Нечеткие множества: основные понятия

Мишуров С.С.

05.11.2024

Содержание

1 Мотивация (зачем нужен аппарат нечетких множеств)

1.1 Возможности задания параметров систем

- Количественные
- Качественные
  - Однозначно определяемые (пол человека, день недели)
  - Неоднозначно определяемые
    - Связанные с количеством (высокий/низкий, быстро/медленно, тепло/холодно ...)
    - Несвязанные с количеством (красивый, завершенный, пригодный ...)

Работа с объектами, которые характеризуются качественными параметрами часто сводится к решению задачи классификации, то есть выделению множеств и подмножеств. В классическом определении множеств имеется в виду следующее:

- Каждое множество объединяет элементы определенным смыслом: появляется семантика, которая "выделяет" элементы данного множества из Универсума.
- Существует закон, который позволяет определять элементы.
- Элементы уникальны.
- Элементы однозначно определены.

Последнее утверждение далеко не во всех практических случаях можно считать удовлетворительно выполнимым. Четкое задание принадлежности часто является недостаточно обоснованным. Чаще можно говорить лишь о степени уверенности принадлежности объекта какому-то классу. Поэтому перевод оценки (на основе количественной меры) в значение да/нет "обрезает" часть информации о том, в какой степени можно утверждать, что данный объект (элемент) принадлежит данному множеству (классу, имеет соответствующее значение качественного параметра).

Почему в некоторых случаях важно не "обрезать" информацию?

Например, мы регулируем скорость подачи троса лебедки (подъемного крана) или заготовки в клетях прокатного стана. Если скорость рабочего органа выходит за границы допустимых значений, то возникает необходимость регулирования. Такое регулирование, естественно должно бы учитывать степень отклонения. Это первый аргумент, и может быть не самый существенный. Второе соображение, состоит в том, что и сама граница отклонения, и оценка регулируемого параметра определены с "допущениями", интервалы "доппустимости" выбраны достаточно произвольно. В этом случае для более точного регулирования важно учитывать в какой части диапазона "допустимости" или "недопустимости" находится значение параметра, требующего корректировки. Подчеркнем, что эти зоны "допустимости"во многих случаях известны лишь достаточно приблизительно - "размыто"[1].

На практике (да и в теории) дело осложняется тем, то многие процессы имеют нелинейный характер и их "срез" по какому-то параметру не будет монотонным на определенных интервалах, а будет представлять собой слоистый "пирог", в котором допустимые значения будут чередоваться с недопустимыми.

Собственно, если говорить про практический аспект, эти проблемы и пытается решить теория нечетких множеств и средства нечеткой логики.

1.2 Основные понятия теории нечетких множеств

Основы концепции нечетких множеств изложены Лотфи Заде в 1965 г. в статье "Fuzzy sets"[1]:

- **лингвистическая переменная**: температура, вес, ...
- **терм** - возможные значения лингвистической переменной: для температуры - холодно, нормально, горячо
- **универсальное множество** (обычно U) - "потенциальные элементы" нечеткого множества
- **элементы множества** - $x \in U$
- **функция принадлежности** - на отрезке $[0, 1]$ определяет степень уверенности того, что элемент принадлежит множеству
- собственно **нечеткое множество** A можно определить как подмножество в пространстве $A \subseteq U$, для элементов которого выполняется $A = \{\langle x, \mu_A(x)\rangle | x \in U\}$, где $\mu_A(x) : U \to [0, 1]$.

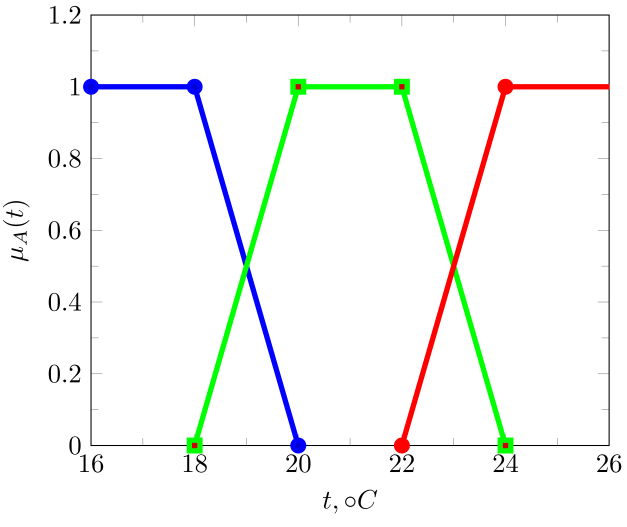
Для элементов нечеткого множества возможны следующие утверждения:

- при $\mu_A(x) = 1$ элемент x полностью принадлежит A;
- при $\mu_A(x) = 0$ элемент x не принадлежит A;
- при $0 < \mu_A(x) < 1$ элемент x частично принадлежит A.

1.3 Способы задания функции принадлежности нечеткого множества

В зависимости от характера универсального множества U нечеткие множества могут быть *дискретными* или *непрерывными*. Соответственно дискретные нечеткие множества удобно определять *табличным* способом, а непрерывные *аналитическим*. При аналитическом способе задания функции принадлежности часто используют кусочно-линейные функции.

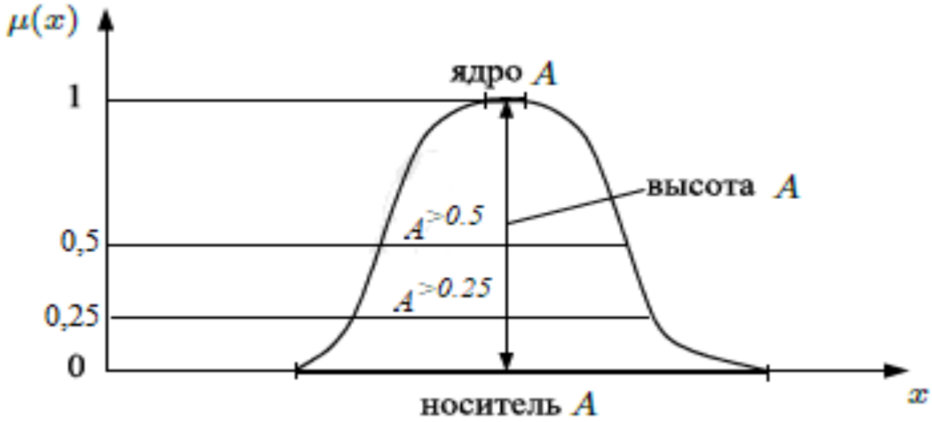
Нечеткие множества для термов *температура*



[1]Вот примеры аварий, которые иллюстрируют то обстоятельство, что несмотря на большие успехи в области создания систем управления, нерешенные проблемы все еще существуют https://youtu.be/7Nk6Rvlbvqw, https://rutube.ru/video/1371960b47d144577049a2b112abcb94.

1.4 Характеристики нечеткого множества

- *высота* нечеткого множества A $h = \sup_{x \in U}(\mu_A(x))$
- *носитель* (*support*) нечеткого множества A $S(A) = supp(A) = \{x : \mu_A(x) > 0, x \in U\}$
- *ядро* нечеткого множества A $C(A) = core(A) = \{x : \mu_A(x) = 1, x \in U\}$
- α – срез нечеткого множества A $A^{\alpha} = \{x : \mu_A(x) > \alpha, x \in U\}$, при этом на выпуклом множестве все α – срезы будут одноинтервальными множествами



В зависимости от значения *высоты* нечеткие множества могут быть:

- *нормальными* при $h = 1$
- *субнормальными* при $h < 1$

1.5 Модификация функции принадлежности нечеткого множества

К нечетким множествам можно применять "модификаторы", которые изменяют характер принадлежности:

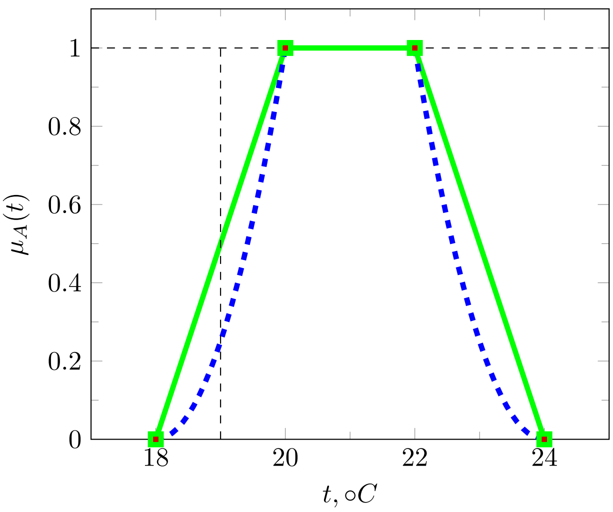
- оператор концентрирования (*concentration*) соответствует характеристике "очень"

$$\mu_{CON(A)(x)} = CON(\mu_A(x)) = (\mu_A(x))^2, \forall x \in U$$

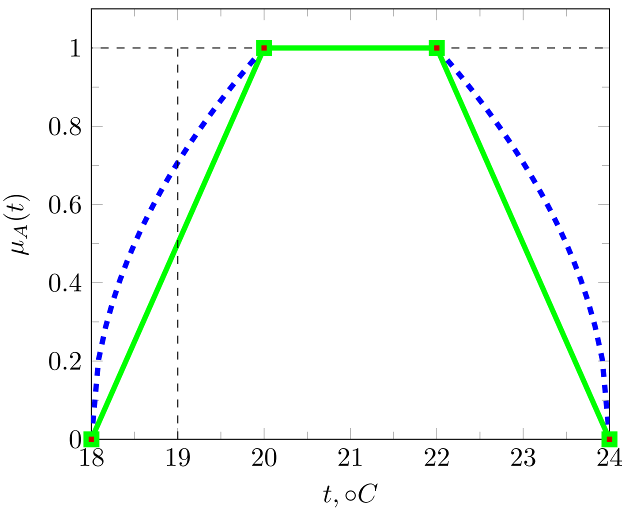
- оператор растяжения (*dilation*) соответствует характеристике "более менее"

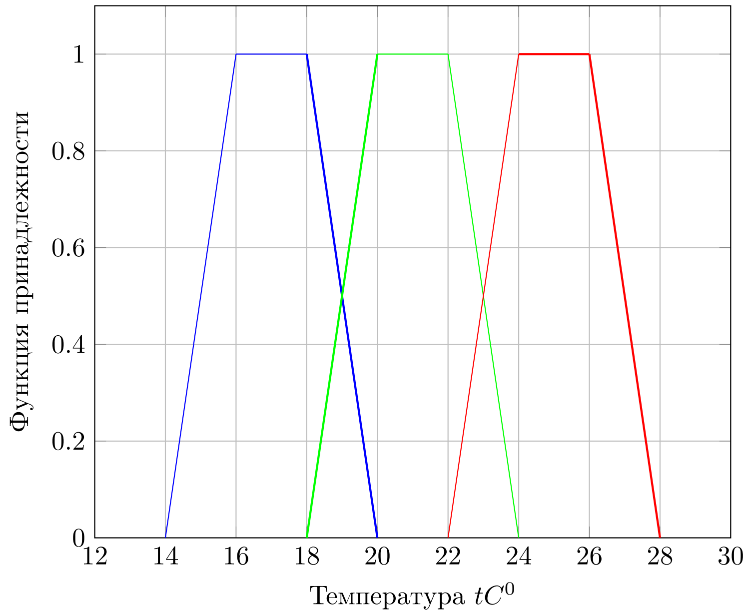
$$\mu_{DIL(A)(x)} = DIL(\mu_A(x)) = \sqrt{\mu_A(x)}, \forall x \in U$$

Применение оператора *концентрирования*



Применение оператора *растяжения*





Список используемой литературы

[1] L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control, Volume 8, Issue 3, 1965, Pages 338-353, Источник: hhttps://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001999586590241X.