Пример расчёта энтропийной меры структурной сложности

Мишуров С.С.

2025-09-15

Описание системы

Рассмотрим иерархическую организационную структуру, заданную графом подчинённости.

Множество элементов (сотрудников):

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

На графе задается множество типов бинарных отношений:

$$R = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\},$$

где интерпретация отношений следующая:

r_1: непосредственное управление («руководит»),

r_2: непосредственное подчинение (обращение к руководителю),

r_3: опосредованное управление (например, запрашивать информацию у подчинённых своего подчинённого),

r_4: опосредованное подчинение (возможность «обхода» «через голову» непосредственного руководителя),

r_5: сотрудничество на одном уровне.

Граф структуры

Граф системы задан списком рёбер:

$$(1, 2),\ (1, 3),\ (3, 4),\ (3, 5).$$

На рисунке ниже представлена визуализация иерархической структуры.

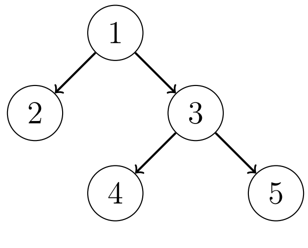

Рис. 1: Организационная структура: 1 — руководитель; 2, 3 — заместители; 4, 5 — исполнители

Граф показывает иерархию управления: элемент 1 находится на вершине, 3 является промежуточным управляющим звеном.

Оценка энтропийной сложности

Шаг 1: Определение всех отношений

На основе графа выявлены все реализованные отношения:

$$\begin{aligned}
r_1 &= \{(1,2),(1,3),(3,4),(3,5)\} \\
r_2 &= \{(2,1),(3,1),(4,3),(5,3)\} \\
r_3 &= \{(1,4),(1,5)\} \\
r_4 &= \{(4,1),(5,1)\} \\
r_5 &= \{(2,3),(3,2),(4,5),(5,4)\}
\end{aligned}$$

Шаг 2: Расчёт количества исходящих связей

Для каждого элемента m_j и типа отношения r_i вычислим l_{ij} — количество исходящих связей.

Таблица 1: Количество исходящих связей l_{ij}

Элемент m_j	l_{1j} (r_1)	l_{2j} (r_2)	l_{3j} (r_3)	l_{4j} (r_4)	l_{5j} (r_5)
1	2	0	2	0	0
2	0	1	0	0	1
3	2	1	0	0	1
4	0	1	0	1	1
5	0	1	0	1	1

Шаг 3: Вероятности и частичные энтропии

Число элементов $n = 5$, максимальное число уникальных связей от одного элемента: $n - 1 = 4$.
Вероятность проявления отношения: $P[r_i(m_j)] = \frac{l_{ij}}{4}$.

Частичная энтропия: $H(m_j, r_i) = -P \log_2 P$, где $0 \cdot \log_2 0 = 0$.

Например, для m_1:

r_1: $P = 2/4 = 0.5$, $H = -0.5 \log_2 0.5 = 0.5$

r_3: $P = 0.5$, $H = 0.5$

Вклад m_1: $0.5 + 0.5 = 1.0$

Аналогично рассчитываются остальные.

Шаг 4: Суммарная энтропия

Суммируем вклады по всем элементам:

$$
\begin{aligned}
m_1 &: 0.5 + 0.5 = 1.0 \\
m_2 &: 0.5 + 0.5 = 1.0 \\
m_3 &: 0.5 + 0.5 + 0.5 = 1.5 \\
m_4 &: 0.5 + 0.5 + 0.5 = 1.5 \\
m_5 &: 0.5 + 0.5 + 0.5 = 1.5
\end{aligned}
$$

$$H(M, R) = 1.0 + 1.0 + 1.5 + 1.5 + 1.5 = \boxed{6.5}$$

Оценка нормализованной сложности

Шаг 5: Нормализация по эталонной мере

Согласно подходу Мишурова С.С., эталонная мера основана на максимуме функции Шеннона:

$$H_{\text{ref}}^{(\text{lin})}(n, k) = c \cdot n \cdot k, \quad \text{где } c = \frac{1}{e \ln 2} \approx 0.5307$$

Подставляем значения:

$$H_{\text{ref}} = 0.5307 \cdot 5 \cdot 5 = 0.5307 \cdot 25 = \boxed{13.2675} \text{ бит}$$

Шаг 6: Нормированная сложность

$$h(M, R) = \frac{H(M, R)}{H_{\text{ref}}^{(\text{lin})}(n, k)} = \frac{6.5}{13.2675} \approx \boxed{0.49}$$