = \{\mathcal{L}_{cj}, \mathcal{L}_{rj}\}_{j=1, \dots, N_L}$ 。首先，计算三维空间旋转变换 $\mathbf{R} \in \text{SE}(3)$ 和平移

变换 $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$, 使得平面特征的匹配误差最小, 即目标函数(4.25)和(4.26)达到最小。

$$F_{\pi R}(\mathbf{R}) = \sum_{i=1}^{N_\pi} \|\mathbf{n}_{ci} - \mathbf{R}\mathbf{n}_{ri}\|^2, \quad (4.25)$$

$$F_{\pi t}(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{N_\pi} (d_{ci} - (d_{ri} - \mathbf{n}_{ci}^T \mathbf{t}))^2. \quad (4.26)$$

为了检测是否出现退化解, 构造矩阵

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^{N_\pi} \mathbf{n}_{ri} \mathbf{n}_{ci}^T, \quad (4.27)$$

并计算其 SVD 可得

$$\mathbf{H} = \mathbf{Y}_r \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{Y}_c^T = \gamma_1 \mathbf{v}_{r1} \mathbf{v}_{c1}^T + \gamma_2 \mathbf{v}_{r2} \mathbf{v}_{c2}^T + \gamma_3 \mathbf{v}_{r3} \mathbf{v}_{c3}^T, \quad (4.28)$$

其中 \mathbf{Y}_r 和 \mathbf{Y}_c 为正交单位矩阵, $\boldsymbol{\Gamma}$ 为对角矩阵。

$$\mathbf{Y}_r = [\mathbf{v}_{r1}, \mathbf{v}_{r2}, \mathbf{v}_{r3}], \quad (4.29)$$

$$\mathbf{Y}_c = [\mathbf{v}_{c1}, \mathbf{v}_{c2}, \mathbf{v}_{c3}], \quad (4.30)$$

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{bmatrix}, \quad (4.31)$$

其中 $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \gamma_3$ 。根据矩阵 \mathbf{H} 的奇异值, 可以判断平面特征是否能够完全约束 6DoF 位姿的计算, 具体分为三种情况, 即 6DoF 约束情况、5DoF 约束情况和 3DoF 约束情况, 其中后两种为退化情况。下面分别对这三种情况给出详细的分析和具体的位姿计算方法。

4.3.1 6DoF 约束情况

如果 \mathbf{H} 为非奇异矩阵, 即 $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \gamma_3 > 0$, 则使式(4.25)达到最小值的解 $\hat{\mathbf{R}}$ 为

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{Y}_c \mathbf{Y}_r^T. \quad (4.32)$$

而使式(4.26)达到最小值的解 $\hat{\mathbf{t}}$ 则可以通过最小二乘方法得到。

$$\hat{\mathbf{t}} = (\mathbf{A}_\pi^T \mathbf{A}_\pi)^{-1} \mathbf{A}_\pi^T \mathbf{d}_\pi, \quad (4.33)$$

其中

$$\mathbf{A}_\pi = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{c1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{n}_{cN_\pi}^T \end{bmatrix}, \mathbf{d}_\pi = \begin{bmatrix} d_{r1} - d_{c1} \\ \vdots \\ d_{rN_\pi} - d_{cN_\pi} \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

4.3.2 5DoF 约束情况

如果 \mathbf{H} 为奇异矩阵，且 $\gamma_1 \geq \gamma_2 > \gamma_3 = 0$ ，此时平面特征的法向量 $\{\mathbf{n}_{ci}\}_{i=1,\dots,N_\pi}$ 在空间中是共面关系，且垂直于向量 \mathbf{v}_{c3} ；相应的， $\{\mathbf{n}_{ri}\}_{i=1,\dots,N_\pi}$ 在空间中同样是共面关系，且垂直于向量 \mathbf{v}_{r3} 。在这种情况下，旋转变换的求解结果 $\hat{\mathbf{R}}$ 为

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{cases} \mathbf{Y}_c \mathbf{Y}_r^T & \text{if } \det(\mathbf{Y}_c \mathbf{Y}_r^T) = 1; \\ \mathbf{Y}'_c \mathbf{Y}_r^T & \text{if } \det(\mathbf{Y}_c \mathbf{Y}_r^T) = -1. \end{cases} \quad (4.35)$$

其中 $\mathbf{Y}'_c = [\mathbf{v}_{c1}, \mathbf{v}_{c2}, -\mathbf{v}_{c3}]$ 。

而此时平移变换 $\hat{\mathbf{t}}$ 无法直接由式(4.33)计算得到，因为 $\det(\mathbf{A}_\pi^T \mathbf{A}_\pi) = 0$ 。根据式(4.34)以及平面法向量 $\{\mathbf{n}_{ci}\}_{i=1,\dots,N_\pi}$ 的空间分布情况可知，矩阵 \mathbf{A}_π 的零空间可以表示为

$$\text{null}(\mathbf{A}_\pi) = \eta \mathbf{v}_{c3}, \eta \in \mathbb{R}. \quad (4.36)$$

由此可知，沿着向量 \mathbf{v}_{c3} 方向的平移变换无法被关联的平面特征约束。因此，在计算平移变换的误差函数中加入直线特征的匹配误差，

$$F_t(\mathbf{t}) = F_{\pi t}(\mathbf{t}) + F_{\mathcal{L}t}(\mathbf{t}), \quad (4.37)$$

其中

$$F_{\mathcal{L}t}(\mathbf{t}) = \sum_{j=1}^{N_\mathcal{L}} w_j \|\mathbf{u}_{cj} - (\hat{\mathbf{R}} \mathbf{u}_{rj} + [\mathbf{v}_{cj}] \times \mathbf{t})\|^2. \quad (4.38)$$

$$w_j = \|\mathbf{v}_{cj} \times \mathbf{v}_{c3}\|. \quad (4.39)$$

此时，使得式(4.37)最小化的平移最优解为

$$\hat{\mathbf{t}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{d}, \quad (4.40)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\pi \\ \mathbf{A}_\mathcal{L} \end{bmatrix}, \mathbf{d}_\pi = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_\pi \\ \mathbf{d}_\mathcal{L} \end{bmatrix}, \quad (4.41)$$

$$\mathbf{A}_\mathcal{L} = \begin{bmatrix} [\mathbf{v}_{c1}]_\times \\ \vdots \\ [\mathbf{v}_{cN_\mathcal{L}}]_\times \end{bmatrix}, \mathbf{d}_\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}\mathbf{u}_{rj} - \mathbf{u}_{cj} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{R}}\mathbf{u}_{rN_\mathcal{L}} - \mathbf{u}_{cN_\mathcal{L}} \end{bmatrix}, \quad (4.42)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_\pi} & & & \\ & w_1 \mathbf{I}_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_{N_\mathcal{L}} \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

其中 \mathbf{I}_n 表示 n 维单位矩阵。

由式(4.37)可知，直线特征 $\{\mathcal{L}_{cj}, \mathcal{L}_{rj}\}$ 对误差函数的贡献量由权值 w_j 进行控制。而权值 w_j 并不是人为设置的，而是根据不同特征的空间分布情况自适应调节的。从式(4.39)可见，对于 $\mathbf{t} \notin \text{null}(\mathbf{A}_\pi)$ ，即在平面特征能够提供较强约束的平移方向上，直线特征的权值较小；而对于 $\mathbf{t} \in \text{null}(\mathbf{A}_\pi)$ ，即在平面特征无法提供约束的平移方向上，直线特征的权值较大，则其对平移变换求解的贡献也较大；当直线方向与 \mathbf{v}_{c3} 垂直时， $w_j = 1$ ，此时直线对平移变换求解的贡献达到最大。图4.2给出了一些典型室内场景中平面与直线特征的空间分布，其中平面特征标识为白色，而直线特征的颜色则根据权值 w_j 进行颜色映射 (右侧 color bar) 得到。从图中可以看出，对 \mathbf{v}_{c3} 方向的平移约束最强的直线，也就是垂直于该方向的直线，其权值最大 (图中红色直线)；而对于平行于该方向的直线，其权值最小 (图中蓝色直线)。

总体来说，在平面特征对平移求解约束较强的方向上，尽量使用准确性和稳定性更强的平面参数进行求解，而当产生退化时，再使用直线特征对平面特征无法约束的位姿方向的求解进行补充，实现两类特征的自适应融合。这样既确保了算法的准确性，同时也有效地解决了使用平面特征求解位姿时出现的退化问题。

4.3.3 3DoF 约束情况

如果 \mathbf{H} 为奇异矩阵，且 $\gamma_1 > \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ ，此时平面特征的法向量 $\{\mathbf{n}_{ci}\}_{i=1,\dots,N_\pi}$ 在空间中是共线关系，且沿着向量 \mathbf{v}_{c1} 的方向分布；相应的，

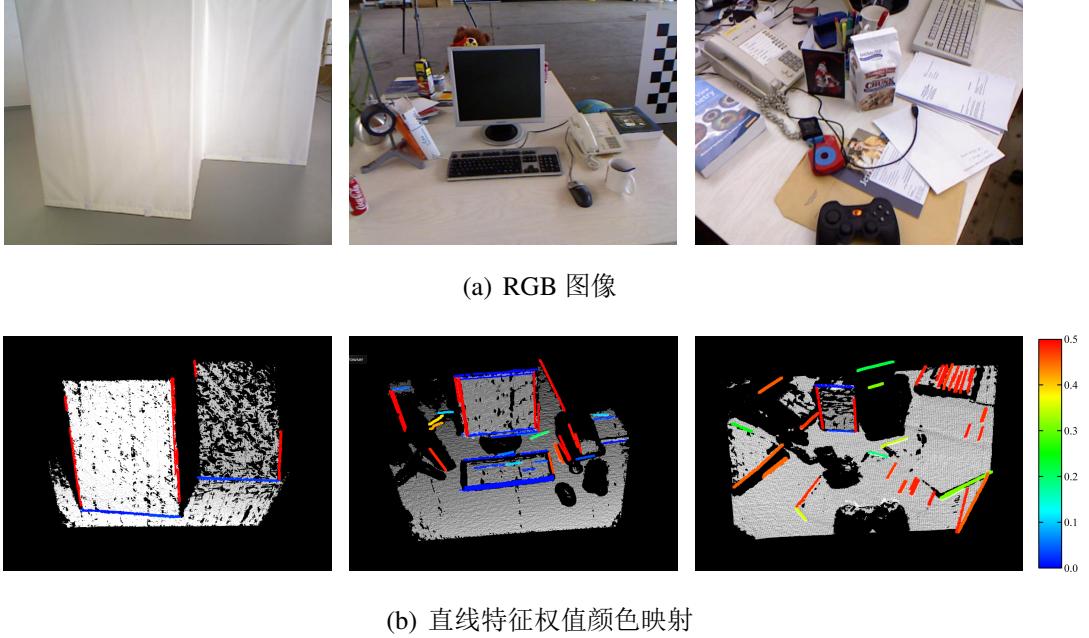


图 4.2 5DoF 约束情况下特征分布与直线权值

$\{\mathbf{n}_{ri}\}_{i=1,\dots,N_\pi}$ 在空间中也是共线关系，且沿着向量 \mathbf{v}_{r1} 的方向分布。在这种情况下，以 \mathbf{v}_{c1} 为旋转轴的旋转变换无法被平面特征所约束，即在最小化式(4.25)时存在退化情况。

假设存在旋转变换 \mathbf{R}_1 使得两帧平面特征的法向量对齐，即 $\mathbf{n}_{ci} = \mathbf{R}_1 \mathbf{n}_{ri}$, $\forall i \in \{1, \dots, N_\pi\}$ ，而 \mathbf{R}_1 与传感器真正的旋转变换 \mathbf{R} 之间还相差一个 1DoF 旋转，即以 \mathbf{v}_{c1} 为旋转轴的旋转变换 \mathbf{R}_2 。在本章方法中， \mathbf{R}_2 是通过直线特征计算的，下文分析直线特征的姿态对计算 \mathbf{R}_2 准确性的影响，并基于分析结果，给出求解旋转变换时，平面与直线特征的自适应融合方法。

考虑任意一对具有匹配关系的直线特征，假设其方向向量分别为 \mathbf{v}_{cj} 和 \mathbf{v}_{rj} ，假设 \mathbf{v}_{rj} 经过 \mathbf{R}_1 变换后为 \mathbf{v}'_{rj} ，则由 \mathbf{v}_{cj} 和 \mathbf{v}'_{rj} 可以计算 \mathbf{R}_2 为

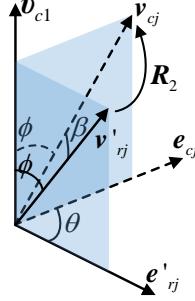
$$\mathbf{R}_2 = \cos \theta \mathbf{I}_3 + (1 - \cos \theta) \mathbf{v}_{c1} \mathbf{v}_{c1}^T + \sin \theta [\mathbf{v}_{c1}]_\times, \quad (4.44)$$

其中

$$\theta = \arccos \left(1 - \frac{1 - \mathbf{v}_{cj}^T \mathbf{v}'_{rj}}{1 - (\mathbf{v}_{c1}^T \mathbf{v}_{cj})(\mathbf{v}_{c1}^T \mathbf{v}'_{rj})} \right). \quad (4.45)$$

令

$$\phi = \langle \mathbf{v}_{c1}, \mathbf{v}_{cj} \rangle = \langle \mathbf{v}_{c1}, \mathbf{v}'_{rj} \rangle \in [0, \pi], \quad (4.46)$$


 图 4.3 角度 θ , ϕ 与 β 位置关系示意图

$$\beta = \langle \mathbf{v}_{cj}, \mathbf{v}'_{rj} \rangle \in [0, \min\{2\phi, 2(\pi - \phi)\}], \quad (4.47)$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示向量之间的夹角。各个角度之间位置关系如图4.3所示，则式(4.45)可以化简为

$$\theta = \arccos \left(1 - \frac{1 - \cos \beta}{\sin^2 \phi} \right). \quad (4.48)$$

计算旋转角度 θ 对 β 的偏导数可得

$$\frac{\partial \theta}{\partial \beta} = \frac{\sin \beta}{\sqrt{(1 - \cos \beta)(\cos \beta - \cos 2\phi)}}. \quad (4.49)$$

图4.4给出了在 ϕ 取不同值的时候，偏导数 $\frac{\partial \theta}{\partial \beta}$ 随 β 的变化曲线。从图4.4以及式(4.48)均可以看出，当 $\phi = 0.5\pi$ ，即 $\mathbf{v}_{cj}(\mathbf{v}'_{rj})$ 与旋转轴 \mathbf{v}_{c1} 垂直时， θ 与 β 呈线性关系；而 ϕ 接近 0 或 π 时，即 $\mathbf{v}_{cj}(\mathbf{v}'_{rj})$ 与 \mathbf{v}_{c1} 之间接近共线时， β 的微小扰动会使得 θ 发生剧烈变化，大幅降低旋转角度估计的准确性和稳定性。

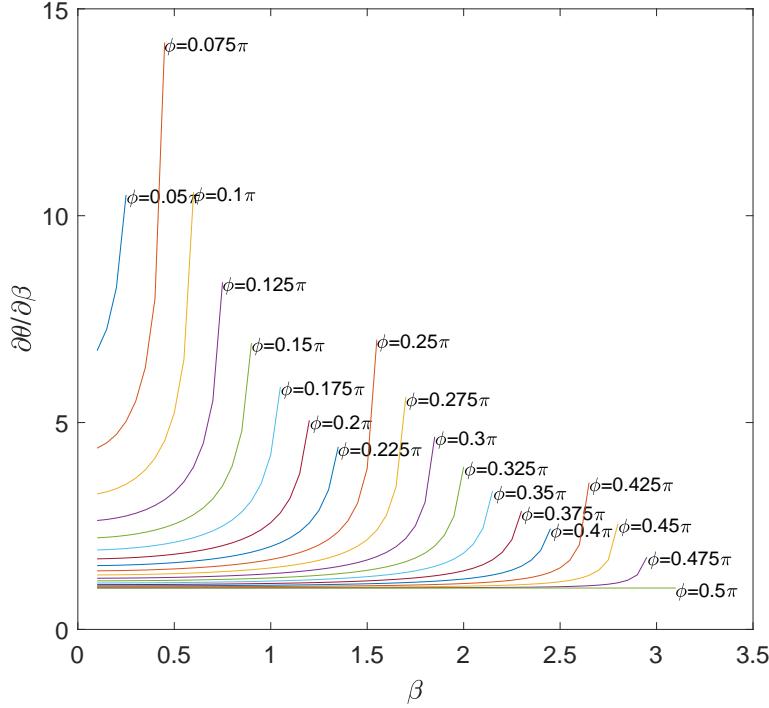
基于此，在直线特征匹配误差中，通过自适应加权方法调整每个直线特征对求解旋转变换的贡献。

$$F_R(\mathbf{R}) = F_{\pi R}(\mathbf{R}) + F_{\mathcal{L}R}(\mathbf{R}), \quad (4.50)$$

$$F_{\mathcal{L}R}(\mathbf{R}) = \sum_{j=1}^{N_{\mathcal{L}}} w_{Rj} \|\mathbf{v}_{cj} - \mathbf{R}\mathbf{v}_{rj}\|^2. \quad (4.51)$$

其中，权值 w_{Rj} 的计算方法为

$$w_{Rj} = \|\mathbf{v}_{cj} \times \mathbf{v}_{c1}\|. \quad (4.52)$$


 图 4.4 ϕ 取不同值时偏导数 $\frac{\partial\theta}{\partial\beta}$ 随 β 变化曲线

类似地，构造矩阵

$$\mathbf{H}_{\pi\mathcal{L}} = \sum_{i=1}^{N_\pi} \mathbf{n}_{ri} \mathbf{n}_{ci}^T + \sum_{j=1}^{N_{\mathcal{L}}} w_{Rj} \mathbf{v}_{rj} \mathbf{v}_{cj}^T, \quad (4.53)$$

并计算其 SVD 得到

$$\mathbf{H}_{\pi\mathcal{L}} = \mathbf{Y}_{\pi\mathcal{L}r} \boldsymbol{\Gamma}_{\pi\mathcal{L}} \mathbf{Y}_{\pi\mathcal{L}c}^T = \gamma_{\pi\mathcal{L}1} \mathbf{v}_{\pi\mathcal{L}r1} \mathbf{v}_{\pi\mathcal{L}c1}^T + \gamma_{\pi\mathcal{L}2} \mathbf{v}_{\pi\mathcal{L}r2} \mathbf{v}_{\pi\mathcal{L}c2}^T + \gamma_{\pi\mathcal{L}3} \mathbf{v}_{\pi\mathcal{L}r3} \mathbf{v}_{\pi\mathcal{L}c3}^T, \quad (4.54)$$

其中 $\mathbf{Y}_{\pi\mathcal{L}r}$ 和 $\mathbf{Y}_{\pi\mathcal{L}c}$ 是正交单位矩阵， $\boldsymbol{\Gamma}_{\pi\mathcal{L}}$ 为对角矩阵，

$$\mathbf{Y}_{\pi\mathcal{L}r} = [\mathbf{v}_{\pi\mathcal{L}r1}, \mathbf{v}_{\pi\mathcal{L}r2}, \mathbf{v}_{\pi\mathcal{L}r3}], \quad (4.55)$$

$$\mathbf{Y}_{\pi\mathcal{L}c} = [\mathbf{v}_{\pi\mathcal{L}c1}, \mathbf{v}_{\pi\mathcal{L}c2}, \mathbf{v}_{\pi\mathcal{L}c3}], \quad (4.56)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\pi\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} \gamma_{\pi\mathcal{L}1} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{\pi\mathcal{L}2} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{\pi\mathcal{L}3} \end{bmatrix}, \quad (4.57)$$

其中 $\gamma_{\pi\mathcal{L}1} \geq \gamma_{\pi\mathcal{L}2} \geq \gamma_{\pi\mathcal{L}3}$ 。最小化式(4.50)的最优解 $\hat{\mathbf{R}}$ 为

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{Y}_{\pi\mathcal{L}c} \mathbf{Y}_{\pi\mathcal{L}r}^T. \quad (4.58)$$

对于平移变换的求解，同样无法直接由式(4.33)得到，此时矩阵 \mathbf{A}_π 的零空间为

$$\text{null}(\mathbf{A}_\pi) = \eta_2 \mathbf{v}_{c2} + \eta_3 \mathbf{v}_{c3}, \eta_2, \eta_3 \in \mathbb{R}. \quad (4.59)$$

这种情况下，与 5DoF 约束情况类似，误差函数中加入直线特征的匹配误差，构造为式(4.37)，而平移变换的求解方法也如式(4.40)所示，与 5DoF 约束情况不同的是，权值 w_j 的计算方法由式(4.39)调整为式(4.60)。

$$w_j = \frac{1}{2} (\|\mathbf{v}_{cj} \times \mathbf{v}_{c2}\| + \|\mathbf{v}_{cj} \times \mathbf{v}_{c3}\|). \quad (4.60)$$

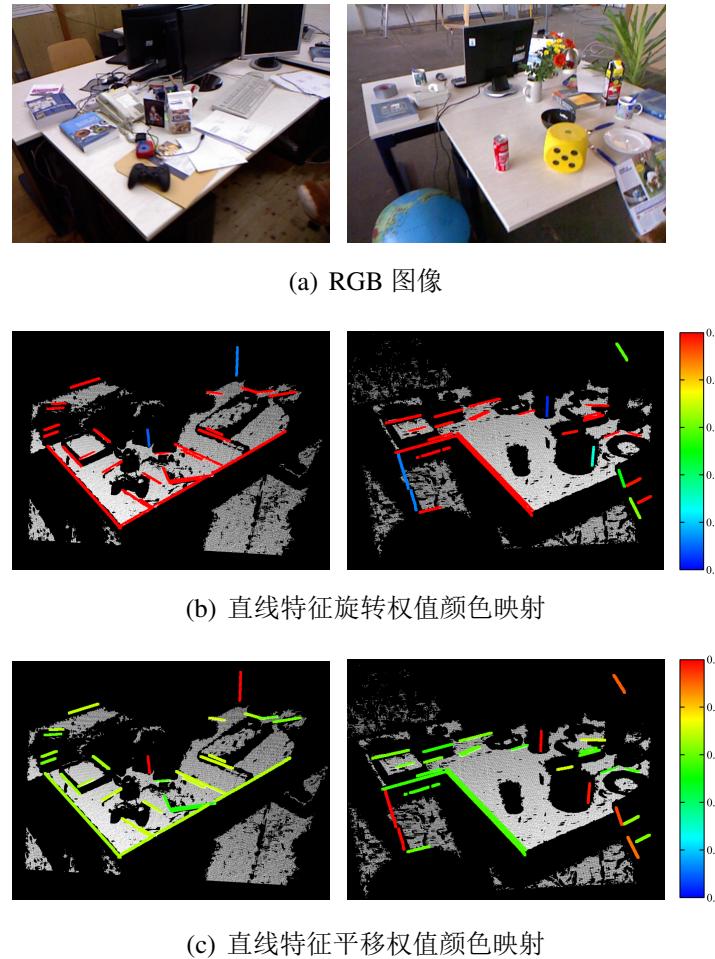


图 4.5 3DoF 约束情况下特征分布与直线权值

图4.5给出了3DoF约束情况的两个场景下平面与直线特征的空间分布，其中平面特征标识为白色，而直线特征的颜色则分别根据其旋转权值 w_{Rj} 与平移权值 w_j 进行颜色映射（右侧 color bar）得到，映射结果分别在图4.5(b) 和 (c) 中给出。从图4.5(b)可以看出，垂直于 \mathbf{v}_{c1} 方向（即平行于平面）的直线（图中红色直线）的旋转权值 w_{Rj} 较大，即这些直线对求解旋转变换的贡献较大；而平行于 \mathbf{v}_{c1} 方向的直线（图中蓝色直线）的权值 w_{Rj} 较小，即对求解旋转变换的贡献较小。而从图4.5(c)可以看出，垂直于平面方向的直线（图中红色直线）的平移权值 w_j 最大，因为这样的直线对平面特征无法约束的平移自由度（即平行于平面方向的平移）的约束是最大的。

第四节 实验结果

本文实验主要分三个部分：基于 PLHAG 的平面-直线特征关联算法验证（第4.4.1节）、不同 VO 算法在数据集上的对比实验（第4.4.2节）、真实环境的移动机器人 VO 实验（第4.4.3节）。实验所用处理器为 Intel i7 CPU (1.8GHz)，运行内存 8GB。第4.4.1节与第4.4.2节实验中所用数据集为 TUM RGB-D 公开数据集^[89]，第4.4.3节真实环境实验中所用移动机器人平台为 Pioneer 3-DX，传感器为 Microsoft Kinect 2.0。

4.4.1 平面-直线混合关联图实验与分析

为了验证本章提出的 PLHAG 算法的有效性，对 TUM 数据集中五个图像序列的平面与直线特征进行人工标注，并将本文算法与 Proen  a 等^[28] 提出的视觉里程计（简称为 Prob-RGBD-VO）中使用的平面与直线的匹配方法进行比较。

在对比算法 Prob-RGBD-VO 中，对平面和直线特征分别进行关联。对于平面特征，先利用平面在图像上的重叠区域和几何关系（法向量夹角与截距差）筛选出可能具有匹配关系的候选。然后，对于两个平面 π 和 π' ，定义平面到平面的距离为 $\|d\mathbf{n} - d'\mathbf{n}'\|$ ，然后在匹配候选中选出平面到平面距离最小的匹配对。对于直线特征，首先对图像中提取出的直线特征计算描述子 LBD^[50]，并使用 k 近邻搜索建立匹配关系，然后保留满足图像二维直线几何约束（直线方向和截距相似）的匹配对^[28]。

实验分别使用两种特征关联方法进行相邻帧之间的平面与直线关联，并对其准确率与召回率进行统计。基于 PLHAG 的关联方法和 Prob-RGBD-VO 中所

使用的关联方法的平均准确率分别为 91.6% 和 88.9%，平均召回率分别为 95.0% 和 91.7%，各个图像序列的详细统计结果如图4.6所示。由于 Prob-RGBD-VO 中关联方法将两类特征分别进行关联，且未考虑同一扫描帧的特征之间的几何关系，而在 PLHAG 中，充分考虑了平面与平面、平面与直线之间的几何关系，进而提高了方法的准确性和鲁棒性。

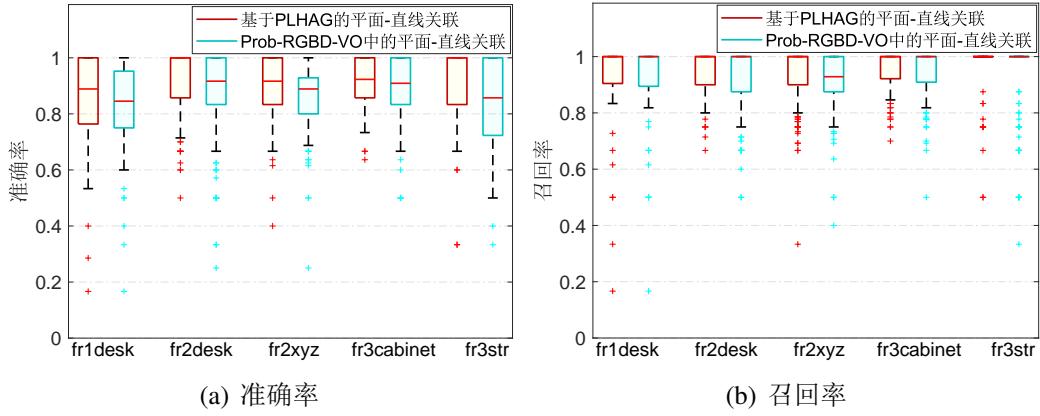


图 4.6 特征关联算法对比实验结果

另外，为了验证算法的时间性能，本文对基于 PLHAG 以及 PAG 的特征关联算法的对数关联时间分别进行统计，并绘制统计结果的箱线图如图4.7(a) 所示。需要说明的是，基于 PLHAG 的特征关联算法的平均关联时间是 0.33ms，完全满足算法实时性的要求。图4.7(b) 给出的节点数量统计直方图显示了 PLHAG 与 PAG 中节点数量的差异。可以看到，与 PAG 算法相比，PLHAG 由于直线特征的加入使得图结构规模变大，节点数量增加，而在进行特征关联时需要对图结构进行搜索，因此，特征关联过程的运行时间有所增加。尽管如此，从图4.7(a) 可以看出，增加的时间小于 1ms，对 VO 系统实时性产生的影响可以忽略不计。

4.4.2 公开数据集视觉里程计实验结果与分析

本节实验在 TUM 数据集的五个场景中运行本文提出的 PLVO 算法，并将其结果与三种 VO 算法进行对比：Prob-RGBD-VO^[28]，Canny-VO^[66] 以及 STING-VO^[36]。Prob-RGBD-VO 是基于点、直线和平面的 RGB-D 视觉里程计，通过三种特征的联合优化实现传感器位姿的估计。Canny-VO 通过对 RGB 图像中提取的 Canny 边缘进行扫描匹配，实现视觉里程计的计算。

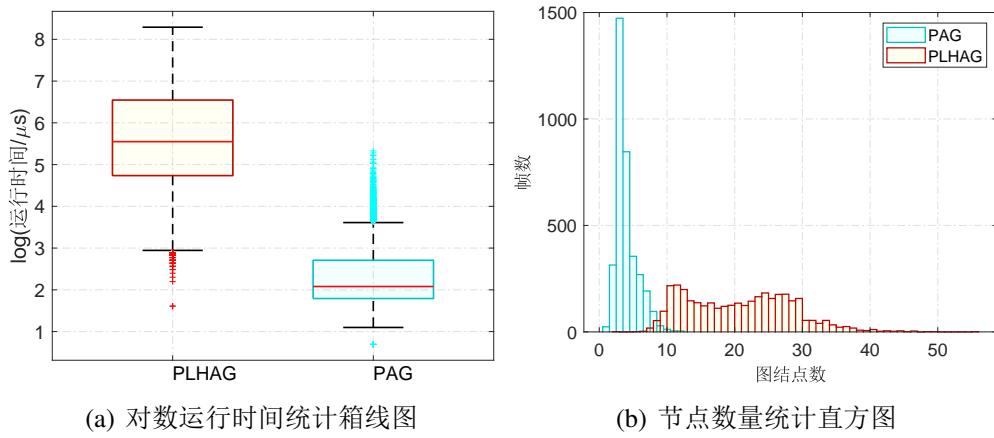


图 4.7 基于 PLHAG 与 PAG 特征关联方法时间性能对比实验结果

实验采用的对比性能指标为 RPE 与 ATE，分别统计其 RMSE 如表4.1和表4.2所示，为了尽量避免调参不当对三种对比算法性能的影响，Prob-RGBD-VO^[28] 与 Canny-VO^[66] 的结果以及 STING-VO^[36] 在 fr2/desk 和 fr3/cabinet 上的结果均取自于各自论文公开的实验结果。

表 4.1 VO 实验的 RPE 对比结果

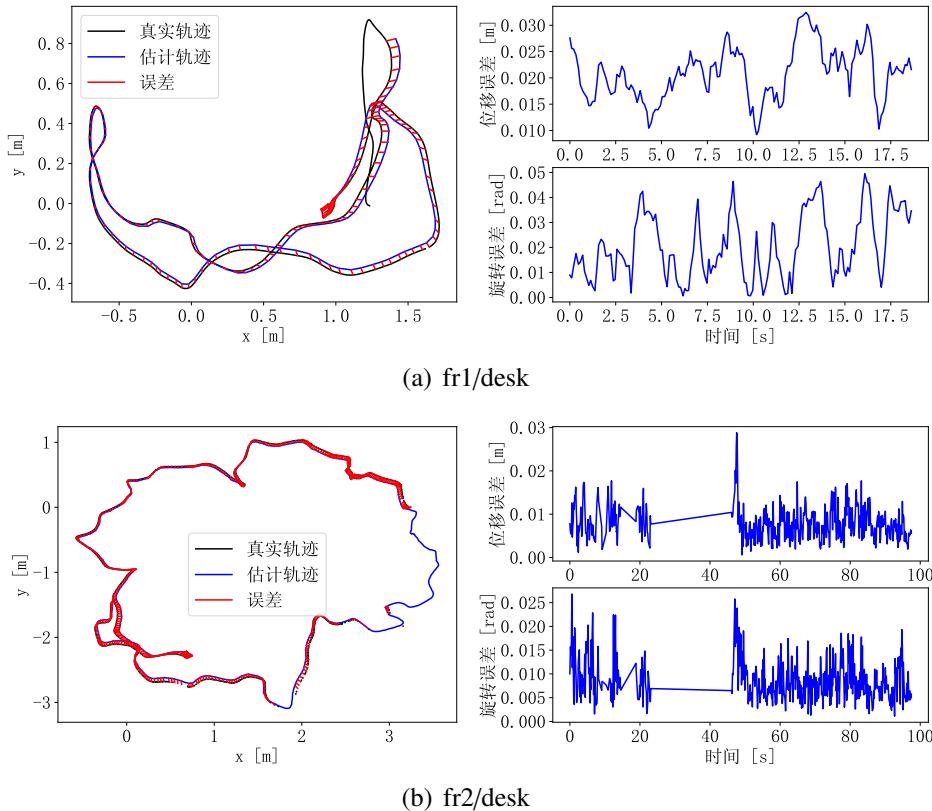
	PLVO	Prob-RGBD-VO	Canny-VO	STING-VO
fr1/desk	0.021m;1.4deg	0.023m;1.7deg	0.031m;1.9deg	0.025m;1.9deg
fr2/desk	0.008m;0.4deg	—	0.008m;0.5deg	0.048m;1.7deg
fr2/xyz	0.004m;0.3deg	—	0.004m;0.3deg	0.004m;0.4deg
fr2/360_hemi	0.066m;1.0deg	0.069m;1.1deg	0.108m;1.1deg	0.092m;1.5deg
fr3/cabinet	0.029m;1.2deg	0.039m;1.8deg	0.036m;1.6deg	0.011m;1.0deg
fr3/str_ntex	0.012m;0.5deg	0.019m;0.7deg	0.027m;0.6deg	0.014m;0.8deg
fr3/str_tx	0.013m;0.4deg	—	0.013m;0.5deg	0.021m;0.6deg
fr3/office	0.007m;0.4deg	—	0.010m;0.5deg	0.009m;0.5deg

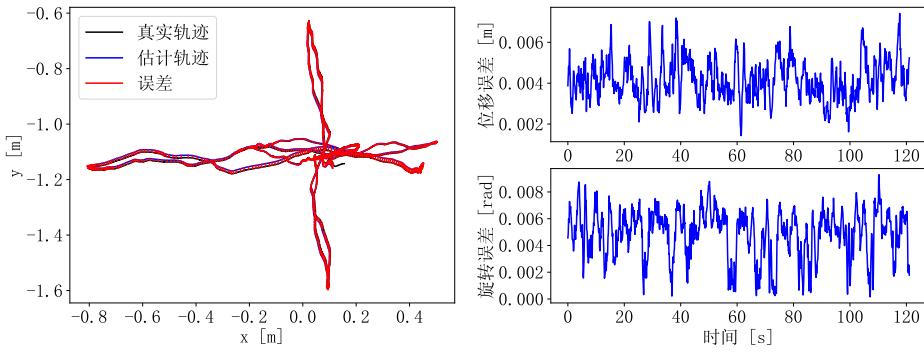
从表4.1和表4.2中可以看出，本文提出的 PLVO 在绝大多数场景中都能获得最优的准确性，原因在于 PLVO 利用平面和直线进行位姿估计时，充分借助了两种特征的互补性，即平面特征的准确性和稳定性，以及直线特征克服退化的能力。并且，在 PLVO 利用直线特征对平面特征无法约束的位姿自由度进行补充的同时，尽可能地保留平面特征的主导作用，充分发挥平面特征参数提取的准确性和稳定性优势，实现了两类特征的自适应融合。

表 4.2 VO 实验的 ATE 对比结果

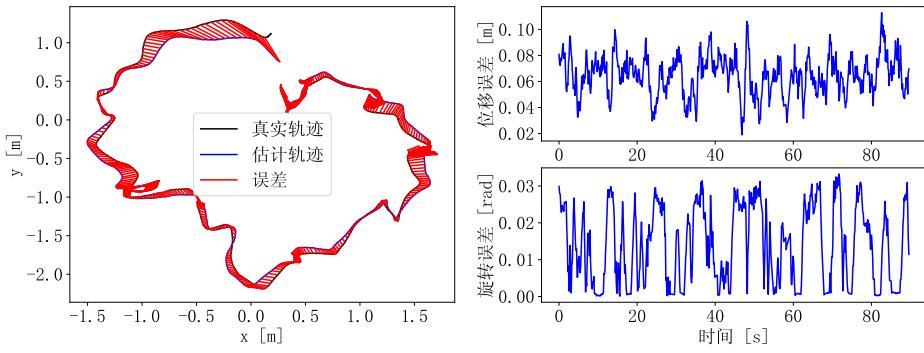
	PLVO	Prob-RGBD-VO	Canny-VO	STING-VO
fr1/desk	0.038m	0.040m	0.044m	0.041m
fr2/desk	0.044m	—	0.037m	0.098m
fr2/xyz	0.008m	—	0.008m	0.010m
fr2/360_hemi	0.105m	0.203m	0.079m	0.122m
fr3/cabinet	0.052m	0.200m	0.057m	0.070m
fr3/str_ntex	0.030m	0.054m	0.031m	0.040m
fr3/str_tx	0.013m	—	0.013m	0.028m
fr3/office	0.081m	—	0.085m	0.089m

图4.8展示了各个图像序列上 VO 实验的 ATE 与 RPE 评测结果，从中可以看出，使用 PLVO 计算得到的传感器轨迹与运动捕捉系统获得的真实轨迹有着极高的重合度，RPE 曲线也稳定在较小的范围内，充分说明了本文算法的准确性和鲁棒性。

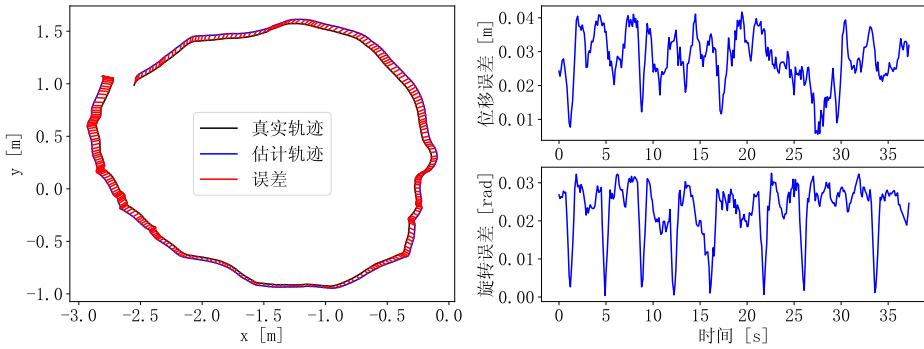




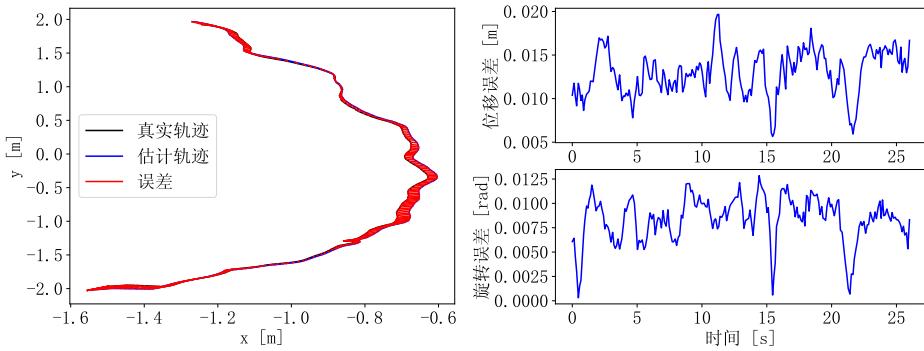
(c) fr2/xyz



(d) fr2/360_hemisphere



(e) fr3/cabinet



(f) fr3/str_ntex

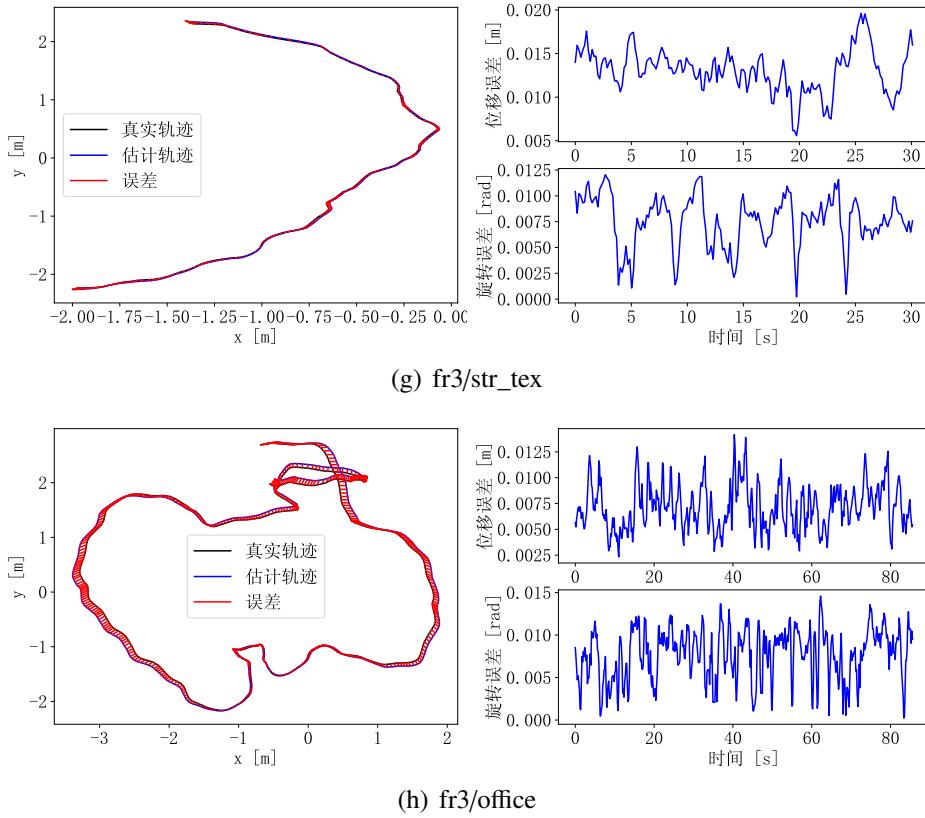


图 4.8 公开数据集上的 VO 实验的 ATE 与 RPE 评测结果

此外，本文对 PLVO 在表4.1和表4.2中所列图像序列上的运行时间进行统计，其箱线图如图4.9所示。可以看出，由于不同场景的环境结构与布局存在较大差异，导致 PLVO 算法运行时间呈现出些许不同，其帧率范围为 6-10Hz，总体上满足 VO 系统的实时性要求。

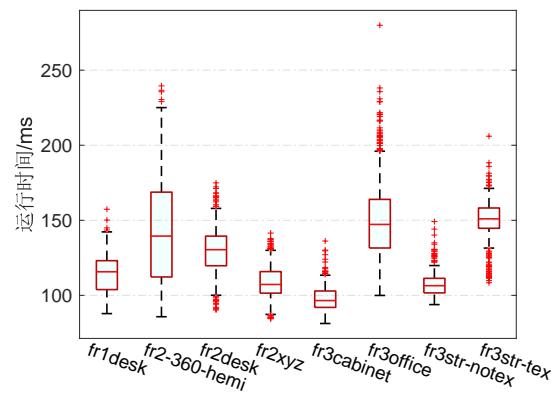
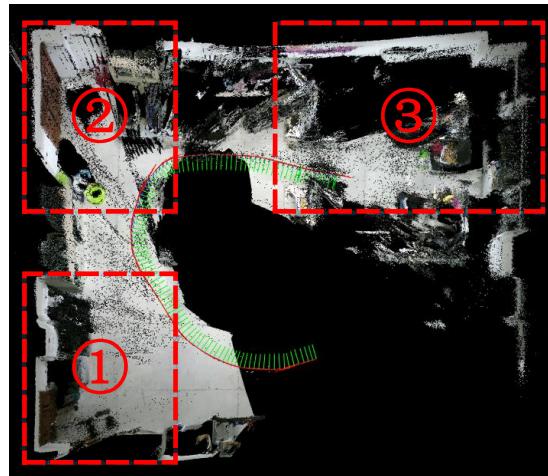


图 4.9 各个图像序列中 PLVO 每帧运行时间的统计箱线图

4.4.3 移动机器人真实环境视觉里程计实验

为了验证本文算法的有效性，使用 PLVO 进行真实环境的移动机器人视觉里程计实验。将 Microsoft Kinect 2.0 传感器固定在 Pioneer 3-DX 机器人上离地面大约 0.34m 的位置。在实验中，用手柄控制机器人通过一个实验室，环境规模为 $8.68\text{m} \times 7.86\text{m}$ 。用 PLVO 算法进行机器人的定位与增量式建图，所构建的三维点云地图如图4.10所示。其中左侧为俯视全景图，而右侧则给出了在全景图中标注的①②③三处对应的 RGB 图像和局部放大的点云地图。从图中可以看出，PLVO 在真实室内环境中能够较准确地完成移动机器人的位姿估计。



(a) 点云全景图



(b) 对应于全景图①②③处的 RGB 图像与局部点云图

图 4.10 实验室场景下移动机器人定位与增量式建图结果

第五节 本章小结

视觉里程计主要解决视觉传感器位姿估计的问题，是一个完整的视觉 SLAM 系统中不可或缺的组成部分。本章研究了传感器位姿退化与多特征空间分布之间的关联性，并以此为基础，提出了一种基于平面和直线主辅相济、自适应融合的视觉里程计算法，完成了面-线特征在传感器位姿估计阶段的无缝融合。通过对相邻两帧的平面和直线特征统一构建 PLHAG，充分考虑了平面与平面、平面与直线之间的几何关系，实现了两类特征的混合关联，提高了多特征关联结果的准确率和召回率。而在估计 RGB-D 传感器位姿时，充分发挥了平面特征准确、稳定的优点及其在机器人位姿估计中的主导作用，针对平面特征在位姿估计中存在的退化问题，引入直线特征对平面无法约束的自由度进行约束，并设计能够充分体现约束强度的权重，实现了两类特征的自适应融合。在本章实验部分，实现了基于面-线多模态特征自适应融合的视觉里程计系统，并通过多角度的实验与分析，充分验证了本章提出算法的准确性和有效性。

第五章 基于面-线-点多模态特征双层自适应融合的 SLAM

第一节 引言

本文第三章和第四章主要针对结构化环境中面-线多模态特征的无缝融合问题进行了研究，实现了面-线多模态特征的联合数据关联以及基于自适应融合算法的视觉里程计。然而，结构化环境中往往不仅有结构信息，还包含了丰富的视觉纹理信息以及部分非结构化区域（例如地面或桌面上杂乱的物品等），而基于面-线多模态特征融合的 SLAM 系统往往忽略了对这部分信息的开发和利用。此外，在第四章提出的基于面-线多模态特征自适应融合的 VO 方法中，对于平面特征无法完全约束位姿求解的情况，使用直线特征对平面所提供约束的不足进行补充，实现了不同类型特征的自适应融合。然而，对于使用平面特征参数计算位姿时的非退化情况，传感器位姿空间各个方向上的约束强度也存在很大差异，进而影响传感器位姿的估计结果。为了使位姿求解结果具有更强的准确性和稳定性，需要对特征参数与传感器位姿求解之间的约束关系进行定量的分析，并以此为基础，对多模态特征进行无缝融合。而在第四章中，并未对此问题进行更加深入的研究。

在前文研究的基础上，本章提出基于面-线-点多模态特征双层自适应融合的 SLAM 算法，通过高层几何特征与视觉边缘点特征的融合，充分利用环境中的结构信息以及视觉纹理信息，进一步提高 SLAM 系统的准确性和适应性。首先，针对第三章中提出的基于 LS 算法的特征参数估计算法缺少对传感器观测噪声的考虑的问题，提出特征参数的概率拟合算法，提高特征参数估计的准确性。然后，针对平面和直线特征对传感器运动估计的约束情况，进行定量地求解和分析，对位姿空间中能够被特征完全约束的子空间进行显式地表示，并且对特征提供约束的强度进行定量描述。最后，在约束分析的基础上，提出面-线-点多模态特征双层自适应融合算法，先根据平面特征的约束情况对直线特征进行自适应加权，再根据平面-直线特征对运动估计的共同约束，对边缘点特征进行自适应加权，同时根据权值的大小对点特征进行筛选，以进一步提高方法的准确性和有效性。

第二节 特征参数的概率拟合算法

在使用高层特征(如平面、直线、曲面等)的参数计算传感器位姿变换时,参数拟合的精度会对位姿求解以至于后续地图构建产生很大影响。目前最常用的参数拟合方法是 LS 算法^[102–104], 其具体求解过程可见本文第三章第二节。LS 算法的目标函数通常设置为观测数据点到平面或直线垂直距离的总和。每个观测数据点对目标函数的贡献是等同的, 不会考虑观测噪声对参数估计的影响。然而, 目前很多研究结果表明, 深度传感器的观测不确定性与被观测物体所在空间位置有关^[105–107]。如果不确定性很大的数据点和不确定性很小的数据点在平面参数计算的过程中被同等处理, 则不确定性大的数据点会使得特征参数拟合的精度下降, 进而影响位姿估计的准确性。针对此问题, 本节充分考虑数据点不确定性的影响, 提出几何特征参数的概率拟合算法, 使得不确定性小的点对参数拟合的贡献更大。

5.2.1 平面特征参数的概率拟合算法

假设从一帧传感器数据中分割出的在一个平面上的观测点集合为 $\{\mathbf{p}_{\pi j}\}_{j=1,\cdots,N_{p\pi}}$, 其中 $\mathbf{p}_{\pi j} \in \mathbb{R}^3$ 表示三维空间中点的坐标, $N_{p\pi}$ 表示集合中点的数目。假设 $\mathbf{p}_{\pi j}$ 的观测噪声服从零均值高斯分布, 其协方差 $\mathbf{C}_{p_{\pi j}}$ 由深度传感器的深度观测方差以及图像像素观测协方差传递而来, 如式(5.1)所示。

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{p_{\pi j}} = & \left(\mathbf{K}^{-1}\tilde{\mathbf{u}}_j\right)\sigma_{zj}^2\left(\mathbf{K}^{-1}\tilde{\mathbf{u}}_j\right)^T \\ & + (z_j\mathbf{k}_1)\sigma_{uj}^2(z_j\mathbf{k}_1)^T + (z_j\mathbf{k}_2)\sigma_{vj}^2(z_j\mathbf{k}_2)^T.\end{aligned}\quad (5.1)$$

式中, 矩阵 \mathbf{K} 为深度传感器的内参矩阵, $\mathbf{k}_i, i = 1, 2, 3$ 表示矩阵 \mathbf{K}^{-1} 的第 i 列。 $\tilde{\mathbf{u}}_j$ 表示三维点 $\mathbf{p}_{\pi j}$ 所对应像素坐标 $\mathbf{u}_j = [u_j, v_j]^T$ 的齐次坐标形式, $\sigma_{uj}^2, \sigma_{vj}^2$ 分别表示 u_j, v_j 的方差(在本章实验中 σ_{uj} 和 σ_{vj} 均取一个像素值)。 z_j 和 σ_{zj}^2 表示点 $\mathbf{p}_{\pi j}$ 所对应的观测深度及其方差。对于不同类型的深度传感器, 例如, 基于结构光(Structured Light, SL) 的深度传感器^{[107][108]} 和基于飞行时间技术(Time-of-Flight, ToF) 的深度传感器^{[106][109]}, 其观测模型不同, 因而 σ_{zj}^2 也随之不同。需要说明的是, 本章提出的特征参数概率拟合方法并不依赖于某种特定的深度传感器, 而是适用于不同的传感器观测模型。

平面参数为 $\pi = [\mathbf{n}^T, d]^T$, 定义点到平面的有向距离为 $l_{\pi j}$, 如图5.1所示。

$$l_{\pi j} = \mathbf{n}^T \mathbf{p}_{\pi j} + d. \quad (5.2)$$

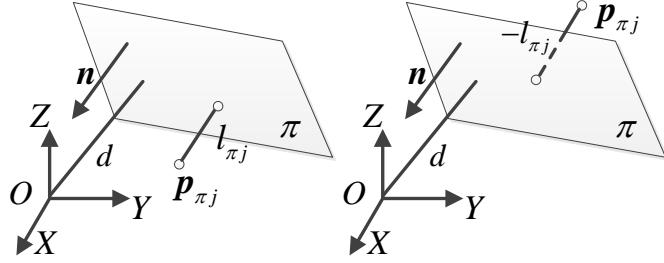


图 5.1 点到平面的有向距离

$l_{\pi j}$ 服从零均值高斯分布，其方差为

$$\sigma_{l_{\pi j}}^2 = \frac{\partial l_{\pi j}}{\partial \mathbf{p}_{\pi j}}^T \mathbf{C}_{p_{\pi j}} \frac{\partial l_{\pi j}}{\partial \mathbf{p}_{\pi j}} = \mathbf{n}^T \mathbf{C}_{p_{\pi j}} \mathbf{n}. \quad (5.3)$$

计算 $l_{\pi j}$ 的马氏距离平方 $D_l^2(l_{\pi j}, \mathbf{n}, d)$

$$D_l^2(l_{\pi j}, \mathbf{n}, d) = \frac{l_{\pi j}^2}{\sigma_{l_{\pi j}}^2} = \frac{(\mathbf{n}^T \mathbf{p}_{\pi j} + d)^2}{\mathbf{n}^T \mathbf{C}_{p_{\pi j}} \mathbf{n}}. \quad (5.4)$$

则平面参数 $\pi = [\mathbf{n}^T, d]^T$ 可以通过最小化式(5.5)获得。

$$E_\pi(\mathbf{n}, d) = \sum_{j=1}^{N_{p\pi}} D_l^2(l_{\pi j}, \mathbf{n}, d). \quad (5.5)$$

计算 $E_\pi(\mathbf{n}, d)$ 关于 d 的导数并令其等于零，可得

$$d^* = -\mathbf{n}^T \mathbf{p}_G(\mathbf{n}), \quad (5.6)$$

其中 $\mathbf{p}_G(\mathbf{n})$ 为平面上数据点的加权质心。

$$\mathbf{p}_G(\mathbf{n}) = \frac{\sum_{j=1}^{N_{p\pi}} a_j(\mathbf{n}) \mathbf{p}_{\pi j}}{\sum_{j=1}^{N_{p\pi}} a_j(\mathbf{n})} \quad (5.7)$$

$$a_j(\mathbf{n}) = (\mathbf{n}^T \mathbf{C}_{p_{\pi j}} \mathbf{n})^{-1} \quad (5.8)$$

将式(5.6)代入式(5.5)，则 $E_\pi(\mathbf{n}, d)$ 可以化简为

$$E_\pi(\mathbf{n}) = \mathbf{n}^T \mathbf{S}_\pi(\mathbf{n}) \mathbf{n}, \quad (5.9)$$

$$\mathbf{S}_\pi(\mathbf{n}) = \sum_{j=1}^{N_{p\pi}} a_j(\mathbf{n}) (\mathbf{p}_{\pi j} - \mathbf{p}_G(\mathbf{n})) (\mathbf{p}_{\pi j} - \mathbf{p}_G(\mathbf{n}))^T. \quad (5.10)$$

经过几何分析可知，矩阵 $\mathbf{S}_\pi(\mathbf{n})$ 的物理意义为以加权质心 $\mathbf{p}_G(\mathbf{n})$ 为中心分布的数据点的散列矩阵。由式(5.8)和式(5.3)可知，权值 $a_j(\mathbf{n})$ 是方差 $\sigma_{l\pi j}^2$ 的倒数，而方差 $\sigma_{l\pi j}^2$ 则是由观测点协方差 $\mathbf{C}_{p_{\pi j}}$ 传递而来。从式(5.8)和式(5.10)中可以看到，若一个点的不确定度较高，则其权值 $a_j(\mathbf{n})$ 较小，因此对目标函数 $E_\pi(\mathbf{n})$ 的贡献和影响也较小。当 \mathbf{n} 等于矩阵 $\mathbf{S}_\pi(\mathbf{n})$ 最小特征值对应的单位特征向量时，式(5.9)达到最小值。然而，由于矩阵 $\mathbf{S}_\pi(\mathbf{n})$ 与变量 \mathbf{n} 有关，所以无法直接得到使式(5.9)最小化的解析解。注意到当权值 $a_j(\mathbf{n})$ 等于 1 时， $E_\pi(\mathbf{n})$ 的最小化退化为 LS 问题。

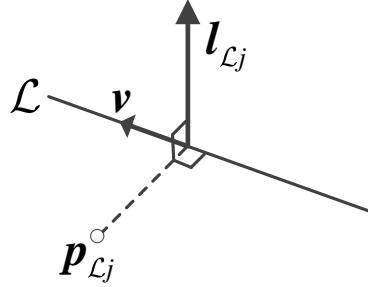
虽然式(5.9)的最小化可以通过非线性优化的方法进行迭代求解，但这种求解方法比较耗时，而且在优化的过程中容易陷入局部极小值。另外，因为 \mathbf{n} 并非自由变量，需要满足 $\mathbf{n}^T \mathbf{n} = 1$ 的约束，即约束在 \mathbb{R}^3 空间中的单位球面上，所以在非线性优化的过程中，需要为优化变量添加额外的约束。为此，本章将式(5.9)中的矩阵 $\mathbf{S}_\pi(\mathbf{n})$ 替换为 $\mathbf{S}_\pi(\mathbf{n}_{LS})$ ，其中 \mathbf{n}_{LS} 为变量 \mathbf{n} 的 LS 估计，即式(3.5)中矩阵 \mathbf{S}_π^{LS} 的最小特征值所对应的单位特征向量。此时可以通过式(5.11)得到 \mathbf{n}^* 。

$$\mathbf{n}^* = \arg \min_{\mathbf{n}} \mathbf{n}^T \mathbf{S}(\mathbf{n}_{LS}) \mathbf{n}. \quad (5.11)$$

由于 $\mathbf{S}_\pi(\mathbf{n}_{LS})$ 独立于 \mathbf{n} ，因此式(5.11)的最小化可以得到解析解 \mathbf{n}^* ，即矩阵 $\mathbf{S}_\pi(\mathbf{n}_{LS})$ 的最小特征值对应的特征向量。尽管用 $\mathbf{S}_\pi(\mathbf{n})$ 替换 $\mathbf{S}_\pi(\mathbf{n}_{LS})$ 的过程会使最小化式(5.9)的求解最优化有些许损失，但最终得到的解析解仍优于 LS 拟合，即最小化式(3.4)的结果，与此同时，保证了算法的实时性和高效性。因为 $\mathbf{S}_\pi(\mathbf{n}_{LS})$ 为观测点的加权散列矩阵，而每个点的权值 $a_j(\mathbf{n}_{LS})$ 是由其协方差 $\mathbf{C}_{p_{\pi j}}$ 以及拟合平面法向量的 LS 估计 \mathbf{n}_{LS} 得到的。这样一来，在 \mathbf{n}_{LS} 方向上的不确定性比较小的观测点会被赋予比较大的权值。因此，计算出的平面模型与 \mathbf{n}_{LS} 方向上不确定性较小的数据点的拟合程度更高。相比而言，在用 LS 算法计算 $\mathbf{S}_{\pi,LS}$ 时，所有的观测点都被同等对待，其估计结果更容易受到不确定度较大的数据点的影响。

平面参数估计的协方差通过最优解 \mathbf{n}^*, d^* 处目标函数的海森矩阵求解得到。

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_\pi^\dagger &= \mathbf{H}_\pi|_{\mathbf{n}^*, d^*} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{nn} & \mathbf{H}_{nd} \\ \mathbf{H}_{nd}^T & \mathbf{H}_{dd} \end{bmatrix}|_{\mathbf{n}^*, d^*} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_\pi}{\partial \mathbf{n}^2} & \frac{\partial^2 E_\pi}{\partial d \partial \mathbf{n}} \\ \frac{\partial^2 E_\pi}{\partial \mathbf{n} \partial d} & \frac{\partial^2 E_\pi}{\partial d^2} \end{bmatrix}|_{\mathbf{n}^*, d^*} = \sum_{j=1}^{N_{pn}} a_j \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{\pi j} \mathbf{p}_{\pi j}^T & \mathbf{p}_{\pi j} \\ \mathbf{p}_{\pi j}^T & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.12)$$


 图 5.2 变量 l_{Lj} 方向示意图

5.2.2 直线特征参数的概率拟合算法

与平面特征参数的概率拟合算法类似，本节对直线特征参数的概率拟合算法进行推导。假设三维空间中一条直线上的观测点集合为 $\{p_{Lj}\}_{j=1,\dots,N_{pL}}$ ，其中 $p_{Lj} \in \mathbb{R}^3$ 表示三维空间中点的坐标， N_{pL} 表示集合中点的数目。假设 p_{Lj} 的观测噪声服从零均值高斯分布，其协方差 $C_{p_{Lj}}$ 由深度传感器的误差模型得到。

直线的参数为 $L = [u^T, v^T]^T$ ，定义变量 $l_{Lj} \in \mathbb{R}^3$ ，

$$l_{Lj} = u - [p_{Lj}] \times v. \quad (5.13)$$

通过几何分析可知， l_{Lj} 的长度为点 p_{Lj} 到直线 L 的距离，其方向为点 p_{Lj} 和直线 L 构成平面的法向量方向，如图5.2所示。 l_{Lj} 服从零均值高斯分布，其协方差为

$$C_{l_{Lj}} = \frac{\partial l_{Lj}}{\partial p_{Lj}} C_{p_{Lj}} \frac{\partial l_{Lj}}{\partial p_{Lj}}^T = [v] \times C_{p_{Lj}} [v] \times. \quad (5.14)$$

l_{Lj} 的马氏距离平方 $D_l^2(l_{Lj}, v, u)$ 为

$$D_l^2(l_{Lj}, v, u) = l_{Lj}^T C_{l_{Lj}}^{-1} l_{Lj} = (u - [p_{Lj}] \times v)^T C_{l_{Lj}}^{-1} (u - [p_{Lj}] \times v). \quad (5.15)$$

则目标函数定义为

$$E_L(v, u) = \sum_{j=1}^{N_{pL}} D_l^2(l_{Lj}, v, u). \quad (5.16)$$

计算 $E_L(v, u)$ 关于 u 的偏导数并令其等于零，可得

$$u^* = P_G(v)v, \quad (5.17)$$

其中

$$\mathbf{P}_G(\mathbf{v}) = \left(\sum_{j=1}^{N_{p\pi}} \mathbf{A}_j(\mathbf{v}) \right)^{-1} \sum_{j=1}^{N_{p\pi}} \mathbf{A}_j(\mathbf{v}) [\mathbf{p}_{\mathcal{L}j}]_{\times}, \quad (5.18)$$

$$\mathbf{A}_j(\mathbf{v}) = ([\mathbf{v}]_{\times} \mathbf{C}_{p_{\mathcal{L}j}} [\mathbf{v}]^T_{\times})^{-1} \quad (5.19)$$

将式(5.17)代入式(5.16), 则 $E_{\mathcal{L}}(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ 可以化简为

$$E_{\mathcal{L}}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \mathbf{v}^T \mathbf{S}_{\mathcal{L}}(\mathbf{v}) \mathbf{v}, \quad (5.20)$$

$$\mathbf{S}_{\mathcal{L}}(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{N_{p\mathcal{L}}} (\mathbf{P}_G(\mathbf{v}) - [\mathbf{p}_{\mathcal{L}j}]_{\times})^T \mathbf{A}_j(\mathbf{v}) (\mathbf{P}_G(\mathbf{v}) - [\mathbf{p}_{\mathcal{L}j}]_{\times}). \quad (5.21)$$

由式(5.19)和式(5.14)可知, 加权矩阵 $\mathbf{A}_j(\mathbf{n})$ 是协方差矩阵 $\mathbf{C}_{l_{\mathcal{L}j}}$ 的逆, 而 $\mathbf{C}_{l_{\mathcal{L}j}}$ 则是由观测点协方差 $\mathbf{C}_{l_{\mathcal{L}j}}$ 传递而来。从式(5.19)和式(5.21)中可以看到, 若一个点的不确定度较高, 则其相应的权值 $\mathbf{A}_j(\mathbf{n})$ 会使得该点对目标函数 $E_{\mathcal{L}}(\mathbf{n})$ 的贡献和影响较小。当 \mathbf{v} 等于矩阵 $\mathbf{S}_{\mathcal{L}}(\mathbf{v})$ 最小特征值对应的单位特征向量时, 式(5.20)达到最小值。由于矩阵 $\mathbf{S}_{\mathcal{L}}(\mathbf{v})$ 与变量 \mathbf{v} 有关, 所以无法直接得到使式(5.20)最小化的解析解。

与平面特征类似, 将式(5.20)中的矩阵 $\mathbf{S}_{\mathcal{L}}(\mathbf{v})$ 替换为 $\mathbf{S}_{\mathcal{L}}(\mathbf{v}_{LS})$, 其中, \mathbf{v}_{LS} 为变量 \mathbf{v} 的 LS 估计, 即式(3.11)中矩阵 $\mathbf{S}_{\mathcal{L}}^{LS}$ 的最小特征值所对应的单位特征向量。此时可以通过式(5.22)得到 \mathbf{v}^* 。

$$\mathbf{v}^* = \arg \min_{\mathbf{v}} \mathbf{v}^T \mathbf{S}_{\mathcal{L}}(\mathbf{v}_{LS}) \mathbf{v}. \quad (5.22)$$

由于 $S(\mathbf{v}_{LS})$ 独立于 \mathbf{v} , 因此式(5.22)的最小化可以得到解析解 \mathbf{v}^* , 即矩阵 $\mathbf{S}_{\mathcal{L}}(\mathbf{v}_{LS})$ 的最小特征值对应的特征向量。

直线参数估计的协方差通过最优解 $\mathbf{v}^*, \mathbf{u}^*$ 处目标函数的海森矩阵的求解得到。

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\mathcal{L}}^{\dagger} &= \mathbf{H}_{\mathcal{L}}|_{\mathbf{v}^*, \mathbf{u}^*} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{uu} & \mathbf{H}_{uv} \\ \mathbf{H}_{uv}^T & \mathbf{H}_{vv} \end{bmatrix} \Big|_{\mathbf{v}^*, \mathbf{u}^*} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_{\mathcal{L}}}{\partial \mathbf{u}^2} & \frac{\partial^2 E_{\mathcal{L}}}{\partial \mathbf{v} \partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial^2 E_{\mathcal{L}}}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{v}} & \frac{\partial^2 E_{\mathcal{L}}}{\partial \mathbf{v}^2} \end{bmatrix} \Big|_{\mathbf{v}^*, \mathbf{u}^*} = \sum_{j=1}^{N_{p\mathcal{L}}} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_j & \mathbf{A}_j [\mathbf{p}_{\mathcal{L}j}]^T_{\times} \\ \mathbf{A}_j [\mathbf{p}_{\mathcal{L}j}]_{\times} & \mathbf{A}_j [\mathbf{p}_{\mathcal{L}j}]_{\times} [\mathbf{p}_{\mathcal{L}j}]^T_{\times} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.23)$$

第三节 多模态特征对位姿求解的约束分析

假设相邻两帧之间传感器的运动，表示为 $\xi = [t^T, \omega^T]^T \in \mathbb{R}^6$ ，其对应的旋转矩阵 $R \in \text{SO}(3)$ 为反对称矩阵 $[\omega]_x \in \mathfrak{so}(3)$ 的指数映射，而向量 $t \in \mathbb{R}^3$ 表示平移运动。

5.3.1 平面特征对位姿求解的约束分析

首先，考虑相邻两帧中提取出的一对具有关联关系的平面特征 $\{\pi_{ci}, \pi_{ri}\}$ ，定义其残差向量为

$$e_{\pi i} = \pi_{ci} - T(\pi_{ri}, \xi), \quad (5.24)$$

其中

$$T(\pi, \xi) = \begin{bmatrix} R & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ -t^T R & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

计算 $e_{\pi i}$ 对于 ξ 的雅可比矩阵为

$$J_{\pi i} = \frac{\partial e_{\pi i}}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & [\mathbf{R}n_{ri}]_x \\ (\mathbf{R}n_{ri})^T & -t^T [\mathbf{R}n_{ri}]_x \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

则无法被 $\{\pi_{ci}, \pi_{ri}\}$ 约束的传感器 6DoF 运动子空间可以表示为雅可比矩阵 $J_{\pi i}$ 的零空间，即

$$\text{null}(J_{\pi i}) = \{\xi \in \mathbb{R}^6 \mid J_{\pi i} \xi = \mathbf{0}\} = \begin{bmatrix} \mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 \\ \mu_3 \mathbf{R}n_{ri} \end{bmatrix}, \quad (5.27)$$

其中向量 t_1 和 t_2 张成垂直于向量 $\mathbf{R}n_{ri}$ 的二维平面， $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$ 。从式(5.27)可以看出明显看出，3DoF 传感器运动无法被一对平面特征 $\{\pi_{ci}, \pi_{ri}\}$ 所约束。

然后，在上述一对平面对传感器的运动约束分析的基础上，考虑多对平面特征 $\{\pi_{ci}, \pi_{ri}\}_{i=1, \dots, N_\pi}$ 。传感器运动的微分量 $d\xi$ 引起的残差向量 $e_{\pi i}$ 变化可以表示为

$$de_{\pi i} = J_{\pi i} d\xi. \quad (5.28)$$

对于匹配平面特征的集合 $\{\pi_{ci}, \pi_{ri}\}_{i=1, \dots, N_\pi}$ ，则有

$$\sum_{i=1}^{N_\pi} de_{\pi i}^T \Omega_{\pi i} de_{\pi i} = d\xi^T \left(\sum_{i=1}^{N_\pi} J_{\pi i}^T \Omega_{\pi i} J_{\pi i} \right) d\xi, \quad (5.29)$$

其中信息矩阵 $\Omega_{\pi i}$ 定义为平面参数协方差矩阵的伪逆，即式(5.12)。令

$$\Phi_{\pi} = \sum_{i=1}^{N_{\pi}} J_{\pi i}^T \Omega_{\pi i} J_{\pi i}, \quad (5.30)$$

则矩阵 Φ_{π} 包含关于所有平面特征所对应的雅可比矩阵分布情况的信息，对其进行特征值分解 (Eigenvalue Decomposition, EVD) 得到

$$\Phi_{\pi} = Q_{\pi} \Lambda_{\pi} Q_{\pi}^T = \sum_{l=1}^6 \lambda_{\pi l} q_{\pi l} q_{\pi l}^T, \quad (5.31)$$

其中 $\lambda_{\pi l}, l = 1, \dots, 6$ 表示矩阵 Φ_{π} 的特征值，并按降序排列， $q_{\pi l}, l = 1, \dots, 6$ 表示其对应的特征向量。向量 $q_{\pi l}, l = 1, \dots, 6$ 构成六维空间的一组正交基底，而 $\lambda_{\pi l}$ 可以表示其对应 $q_{\pi l}$ 方向上的约束强度。具体而言，如果在 $q_{\pi 1}$ 方向，即最大特征值 $\lambda_{\pi 1}$ 所对应的特征向量方向上施加一个运动的微分量，则会在残差向量上引起最大的变化量；而最小特征值 $\lambda_{\pi 6}$ 对应方向 $q_{\pi 6}$ 上的运动则会引起最小的变化量。如果有一个或多个方向上的特征值为零，即 $\lambda_{\pi l} = 0 (\exists l)$ ，则会出现传感器运动的求解退化。所有为零的特征值所对应的特征向量张成矩阵 Φ_{π} 的零空间，在这个子空间中的运动无法被平面特征所约束。

另外，可以利用矩阵 Φ_{π} 直接对运动求解的退化情况进行判断。为此，需要得到运动求解退化情况与平面特征的空间分布的直接对应关系。对于某个给定传感器位姿处的雅可比矩阵 $J_{\pi i}$ ，使用平面特征参数对矩阵 Φ_{π} 的零空间进行表示。

$$\Phi_{\pi}|_{\xi=0} = \sum_{i=1}^{N_{\pi}} \begin{bmatrix} \Omega_{ddi} n_{ri} n_{ri}^T & n_{ri} \Omega_{ndi}^T [n_{ri}]_{\times} \\ [n_{ri}]_{\times}^T \Omega_{ndi} n_{ri}^T & [n_{ri}]_{\times}^T \Omega_{nni} [n_{ri}]_{\times} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

其中 Ω_{nni} 、 Ω_{ndi} 和 Ω_{ddi} 分别为矩阵 $\Omega_{\pi i}$ 的左上 3×3 、右上 3×1 以及右下 1×1 子矩阵。定义矩阵 H 如式(4.27)，并计算其 SVD 如式(4.28)所示。基于此，可以通过平面特征法向量的空间分布判断两种退化情况，概括如下：

- (a) 当 $\gamma_1 \geq \gamma_2 > \gamma_3 = 0$ 时，对于 $i = 1, \dots, N_{\pi}$ ，有 $n_{ri}^T v_{r3} = 0$ 。在这种情况下，对于 1DoF 传感器运动 $\xi_{1D} = [\mu v_{r3}^T, \mathbf{0}^T]^T (\mu \in \mathbb{R})$ ，满足 $\xi_{1D}^T \Phi_{\pi}|_{\xi=0} \xi_{1D} = 0$ 。换言之，平面特征无法约束 ξ_{1D} 方向的传感器运动估计。此时，平面特征的法向量在空间中为共面分布。
- (b) 当 $\gamma_1 > \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ 时， $n_{ri} (i = 1, \dots, N_{\pi})$ 满足 $n_{ri}^T v_{r2} = 0$ ， $n_{ri}^T v_{r3} = 0$ 和 $n_{ri} \times v_{r1} = 0$ 。在这种情况下，对于 3DoF 运动 $\xi_{3D} = [\mu_2 v_{r2}^T + \mu_3 v_{r3}^T, \mu_1 v_{r1}^T]^T$

$(\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R})$, 平面特征无法提供 ξ_{3D} 方向的约束。此时, 平面特征的法向量在空间中为共线分布。

5.3.2 直线特征对位姿求解的约束分析

与平面特征类似, 首先考虑一对具有关联关系的直线特征 $\{\mathcal{L}_{cj}, \mathcal{L}_{rj}\}$, 定义其残差向量为

$$\mathbf{e}_{\mathcal{L}j} = \mathcal{L}_{cj} - T(\mathcal{L}_{rj}, \boldsymbol{\xi}), \quad (5.33)$$

其中

$$T(\mathcal{L}, \boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & [\mathbf{t}] \times \mathbf{R} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}. \quad (5.34)$$

计算 $\mathbf{e}_{\mathcal{L}j}$ 对 $\boldsymbol{\xi}$ 的雅可比矩阵为

$$\mathbf{J}_{\mathcal{L}j} = \frac{\partial \mathbf{e}_{\mathcal{L}j}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}\mathbf{v}_{rj}] \times & [\mathbf{R}\mathbf{u}_{rj}] \times + [\mathbf{t}] \times [\mathbf{R}\mathbf{v}_{rj}] \times \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & [\mathbf{R}\mathbf{v}_{rj}] \times \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

则无法被这一对直线特征 $\{\mathcal{L}_{cj}, \mathcal{L}_{rj}\}$ 所约束的运动子空间可以表示为雅可比矩阵 $\mathbf{J}_{\mathcal{L}j}$ 的零空间, 即

$$\text{null}(\mathbf{J}_{\mathcal{L}j}) = \left\{ \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^6 \mid \mathbf{J}_{\mathcal{L}j} \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \right\} = \mu_1 \begin{bmatrix} \mathbf{R}\mathbf{u}_{rj} \\ \mathbf{R}\mathbf{v}_{rj} \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} \mathbf{R}\mathbf{v}_{rj} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix}. \quad (5.36)$$

其中 $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ 。从式(5.36)可以看出, 2DoF 传感器运动的估计无法被一对直线特征 $\{\mathcal{L}_{cj}, \mathcal{L}_{rj}\}$ 所约束。

接下来考虑多对直线特征 $\{\mathcal{L}_{cj}, \mathcal{L}_{rj}\}_{j=1, \dots, N_{\mathcal{L}}}$ 的情况。传感器运动的微分量 $d\boldsymbol{\xi}$ 引起的残差向量 $\mathbf{e}_{\mathcal{L}j}$ 变化可以表示为

$$d\mathbf{e}_{\mathcal{L}j} = \mathbf{J}_{\mathcal{L}j} d\boldsymbol{\xi}. \quad (5.37)$$

对于匹配的直线特征的集合 $\{\mathcal{L}_{cj}, \mathcal{L}_{rj}\}_{j=1, \dots, N_{\mathcal{L}}}$, 则有

$$\sum_{j=1}^{N_{\mathcal{L}}} d\mathbf{e}_{\mathcal{L}j}^T \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{L}j} d\mathbf{e}_{\mathcal{L}j} = d\boldsymbol{\xi}^T \left(\sum_{j=1}^{N_{\mathcal{L}}} \mathbf{J}_{\mathcal{L}j}^T \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{L}j} \mathbf{J}_{\mathcal{L}j} \right) d\boldsymbol{\xi}. \quad (5.38)$$

其中信息矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{L}j}$ 定义为平面参数协方差矩阵的伪逆, 即式(5.23)。令

$$\boldsymbol{\Phi}_{\mathcal{L}} = \sum_{j=1}^{N_{\mathcal{L}}} \boldsymbol{\Phi}_{\mathcal{L}j}, \quad (5.39)$$

$$\Phi_{\mathcal{L}j} = \mathbf{J}_{\mathcal{L}j}^T \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{L}j} \mathbf{J}_{\mathcal{L}j}. \quad (5.40)$$

计算矩阵 $\Phi_{\mathcal{L}}$ 的 EVD 为

$$\Phi_{\mathcal{L}} = \mathbf{Q}_{\mathcal{L}} \boldsymbol{\Lambda}_{\mathcal{L}} \mathbf{Q}_{\mathcal{L}}^T = \sum_{l=1}^6 \lambda_{\mathcal{L}l} \mathbf{q}_{\mathcal{L}l} \mathbf{q}_{\mathcal{L}l}^T. \quad (5.41)$$

其中 $\lambda_{\mathcal{L}l}, l = 1, \dots, 6$ 表示矩阵 $\Phi_{\mathcal{L}}$ 的特征值，并按降序排列，而 $\mathbf{q}_{\mathcal{L}l}, l = 1, \dots, 6$ 表示其对应的特征向量。与平面特征情况类似地，向量 $\mathbf{q}_{\mathcal{L}l}$ 也构成六维空间的一组正交基底，而 $\lambda_{\mathcal{L}l}$ 可以表示其对应 $\mathbf{q}_{\mathcal{L}l}$ 方向上的约束强度。如果有一个或多个方向上的特征值为零，即 $\lambda_{\mathcal{L}l} = 0 (\exists l)$ ，则会出现传感器运动的求解退化。为零的特征值对应的特征向量张成矩阵 $\Phi_{\mathcal{L}}$ 的零空间，在这个子空间中的运动 ξ 的估计无法被约束。

在用直线特征求解传感器运动时，也可以用矩阵 $\Phi_{\mathcal{L}}$ 对求解退化情况进行判断。对于某个给定位姿处的雅可比矩阵 $\mathbf{J}_{\mathcal{L}j}$ ，有

$$\Phi_{\mathcal{L}}|_{\xi=0} = \sum_{j=1}^{N_{\mathcal{L}}} \begin{bmatrix} [\Phi_{\mathcal{L}j}]_{11} & [\Phi_{\mathcal{L}j}]_{12} \\ [\Phi_{\mathcal{L}j}]_{21} & [\Phi_{\mathcal{L}j}]_{22} \end{bmatrix}, \quad (5.42)$$

其中

$$\begin{aligned} [\Phi_{\mathcal{L}j}]_{11} &= [\mathbf{v}_{rj}]_{\times}^T \boldsymbol{\Omega}_{uuj} [\mathbf{v}_{rj}]_{\times}, \\ [\Phi_{\mathcal{L}j}]_{12} &= [\Phi_{\mathcal{L}j}]_{21}^T = [\mathbf{v}_{rj}]_{\times}^T \boldsymbol{\Omega}_{uuj} [\mathbf{u}_{rj}]_{\times} + [\mathbf{v}_{rj}]_{\times}^T \boldsymbol{\Omega}_{uvj} [\mathbf{v}_{rj}]_{\times}, \\ [\Phi_{\mathcal{L}j}]_{22} &= [\mathbf{u}_{rj}]_{\times}^T \boldsymbol{\Omega}_{uuj} [\mathbf{u}_{rj}]_{\times} + [\mathbf{u}_{rj}]_{\times}^T \boldsymbol{\Omega}_{uvj} [\mathbf{v}_{rj}]_{\times} \\ &\quad + [\mathbf{v}_{rj}]_{\times}^T \boldsymbol{\Omega}_{uvj}^T [\mathbf{u}_{rj}]_{\times} + [\mathbf{v}_{rj}]_{\times}^T \boldsymbol{\Omega}_{vvj} [\mathbf{v}_{rj}]_{\times}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

其中 $\boldsymbol{\Omega}_{uuj}$ 、 $\boldsymbol{\Omega}_{uvj}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}_{vvj}$ 分别为矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{L}j}$ 的左上 3×3 、右上 3×1 以及右下 1×1 子矩阵。由式(5.42)可知，基于直线特征的传感器运动估计的两种退化情况为：

- (a) 如果存在方向向量 e 使得对于 $j = 1, \dots, N_{\mathcal{L}}$ 且 $N_{\mathcal{L}} \geq 2$ ，有 $e \times \mathbf{v}_{rj}$ ，则对于 1DoF 传感器运动 $\xi_{1D} = [\mu e^T, \mathbf{0}^T]^T (\mu \in \mathbb{R})$ ，满足 $\xi_{1D}^T \Phi_{\mathcal{L}}|_{\xi=0} \xi_{1D} = 0$ 。换言之，直线特征无法约束 ξ_{1D} 方向的传感器运动估计。此时，直线特征的方向向量在空间中为共线分布，即直线特征相互平行。
- (b) 当 $N_{\mathcal{L}} = 1$ ，即只有一条直线时，由式(5.36)可知，对于 2DoF 传感器运动 $\xi_{2D} = [\mu_1 \mathbf{u}_{rj}^T + \mu_2 \mathbf{v}_{rj}^T, \mu_1 \mathbf{v}_{rj}^T]^T (\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R})$ ，直线特征无法提供 ξ_{2D} 方向的约束。

第四节 面-线-点多模态特征的双层自适应融合

本章提出基于运动求解约束分析的双层自适应加权算法，解决面-线-点多模态特征无缝融合问题。首先，通过平面特征在位姿空间各个维度的约束情况，计算直线特征的自适应权值。接着，在对直线特征自适应加权的基础上，针对平面-直线特征对传感器运动估计的联合约束进行进一步的分析和求解。最后，使用平面-直线特征的联合约束计算边缘点特征的自适应权值，完成平面-直线-点特征的无缝融合。

传感器运动求解的目标函数定义为

$$F(\xi) = \sum_{i=1}^{N_\pi} \mathbf{e}_{\pi i}^T \boldsymbol{\Omega}_{\pi i} \mathbf{e}_{\pi i} + \sum_{j=1}^{N_L} w_{Lj} \mathbf{e}_{Lj}^T \boldsymbol{\Omega}_{Lj} \mathbf{e}_{Lj} + \sum_{k=1}^{N_p} w_{pk} \mathbf{e}_{pk}^T \boldsymbol{\Omega}_{pk} \mathbf{e}_{pk} \quad (5.44)$$

需要说明的是，目标函数(5.44)中的权值 w_{Lj} 和 w_{pk} 并不是根据经验进行人工设定，而是基于第三节中提出的约束分析方法进行自适应计算得到的。其中，直线特征的权值 w_{Lj} 通过第5.3.1中平面特征对传感器运动约束情况的分析而获得，而边缘点特征的权值 w_{pk} ，则是基于平面特征和加权后的直线特征对传感器运动的共同约束进行计算的。自适应加权算法可以根据不同类型的特征为各个方向上的传感器运动估计提供求解约束的情况，对不同特征在目标函数中的贡献进行自适应调节，使得多特征融合后位姿求解问题的适定性增强，以避免求解退化的情况，进而提高视觉里程计算法的准确性和鲁棒性。

5.4.1 直线特征自适应权值的计算

由第5.3.1节可知，通过计算矩阵 Φ_π 的EVD，可以得到平面特征对传感器运动估计的约束分析结果，矩阵特征值 $\lambda_{\pi l}, l = 1, \dots, 6$ 表示其对应特征向量方向 $\mathbf{q}_{\pi l}, l = 1, \dots, 6$ 上的约束强度。定义平面约束向量 $\boldsymbol{\lambda}_\pi$ 为

$$\boldsymbol{\lambda}_\pi = [\lambda_{\pi 1}, \lambda_{\pi 2}, \lambda_{\pi 3}, \lambda_{\pi 4}, \lambda_{\pi 5}, \lambda_{\pi 6}]^T. \quad (5.45)$$

由式(5.45)可以看出，平面约束向量 $\boldsymbol{\lambda}_\pi$ 即是以 $\mathbf{q}_{\pi l}, l = 1, \dots, 6$ 为基底的 6D 位姿空间中的一个向量， $\boldsymbol{\lambda}_\pi$ 在每个基底方向上的分量，即为平面特征在该方向上所能提供的约束强度。

对于直线特征，计算 $\{\mathcal{L}_{cj}, \mathcal{L}_{rj}\}$ 在方向 $\mathbf{q}_{\pi l}$ 上所能提供的约束强度为

$$\lambda_{Ljl} = \mathbf{q}_{\pi l}^T \boldsymbol{\Phi}_{Lj} \mathbf{q}_{\pi l}. \quad (5.46)$$

定义直线约束向量 $\lambda_{\mathcal{L}j}$ 为

$$\lambda_{\mathcal{L}j} = [\lambda_{\mathcal{L}jl}, \lambda_{\mathcal{L}j2}, \lambda_{\mathcal{L}j3}, \lambda_{\mathcal{L}j4}, \lambda_{\mathcal{L}j5}, \lambda_{\mathcal{L}j6}]^T. \quad (5.47)$$

与平面约束向量类似，直线约束向量 $\lambda_{\mathcal{L}j}$ 在每个基底方向上的分量，表示直线特征 $\{\mathcal{L}_{cj}, \mathcal{L}_{rj}\}$ 在该方向上所能提供的约束强度。

式(5.44)中，直线特征的自适应权值 $w_{\mathcal{L}j}$ 为

$$w_{\mathcal{L}j} = \frac{1}{2} \left\| \frac{\lambda_\pi}{\|\lambda_\pi\|} - \frac{\lambda_{\mathcal{L}j}}{\|\lambda_{\mathcal{L}j}\|} \right\|_2^2 \in [0, 1]. \quad (5.48)$$

如式(5.48)所示，直线特征在目标函数中的权值 $w_{\mathcal{L}j}$ 并不是由人为指定，而是根据平面特征以及直线特征在 6D 位姿空间各个方向上所能提供的约束进行自适应计算得到的。具体而言，如果对于任意 $l \in \{1, \dots, 6\}$ ，直线特征 $\{\mathcal{L}_{cj}, \mathcal{L}_{rj}\}$ 在 $\mathbf{q}_{\pi l}$ 方向上所能提供的约束强度均与平面特征在该方向所提供的约束强度相似，换言之，对于平面特征无法提供约束的方向，直线特征 $\{\mathcal{L}_{cj}, \mathcal{L}_{rj}\}$ 同样无法提供约束信息，此时，由式(5.48)计算得到的 $w_{\mathcal{L}j}$ 的值会比较小，相应地，直线特征 $\{\mathcal{L}_{cj}, \mathcal{L}_{rj}\}$ 在目标函数中的贡献也会比较小。而如果存在 $l \in \{1, \dots, 6\}$ ，使得 $\lambda_{\pi l}$ 较小的同时 $\lambda_{\mathcal{L}jl}$ 较大，换言之，平面特征在 $\mathbf{q}_{\pi l}$ 方向上所能提供的约束强度很小，而直线特征 $\{\mathcal{L}_{cj}, \mathcal{L}_{rj}\}$ 在该方向上可以提供很强的约束，即平面特征和直线特征在对位姿求解的约束能力上存在互补性，此时，由式(5.48)计算得到的 $w_{\mathcal{L}j}$ 的值会比较大，相应地，直线特征 $\{\mathcal{L}_{cj}, \mathcal{L}_{rj}\}$ 在目标函数中的贡献也会比较大，对平面特征无法约束的位姿自由度进行补充，解决了退化问题的同时，增强了位姿求解问题的适定性。

5.4.2 点特征自适应权值的计算

在第5.4.1节中，根据平面特征对位姿估计的约束情况，对目标函数(5.44)中的直线特征权值 $w_{\mathcal{L}j}$ 进行了自适应地计算，使得直线特征对平面特征无法约束的位姿自由度进行了一定地补充。在本节中，首先对平面特征以及经过自适应加权的直线特征进行整体的约束分析，并以此为基础，对式(5.44)中的边缘点特征权值 w_{pk} 进行自适应地计算，对平面和直线约束较弱的位姿自由度进行补充，进一步增强位姿求解问题的适定性。此外，利用 w_{pk} 对边缘点特征进行筛选，去除对优化目标贡献较小的边缘点，提高算法的实时性。

下面分析平面特征和经过自适应加权的直线特征对位姿求解的约束，令

$$\Phi_{\pi\mathcal{L}} = \sum_{i=1}^{N_\pi} \mathbf{J}_{\pi i}^T \boldsymbol{\Omega}_{\pi i} \mathbf{J}_{\pi i} + \sum_{j=1}^{N_{\mathcal{L}}} w_{\mathcal{L} j} \mathbf{J}_{\mathcal{L} j}^T \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{L} j} \mathbf{J}_{\mathcal{L} j}. \quad (5.49)$$

计算矩阵 $\Phi_{\pi\mathcal{L}}$ 的 EVD 可得

$$\Phi_{\pi\mathcal{L}} = \mathbf{Q}_{\pi\mathcal{L}} \boldsymbol{\Lambda}_{\pi\mathcal{L}} \mathbf{Q}_{\pi\mathcal{L}}^T = \sum_{l=1}^6 \lambda_{\pi\mathcal{L} l} \mathbf{q}_{\pi\mathcal{L} l} \mathbf{q}_{\pi\mathcal{L} l}^T. \quad (5.50)$$

其中 $\lambda_{\pi\mathcal{L} l}, l = 1, \dots, 6$ 表示 $\Phi_{\pi\mathcal{L}}$ 的特征值，并按降序排序， $\mathbf{q}_{\pi\mathcal{L} l}, l = 1, \dots, 6$ 表示其对应的特征向量，也构成 6D 位姿空间的一组正交基底。定义平面-直线约束向量 $\boldsymbol{\lambda}_{\pi\mathcal{L}}$ 为

$$\boldsymbol{\lambda}_{\pi\mathcal{L}} = [\lambda_{\pi\mathcal{L} 1}, \lambda_{\pi\mathcal{L} 2}, \lambda_{\pi\mathcal{L} 3}, \lambda_{\pi\mathcal{L} 4}, \lambda_{\pi\mathcal{L} 5}, \lambda_{\pi\mathcal{L} 6}]^T. \quad (5.51)$$

$\boldsymbol{\lambda}_{\pi\mathcal{L}}$ 在各个基底方向上的分量，即为平面特征以及经过自适应加权后的直线特征在该方向上共同提供的约束强度。

对于边缘点特征，优化目标(5.44)中的残差向量 \mathbf{e}_{pk} 定义为

$$\mathbf{e}_{pk} = \mathbf{p}_{ck} - T(\mathbf{p}_{rk}, \boldsymbol{\xi}), \quad (5.52)$$

其中

$$T(\mathbf{p}_k, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{R}\mathbf{p}_k + \mathbf{t}. \quad (5.53)$$

\mathbf{e}_{pk} 对 $\boldsymbol{\xi}$ 的雅可比矩阵为

$$\mathbf{J}_{pk} = \frac{\partial \mathbf{e}_{pk}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{3 \times 3} & [\mathbf{R}\mathbf{p}_{rk}]_{\times} \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

定义矩阵 Φ_{pk} 为

$$\Phi_{pk} = \mathbf{J}_{pk}^T \boldsymbol{\Omega}_{pk} \mathbf{J}_{pk}. \quad (5.55)$$

其中信息矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_{pk}$ 定义为边缘点协方差矩阵的逆，边缘点协方差的计算方法详见附录 B。与直线特征类似，计算 $\{\mathbf{p}_{ck}, \mathbf{p}_{rk}\}$ 在 $\mathbf{q}_{\pi\mathcal{L} l}$ 方向上所能提供的约束强度为

$$\lambda_{pkl} = \mathbf{q}_{\pi\mathcal{L} l}^T \boldsymbol{\Phi}_{pk} \mathbf{q}_{\pi\mathcal{L} l}. \quad (5.56)$$

定义边缘点约束向量 $\boldsymbol{\lambda}_{pk}$ 为

$$\boldsymbol{\lambda}_{pk} = [\lambda_{pk1}, \lambda_{pk2}, \lambda_{pk3}, \lambda_{pk4}, \lambda_{pk5}, \lambda_{pk6}]^T. \quad (5.57)$$

λ_{pk} 在每个基底方向上的分量，表示边缘点 $\{\mathbf{p}_{ck}, \mathbf{p}_{rk}\}$ 在该方向上所能提供的约束强度。与第5.4.1节中类似，式(5.44)中边缘点特征的自适应权值 w_{pk} 定义为

$$w_{pk} = \frac{1}{2} \left\| \frac{\lambda_{\pi\mathcal{L}}}{\|\lambda_{\pi\mathcal{L}}\|} - \frac{\lambda_{pk}}{\|\lambda_{pk}\|} \right\|_2^2 \in [0, 1]. \quad (5.58)$$

w_{pk} 不仅用于调整边缘点特征在目标函数(5.44)中的贡献量，而且还用于对边缘点特征进行筛选，在减少数据量的同时，保留了对优化求解贡献较大的特征，在保证了算法准确性和有效性的同时，进一步提升了算法的实时性。

第五节 实验结果

本节使用 TUM^[89] 以及 ICL-NUIM^[90] 公开数据集对本章提出的特征参数的概率拟合算法以及基于自适应加权的平面-直线-边缘点无缝融合算法进行实验验证。实验所用处理器为 Intel i7 CPU (1.8GHz)，运行内存为 8G。在第5.5.1节中，对特征参数的概率拟合算法进行评测，并与广泛使用的 LS 方法进行对比。在第5.5.2节中，使用 RPE 与 ATE 两种评测指标对基于平面-直线-边缘点无缝融合的视觉里程计算法 (简写为 PLE-VO) 进行评测，并将其与五种视觉里程计算法进行对比。在第5.5.3节中，在 PLE-VO 中加入后端优化的过程，构成完整的 SLAM 系统 (简写为 PLE-SLAM)，并将其与七种先进的 SLAM 方法进行比较与分析。在第5.5.4节中，对基于 PLE-SLAM 得到的点云地图进行评价，并将其与三种基于平面特征的 SLAM 系统进行对比与分析。在第5.5.5节中，在光照变化场景中进行移动机器人视觉里程计实验，验证 PLE-VO 算法对光照变化的鲁棒性。

5.5.1 特征参数拟合的实验结果与分析

本节使用公开数据集 ICL-NUIM^[90] 对特征参数的概率拟合方法进行评测，ICL-NUIM 数据集包含了在虚拟场景中生成的 RGB-D 传感器观测图像序列。在本节实验中，从虚拟场景的 3D 模型中提取平面以及直线特征作为特征拟合实验的定量评测基准。接着，针对基于 Kinect 1.0 噪声模型模拟生成的传感器数据，分别使用本章提出的特征参数概率拟合方法 (平面特征参数概率拟合简写为 Pr_PF，直线特征参数概率拟合简写为 Pr_LF) 以及基于 LS 的特征参数拟合方法 (平面特征参数 LS 拟合简写为 LS_PF，直线特征参数 LS 拟合简写为 LS_LF) 对提取出的特征参数进行拟合。最后，使用三种评测指标，即平面法向

量(直线方向向量)之间夹角、截距差、不加噪声的观测点到拟合特征之间的平均距离,对两种拟合方法进行评价。对比结果如图5.3所示,从中可以明显看出,对于三种评测标准,通过概率拟合方法计算得到的平面和直线特征参数的准确性都要优于LS方法计算的特征参数。由于概率拟合方法降低了传感器观测噪声对参数拟合的影响,因此,Pr_PF以及Pr_LF方法可以尽量减少不确定度较大的观测数据点对特征参数拟合的不利影响,得到了更加准确的估计结果。

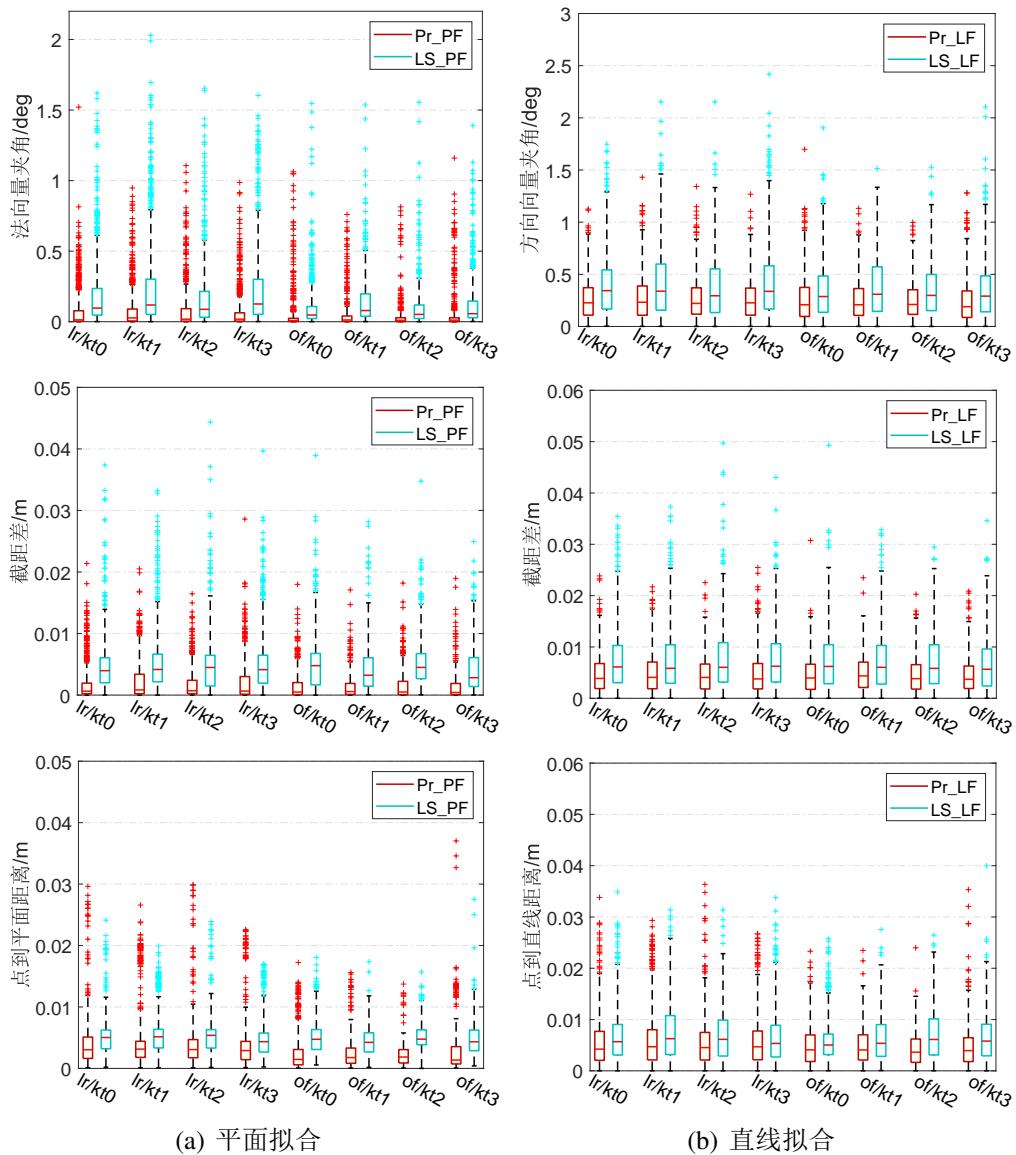


图 5.3 平面与直线拟合精度的对比

5.5.2 视觉里程计实验结果与分析

本节将本章提出的 PLE-VO 与另外五种使用几何特征的视觉里程计系统, 即 PLVO (本文第四章)、Prob-RGBD-VO^[28]、Canny-VO^[66]、CPA-VO^[97] 与 STING-VO^[36] 进行比较。Prob-RGBD-VO 算法是结合点、直线、平面三种特征计算得到的 RGB-D 视觉里程计, 在位姿优化的过程中考虑了特征不确定度的影响。Canny-VO 系统通过配准从图像中提取的 Canny 边缘特征完成 RGB-D 视觉里程计的计算。CPA-VO 系统通过期望最大化 (Expectation-Maximization, EM) 算法计算传感器当前帧相对于参考帧以及全局平面模型的位姿。在 STING-VO 算法中, 通过平面特征配准的方式计算相邻两帧之间的传感器位姿变换, 当提取的平面特征无法提供 6DoF 位姿估计的全部约束时, 使用基于 STING 结构的扫描匹配方法提供额外的约束。表5.1和表5.2列出了 RPE 和 ATE 的对比结果。其中 Prob-RGBD-VO、Canny-VO 以及 CPA-VO 的结果均来自各自文献中公开的实验结果^[28, 66, 97], 另外, 由于文献 [97] 中没有报告 CPA-VO 的 RPE 评测结果, 因此表5.1中所列对比数据中不包含 CPA-VO。

表 5.1 VO 实验的 RPE 对比结果

	PLE-VO	PLVO	Prob-RGBD-VO	Canny-VO	STING-VO
fr1/desk	0.022m;1.5deg	0.021m;1.4deg	0.023m;1.7deg	0.031m;1.9deg	0.025m;1.9deg
fr2/360_hemi	0.061m;0.8deg	0.066m;1.0deg	0.069m;1.1deg	0.108m;1.1deg	0.092m;1.5deg
fr3/str	0.011m;0.4deg	0.012m;0.5deg	0.019m;0.7deg	0.027m;0.5deg	0.014m;0.8deg
fr3/cabinet	0.010m;0.9deg	0.029m;1.2deg	0.039m;1.8deg	0.036m;1.6deg	0.011m;1.0deg
fr3/office	0.004m;0.5deg	0.007m;0.4deg	—	0.010m; 0.5deg	0.009m; 0.5deg
lr0	0.005m;0.5deg	0.010m;0.7deg	0.006m; 0.5deg	0.014m;0.6deg	0.019m;0.7deg

表 5.2 VO 实验的 ATE 对比结果

	PLE-VO	PLVO	Prob-RGBD-VO	Canny-VO	CPA-VO	STING-VO
fr1/desk	0.026m	0.038m	0.040m	0.044m	0.030m	0.041m
fr2/360_hemi	0.076m	0.105m	0.203m	0.079m	—	0.122m
fr3/str	0.022m	0.030m	0.054m	0.031m	0.036m	0.040m
fr3/cabinet	0.059m	0.052m	0.200m	0.057m	—	0.070m
fr3/office	0.075m	0.081m	—	0.085m	0.076m	0.089m
lr0	0.035m	0.066m	0.059m	0.035m	—	0.071m

从表5.1和表5.2中可以看出, 在大多数图像序列上, PLE-VO 的准确性要高于另外四种 VO 算法。值得说明的是, PLE-VO、Prob-RGBD-VO 和 STING-VO 算法都使用几何特征作为观测数据的高层表示, 并使用高层特征参数计算传感

器运动。相比而言，CPA-VO 算法则通过稠密图像信息与全局平面模型的配准进行传感器位姿的计算，并且需要 GPU 保证系统的实时性。从表5.2中可以看出，尽管 PLE-VO 使用高层特征参数来表示原始的观测数据，但相比于直接处理原始数据，可以获得更好的精度，充分说明了本文提出的特征参数拟合算法以及视觉里程计算法的准确性。另外，相比于 STING-VO，PLE-VO 能获得更好的结果，如表5.1和表5.2中所示。在 STING-VO 中，即使平面特征可以提供 6DoF 传感器运动估计所需的全部约束，运动估计也会存在病态解问题。在这种情况下，运动估计结果会存在很大的不确定性。而在本章所提出方法中，通过平面-直线-边缘点无缝融合方法，巧妙地解决了上述问题。因此，PLE-VO 系统得到了更准确的视觉里程计结果。

图5.4中给出了 PLE-VO 算法的平均运行时间的统计箱线图，从图中可以看出，算法运行时间与环境结构存在很大关系，但总体上满足视觉里程计的实时性要求。

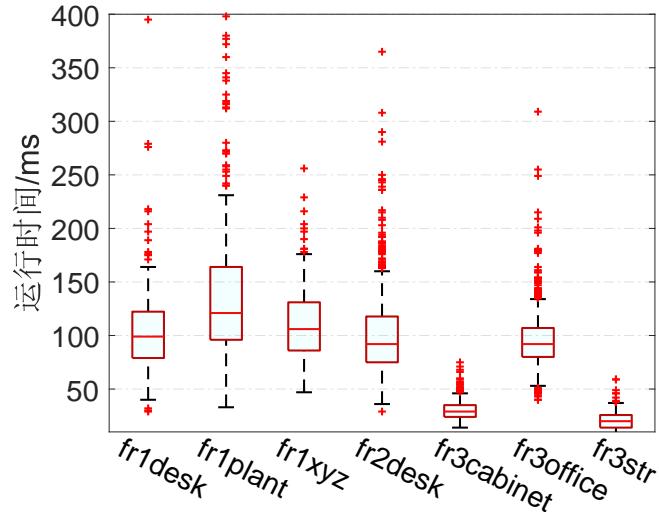


图 5.4 PLE-VO 算法平均运行时间的统计箱线图

另外，图5.5(a) 给出了算法运行时间与参与运算的边缘点数量的关系，从中可以看出随着边缘点数量的增加，其对应的视觉里程计的运行时间也随之增加。图5.5(b) 给出了每帧参与运算的边缘点数量的统计直方图，可以看出通过对边缘点的自适应权值进行筛选，使得参与运动估计的边缘点数量明显减少。

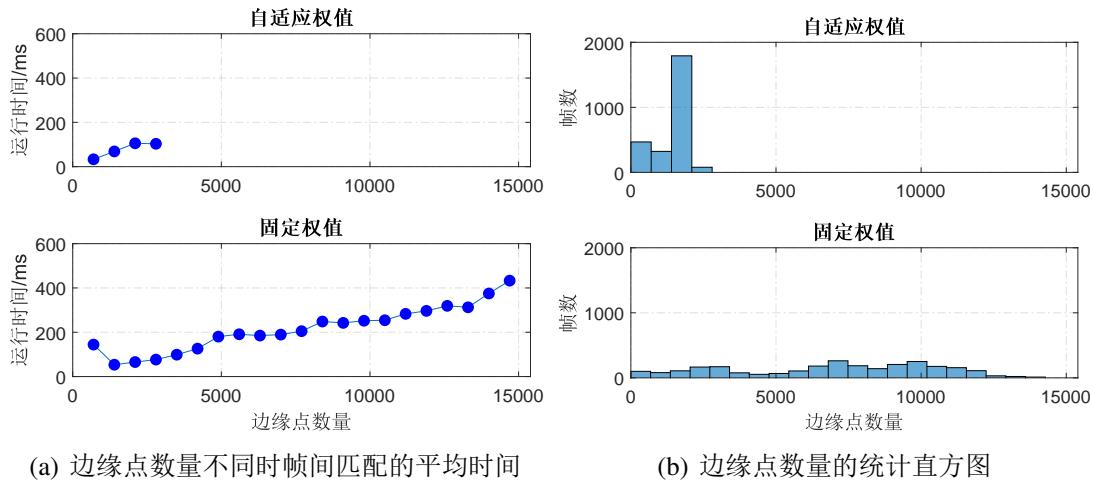


图 5.5 自适应加权算法对边缘点数量以及算法实时性的影响

表 5.3 SLAM 实验 ATE 对比结果

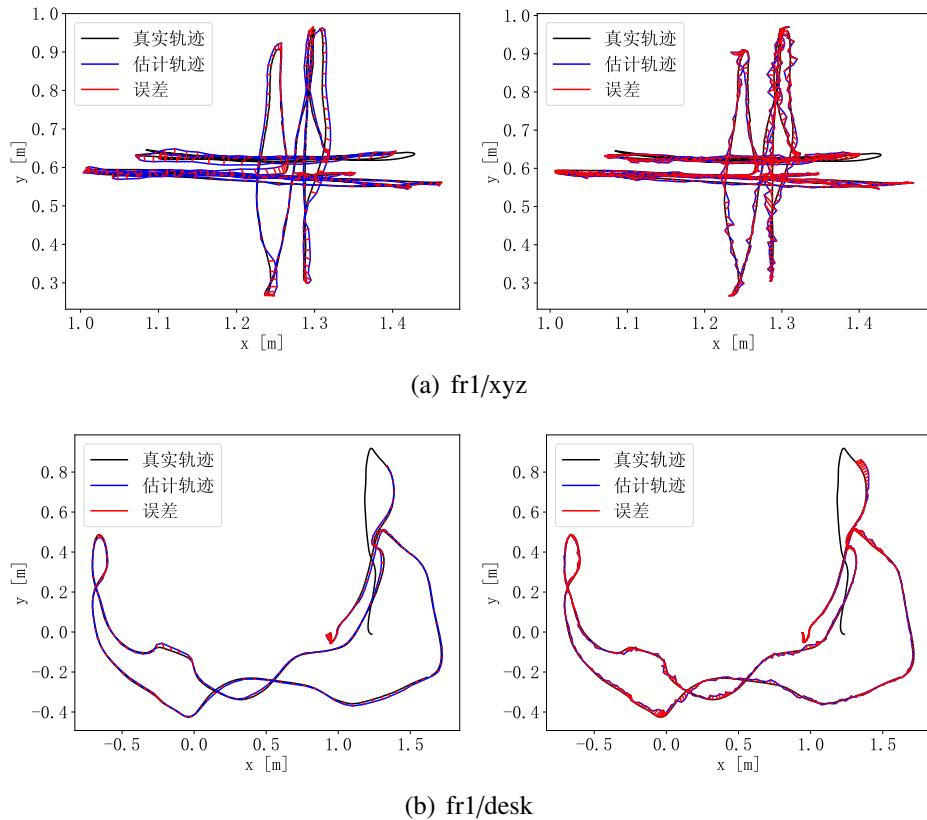
	PLE-SLAM	ORB-SLAM2	RGBD-SLAM	PL-SLAM	EdgeSLAM
fr1/xyz	0.009m	0.013m	0.012m	0.012m	0.013m
fr1/desk	0.013m	0.016m	0.026m	—	—
fr1/plant	0.014m	0.017m	0.059m	—	—
fr2/xyz	0.008m	0.004m	0.015m	0.004m	0.005m
fr2/desk	0.018m	0.009m	0.057m	—	0.017m
fr3/office	0.010m	0.010m	0.413m	0.019m	—
fr3/nst_tx_near	0.015m	0.019m	0.026m	0.020m	—
fr3/str_tx_far	0.012m	0.015m	0.033m	0.009m	0.006m
fr3/str_ntex_near	0.015m	failed	0.034m	—	0.083m
fr3/str_ntex_far	0.020m	failed	0.068m	—	0.067m

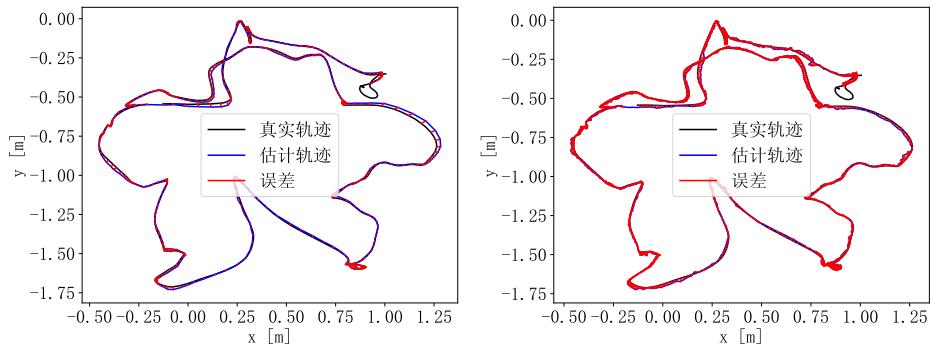
	PLE-SLAM	ElasticFusion	CPA-SLAM	STING-SLAM
fr1/xyz	0.009m	0.011m	0.011m	0.011m
fr1/desk	0.013m	0.020m	0.018m	0.030m
fr1/plant	0.014m	0.022m	0.029m	0.027m
fr2/xyz	0.008m	0.011m	0.014m	0.010m
fr2/desk	0.018m	0.071m	0.046m	0.053m
fr3/office	0.010m	0.017m	0.025m	0.034m
fr3/nst_tx_near	0.015m	0.016m	0.016m	0.018m
fr3/str_tx_far	0.012m	0.013m	—	0.009m
fr3/str_ntex_near	0.015m	0.021m	—	0.037m
fr3/str_ntex_far	0.020m	0.030m	—	0.060m

5.5.3 SLAM 实验结果与分析

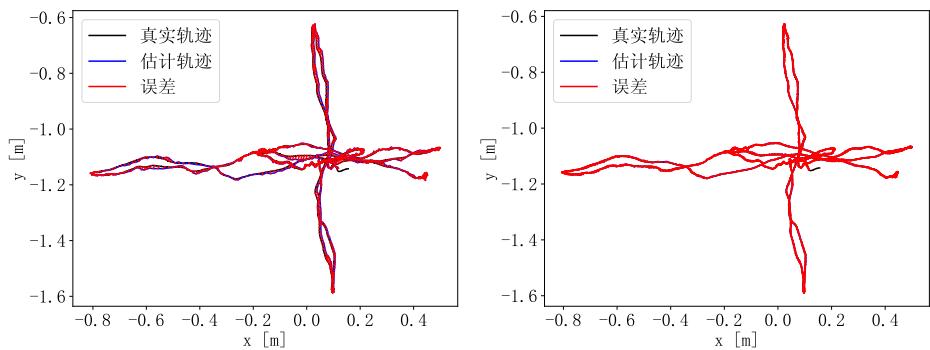
本节将 PLE-SLAM 算法与七种先进的 SLAM 系统进行性能比较：ORB-SLAM2^[11]、RGBD-SLAM^[94]、PL-SLAM^[30]、edge-SLAM^[110]、CPA-SLAM^[97]、ElasticFusion^[99] 以及 STING-SLAM^[36]。其中，ORB-SLAM2 与 RGBD-SLAM 算法均为影响广泛的基于点特征的 SLAM 系统，PL-SLAM、edge-SLAM、CPA-SLAM 和 STING-SLAM 则是基于高层几何特征的 SLAM 系统，而 ElasticFusion 是基于地图融合的 SLAM 算法。表5.3列出了各个 SLAM 算法的 ATE 结果，其中 ORB-SLAM2 结果是其开源代码默认参数的运行结果，其它 SLAM 系统的实验结果均来自各自论文中的公开结果。从表中可以看出，PLE-SLAM 在公开数据集上可以获得不逊于其它 SLAM 系统的实验结果，尤其是在低纹理环境中，可以得到明显优于对比算法的准确性。

图5.6中给出了在表5.3所列所有图像序列上，PLE-SLAM 算法以及 ORB-SLAM2 算法的 ATE 误差对比，从图中可以更直观地看到本章所提 PLE-SLAM 算法的定位准确性。

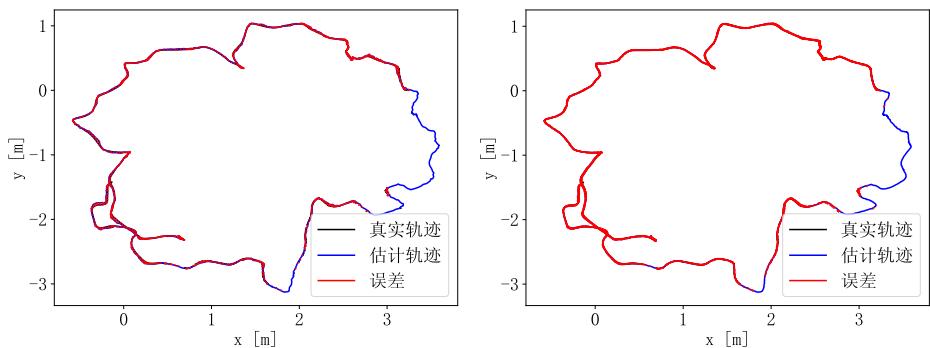




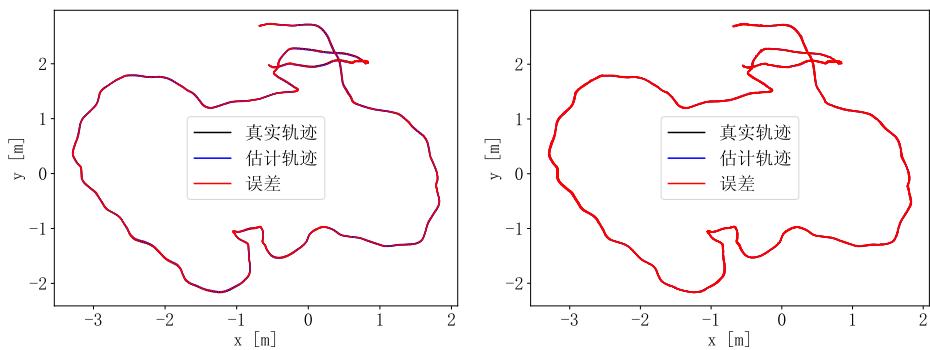
(c) fr1/plant



(d) fr2/xyz



(e) fr2/desk



(f) fr3/office

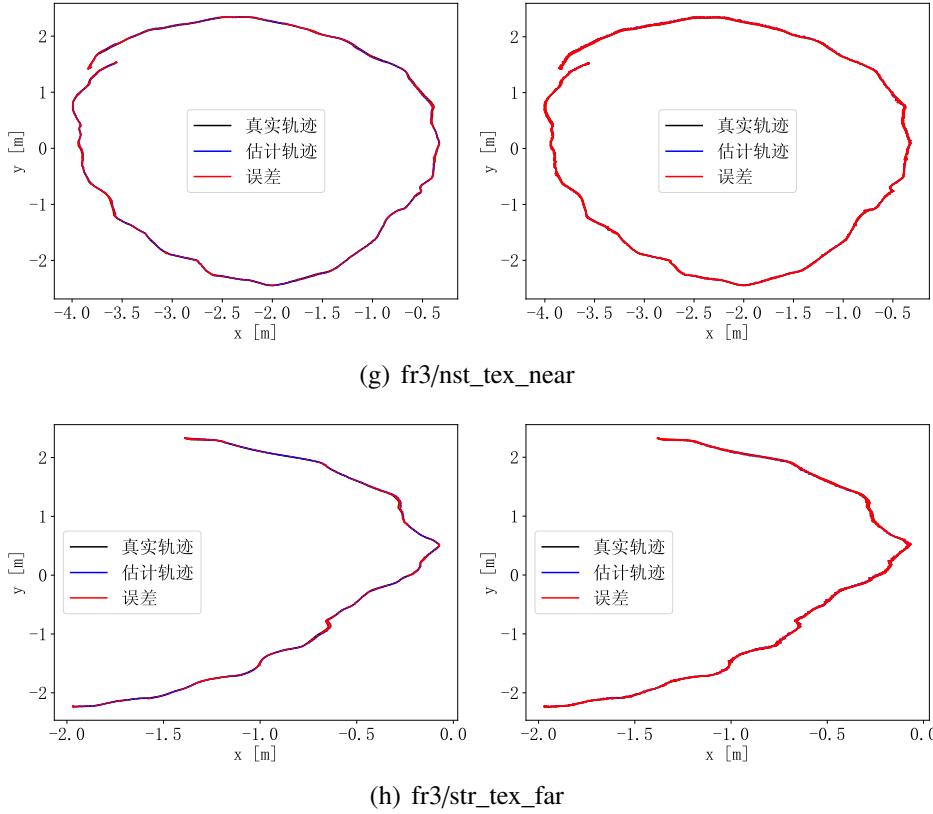


图 5.6 公开数据集上 (左)PLE-SLAM 与 (右)ORB-SLAM2 实验结果的 ATE 误差

图5.7(a) 和图5.7(b) 分别给出 PLE-SLAM 算法在图像序列 fr3/str_ntex_near 和 fr3/str_ntex_far 上的 ATE 评测图及其对应的点云地图。注意到在这两个低纹理图像序列中，ORB-SLAM2 算法均未能成功完成定位与建图任务。

5.5.4 建图质量评价与分析

本节对 PLE-SLAM 算法的建图质量进行评测与分析，并将其与三个基于平面特征的 SLAM 算法进行比较：SA-SHAGO^[65]、STING-SLAM^[36] 和 point-plane-SLAM^[40]。本节选用 ICL-NUIM 数据集^[90] 进行评测，通过其中 living room (lr/kt0) 虚拟场景的 3D 多边形模型，对 SLAM 算法所构建地图的质量进行定量评价。地图质量的评测指标为所构建地图中每个点到虚拟场景模型距离的统计结果^[90]，其计算方法如下：首先，使用 ICP 算法对重建的点云地图与基准场景模型进行配准；接着，对于重建点云地图中的每个点，通过最近邻搜索找到模型中的最近点，并计算该点与最近点之间的欧氏距离；最后，计算这些距离的均值、中值、方差、最小值以及最大值，作为地图质量的评测指标。

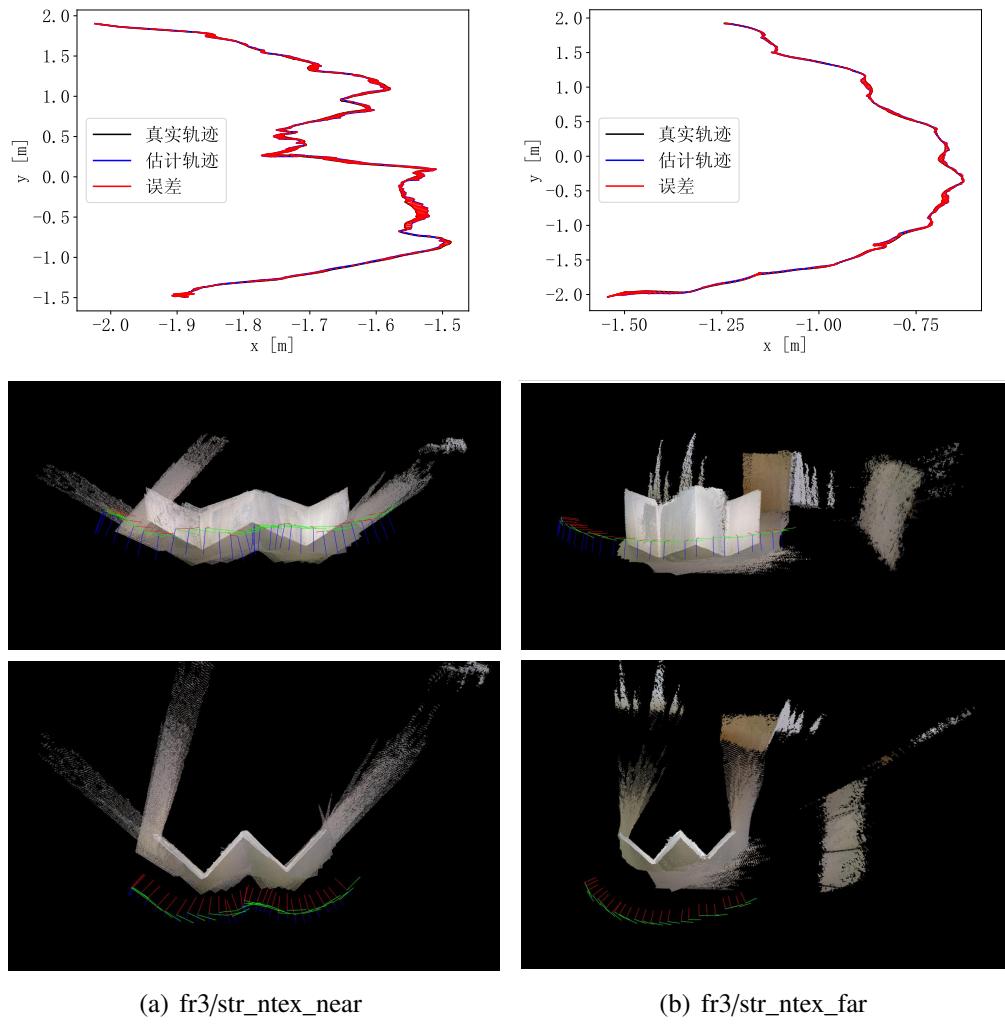
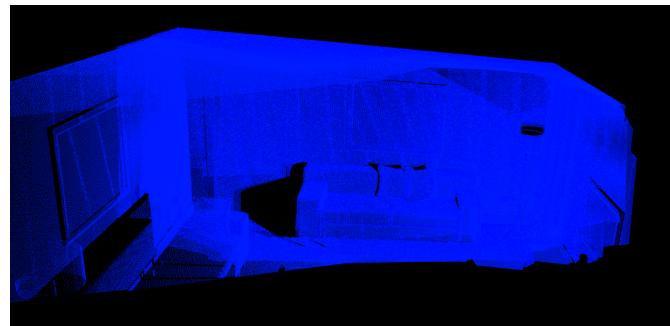


图 5.7 PLE-SLAM 在低纹理图像序列的 ATE 误差和点云地图可视化结果

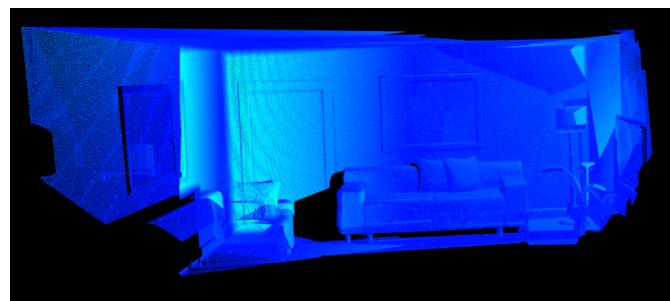
表5.4列出了四种 SLAM 算法在图像序列 lr/kr0 上运行得到点云地图的地图质量评测结果，图5.8则给出了四种算法地图重建结果的热图，其中颜色由蓝到红分别对应重建误差由小到大，直观地展示了不同算法的地图重建精度。

表 5.4 图像序列 lr/kr0 上地图重建精度对比结果

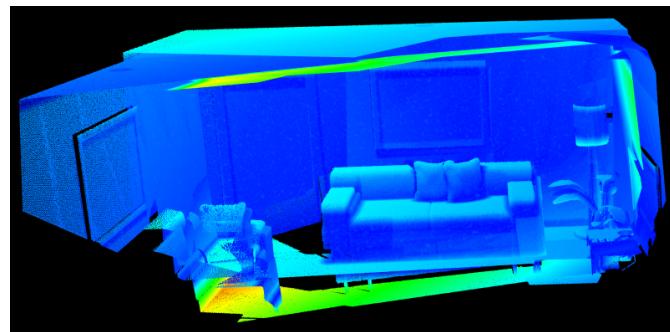
	Mean	Median	Std.	Min	Max
PLE-SLAM	0.0114m	0.0123m	0.0037m	0.0001m	0.0470m
SA-SHAGO	0.0243m	0.0189m	0.0193m	0.0001m	0.1508m
STING-SLAM	0.0545m	0.0339m	0.0597m	0.0002m	0.4521m
point-plane-SLAM	0.1062m	0.0784m	0.0935m	0.0003m	0.5666m



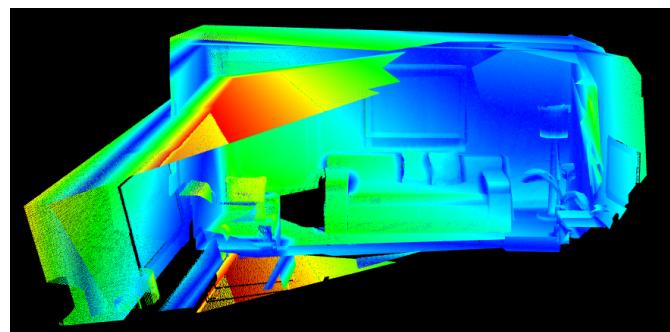
(a) PLE-SLAM



(b) SA-SHAGO



(c) STING-SLAM



(d) point-plane-SLAM

图 5.8 图像序列 lr/kr0 上地图重建热图对比

表5.5列出了四种SLAM算法在图像序列lr/kr0上ATE的六种统计结果，即均方根误差、均值、中值、方差、最小值和最大值，其相应的ATE轨迹评测图如图5.9所示。综上可以看出，不论是地图重建精度还是估计轨迹精度，PLE-SLAM算法都要明显优于其它三种基于平面特征的SLAM算法。

表 5.5 图像序列 lr/kr0 上 ATE 的对比结果

	RMSE	Mean	Median	Std.	Min	Max
PLE-SLAM	0.011m	0.012m	0.013m	0.009m	0.001m	0.043m
SA-SHAGO	0.032m	0.022m	0.014m	0.023m	0.001m	0.188m
STING-SLAM	0.057m	0.051m	0.054m	0.026m	0.006m	0.119m
point-plane-SLAM	0.143m	0.134m	0.118m	0.051m	0.052m	0.297m

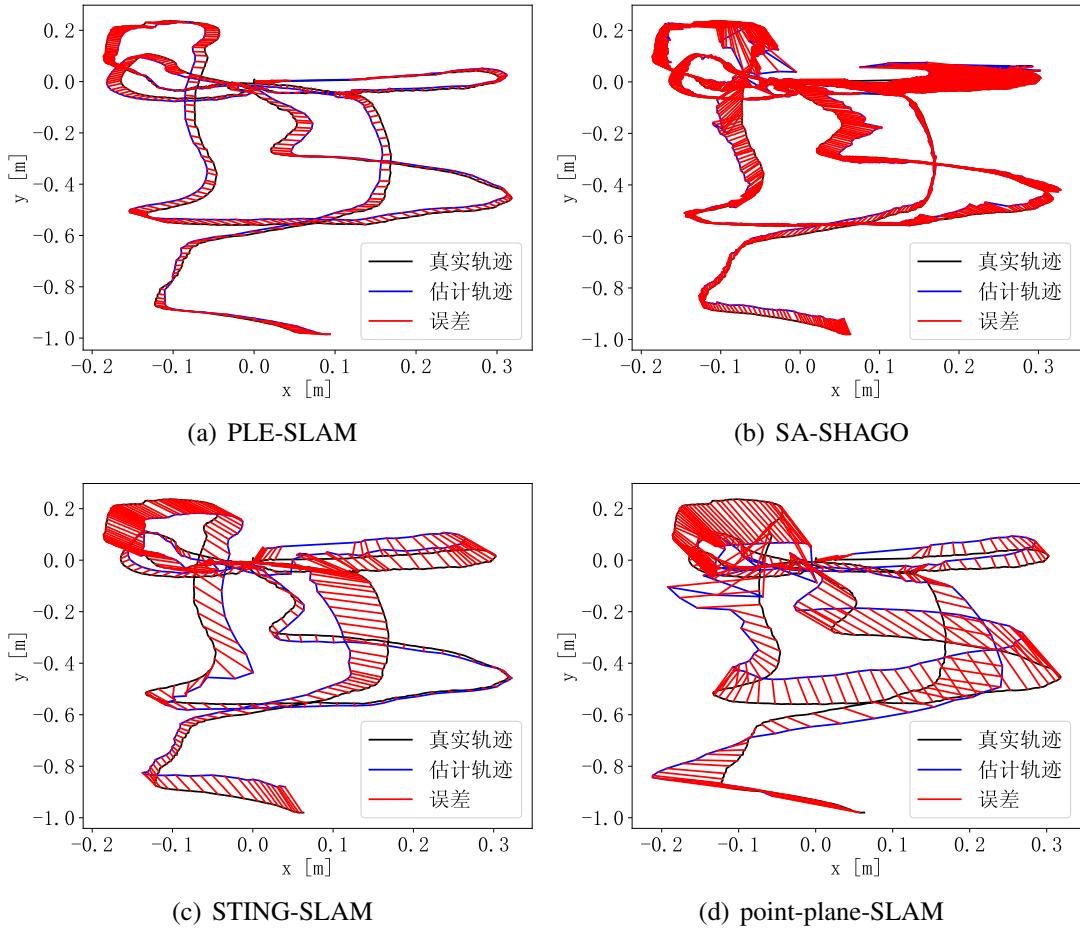
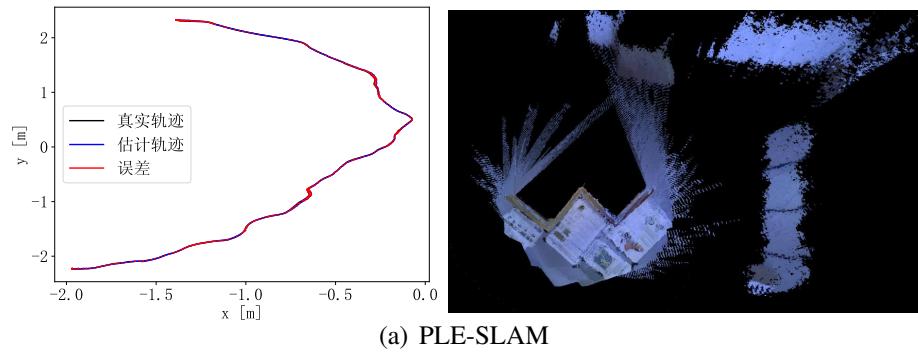


图 5.9 图像序列 lr/kr0 上的 ATE 误差对比

除了对地图重建精度的定量评测之外，分别在 TUM 公开数据集中的图像序列 fr3/str_tex_far 和 fr3/str_ntex_far 上运行这四种 SLAM 算法，其中 fr3/str_tex_far 采集场景的纹理较丰富，而 fr3/str_ntex_far 则是采集自低纹理环境，并通过点云地图的可视化结果，定性而直观地对不同算法的建图质量进行比较。表5.6列出了四种算法在这两个序列上运行结果的 ATE RMSE，图5.10和图5.11 分别给出了 fr3/str_tex_far 和 fr3/str_ntex_far 上的 ATE 评测图以及生成的点云地图，从图中可以看出，SA-SHAGO 和 point-plane-SLAM 算法在多纹理环境中 (fr3/str_tex_far) 均能得到不错的建图结果，然而，在低纹理环境 (fr3/str_ntex_far) 中的结果却比较差，如图5.11(b) 与图5.11(d) 所示。原因在于，这两种 SLAM 算法虽然都使用了高层几何特征，但当几何特征无法提供位姿求解的全部约束时，其定位精度便会严重依赖于视觉特征的提取^[40, 65]。而图像序列 fr3/str_ntex_far 采集自低纹理环境，难以提取足够的视觉特征，因此，这两个 SLAM 系统都无法得到理想的定位和建图结果。相比而言，本章提出的 PLE-SLAM 算法不论在纹理丰富的环境还是低纹理环境，都可以获得很高的定位精度以及良好的地图重建结果。

表 5.6 图像序列 fr3/str_tex_far 和 fr3/str_ntex_far 上 ATE RMSE 对比结果

	fr3/str_tex_far	fr3/str_ntex_far
PLE-SLAM	0.012m	0.020m
SA-SHAGO	0.032m	0.440m
STING-SLAM	0.056m	0.066m
point-plane-SLAM	0.066m	0.383m



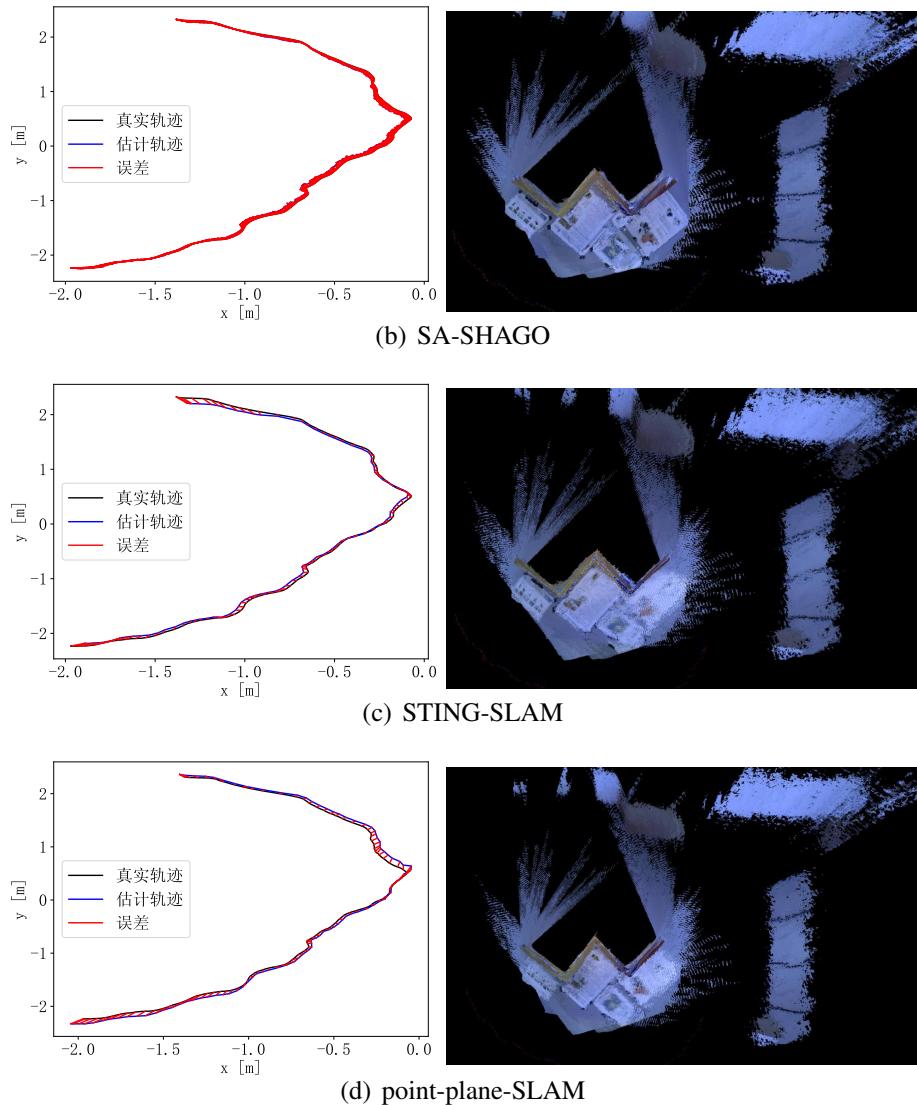
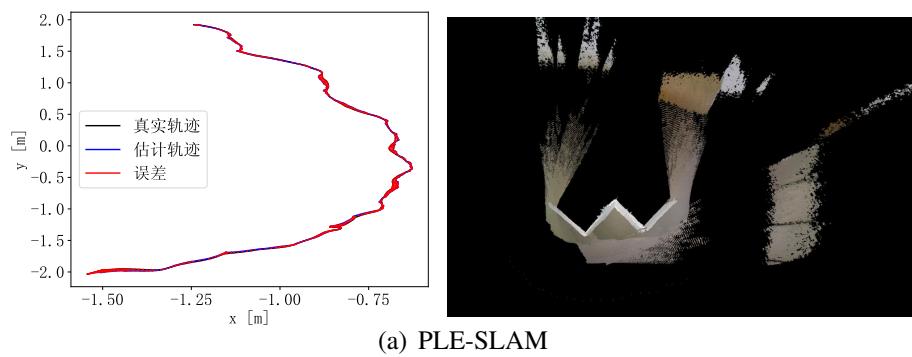


图 5.10 图像序列 fr3/str_tex_far 上的四种 SLAM 算法的 ATE 误差与点云地图



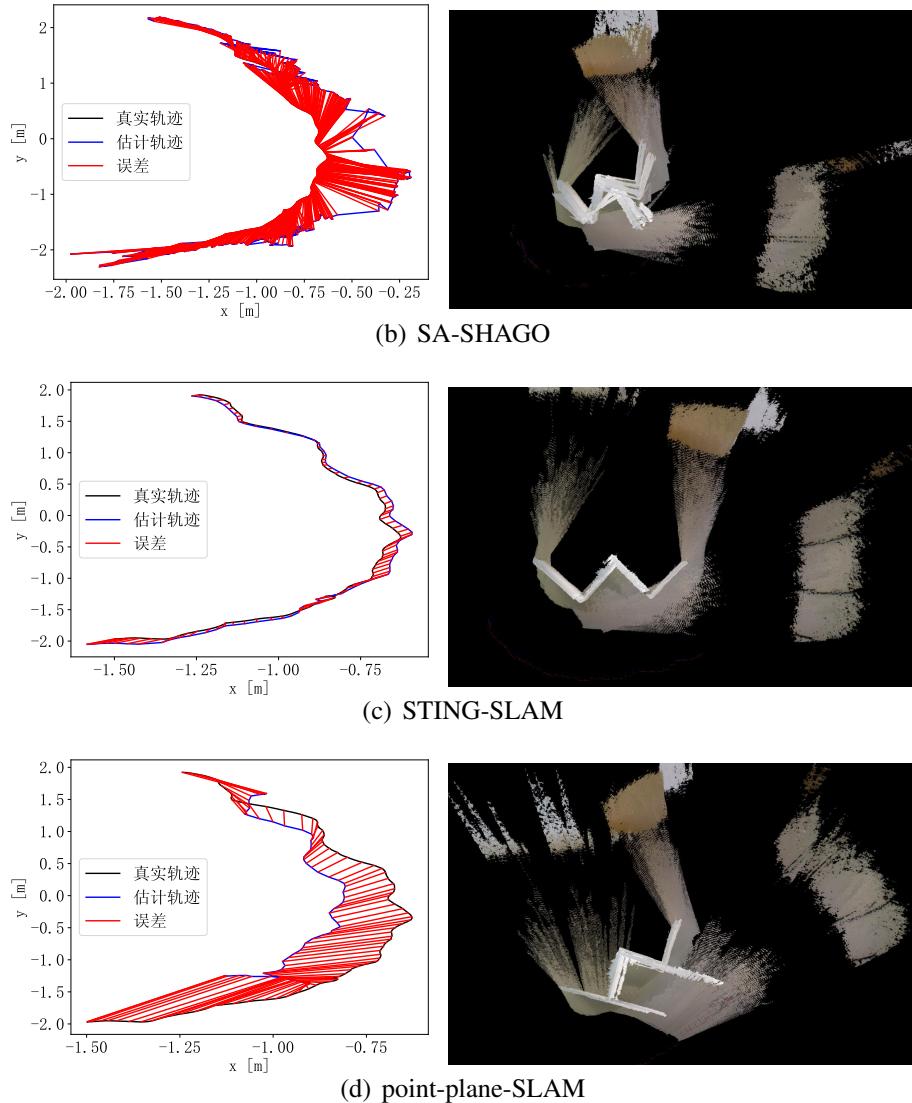


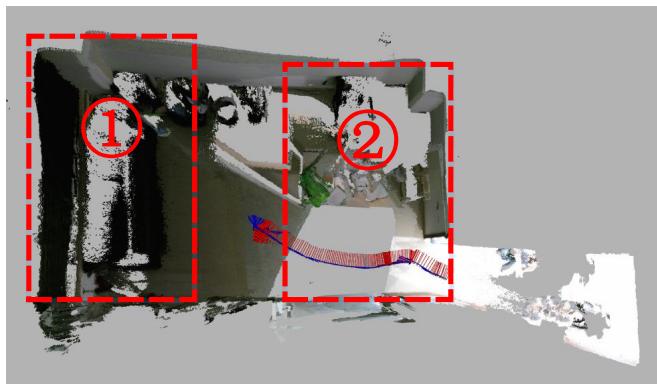
图 5.11 图像序列 fr3/str_ntex_far 上的四种 SLAM 算法 ATE 误差与点云地图

5.5.5 移动机器人真实环境视觉里程计实验

相比于视觉特征，高层几何特征对于低纹理环境以及光照变化场景都具有更强的鲁棒性，而在多模态特征融合中，由于高层特征的加入，使得系统对各类不同的场景有了更好的适应性。在第5.5.3节与第5.5.4节中，对于系统在低纹理环境中的性能进行了验证。本节通过光照变化场景下的实时移动机器人视觉里程计实验，验证本章提出的算法对于光照变化的鲁棒性。

在实验中，移动机器人进入一间没有开灯的办公室，接着，返回正常灯光下的走廊环境，在这个过程中，环境的光照条件发生剧烈变化，对于基于视觉特征

的算法而言，具有很强的挑战性。PLE-VO 算法的运行结果如图5.12所示，其中图5.12(a) 为点云地图的全景俯视图，图5.12(b) 为局部点云图以及对应的 RGB 图像。从图中可以看出，PLE-VO 算法在光照发生剧烈变化的场景下，仍旧可以得到很理想的定位与建图效果，验证了本章算法对光照变化的鲁棒性。



(a) 点云全景图



(b) 对应于全景图①②处的 RGB 图像与局部点云图

图 5.12 光照变化场景下移动机器人定位与增量式建图结果

第六节 本章小结

本章针对多模态特征对传感器位姿求解问题的约束情况进行了定量分析，提出了面-线-点多模态特征无缝融合框架，通过约束分析对位姿空间各个方向上特征所提供的的约束强度进行了定量描述，并显式地给出了被特征约束的位

姿子空间用于位姿求解退化情况的判别。相比于第四章的研究工作，本章对于特征参数与传感器定位之间的定量约束关系的研究与分析，不仅仅针对视觉里程计算法的阶段，而是对视觉 SLAM 系统中各个部分的优化和提升都有着积极的作用。在此基础上，本章对第四章提出的自适应加权算法进行了进一步的完善和优化，充分考虑了不同模态特征在位姿空间各个方向所能提供的约束强度，不仅解决了位姿求解退化问题，还有效增强了位姿求解问题的适定性，进而提高了位姿估计的准确性、稳定性和鲁棒性。此外，针对几何特征参数求解问题，本章提出了特征参数的概率拟合算法，通过传感器误差模型的引入，降低了传感器噪声对特征参数估计的影响，使得拟合得到的特征参数更加准确，并且对传感器噪声具有更强的鲁棒性。在本章实验部分，实现了基于面-线-点多模态特征无缝融合的完整 SLAM 系统，并对其定位与建图精度都进行了详细地评测与分析。

第六章 总结与展望

第一节 本文工作总结

随着人类探索空间的不断扩展以及 SLAM 技术的飞速发展，移动机器人面对的作业场景和需要解决的应用问题也越来越复杂。作为机器人鲁棒感知、精准定位以及多层次环境表达的基础，多模态特征融合问题逐渐成为研究热点之一。目前很多研究工作中都涉及到特征融合，然而，多模态特征融合的 SLAM 问题仍然面临着诸多难题和挑战。为了充分发挥特征融合对机器人鲁棒感知能力的提升作用，不论是联合关联问题还是传感器位姿估计问题的求解，都需要对多模态特征的互补性优势进行开发和利用，进而提高机器人对不同场景和任务的鲁棒性和适应性。此外，在多模态特征融合中，对特征参数与传感器位姿估计的约束关系的研究与分析，是建立一致性的多特征环境地图的重要前提，也为机器人多层次环境表达与环境理解奠定了基础。而在目前特征融合的研究工作中，缺少对此类问题的深入研究。

本文对多模态特征无缝融合的 SLAM 问题展开了系统、深入的研究，并取得了一定的成果，具体包括以下三个方面：

- (1) 本文针对多模态特征融合中的特征联合关联问题展开了研究，提出了基于多假设框架的面-线多模态特征混合关联方法，考虑了特征的空间分布特性以及特征之间的几何关系，解决了基于多特征融合的 SLAM 系统中的数据关联问题。具体而言，提出了节点间一致性原则，在 IT 结构中生成假设路径，并对每一条假设路径的 CTM 进行增量式维护与更新，使特征数据关联与传感器位姿解算同步完成，并且获得了传感器位姿估计的封闭解。在公开数据集上进行了大量实验，通过与主流的 SLAM 算法进行对比，证明了本文提出方法的准确性和有效性。
- (2) 本文对传感器位姿求解退化与多特征空间分布的对应关系进行了深入研究，以此为基础，提出了面-线多模态特征的自适应融合算法。具体而言，首先针对提取稳定、参数估计准确性高的平面特征的空间分布及几何关系进行了描述，并分析其与传感器位姿求解退化之间的对应关系。接着，对直线特

征的空间分布及其与平面特征之间的关系进行了分析，并设计了自适应权值，实现了面-线多特征在传感器位姿估计中的融合，充分发挥了多模态特征的互补性优势，解决了传感器位姿求解时的退化问题。在公开数据集以及真实室内环境中进行了大量实验，充分验证了所提算法的性能。

- (3) 在上述研究的基础上，本文针对多模态特征在传感器位姿求解中提供的约束进一步进行了定量地分析，提出了基于面-线-点多模态特征双层自适应融合的 SLAM 方法，不仅解决了位姿求解退化的问题，而且有效提高了位姿求解问题的适定性，使位姿估计结果具有更高的准确性、稳定性和鲁棒性。此外，面-线-点多模态特征的无缝融合算法对机器人作业环境的结构信息和视觉纹理信息进行了充分的开发和利用，通过对多模态特征参数与传感器位姿估计的约束关系进行定量分析和深入研究，为一致性的多特征环境地图的构建和维护、以及机器人多层次环境感知、表达和理解提供了重要前提。

第二节 未来工作展望

本文针对多模态特征无缝融合的移动机器人 SLAM 问题进行了深入的研究，在此基础上，本文研究在以下两个方面仍有待进一步地完善与改进：

- (1) 本文主要针对 SLAM 系统前端中的特征融合问题进行了研究，专注于数据关联问题以及里程计的计算，而在一个完整的 SLAM 系统中，闭环检测与后端优化，对于 SLAM 系统性能同样具有很大的影响。在未来工作中，本文计划在 SLAM 后端部分的设计中，扩展多假设框架在闭环检测以及全局定位中的应用，并在后端图优化框架中，对不同类型特征在机器人定位以及地图描述中的作用进行描述，力争实现多模态特征在 SLAM 后端优化中进一步的融合与互补。
- (2) 随着 SLAM 技术的不断发展，越来越多的研究者开始关注 SLAM 在机器人主动探索中的应用。在机器人进行主动的环境探索时，可以根据对传感器观测信息的处理及预测，控制机器人下一步的动作，以提高观测和建图质量。本文工作针对特征对机器人定位问题的约束情况进行了深入的研究，并且将不同的约束情况与特征的空间分布进行了关联，其研究结果可以为机器人的主动环境探索提供有效的指导信息。因此，在下一步工作中，计划将本文所提出的多模态特征融合框架应用于主动 SLAM 中，对机器人的主动观测以及特征选择进行指导。

附录 A: 函数 $\mathcal{S}'' = \text{Fuse}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ 具体流程

函数 $\mathcal{S}'' = \text{Fuse}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ 用于 CTM 的增量式更新 (第3.3.3节算法3.4第 10 行), 求解两个三维刚体变换集合 \mathcal{S} 和 \mathcal{S}' 的交集。在此附录中, 给出函数 Fuse 的具体求解流程。

根据平面特征和直线特征在三维空间中的分布情况, 一致性变换集合的四类形式 (第3.3.2节) 列举如下:

- (a) 1rDoF&2tDoFs 未约束: $\mathcal{S} = \{\mathbf{R}, \mathbf{t} | \mathbf{R} = R(\varphi), \varphi \in \mathbb{R}, \mathbf{t} = \mathbf{t}_0 + [\mathbf{w}]_{\times} \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^3\}$.
- (b) 1rDoF 未约束: $\mathcal{S} = \{\mathbf{R}, \mathbf{t} | \mathbf{R} = R(\varphi), \mathbf{t} = \mathbf{t}_0 + \mathbf{R}\mathbf{w}, \varphi \in \mathbb{R}\}$.
- (c) 1tDoF 未约束: $\mathcal{S} = \{\mathbf{R}, \mathbf{t} | \mathbf{R} = \text{Rot}(\mathbf{r}, \theta), \mathbf{t} = \mathbf{t}_0 + \mu\mathbf{w}, \mu \in \mathbb{R}\}$.
- (d) 完全约束: $\mathcal{S} = \{\mathbf{R}, \mathbf{t} | \mathbf{R} = \text{Rot}(\mathbf{r}, \theta), \mathbf{t} = \mathbf{t}_0\}$.

当函数 Fuse 的输入为不同形式时, 分别计算其输出的一致性变换集合。

A.1 集合 \mathcal{S} 为 1rDoF&2tDoFs 未约束形式的情况

如果满足旋转一致性的旋转变换包含 1DoF, 则说明在同一坐标系中特征的方向向量共线, 简便起见, 将 \mathcal{S} 对应的两个坐标系中共线的特征方向向量表示为 \mathbf{e}_c 和 \mathbf{e}_r 。此时, 一致性变换集合 \mathcal{S} 中的平移变换集合可以表示为

$$\mathcal{T} = \{\mathbf{t} | \mathbf{t} = \mathbf{t}_0 + [\mathbf{w}]_{\times} \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^3\}. \quad (\text{A.1})$$

A.1.1 集合 \mathcal{S}' 为 1rDoF&2tDoFs 未约束形式时的计算方法

类似地, 将 \mathcal{S}' 对应的两个坐标系中共线的特征方向向量表示为 \mathbf{e}'_c 和 \mathbf{e}'_r , 则计算 \mathcal{S}'' 中的一致性旋转变换集合 \mathcal{R}'' 得到

$$\mathcal{R}'' = \text{RotationConsistency}(\mathbf{e}_c, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}'_c, \mathbf{e}'_r). \quad (\text{A.2})$$

\mathcal{S}' 中的平移变换集合可以表示为

$$\mathcal{T}' = \{\mathbf{t}' | \mathbf{t}' = \mathbf{t}'_0 + [\mathbf{w}']_{\times} \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}' \in \mathbb{R}^3\}. \quad (\text{A.3})$$

令 $\Delta\mathbf{t}_0 = \mathbf{t}_0 - \mathbf{t}'_0$, 则当 $\mathbf{w} \times \mathbf{w}' = 0$ 和 $\Delta\mathbf{t}_0^T \mathbf{w} = 0$ 同时成立时, 输出的平移变换集合为

$$\mathcal{T}'' = \{\mathbf{t} | \mathbf{t} = \mathbf{t}_0 + [\mathbf{w}]_{\times} \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^3\}. \quad (\text{A.4})$$

而当 $\mathbf{w} \times \mathbf{w}' \neq 0$ 时, 有 $\text{rank}([-\mathbf{w}]_{\times}, [\mathbf{w}']_{\times}) = 3$ 。假设 $[\boldsymbol{\mu}_0^T, \boldsymbol{\mu}'_0]^T$ 为方程(A.5)的解。

$$\begin{bmatrix} -[\mathbf{w}]_{\times} & [\mathbf{w}']_{\times} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\mu}' \end{bmatrix} = \Delta \mathbf{t}_0. \quad (\text{A.5})$$

则有

$$\mathcal{T}'' = \{\mathbf{t} | \mathbf{t} = (\mathbf{t}_0 + [\mathbf{w}]_{\times} \boldsymbol{\mu}_0) + \mu(\mathbf{w} \times \mathbf{w}'), \mu \in \mathbb{R}\}. \quad (\text{A.6})$$

A.1.2 集合 \mathcal{S}' 为 1rDoF 未约束形式时的计算方法

旋转变换集合 \mathcal{R}'' 的计算方法请见第 A.1.1 节。 \mathcal{S}' 中的一致性平移变换集合可以表示为

$$\mathcal{T}' = \{\mathbf{t}' | \mathbf{t}' = \mathbf{t}'_0 + \mathbf{R}' \mathbf{w}', \mathbf{R}' \in \mathcal{R}''\}. \quad (\text{A.7})$$

令 $\Delta \mathbf{t}_0 = \mathbf{t}_0 - \mathbf{t}'_0$ 。如果此时 \mathcal{R}'' 中包含 1DoF, 则当 $\Delta \mathbf{t}_0^T \mathbf{w} = 0$ 成立时, 有

$$\mathcal{T}'' = \{\mathbf{t}' | \mathbf{t}' = \mathbf{t}'_0 + \mathbf{R}' \mathbf{w}', \mathbf{R}' \in \mathcal{R}''\}. \quad (\text{A.8})$$

而如果 $\mathcal{R}'' = \{\mathbf{R}''\}$ 中只包含唯一解, 则平移变换也只有唯一解, 即 $\mathcal{T}' = \{\mathbf{t}'_1\}$, 其中 $\mathbf{t}'_1 = \mathbf{t}'_0 + \mathbf{R}'' \mathbf{w}'$ 。令 $\Delta \mathbf{t}_1 = \mathbf{t}'_1 - \mathbf{t}_0$, 当 $\Delta \mathbf{t}_1^T \mathbf{w} = 0$ 成立, 则有 $\mathcal{T}'' = \{\mathbf{t}'\}$ 。

A.1.3 集合 \mathcal{S}' 为 1tDoF 未约束形式时的计算方法

此时 \mathcal{S}' 中的一致性旋转变换可以被完全约束, 只包含唯一解, 即 $\mathbf{R}' = \text{Rot}(\mathbf{r}', \theta')$ 。那么, 当至少满足下面两个条件之一时, 可以直接得到输出变换集合中的一致性旋转变换 $\mathcal{R}'' = \{\mathbf{R}'' | \mathbf{R}'' = \text{Rot}(\mathbf{r}', \theta')\}$ 。

- (a) $\mathbf{e}_c = \mathbf{e}_r, \mathbf{r}' = \mathbf{e}_c$;
- (b) $\mathbf{e}_c \neq \mathbf{e}_r, \mathbf{r}'^T(\mathbf{e}_c - \mathbf{e}_r) = 0, \Theta(\mathbf{r}', \mathbf{e}_c, \mathbf{e}_r) = \theta'$ 。

\mathcal{S}' 中平移变换集合可以表示为

$$\mathcal{T}' = \{\mathbf{t}' | \mathbf{t}' = \mathbf{t}'_0 + \mu' \mathbf{w}', \mu' \in \mathbb{R}\}. \quad (\text{A.9})$$

令 $\Delta \mathbf{t}_0 = \mathbf{t}_0 - \mathbf{t}'_0$ 。如果 $\mathbf{w}^T \mathbf{w}' = 0$, 则当 $\Delta \mathbf{t}_0^T \mathbf{w} = 0$ 成立时, 一致性平移变换集合为

$$\mathcal{T}'' = \{\mathbf{t} | \mathbf{t} = \mathbf{t}'_0 + \mu' \mathbf{w}', \mu' \in \mathbb{R}\}. \quad (\text{A.10})$$

而当 $\mathbf{w}^T \mathbf{w}' \neq 0$ 时, 有 $\text{rank}([-\mathbf{w}]_{\times}, \mathbf{w}']) = 3$ 。假设 $[\boldsymbol{\mu}_0^T, \boldsymbol{\mu}'_0]^T$ 是方程(A.11)的解。

$$\begin{bmatrix} -[\mathbf{w}]_{\times} & \mathbf{w}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\mu}' \end{bmatrix} = \Delta \mathbf{t}_0. \quad (\text{A.11})$$

则有

$$\mathcal{T}'' = \{\mathbf{t}_0 + [\mathbf{w}]_{\times} \boldsymbol{\mu}_0\}. \quad (\text{A.12})$$

A.1.4 集合 \mathcal{S}' 为完全约束形式时的计算方法

旋转变换集合 \mathcal{R}'' 的计算方法请见第 A.1.3 节。 \mathcal{S}' 中的一致性平移变换集合可以表示为

$$\mathcal{T}' = \{\mathbf{t}'\}, \mathbf{t}' = \mathbf{t}'_0. \quad (\text{A.13})$$

令 $\Delta\mathbf{t}_0 = \mathbf{t}_0 - \mathbf{t}'_0$ 。当 $\Delta\mathbf{t}_0^T \mathbf{w} = 0$ 成立时, 有 $\mathcal{T}'' = \{\mathbf{t}'_0\}$ 。

A.2 集合 \mathcal{S} 为 1rDoF 未约束形式的情况

A.2.1 集合 \mathcal{S}' 为 1rDoF&2tDoFs 未约束形式时的计算方法

在这种情况下, 可以直接得到 $\mathcal{S}'' = \text{Fuse}(\mathcal{S}, \mathcal{S}') = \text{Fuse}(\mathcal{S}', \mathcal{S})$, 其计算方法请见第 A.1.2 节。

A.2.2 集合 \mathcal{S}' 为 1rDoF 未约束形式时的计算方法

\mathcal{S} 所对应的当前帧与参考帧中特征方向向量分别表示为 \mathbf{e}_c 和 \mathbf{e}_r , \mathcal{S}' 所对应的当前帧与参考帧中特征方向向量则表示为 \mathbf{e}'_c 和 \mathbf{e}'_r 。此时, 一致性旋转变换集合 \mathcal{R} 为

$$\mathcal{R} = \text{RotationConsistency}(\mathbf{e}_c, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}'_c, \mathbf{e}'_r). \quad (\text{A.14})$$

如果 \mathcal{R} 包含 1DoF 未被约束, 则可知 $\mathbf{e}_c = \mathbf{e}'_c$ 以及 $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}'_r$ 。那么, \mathcal{S} 和 \mathcal{S}' 中的平移变换集合分别表示为

$$\mathcal{T} = \{\mathbf{t} | \mathbf{t} = \mathbf{t}_0 + \mathbf{R}\mathbf{w}, \mathbf{R} \in \mathcal{R}\}, \quad (\text{A.15})$$

和

$$\mathcal{T}' = \{\mathbf{t}' | \mathbf{t}' = \mathbf{t}'_0 + \mathbf{R}'\mathbf{w}', \mathbf{R}' \in \mathcal{R}\}. \quad (\text{A.16})$$

若 $\|\mathbf{w} - \mathbf{w}'\| = \|\mathbf{t}_0 - \mathbf{t}'_0\|$ 成立, 则有

$$\mathcal{R}'' = \text{RotationConsistency}(\mathbf{e}_c, \mathbf{e}_r, \frac{\mathbf{w} - \mathbf{w}'}{\|\mathbf{w} - \mathbf{w}'\|}, \frac{\mathbf{t}_0 - \mathbf{t}'_0}{\|\mathbf{t}_0 - \mathbf{t}'_0\|}). \quad (\text{A.17})$$

在旋转变换 $\mathcal{R} = \{\mathbf{R}\}$ 被完全约束的情况下, 有 $\mathcal{R}'' = \mathcal{R}$ 以及

$$\mathcal{T} = \{\mathbf{t}_1\}, \mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_0 + \mathbf{R}\mathbf{w}, \quad \mathcal{T}' = \{\mathbf{t}'_1\}, \mathbf{t}'_1 = \mathbf{t}'_0 + \mathbf{R}\mathbf{w}'. \quad (\text{A.18})$$

此时若 $\|\mathbf{t}_1\| = \|\mathbf{t}'_1\|$ 成立, 则 $\mathcal{T}'' = \mathcal{T}$ 。

A.2.3 集合 \mathcal{S}' 为 1tDoF 未约束形式时的计算方法

此 \mathcal{R}'' 的计算方法请见第 A.1.3 节, 其结果为 $\mathcal{R}'' = \{\mathbf{R}''\}$ 。则 \mathcal{S} 和 \mathcal{S}' 中的一致性平移变换集合分别表示为

$$\mathcal{T} = \{\mathbf{t}_1\}, \mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_0 + \mathbf{R}''\mathbf{w}, \quad (\text{A.19})$$

和

$$\mathcal{T}' = \{\mathbf{t}' | \mathbf{t}' = \mathbf{t}'_0 + \mu' \mathbf{w}', \mu' \in \mathbb{R}\}. \quad (\text{A.20})$$

令 $\Delta\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}'_0$ 。如果 $\Delta\mathbf{t}_1 \times \mathbf{w}' = 0$ 成立, 有 $\mathcal{T}'' = \mathcal{T}$ 。

A.2.4 集合 \mathcal{S}' 为完全约束形式时的计算方法

\mathcal{R}'' 的计算方法请见第 A.1.3 节, 其结果为 $\mathcal{R}'' = \{\mathbf{R}''\}$ 。此时, \mathcal{S} 和 \mathcal{S}' 中的一致性平移变换集合可以表示为

$$\mathcal{T} = \{\mathbf{t}_1\}, \mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_0 + \mathbf{R}''\mathbf{w}, \quad (\text{A.21})$$

和

$$\mathcal{T}' = \{\mathbf{t}'_0\}. \quad (\text{A.22})$$

当 $\|\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}'_0\| = 0$ 成立时, 有 $\mathcal{T}'' = \mathcal{T}$ 。

A.3 集合 \mathcal{S} 为 1tDoF 未约束形式的情况

A.3.1 集合 \mathcal{S}' 为 1rDoF&2tDoFs 未约束形式时的计算方法

这种情况下, 函数的输出为 $\mathcal{S}'' = \text{Fuse}(\mathcal{S}, \mathcal{S}') = \text{Fuse}(\mathcal{S}', \mathcal{S})$, 其计算方法请见第 A.1.3 节。

A.3.2 集合 \mathcal{S}' 为 1rDoF 未约束形式时的计算方法

这种情况下, 函数的输出为 $\mathcal{S}'' = \text{Fuse}(\mathcal{S}, \mathcal{S}') = \text{Fuse}(\mathcal{S}', \mathcal{S})$, 其计算方法请见第 A.2.3 节。

A.3.3 集合 \mathcal{S}' 为 1tDoF 未约束形式时的计算方法

\mathcal{S} 和 \mathcal{S}' 中的一致性旋转变换集合分别为 $\mathcal{R} = \{\mathbf{R}\}$ 和 $\mathcal{R}' = \{\mathbf{R}'\}$ 。当 $\mathbf{R} = \mathbf{R}'$ 成立时, 有 $\mathcal{R}'' = \mathcal{R}$ 。而 \mathcal{S} 和 \mathcal{S}' 中的一致性平移变换集合可以表示为

$$\mathcal{T} = \{\mathbf{t} | \mathbf{t} = \mathbf{t}_0 + \mu \mathbf{w}, \mu \in \mathbb{R}\}, \quad (\text{A.23})$$

和

$$\mathcal{T}' = \{\mathbf{t}' | \mathbf{t}' = \mathbf{t}'_0 + \mu' \mathbf{w}', \mu' \in \mathbb{R}\}. \quad (\text{A.24})$$

令 $\Delta\mathbf{t}_0 = \mathbf{t}_0 - \mathbf{t}'_0$ 。当 $\mathbf{w} \times \mathbf{w}' = 0$ 和 $\Delta\mathbf{t}_0 \times \mathbf{w} = 0$ 同时成立时, 有 $\mathcal{T}'' = \mathcal{T}$ 。

而当 $\mathbf{w} \times \mathbf{w}' \neq 0$ 时, 如果 $\Delta\mathbf{t}_0^T(\mathbf{w} \times \mathbf{w}') = 0$ 成立, 方程(A.25)有唯一解 $[\mu_0, \mu'_0]^T$ 。

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{w} & \mathbf{w}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \mu' \end{bmatrix} = \Delta\mathbf{t}_0. \quad (\text{A.25})$$

此时有 $\mathcal{T}'' = \{\mathbf{t}_0 + \mu_0 \mathbf{w}\}$ 。

A.3.4 集合 \mathcal{S}' 为完全约束形式时的计算方法

\mathcal{R}'' 的计算方法请见第 A.3.3 节。 \mathcal{S} 和 \mathcal{S}' 中的一致性平移变换集合分别表示为

$$\mathcal{T} = \{\mathbf{t} | \mathbf{t} = \mathbf{t}_0 + \mu \mathbf{w}, \mu \in \mathbb{R}\}, \quad (\text{A.26})$$

和

$$\mathcal{T}' = \{\mathbf{t}'\}, \mathbf{t}' = \mathbf{t}'_0. \quad (\text{A.27})$$

令 $\Delta\mathbf{t}_0 = \mathbf{t}_0 - \mathbf{t}'_0$ 。当 $\Delta\mathbf{t}_0 \times \mathbf{w} = 0$ 成立时, 有 $\mathcal{T}'' = \mathcal{T}'$ 。

A.4 集合 \mathcal{S} 为完全约束形式的情况

A.4.1 集合 \mathcal{S}' 为 1rDoF&2tDoFs 未约束形式时的计算方法

这种情况下, 函数的输出为 $\mathcal{S}'' = \text{Fuse}(\mathcal{S}, \mathcal{S}') = \text{Fuse}(\mathcal{S}', \mathcal{S})$, 其计算方法请见第 A.1.4 节。

A.4.2 集合 \mathcal{S}' 为 1rDoF 未约束形式时的计算方法

这种情况下, 函数的输出为 $\mathcal{S}'' = \text{Fuse}(\mathcal{S}, \mathcal{S}') = \text{Fuse}(\mathcal{S}', \mathcal{S})$, 其计算方法请见第 A.2.4 节。

A.4.3 集合 \mathcal{S}' 为 1tDoF 未约束形式时的计算方法

这种情况下, 函数的输出为 $\mathcal{S}'' = \text{Fuse}(\mathcal{S}, \mathcal{S}') = \text{Fuse}(\mathcal{S}', \mathcal{S})$, 其计算方法请见第 A.3.4 节。

A.4.4 集合 \mathcal{S}' 为完全约束形式时的计算方法

\mathcal{R}'' 的计算方法请见第 A.3.3 节。 \mathcal{S} 和 \mathcal{S}' 中的一致性平移变换集合分别表示为

$$\mathcal{T} = \{\mathbf{t}\}, \mathbf{t} = \mathbf{t}_0, \quad (\text{A.28})$$

和

$$\mathcal{T}' = \{\mathbf{t}'\}, \mathbf{t}' = \mathbf{t}'_0. \quad (\text{A.29})$$

则当 $\mathbf{t}_0 = \mathbf{t}'_0$ 成立时, 有 $\mathcal{T}'' = \mathcal{T}$ 。

至此, 函数 $\mathcal{S}'' = \text{Fuse}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ 全部计算过程介绍完毕, 经过上述计算过程, 其输出一致性变换集合为 $\mathcal{S}'' = \mathcal{R}'' \cup \mathcal{T}''$ 。

附录 B: 边缘点协方差 \mathbf{C}_{pk} 计算

边缘点 \mathbf{p}_k 的协方差 \mathbf{C}_{pk} 的计算与式(5.1)所示的平面上点的协方差计算方法不同。在文献 [111] 中证明了, 文献 [107] 中提出的传感器误差模型无法适用于物体边缘附近点的不确定度计算。为了对物体边缘的局部特性进行描述, 协方差 \mathbf{C}_{pk} 由 \mathbf{p}_k 邻域内的边缘点拟合得到。使用 \mathbf{C}_{pk} 进行相机运动估计时, 残差向量 \mathbf{e}_{pk} 在沿 \mathbf{p}_k 处边缘方向变化时, 对目标函数 F_{pk} 的影响最小。换言之, 边缘上的点对沿着边缘方向相机运动的约束是最小的, 而对于垂直于边缘方向的运动, 可以提供较大的约束。

令协方差矩阵 \mathbf{C}_{pk} 的特征根为 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, 且满足 $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \gamma_3$, 对应的特征向量为 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 。由于 \mathbf{C}_{pk} 是由 \mathbf{p}_k 邻域内的边缘点拟合得到的, 则有 $\gamma_1 \gg \gamma_2 \geq \gamma_3$, \mathbf{v}_1 为 \mathbf{p}_k 处的边缘方向。由此可知

$$\frac{1}{\gamma_3} \geq \frac{1}{\gamma_2} \gg \frac{1}{\gamma_1}. \quad (\text{B.1})$$

与 \mathbf{C}_{pk} 对应的信息矩阵 $\mathbf{\Omega}_{pk}$ 可以表示为

$$\mathbf{\Omega}_{pk} = \mathbf{C}_{pk}^{-1} = \frac{1}{\gamma_1} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T + \frac{1}{\gamma_2} \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T + \frac{1}{\gamma_3} \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_3^T. \quad (\text{B.2})$$

则 F_{pk} 可以表示为

$$\begin{aligned} F_{pk} &= \mathbf{e}_{pk}^T \mathbf{\Omega}_{pk} \mathbf{e}_{pk} \\ &= \mathbf{e}_{pk}^T \left(\frac{1}{\gamma_1} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T + \frac{1}{\gamma_2} \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T + \frac{1}{\gamma_3} \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_3^T \right) \mathbf{e}_{pk}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

已知 $\mathbf{v}_j (j = 1, 2, 3)$ 是 \mathbb{R}^3 空间中一组正交基底, 则残差向量 \mathbf{e}_{pk} 可以表示为

$$\mathbf{e}_{pk} = e_1 \mathbf{v}_1 + e_2 \mathbf{v}_2 + e_3 \mathbf{v}_3. \quad (\text{B.4})$$

其中

$$e_j = \mathbf{e}_{pk}^T \mathbf{v}_j, j = 1, 2, 3. \quad (\text{B.5})$$

将式(B.4)代入式(B.3)可得

$$F_{pk} = \frac{1}{\gamma_1} e_1^2 + \frac{1}{\gamma_2} e_2^2 + \frac{1}{\gamma_3} e_3^2. \quad (\text{B.6})$$

由式(B.1)和式(B.6)可以看出, 残差向量 \mathbf{e}_{pk} 在 \mathbf{v}_1 方向上的分量对 F_{pk} 的影响是最小的。

参考文献

- [1] GAO L, BATTISTELLI G, CHISCI L. PHD-SLAM 2.0: Efficient SLAM in the presence of missdetections and clutter. [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2021: 1–10.
- [2] FAN T, WANG H, RUBENSTEIN M, et al. CPL-SLAM: Efficient and certifiably correct planar graph-based slam using the complex number representation. [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2020, 36 (6): 1719–1737.
- [3] CHEN Y, HUANG S, ZHAO L, et al. Cramér-Rao bounds and optimal design metrics for pose-graph SLAM. [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2021: 1–15.
- [4] ZHAO Y, VELA P A. Good feature matching: Toward accurate, robust VO/VSLAM with low latency. [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2020, 36 (3): 657–675.
- [5] ZHOU Y, GALLEGOS G, SHEN S. Event-based stereo visual odometry. [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2021: 1–18.
- [6] KIM U .-H, KIM S, KIM J .-H. SimVODIS: Simultaneous visual odometry, object detection, and instance segmentation. [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2020: 1–14.
- [7] IVANOV A, CAMPBELL M. Uncertainty constrained robotic exploration: an integrated exploration planner. [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2019, 27 (1): 146–160.
- [8] FRANCHI A, FREDA L, ORIOLO G, et al. The sensor-based random graph method for cooperative robot exploration. [J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2009, 14 (2): 163–175.
- [9] TRUONG X, NGO T D. Toward socially aware robot navigation in dynamic and crowded environments: a proactive social motion model. [J]. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, 2017, 14 (4): 1743–1760.
- [10] JUANG C, LAI M, ZENG W. Evolutionary fuzzy control and navigation for two wheeled robots cooperatively carrying an object in unknown environments. [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2015, 45 (9): 1731–1743.
- [11] MUR-ARTAL R, TARDÓS J D. ORB-SLAM2: An open-source SLAM system for monocular, stereo, and RGB-D cameras. [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2017, 33 (5): 1255–1262.
- [12] BOROSON E R, AYANIAN N. 3D keypoint repeatability for heterogeneous multi-robot SLAM. [C] // International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Montreal, Canada: IEEE, 2019: 6337–6343.

-
- [13] DANG Y, CHEN P, LIANG R, et al. Real-time semantic plane reconstruction on a monocular drone using sparse fusion. [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2019, 68 (8): 7383–7391.
 - [14] WANG L, WEI H. Understanding of curved corridor scenes based on projection of spatial right-angles. [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2020, 29: 9345–9359.
 - [15] CHEN L, HUANG P, CAI J. Extracting and matching lines of low-textured region in close-range navigation for tethered space robot. [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2019, 66 (9): 7131–7140.
 - [16] WEN J, ZHANG X, GAO H, et al. CAE-RLSM: Consistent and efficient redundant line segment merging for online feature map building. [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2020, 69 (7): 4222–4237.
 - [17] YANG S, SONG Y, KAESZ M, et al. Pop-up SLAM: Semantic monocular plane SLAM for low-texture environments. [C] // IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). Daejeon, Korea: IEEE, 2016: 1222–1229.
 - [18] LU Y, SONG D. Visual navigation using heterogeneous landmarks and unsupervised geometric constraints. [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2015, 31 (3): 736–749.
 - [19] FANG B, ZHAN Z. A visual SLAM method based on point-line fusion in weak-matching scene. [J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2020, 17 (2): 1–11.
 - [20] GOMEZ-OJEDA R, MORENO F, ZUÑIGA-NOËL D, et al. PL-SLAM: A stereo SLAM system through the combination of points and line segments. [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2019, 35 (3): 734–746.
 - [21] ZUO X, XIE X, LIU Y, et al. Robust visual SLAM with point and line features. [C] // IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). Vancouver, Canada: IEEE, 2017: 1775–1782.
 - [22] GOMEZ-OJEDA R, GONZALEZ-JIMENEZ J. Robust stereo visual odometry through a probabilistic combination of points and line segments. [C] // 2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Stockholm, Sweden: IEEE, 2016: 2521–2526.
 - [23] FU Q, WANG J, YU H, et al. PL-VINS: real-time monocular visual-inertial SLAM with point and line features. [C] // International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Paris, France: IEEE, 2020.
 - [24] HE Y, ZHAO J, GUO Y, et al. Pl-VIO: Tightly-coupled monocular visual-inertial odometry using point and line features. [J]. Sensors, 2018, 18 (4): 1159–1183.
 - [25] ZHANG X, WANG W, XIANYU Q, et al. Point-plane SLAM using supposed planes for indoor environments. [J]. Sensors, 2019, 19 (17): 3795–3814.
 - [26] YANG Y, GENEVA P, ZUO X, et al. Tightly-coupled aided inertial navigation with point and plane features. [C] // International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Montreal, Canada: IEEE, 2019: 6094–6100.

- [27] RAPOSO C, ANTUNES M, BARRETO J P. Piecewise-Planar StereoScan: Sequential structure and motion using plane primitives. [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2018, 40 (8): 1918–1931.
- [28] PROENÇA P F, GAO Y. Probabilistic RGB-D odometry based on points, lines and planes under depth uncertainty. [J]. Robotics and Autonomous Systems, 2018, 104: 25–39.
- [29] LI H, YAO J, LU X, et al. Combining points and lines for camera pose estimation and optimization in monocular visual odometry. [C] // IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). Vancouver, Canada: IEEE, 2017: 1289–1296.
- [30] PUMAROLA A, VAKHITOV A, AGUDO A, et al. PL-SLAM: Real-time monocular visual SLAM with points and lines. [C] // IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Singapore, Singapore: IEEE, 2017: 4503–4508.
- [31] YANG S, SCHERER S. Direct monocular odometry using points and lines. [C] // 2017 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Singapore, Singapore: IEEE, 2017: 3871–3877.
- [32] GOMEZ-OJEDA R, BRIALES J, GONZALEZ-JIMENEZ J. PL-SVO: Semi-direct monocular visual odometry by combining points and line segments. [C] // 2016 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). Daejeon, Korea: IEEE, 2016: 4211–4216.
- [33] LI X, HE Y, LIN J, et al. Leveraging Planar Regularities for Point Line Visual-Inertial Odometry. [C] // IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). Las Vegas, USA: IEEE, 2020: 5120–5127.
- [34] TAGUCHI Y, Yong-Dian Jian, RAMALINGAM S, et al. SLAM using both points and planes for hand-held 3D sensors. [C] // 2012 IEEE International Symposium on Mixed and Augmented Reality (ISMAR). Atlanta, USA: IEEE, 2012: 321–322.
- [35] NEIRA J, TARDOS J D. Data association in stochastic mapping using the joint compatibility test. [J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 2001, 17 (6): 890–897.
- [36] SUN Q, YUAN J, ZHANG X, et al. RGB-D SLAM in indoor environments with STING-based plane feature extraction. [J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2018, 23 (3): 1071–1082.
- [37] SUN Q, YUAN J, ZHANG X, et al. Plane-Edge-SLAM: Seamless fusion of planes and edges for SLAM in indoor environments. [J]. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, 2020: 1–15.
- [38] YANG Y, HUANG G. Observability analysis of aided INS with heterogeneous features of points, lines, and planes. [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2019, 35 (6): 1399–1418.

- [39] NARDI F, CORTE B D, GRISETTI G. Unified representation and registration of heterogeneous sets of geometric primitives. [J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2019, 4 (2): 625–632.
- [40] TAGUCHI Y, JIAN Y, RAMALINGAM S, et al. Point-plane SLAM for handheld 3D sensors. [C] // IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Karlsruhe, Germany: IEEE, 2013: 5182–5189.
- [41] LEUTENEGGER S, LYNEN S, BOSSE M, et al. Keyframe-based visual-inertial odometry using nonlinear optimization. [J]. The International Journal of Robotics Research, 2015, 34 (3): 314–334.
- [42] PROENÇA P F, GAO Y. Probabilistic combination of noisy points and planes for RGB-D odometry. [C] // Annual Conference Towards Autonomous Robotic Systems. Cham: Springer International Publishing, 2017: 340–350.
- [43] TRUONG X, NGO T D. Toward socially aware robot navigation in dynamic and crowded environments: a proactive social motion model. [J]. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, 2017, 14 (4): 1743–1760.
- [44] YOO J, KIM J. Gaze control-based navigation architecture with a situation-specific preference approach for humanoid robots. [J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2015, 20 (5): 2425–2436.
- [45] BROWATZKI B, TIKHANOFF V, METTA G, et al. Active in-hand object recognition on a humanoid robot. [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2014, 30 (5): 1260–1269.
- [46] LIANG M, MIN H, LUO R, et al. Simultaneous recognition and modeling for learning 3-D object models from everyday scenes. [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2015, 45 (10): 2237–2248.
- [47] WIJESOMA W S, PERERA L D L, ADAMS M D. Toward multidimensional assignment data association in robot localization and mapping. [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2006, 22 (2): 350–365.
- [48] ELQURSH A, ELGAMMAL A. Line-based relative pose estimation. [C] // Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). Colorado Springs, USA: IEEE, 2011: 3049–3056.
- [49] RUBLEE E, RABAUD V, KONOLIGE K, et al. ORB: An efficient alternative to SIFT or SURF. [C] // 2011 International Conference on Computer Vision. Barcelona, Spain: IEEE, 2011: 2564–2571.
- [50] ZHANG L, KOCH R. An efficient and robust line segment matching approach based on LBD descriptor and pairwise geometric consistency. [J]. Journal of Visual Communication and Image Representation, 2013, 24 (7): 794–805.
- [51] HSIAO M, WESTMAN E, ZHANG G, et al. Keyframe-based dense planar SLAM. [C] // IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Singapore, Singapore: IEEE, 2017: 5110–5117.
- [52] FISCHLER M A, BOLLES R C. Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography. [J]. Communications of the ACM, 1981, 24 (6): 381–395.

- [53] HARTLEY R, ZISSEMAN A. Multiple view geometry in computer vision. [M]. Second. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [54] GRIMSON W. Object recognition by computer: the role of geometric constraints. [M]. Cambridge, Mass: MIT Press, 1990.
- [55] HE T, HIROSE S. A global localization approach based on line-segment relation matching technique. [J]. Robotics and Autonomous Systems, 2012, 60 (1): 95–112.
- [56] WANG X, SONG J, FENG M, et al. Incremental mapping based on line-segments relation for mobile robot. [C] // 2018 3rd International Conference on Robotics and Automation Engineering (ICRAE). Guangzhou, China: IEEE, 2018: 65–70.
- [57] ARRAS K O, CASTELLANOS J A, SCHILT M, et al. Feature-based multi-hypothesis localization and tracking using geometric constraints. [J]. Robotics and Autonomous Systems, 2003, 44 (1): 41–53.
- [58] NEIRA J, TARDOS J D, CASTELLANOS J A. Linear time vehicle relocation in SLAM. [C] // 2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Taipei, Taiwan: IEEE, 2003: 427–433.
- [59] LI Y, OLSON E B. IPJC: The incremental posterior joint compatibility test for fast feature cloud matching. [C] // 2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). Vilamoura-Algarve, Portugal: IEEE, 2012: 3467–3474.
- [60] SHEN X, FRAZZOLI E, RUS D, et al. Fast joint compatibility branch and bound for feature cloud matching. [C] // 2016 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). Daejeon, Korea: IEEE, 2016: 1757–1764.
- [61] WANG J, ENGLOT B. Robust exploration with multiple hypothesis data association. [C] // 2018 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). Madrid, Spain: IEEE, 2018: 3537–3544.
- [62] ZHANG H, YE C. Plane-aided visual-inertial odometry for 6-DOF pose estimation of a robotic navigation aid. [J]. IEEE Access, 2020, 8: 90042–90051.
- [63] CUPEC R, NYARKO E K, FILKO D, et al. Place recognition based on matching of planar surfaces and line segments. [J]. The International Journal of Robotics Research, 2015, 34 (4): 674–704.
- [64] CHO H, YEON S, CHOI H, et al. Detection and compensation of degeneracy cases for IMU-Kinect integrated continuous SLAM with plane features. [J]. Sensors, 2018, 18 (4): 1–9.
- [65] ALOISE I, CORTE B D, NARDI F, et al. Systematic handling of heterogeneous geometric primitives in Graph-SLAM optimization. [J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2019, 4 (3): 2738–2745.
- [66] ZHOU Y, LI H, KNEIP L. Canny-VO: Visual odometry with RGB-D cameras based on geometric 3D-2D edge alignment. [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2019, 35 (1): 184–199.

-
- [67] SCHENK F, FRAUNDORFER F. RESLAM: A real-time robust edge-based SLAM system. [C] // 2019 International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Montreal, Canada: IEEE, 2019: 154–160.
 - [68] LI S, LEE D. RGB-D SLAM in dynamic environments using static point weighting. [J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2017, 2 (4): 2263–2270.
 - [69] CHOI C, TREVOR A J B, CHRISTENSEN H I. RGB-D edge detection and edge-based registration. [C] // 2013 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). Tokyo, Japan: IEEE, 2013: 1568–1575.
 - [70] KWOK T. DNSS: Dual-normal-space sampling for 3-D ICP registration. [J]. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, 2019, 16 (1): 241–252.
 - [71] SIMON D. Fast and accurate shape-based registration. [D]. Pittsburgh, PA: Carnegie Mellon University, 1996.
 - [72] GELFAND N, RUSINKIEWICZ S, IKEMOTO L, et al. Geometrically stable sampling for the ICP algorithm. [C] // International Conference on 3-D Digital Imaging and Modeling (3DIM). Banff, Canada: IEEE, 2003: 260–267.
 - [73] RUSINKIEWICZ S, LEVOY M. Efficient variants of the ICP algorithm. [C] // Proceedings Third International Conference on 3-D Digital Imaging and Modeling (3DIM). Quebec City, Canada: IEEE, 2001: 145–152.
 - [74] FÖRSTNER W. Minimal Representations for Uncertainty and Estimation in Projective Spaces. [C] // Asian Conference on Computer Vision (ACCV). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010: 619–632.
 - [75] GENEVA P, ECKENHOFF K, YANG Y, et al. LIPS: LiDAR-inertial 3D plane SLAM. [C] // 2018 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). Madrid, Spain: IEEE, 2018: 123–130.
 - [76] KAESZ M. Simultaneous localization and mapping with infinite planes. [C] // IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Seattle, USA: IEEE, 2015: 4605–4611.
 - [77] FANG B, ZHAN Z. A visual SLAM method based on point-line fusion in weak-matching scene. [J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2020, 17 (2): 1–11.
 - [78] ZHENG F, TSAI G, ZHANG Z, et al. Trifo-VIO: Robust and efficient stereo visual inertial odometry using points and lines. [C] // 2018 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). Madrid, Spain: IEEE, 2018: 3686–3693.
 - [79] BARTOLI A, STURM P. Structure-from-motion using lines: Representation, triangulation, and bundle adjustment. [J]. Computer Vision and Image Understanding, 2005, 100 (3): 416–441.
 - [80] ZHANG G, LEE J H, LIM J, et al. Building a 3-D line-based map using stereo SLAM. [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2015, 31 (6): 1364–1377.

- [81] YANG Y, GENEVA P, ZUO X, et al. Tightly-coupled aided inertial navigation with point and plane features. [C] // 2019 International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Montreal, Canada: IEEE, 2019: 6094–6100.
- [82] HUANG S .-S, MA Z .-Y, MU T .-J, et al. Lidar-monocular visual odometry using point and line features. [C] // 2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Paris, France: IEEE, 2020: 1091–1097.
- [83] SCALES P, AYCARD O, AUBERGÉ V. Studying navigation as a form of interaction: a design approach for social robot navigation methods. [C] // 2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Paris, France: IEEE, 2020: 6965–6972.
- [84] REZAEEH H, ABDOLLAHI F. A decentralized cooperative control scheme with obstacle avoidance for a team of mobile robots. [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2014, 61 (1): 347–354.
- [85] NOOHI E, MORADI H, PARASTEGARI S, et al. Object manipulation using unlimited rolling contacts: 2-D kinematic modeling and motion planning. [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2015, 31 (3): 790–797.
- [86] GASTON P C, LOZANO-PREZ T. Tactile recognition and localization using object models: The case of polyhedra on a plane. [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1983, 6: 257–265.
- [87] TREVOR A J B, GEDIKLI S, RUSU R B, et al. Efficient organized point cloud segmentation with connected components. [C] // Proceedings of Semantic Perception Mapping and Exploration (SPME). Karlsruhe, Germany: IEEE, 2013: 1–6.
- [88] GROMPONE VON GIOI R, JAKUBOWICZ J, MOREL J, et al. LSD: A Fast Line Segment Detector with a False Detection Control. [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2010, 32 (4): 722–732.
- [89] STURM J, ENGELHARD N, ENDRES F, et al. A benchmark for the evaluation of RGB-D SLAM systems. [C] // IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). Vilamoura-Algarve, Portugal: IEEE, 2012: 573–580.
- [90] HANDA A, WHELAN T, MCDONALD J, et al. A benchmark for RGB-D visual odometry, 3D reconstruction and SLAM. [C] // IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Hong Kong, China: IEEE, 2014: 1524–1531.
- [91] HANDA A, NEWCOMBE R A, ANGELI A, et al. Real-time camera tracking: When is high frame-rate best? [C] // European Conference on Computer Vision (ECCV). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012: 222–235.
- [92] BARRON J T, MALIK J. Intrinsic scene properties from a single RGB-D image. [C] // 2013 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Portland, USA: IEEE, 2013: 17–24.
- [93] HORN B K P. Closed-form solution of absolute orientation using unit quaternions. [J]. Journal of the Optical Society of America A, 1987, 4 (4): 629–642.

-
- [94] ENDRES F, HESS J, STURM J, et al. 3-D mapping with an RGB-D camera. [J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2014, 30 (1): 177–187.
 - [95] KERL C, STURM J, CREMERS D. Dense visual SLAM for RGB-D cameras. [C] // 2013 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Tokyo, Japan: IEEE, 2013: 2100–2106.
 - [96] KÜMMERLE R, GRISETTI G, STRASDAT H, et al. G2o: A general framework for graph optimization. [C] // 2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Shanghai, China: IEEE, 2011: 3607–3613.
 - [97] MA L, KERL C, STÜCKLER J, et al. CPA-SLAM: Consistent plane-model alignment for direct RGB-D SLAM. [C] // IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Stockholm, Sweden: IEEE, 2016: 1285–1291.
 - [98] ATAER-CANSIZOGLU E, TAGUCHI Y, RAMALINGAM S. Pinpoint SLAM: A hybrid of 2D and 3D simultaneous localization and mapping for RGB-D sensors. [C] // IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Stockholm, Sweden: IEEE, 2016: 1300–1307.
 - [99] WHELAN T, SALAS-MORENO R F, GLOCKER B, et al. ElasticFusion: Real-time dense SLAM and light source estimation. [J]. *The International Journal of Robotics Research*, 2016, 35 (14): 1697–1716.
 - [100] HAN L, XU L, BOBKOV D, et al. Real-time global registration for globally consistent RGB-D SLAM. [J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2019, 35 (2): 498–508.
 - [101] YAN Z, YE M, REN L. Dense visual SLAM with probabilistic surfel map. [J]. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2017, 23 (11): 2389–2398.
 - [102] WANG J, GARRATT M, ANAVATTI S. Dominant plane detection using a RGB-D camera for autonomous navigation. [C] // International Conference on Automation, Robotics and Applications. Queenstown, New Zealand: IEEE, 2015: 456–460.
 - [103] BISWAS J, VELOSO M. Planar polygon extraction and merging from depth images. [C] // IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). Vilamoura, Portugal: IEEE, 2012: 3859–3864.
 - [104] TREVOR A, GEDIKLI S, RUSU R, et al. Efficient organized point cloud segmentation with connected components. [C] // 3rd Workshop on Semantic Perception Mapping and Exploration (SPME). Karlsruhe, Germany: Computer Science, 2013: 1–6.
 - [105] BELTER D, NOWICKI M, SKRZYP CZYŃSKI P. Improving accuracy of feature-based RGB-D SLAM by modeling spatial uncertainty of point features. [C] // IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Stockholm, Sweden: IEEE, 2016: 1279–1284.

- [106] BELHEDI A, BARTOLI A, BOURGEOIS S, et al. Noise modelling in time-of-flight sensors with application to depth noise removal and uncertainty estimation in three-dimensional measurement. [J]. IET Computer Vision, 2015, 9 (6): 967–977.
- [107] KHOSHELHAM K, ELBERINK S O. Accuracy and resolution of kinect depth data for indoor mapping applications. [J]. Sensors, 2012, 12 (2): 1437–1454.
- [108] PARK J.-H, SHIN Y.-D, BAE J.-H, et al. Spatial uncertainty model for visual features using a Kinect sensor. [J]. Sensors, 2012, 12 (7): 8640–8662.
- [109] FANKHAUSER P, BLOESCH M, RODRIGUEZ D, et al. Kinect v2 for mobile robot navigation: Evaluation and modeling. [C] // 2015 International Conference on Advanced Robotics (ICAR). Istanbul, Turkey: IEEE, 2015: 388–394.
- [110] MAITY S, SAHA A, BHOWMICK B. Edge SLAM: Edge points based monocular visual SLAM. [C] // IEEE International Conference on Computer Vision Workshops (ICCVW). Venice, Italy: IEEE, 2017: 2408–2417.
- [111] DRYANOVSKI I, VALENTI R G, XIAO J. Fast visual odometry and mapping from RGB-D data. [C] // IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Karlsruhe, Germany: IEEE, 2013: 2305–2310.

致谢

维辛丑年夏，槐杨并茂，谨以津门之故迹，白河之落晖，渤海之潮汐，聊度时光之隙，敬奉过往今夕。

窃思自离故地，迄今凡十有七载。其先之中庭户牖，毁损而没于瓦砾者久矣。予得于夏秋之际，黾勉之时，离乡背井，负笈远行，举目茫茫而前路依稀者，亦十载有畸。忆昔担簦求师之初，志齐轮翻，坟典之章难穷，世若烟海，探骊之机何伺。既知素门凡流，身随境转，俗世尘心，命与何安。盖众生芸芸，谁解因缘诸法，弱水汤汤，难遣彼岸之舟。

偶因机缘，辗转津门，得遇苑晶吾师。其为品也，则松竹不足喻其正，其为性也，则金石不足喻其坚。感时忧愤，夙夜勤励，秉直笔以授学，虽犯颜而不怨。忝列师门，附骥尾而至千里，偶拾牙慧，寄沧浪以擢冠缨。经年过隙，指顾境迁，卷笥犹堪载，恩德不可量。虽当图报，终耿耿以仄兀，奈何偏癖，纵方寸而难安。

星分昴毕之野，士如珪璋，章成黼黻之华，时惟多助。欣遇张雪波、张瀚、段峰、孙凤池诸尊师，皆当世俊彦，德业彪炳。偶得咳唾，若醍醐而成珠，幸承眄睐，犹时雨之化物。

停云为念，讵几故旧以促席，芸窗共勉，殆诸同门之高谊。登楼石渠，执笔金匱。言笑成饰，烛剪西窗为期，龃龉易泯，宴饮觥筹之奉。殆缘深情浅，聚厚离轻，惟狷介之见容，知恩义而惭负。

浮云天涯，日逐飞蓬之孤征，桃李堂前，堪承寸草之微意。且喜椿萱并茂，尤得奉侍而趋庭。虽致采薪微忧，幸遇萨埵以发愿。安荣以全三幸，颐养而致天和。悟迷途而归去，纵举世之相违。

自谓初心深契，知其不可而安之，往者不谏，似觉来者之可期。泠然御风，阅尽尘埃烟火，翛然忘世，忽如不系之舟。盖囊萤之夕，宿业所牵，拙笔之章，空余指爪。抚之成念，搁笔唏嘘。

辛丑仲夏于天津南开园

个人简介

基本信息

- 姓名：孙沁璇
- 性别：女
- 民族：汉
- 出生年月：1991.1
- 专业方向：控制科学与工程

教育背景

- 2016.09 - 2021.06，
南开大学，人工智能学院，控制科学与工程，博士学位.
- 2013.09 - 2016.06，
南开大学，人工智能学院，控制科学与工程，硕士学位.
- 2009.09 - 2013.06，
北京航空航天大学，电子信息工程学院，电子信息工程，学士学位.

在学期间科研成果

发表论文

- [1]. Q. Sun, J. Yuan, X. Zhang, F. Duan. Plane-Edge-SLAM: Seamless Fusion of Planes and Edges for SLAM in Indoor Environments. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, DOI: 10.1109/TASE.2020.3032831. [SCI, 中科院二区]
- [2]. Q. Sun, J. Yuan, X. Zhang, F. Sun. RGB-D SLAM in Indoor Environments with STING-Based Plane Feature Extraction. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2018, 23(3): 1071-1082. [SCI, 中科院一区 top]
- [3]. 孙沁璇, 范晶, 张雪波, 高远兮. PLVO: 基于平面和直线融合的 RGB-D 视觉里程计. 自动化学报, 已录用. [EI, 中文核心期刊]
- [4]. Q. Sun, J. Yuan, X. Zhang. IT-GFA-VO: RGB-D VO with Interpretation Tree-based Geometric Feature Association. IEEE Transactions on Cybernetics, in revision. [SCI, 中科院一区 top]
- [5]. Q. Sun, S. Zhang, J. Yuan, X. Zhang, S. Zhu. Moving Target Tracking with a Mobile Robot based on Modified Social Force Model. 2021 International Conference on Robotics and Control Engineering (RobCE 2021), 已录用. [EI 会议]
- [6]. J. Yuan, S. Zhang, Q. Sun, G. Liu and J. Cai. Laser-Based Intersection-Aware Human Following With a Mobile Robot in Indoor Environments, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, doi: 10.1109/TSMC.2018.2871104. [SCI, 中科院一区 top]
- [7]. J. Yuan, J. Cai, X. Zhang, Q. Sun, F. Sun and W. Zhu. Fusing Skeleton Recognition With Face-TLD for Human Following of Mobile Service Robots, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, doi: 10.1109/TSMC.2019.2921974. [SCI, 中科院一区 top]

- [8]. 苑晶, 刘钢墩, 孙沁璇, “激光与单目视觉融合的移动机器人运动目标跟踪”, 控制理论与应用, 2016, 33(2): 196-204. [EI, 中文核心期刊]
- [9]. S. Yang, Q. Sun, X. Dong and J. Yuan. A Novel SLAM Method Using Wi-Fi Signal Strength and RGB-D Images. 2018 IEEE 8th Annual International Conference on CYBER Technology in Automation, Control, and Intelligent Systems (CYBER), 2018, pp. 540-545. [EI 会议]
- [10]. X. Dong, J. Yuan, F. Sun, Q. Sun and Y. Huang. Image-Sequence-Based Mobile Robot Localization. 2018 IEEE 8th Annual International Conference on CYBER Technology in Automation, Control, and Intelligent Systems (CYBER), 2018, pp. 192-197. [EI 会议]
- [11]. K. Tang, J. Yuan, Q. Sun, X. Zhang and H. Gao. An Improved ORB-SLAM2 With Refined Depth Estimation. 2019 IEEE International Conference on Real-time Computing and Robotics (RCAR), 2019, pp. 885-889. [EI 会议]

参与项目

- (1) 多重异构源的空地协作紧耦合环境感知与建图, 国家自然科学基金面上项目, 62073178, 2021.01-2024.12.
- (2) 以 RGB-D 图像序列为单位的移动机器人场景识别与环境建图, 国家自然科学基金面上项目, 61573196, 2016.01-2019.12.
- (3) 多传感信息紧耦合的异构多机器人协作的环境感知, 天津市杰出青年科学基金项目, 20JCJQJC00140, 2020.10-2024.09.
- (4) 面向康养服务机器人的人-机-环境共融基础理论与关键技术, 山东省自然科学基金重大基础研究项目, ZR2019ZD07, 2019.12-2024.12.
- (5) 视觉-惯导融合的无人机运动目标识别与跟踪, 天津市自然科学基金面上项目, 20JCYBJC01470, 2020.04-2023.03.
- (6) 室内环境下基于 WiFi 无线信号场的移动机器人定位与导航, 天津市自然科学基金面上项目, 15JCYBJC18800, 2015.04-2018.03.