基于整数规划和遗传算法的离行式自助设备装清钞问题研究

华东师范大学 黄嘉成
交通银行安徽省分行业务处理中心总经理 黄金文

离行式自助设备的装清钞问题是银行自助设备管理运营过程中的重要问题，是银行业务的重要组成部分，离行式自助设备的稳定运行能维持银行业务正常运营，降低银行运营的成本，提升银行资金运用效益。

本文从数学建模和算法实现的角度对离行式自助设备的装清钞问题进行了研究，建立了离行式自助设备装清钞路径问题的整数规划模型并使用遗传算法进行求解，使得银行在一定条件下可以科学设计符合银行实际需要的装清钞计划和运送路径，在保持自助设备正常运转的条件下减少资金占用。

一、离行式自助设备装清钞问题简述

1. 装清钞问题的现状

根据中国人民银行报告，2004 年 ~ 2016 年，我国联网 ATM 从 6.83 万台增长至 92.42 万台，复合增长 24.24%，自助银行服务在银行经营和业务管理活动中发挥了越来越重要的作用，银行在自助设备营运管理中投入了巨大的资源，同时也给银行运营管理带来了巨大压力。自助设备缺钞率和现金备付率依旧是困扰我国各大银行营运管理的两大问题，自助设备装清钞问题研究是解决其问题的核心内容之一，有着广阔的市场应用前景。同时离行式自助设备运营是银行基层业务处理部门的主要工作之一。

现阶段，多数银行设计离行式自助设备装清钞方案时，先对区域按空间位置（银行的东西南北方向）进行划分，对每个分区借助银行相关人员长期运营离行式自助设备的工作经验，对运钞车路径、各台设备的清装时间点与清装后设备内应留有的现金量进行估计，并结合相关数据给出装清钞方案。

由于一个地区内的路径、离行式自助设备的地点等均较为固定，银行在长期运营一个区域内离行式自助设备的情况下，通过上述方案设计方式已经可以保证区域内设备基本正常运行。但现阶段的装清钞问题仍缺少令人满意的方案设计方法。实际工作中现金备付率与设备缺钞率难以同时控制在满意水平、运钞车等资源未得到充分利用、方案设计方法不能对区域内的路况变化等情况及时做出调整等问题仍未得到解决。银行仍希望得到具有足够理论支持，具有普适性的装清钞方案设计方法。

2. 装清钞问题的研究目标

装清钞工作的主要成本来自于两方面：银行雇佣运钞车和专业清装人员所需的费用成本和现金占用成本。

银行对离行式自助设备的业务管理要求是规范操作、限额管理、确保安全。在维持所有自助设备正常运行的基础上尽可能地降低离行式自助设备的运营成本。故研究离行式自助设备装清钞问题的目标，就是通过对运钞车数量、路径，对各台自助设备的清装时间点和清装后设备现金占用量进行优化，设计合理的自助设备装清钞方案，在符合银行业务管理要求的前提下，降低现金备付率与设备缺钞率，充分利用运钞车等资源，最终尽可能降低装清钞工作的成本。

二、一定条件下装清钞路径规划问题的数学模型

1. 装清钞路径规划问题的问题描述

银行研究离行式自助设备装清钞问题的目的之一就

是能够找到方法来选取需要装清钞的网点合理规划运钞车的线路，提升运钞车的使用效率。为便于提炼关键信息建立数学模型，不妨做以下的简化与假设：

（1）银行对辖区内各离行式自助设备在任一时刻的现金消耗速度、现金存量等指标能够通过使用时间序列等数学工具做出可靠的估计。在此基础上，若在装清钞当日要对设备 A 进行清装，则设备 A 清装后应留下的现金数额是已知的。

（2）对各网点之间移动所需时间的估计都是准确的。

（3）运钞车数量已确定。

（4）所有自助网点内设备数和设备类型均相同。

根据以上假设，在上述条件下研究装清钞路径规划问题，即要建立合适的数学模型并通过求解来找到合适的装清钞路径，使得装清钞当日的成本最小。

2. 装清钞路径规划问题的数学模型

设银行辖区内有 N 个自助网点 P_1, P_2,……，P_n, 记银行为出发点 P_0, 网点内设备原有现金量为 C_1, C_2, ……，C_n。若进行装清钞，则装清钞后留有的现金量为 C'_1, C'_2, ……，C'_n。另外，设 $C_0=C'_0=0$。设从 P_i 出发到 P_j 需要的时间为 t_{ij}，注意到根据已知条件，每台设备所需要的清装时间和进出网点的时间是与网点无关的定值，不妨记为 T，我们将这一段时间与 t_{ij} 合并，用 $d_{ij}=t_{ij}+T$ 度量网点 P_i 与 P_j 的距离，单位为分钟。根据上述（1）中假设，设运钞车数量为定值 K。此时运钞车成本对装清钞路径规划问题没有影响，故现需要选取需要清装的网点与 K 条运钞车的路径，使得清装后所有设备内内留有的现金数量之和最小。

设用 0–1 变量 x_{ij} 表达从 P_i 出发到 P_j 的行程是否被选入装清钞路径，若 $x_{ij}=1$，则从 P_i 出发到 P_j 的行程被选入装清钞路径；若 $x_{ij}=0$，则从 P_i 出发到 P_j 的行程未被选入装清钞路径。

因为有 K 辆运钞车，我们引入 K–1 个虚拟点 P_{n+1}，P_{n+2}, ……，P_{n+k-1}。对虚拟点和其他点之间的距离 x_{ij}, i=N+1,⋯,N+K–1；j=0,1,⋯,N+K–1, 我们进行如下规定：$d_{ij}=d_{0j}$, 若 $i=N+1,\cdots,N+K-1$；j=1,⋯,N；$d_{ij}=M$, 若 $i,j=N+1,\cdots,N+K-1$ 或 0，另外定义 $d_{ii}=M, i=0,1,\cdots,N+K-1$, 其中 M 是一个充分大的正数。上述定义的实际意义是，将增加的虚拟点与已有的 d_0 作为各运钞车路径的起点和终点，并确保直接连接虚拟点的路和不符合实际意义的路 x_{ij} 不会被选入最终的路径。因为各起点必定被经过一次，每个网点至多被经过一次，且若有运钞车进入了一个点，那么运钞车必定会从这个点出发去往下一个点，所以有

$$\sum_{i=0}^{N+K-1} x_{ij} \le 1, j=1,\dots,N;\ \sum_{i=0}^{N+K-1} x_{ij}=1, j=N+1,\dots,N+K-1 \text{ 或 } 0$$

$$\sum_{j=0}^{N+K-1} x_{ij} \le 1, i=1,\dots,N;\ \sum_{j=0}^{N+K-1} x_{ij}=1, i=N+1,\dots,N+K-1 \text{ 或 } 0$$

$$\sum_{i=0}^{N+K-1} x_{il} = \sum_{j=0}^{N+K-1} x_{lj}, l=0,1,\dots,N+K-1$$

我们最终希望得到的是从银行出发并回到银行的环。为避免出现不经过任何一个起点的环，使用 Miller–Tucker–Zemlin 约束：

$$u_i \in \mathbb{N}, i=0,1,\dots,\mathrm{N}+\mathrm{K}-1$$

$$u_i=1, i=N+1,\dots,N+K-1 \text{ 或 } 0$$

$$2 \le u_j \le N, j=1,\dots,N$$

$$u_i-u_j+1 \le (N-1)(1-x_{ij}), i=0,1,\dots,N+K-1; j=1,\dots,N$$

其中，u_i 作为点 P_i 的一个指标，若运钞车从 P_i 前往 P_j 则 $u_j>u_i, j \ne$ N+1,⋯,N+K–1 或 0, 结合 u_i 有上界，若生成路径中有不包括起点的子环，则子环内各点的指标会不断增长至超过上界。

根据实际情况，装清钞路径的长度是有限的，即图中任一环长度有限，故有

$\sum_{i\in T}\sum_{j\in T} x_{ij}d_{ij} \le 180$，若 $\sum_{i\in T}\sum_{j\notin T} x_{ij}=0, T$ 是集合 $P'=\{0,1,\dots,N+K-1\}$ 的任一子集，考虑使用罚函数法对清装时间间隔与设备现金量进行控制。

设点 P_i 上一次被清装是在 T_i 天前，$T_i \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$。构造罚函数

$$f(T_i)=\begin{cases}Me^{-a(-T_i+6)}, T_i\geq 5\\ 1,\ \text{otherwise}\end{cases}\quad 其中M,a\in\mathbb{R}^+$$

假设银行能够对设备的现金消耗速度做出一定的估计，进而可以在 C_i 给定的情况下估计出设备 P_i 将在 D_i 天后因现金用尽或现金装满而停止运行。构造罚函数

$$F(D_i)=\begin{cases}M e^{-a(D_i-1)}, D_i\leq 2\\ 1,\ \text{otherwise}\end{cases}\quad 其中M',a'\in\mathbb{R}^+$$

目标函数为

$$\min_{x_{ij},i,j=0,\dots,N} \mathrm{C}=\sum_{i=0}^{N}\left(C_i'\left(\sum_{j=0}^{N}x_{ij}\right)\right)+\sum_{i=0}^{N}\left(F(D_i)f(T_i)C_i\left(1-\left(\sum_{j=0}^{N}x_{ij}\right)\right)\right)$$

综上，我们得到了装清钞路径规划问题的 0–1 整数规划模型：

给定 C_1，C_2,……，C_n; C'_1，C'_2,……，C'_n; D_1，D_2,……，D_n; T_1，T_2,……，T_n；$\{d_{ij}\}_{(n+k-1)\times(n+k-1)}$; K

$$\min_{x_{ij},i,j=0,\dots,N} \mathrm{C}=\sum_{i=0}^{N}\left(C_i'\left(\sum_{j=0}^{N}x_{ij}\right)\right)+\sum_{i=0}^{N}\left(F(D_i)f(T_i)C_i\left(1-\left(\sum_{j=0}^{N}x_{ij}\right)\right)\right)$$

$$s.t.\begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{N+K-1}x_{ij}\leq 1, j=1,\dots,N;\ \sum\limits_{i=0}^{N+K-1}x_{ij}=1, j=N+1,\dots,N+K-1\text{或}0\\ \sum\limits_{j=0}^{N+K-1}x_{ij}\leq 1, i=1,\dots,N;\ \sum\limits_{j=0}^{N+K-1}x_{ij}=1, i=N+1,\dots,N+K-1\text{或}0\\ \sum\limits_{i=0}^{N+K-1}x_{il}=\sum\limits_{j=0}^{N+K-1}x_{lj}, l=0,1,\dots,N+K-1\\ u_i\in\mathbb{N}, i=0,1,\dots,\mathrm{N}+\mathrm{K}-1\\ u_i=1, i=N+1,\dots,N+K-1\text{或}0\\ 2\leq u_j\leq N, j=1,\dots,N\\ u_i-u_j+1\leq(N-1)(1-x_{ij}), i=0,1,\dots,N+K-1; j=1,\dots,N\\ \sum\limits_{i\in T}\sum\limits_{j\in T,j\neq i}x_{ij}d_{ij}\leq 180,\text{若}\sum\limits_{i\in T}\sum\limits_{j\notin T}x_{ij}=0, T\text{是集合}P'=\{0,1,\dots,N+K-1\}\text{的任一非空子集}\\ x_{ij}\in\{0,1\}, i,j=0,1,\dots,N+K-1\end{cases}$$

三、装清钞路径规划问题数学模型的求解

1. 采用遗传算法求解装清钞路径规划问题的原因

根据现有的研究，求多旅行商问题的最优解是一个 NP 问题，它在规模较大时的理论最优解是难以求出的，而装清钞路径规划问题数学模型的约束条件包含了一个多旅行商问题数学模型的全部约束条件，故求装清钞路径规划问题精确解的多项式时间算法是难以得到的。考虑到实际生活中一般装清钞路径规划问题的规模较大（N>60），我们不再考虑求精确解。实际生产生活中，银行对研究离行式自助设备装清钞问题的期望是在现有的情形上进行优化，将成本降低到满意的程度，故我们可以使用启发式算法来求优化至可接受程度的可行解。

我们注意到问题的约束条件高度类似于多旅行商问题，而现有研究表明遗传算法在求解多旅行商问题上有良好的效果。同时，研究离行式自助设备装清钞问题的目的是对现有方案进行优化，并且考虑到进一步的研究需要，这对算法求得优化至可接受程度解的速度有较高的要求，而遗传算法有着可以对初始种群快速进行较好的优化，并且前期收敛速度快的特点，故我们考虑可以使用遗传算法来求解模型的较优可行解。

2. 遗传算法求解装清钞路径规划问题的算法描述

为了求解问题，我们使用遗传算法。下面是遗传算法中的染色体编码，适应度评价，交叉、变异、选择等算子的具体说明。

关于染色体编码，设给定一个装清钞方案，其中第一辆运钞车经过 P_1, P_2, ……，$P_{1_{l1}}$，第二辆经过 P_{2_1}, P_{2_2}, ……, $P_{2_{l2}}$，以此类推，共 K 条路径。我们使用这样的方式对该方案进行编码：使用 Matlab 中元胞结构的思想，构造元胞 $\{[1_1,\cdots,1_{l1},2_1,\cdots,2_{l2},\cdots,k_{lk}],[l1,l1+l2,\dots,l1+l2+\cdots+lk]\}$，第一个数组表达经过的网点（不包括出发点），第二个数组为分割点，表示对第一个数组进行分割的位置，分割后得到 K 个子数组，一个子数组对应一辆运钞车依次经过的网点的编号。容易看出，这样的编码方式可以对任意一种装清钞方案进行编码，并且接下来的分析也将展示这种编码方式有利于本问题的计算。

关于适应度评价，我们直接使用一个染色体的对应方案所对应的目标函数值来评价该染色体的适应度，目标函数值越小，表明适应度越高。

关于选择算子，首先，我们采用常用的轮盘赌策略，确保种群向适应度更高的方向发展。同时，考虑到现实中银行通常已经有了一个区域的较为成熟的算法，并希望在此基础上进行优化，故我们可以同时采用精英选择

策略，用适应度高的个体替换一部分适应度低的个体，将适应度好的个体直接遗传至子代，以保证适应度始终保持增加的趋势。

关于交叉算子，我们参考单亲遗传算法的交叉方案，对表达方案的元胞中的两个元素，即经过的网点与分割点数组，分别进行交叉。具体交叉方式为：对两个网点数组，从中各选取长度相同的一段，将两段分别接于另一网点数组最后，并删去新数组中所有重复的数，得到新的数组，完成对网点数组的交叉；对分割点数组，考虑到分割点数组总是等长的，且数组内各元素取值范围一致，是最理想的染色体编码形式，直接使用一般的交叉算子即可。

关于变异算子，同样考虑对网点数组与分割点数组分别进行变异。借鉴单亲遗传算法的变异方案，对一个网点数组进行变异时，取数组中的一段，将这一段关于数组中心进行镜面反转即可；对分割点数组同样采取一般方法，用限定范围的随机数函数进行变异运算即可。

迭代的终止条件用遗传代数进行限定。

3. 遗传算法求解装清钞路径规划问题的仿真过程

使用表 1、表 2、表 3 的数据进行仿真。

取 M=5，a=1.5，M'=5，a'=1.5, 设定车辆数 K=2，进化代数200，种群规模150，交叉概率0.8，变异概率0.4，最终所得结果为，两辆车路径分别为 0–15–13–12–5–1–0 与 0–6–3–7–11–19–0，目标函数取值为 1 680 000，适应度曲线如图 1 所示。

表 1　设备现金量

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
C_i	430 000	270 000	330 000	270 000	190 000	230 000	380 000	200 000	260 000	300 000	230 000	180 000	60 000	300 000	570 000
C'_i	100 000	50 000	50 000	100 000	50 000	20 000	20 000	20 000	50 000	50 000	100 000	50 000	50 000	50 000	100 000

表 2　网点间距离

d_{ij}	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0		31	33	24	23	28	25	25	28	25	27	26	27	31	31	36
1			30	26	28	32	36	35	45	43	43	45	48	51	52	60
2				31	28	35	30	36	31	32	32	39	43	45	43	39
3					30	29	33	31	35	33	33	30	35	36	37	42
4						33	23	33	28	28	28	30	35	32	32	33
5							35	23	38	34	33	28	27	35	36	42
6								33	27	27	28	32	33	32	30	32
7									34	32	31	23	22	30	32	36
8										22	24	28	32	31	29	26
9											20	24	28	30	29	30
10												23	26	23	23	28
11													21	23	25	30
12														23	24	28
13															20	25
14																22

表 3 网点距上次清装的时间与下次清装的最晚时间

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
T_i	0	1	5	0	6	5	3	4	1	3	6	3	6	1	3
D_i	2	5	4	6	6	7	7	3	5	2	1	1	4	4	7

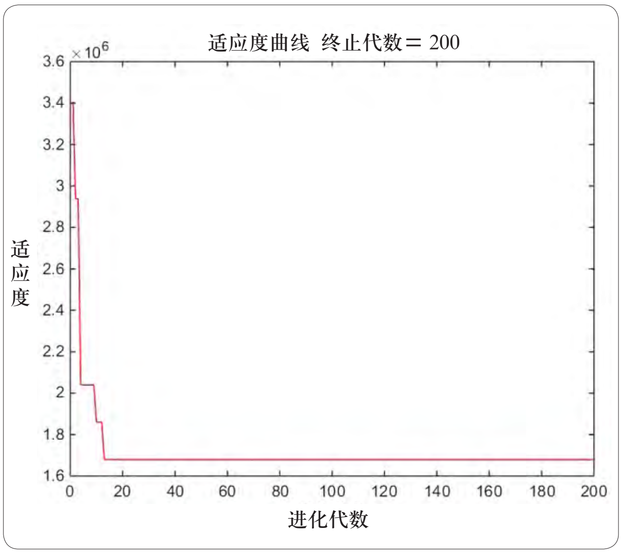

图 1 改良模型的适应度曲线

四、总结

本文总结了离行式自助设备装清钞问题的目标与条件，建立了离行式自助设备装清钞问题中路径规划问题的数学模型，并基于遗传算法给出了求解模型的方法，在 Matlab2014b 平台上使用数据进行了仿真。

现阶段各大银行离行式自助设备装清钞的实际管理仍较多地依赖人工经验，缺少科学的方案设计，因此对能够有效降低管理成本的方案设计有很大需求。本文主要聚焦于路径规划，而实际情况中还有很多因素影响装清钞方案的成本。如何建立更符合实际情况的模型并设计出性能更好的算法，仍然值得进一步研究。未来的研究可以考虑如下方向：

第一，研究如何准确地估计各离行式自助设备的存、取现金变化速度。本文中的数学模型均建立在能够对离行式自助设备的现金变化速度进行准确估计的基础上，而实际生活中对离行式自助设备的现金变化速度的估计准确度是不足以保障本文中的数学模型投入应用的。未来可以考虑使用更多的理论知识，如概率论、深度学习等，建立刻画离行式自助设备的现金变化速度的模型，对设备的现金变化速度进行更准确的估计。

第二，本文假设运钞车的数量是固定的，虽然运钞车的数量每年是确定的，但是考虑到有限的组合优化问题必定存在最优解，在其他条件固定的情况下最优的运钞车数量也必定存在。未来可以考虑使用动态规划等方法，结合对现金变化速度的准确估计，对运钞车的数量进行优化。

第三，现阶段对计算清装后在设备内应留下的最优现金数仍然缺少有效的方法，更多的是依靠人工经验或根据清装间隔期间设备的现金流给出非常粗略的估计。未来的研究中，可以考虑借助现金变化速度的估计与动态规划、大规模优化的相关方法，对清装后设备内应留下的现金数进行进一步的研究。

第四，本文中使用的遗传算法的计算结果仍然有着波动较大，存在不能确保得到的解足够接近最优解等问题，同时计算步骤存在进一步优化的可能性。事实上，如果存在收敛性足够好，用时足够短的算法，上述的一些问题，如运钞车数量的优化，完全可以通过用实际数据仿真来实现。如何设计更好的算法也是未来的重要研究方向。FCC

栏目编辑：伍曼 wuman@fcc.com.cn