DOI:10.13901/j.cnki.qhwxxbzk.2003.06.019
第21卷 第6期 青海大学学报(自然科学版) Vol.21 No.6
2003年12月 Journal of Qinghai University Dec.2003

对求解整数规划方法的新探索

宛士春, 郭永发

(青海大学, 青海 西宁 810016)

摘要: 借鉴分枝定界法求解整数规划的基本原理和目标排序法求解0—1规划的思路, 在完成一系列理论分析和证明之后, 提出求解整数规划的简捷有效的新方法—松驰最优解邻域整点搜索法。

关键词: 整数规划; 松驰问题; 单纯形法; 分枝定界法; 邻域

中图分类号: O241.6 文献标识码: A 文章编号: 1006－8996(2003)06－0063－05

New exploration to the methods of solving integer programming

WAN Shi-chun, GUO Yong-fa

(Qinghai University, Xining 810016, China)

Abstract: In the paper, author made use of basic principle of solving integer programming by brach－bound method and thought of solving 0－1programming by objective ordering, put forward a new method in solution neighborhood integer point search method, which is most shortcut and efficient so far after finishing a series of theory analysis and proof.

Key words: integer programming; relaxation problem; simplex method; brach－bound; neighborhood

整数规划(Integer programming, IP)是线性规划(linear Programming, LP)的特殊类型。LP的非0解是可以连续取值的正实数, 而IP的非0解只能是正整数[1]。因为在IP中被优化的对象全部或部分的是属于不可分割的整体。例如人员、车辆、机器设备、测量仪表或包装箱等。整数规划分为纯整数规划(all Integer Programming)和混合整数规划(Mixed Integer programming, MIP)及0—1规划, 0—1规划的新解法在文[2]中已有详细介绍, 本文以纯整数规划为代表, 探索求解IP的新方法。由于求极小解的方法与求极大解并无本质区别, 所以本文以求极大解的方法为例。

1 标准型

求 $\max z=\sum_{j=1}^{n} C_jX_j$

st: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j\leqslant b_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$, $X_j\geqslant 0$ $(j=1,2,\cdots n)$ X_j 为整数

式中: X_j 为决策变量, C_j 为价值系数, a_{ij} 为资源消耗系数。不失一般性, 可假定 $C_j>0$, $a_{ij}\geqslant 0$。

2 现有解法评述

目前求解IP的方法可分为两类: 以求解LP的单纯形法为基础的传统解法; 摆脱单纯形法的新型解法。

2.1 传统解法 求解IP的传统解法有两种[3]。一种是20世纪60年代初由Land Doig和Dakin等人提出

收稿日期: 2003－08－12

基金项目: 教育部人文社会科学研究"十五"规划第一批研究项目(01JA630076)

作者简介: 宛士春(1940—), 男, 北京人, 教授, 硕士。

的分枝定界法(Branch and Bound Method),另一种是70年代由R·E·Gomog提出的割平面法(Cuting plane method)。这两种方法都要多次运用单纯形法,但分枝定界法更为有效。分枝定界法的思路明晰,且具有形象和直观的特点。割平面法尽管有许多类似的变形算法,但多少都带有试算的不确定性,对确定附加约束即割平面的分析方法的掌握难度较大。

2.2 新型解法 自20世纪70年代以来,对LP及IP探索非单纯形解法成为国际应用数学界的热门课题,思路迥异的各类新型解法成果颇丰,例如内点法、外点法、椭球算法、遗传算法及相应的各种变形算法层出不穷。这些新型算法,具有以下特点:一是应用复杂的方法求解简单的问题,甚至引入拓扑等较高深的数学理论和方法,例如内点法、椭球算法等,不易为非数学专业人员掌握;其二是求解方法和过程过于繁琐,以大量耗用机时为代价,例如遗传算法,与传统算法相比只能收到事倍功半的效果;其三是某些方法适用条件过于狭窄,不具有一般性。因此,这些解法的有效性和实用性还不能与传统方法相比。

从上述分析可知,分枝定界法是求解整数规划问题各种方法中最为实用和有效的方法,尽管还存在致命的缺陷。

3 分枝定界法的基本原理和求解过程

3.1 松弛原理[4] 若问题A是原问题B放弃某些约束条件而构成的松弛问题,则A的最优解构成B的最优解的上界(求极大解)或下界(求极小解);A的最优解如为B的可行解,则同时又是B的最优解。

3.2 求解过程[3]

(1) 忽略变量为整数的约束条件,求解其松弛问题(相应的线性规划),若得到全整数解,即为原IP的最优解。

(2) 若松弛问题的最优解不是全整数解,则任取一非整数解 X_j^* $(j=1, 2, \cdots n)$ 来分析,通过增加约束的办法,将原问题分枝为两个后继问题来求解,增加的约束条件分别为:

$X_j \leqslant [X_j^*]$ 与 $X_j \geqslant [X_j^*]+1$

式中:X_j^* 为松弛最优解的一个分量;$[X_j^*]$ 表示 X_j^* 舍去小数以后的整数值。

(3) 继续按(1)中的方法求解分枝以后的两个后继问题。若仍得不到全整数解,则按(2)的方法继续分枝;若已得全整数解则停止分枝。另两个停止分枝的条件是无解或目标函数已不优于其他分枝上已得全整数解的目标函数值。用部分不大于全体的原理很容易证明第三个停止分枝的条件,另两个停止分枝的条件则不需要证明。

(4) 分枝全部停止后,从各分枝的全整数解中选取Z值最优者作为原整数规划问题的最优解。

例[5] 求 $\max Z=60x_1+30x_2$ (1)

$$(B)\,st\begin{cases}35X_1+8X_2\leqslant 400 & (2)\\ 3X_1+7X_2\leqslant 120 & (3)\\ 4X_1+5X_2\leqslant 90 & (4)\\ X_1, X_2\geqslant 0 & (5)\\ X_1, X_2\geqslant \text{为整数} & (6)\end{cases}$$

忽略条件(6)以单纯形法求解松弛问题 A

求 $\max z=60x_1+30x_2$ (1)

$$(A)\,st\begin{cases}35X_1+8X_2\leqslant 400 & (2)\\ 3X_1+7X_2\leqslant 120 & (3)\\ 4X_1+5X_2\leqslant 90 & (4)\\ X_1, X_2\geqslant 0 & (5)\end{cases}$$

A 的最优解(即 B 的松弛最优解)为:

$X_1^*=8.95, X_2^*=10.84, Z^*=862$

显然需要分枝，首先按 x_1^* 的值分枝，增加约束，$X_1\leqslant 8$ 及约束 $X_2\geqslant 9$，将 B 分枝为两个后继问题 B_1 和 B_2（略去相同的目标函数）：

$$(B_1)\ st\begin{cases}35X_1+8X_2\leqslant 400\\3X_1+7X_2\leqslant 120\\4X_1+5X_2\leqslant 90\\X_1\leqslant 8\\X_1,X_2\geqslant 0\\X_1,X_2\text{ 为整数}\end{cases}\qquad (B_2)\ st\begin{cases}35X_1+8X_2\leqslant 400\\3X_1+7X_2\leqslant 120\\4X_1+5X_2\leqslant 90\\X_1\geqslant 9\\X_1,X_2\geqslant 0\\X_1,X_2\text{ 为整数}\end{cases}$$

用单纯形法分别求解 B_1 与 B_2，全部分枝与求解过程和结果如图 1 所示：

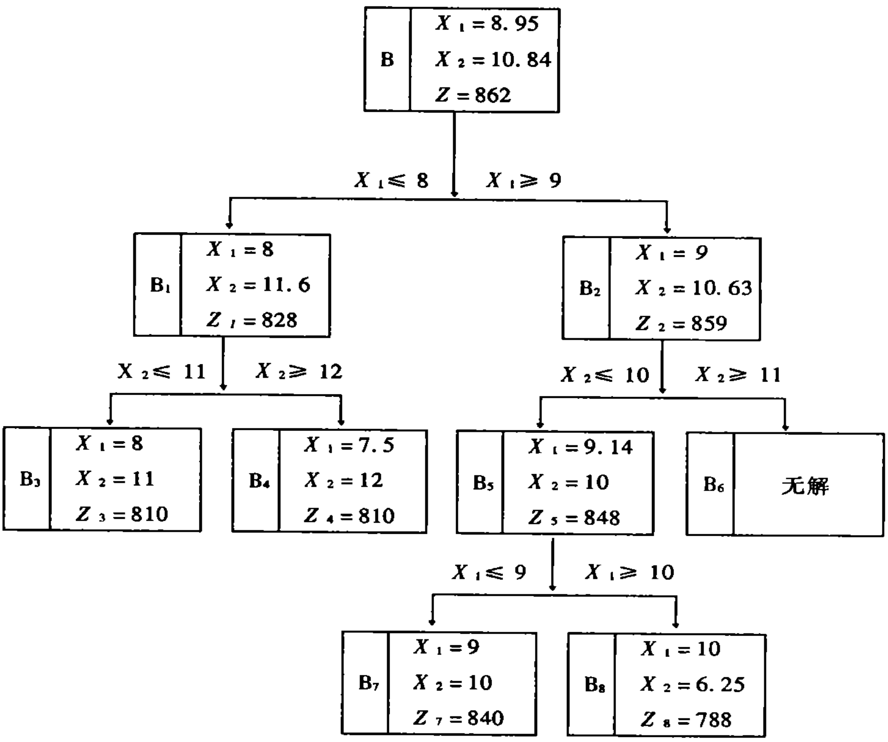

图 1　分枝求解过程网络图

从图 1 可判定 B_7 的解即为原 IP 的最优解。

3.3　主要缺陷　分枝定界法虽然思路清晰、概念明确、方法直观，但存在致命的缺陷，即需要反复运用单纯形法求解由于分枝而产生的不仅在数量上连续倍增而且规模也越来越大的 IP 问题，计算工作量非常大。本例为 $n=2$，$m=3$（n 为原变量个数，m 是约束方程的个数）。为便于比较，可将用单纯形法求解 A（即 $m=3$，$n=2$ 规模的 LP）所需要的时间作为一个标准时间单位，用 t 表示；并假定求解 LP 所需时间与 m^2 成正比，求解 B（即 $m=3$，$n=2$ 的 IP）所需要的时间为：

$$T_B=t\left[1+2\times\left(\frac{4}{3}\right)^2+4\times\left(\frac{5}{3}\right)^2+2\times\left(\frac{6}{3}\right)^2\right]=23.67t$$

计算结果表明，用分枝定界法求解一个 $m=3$，$n=2$ 规模的 IP 的时间约等于求解相同规模的 LP 时间的 23.67 倍。当 m，n 超过 10 以后，计算所需的工作量已经是天文数字，所以用现行的分枝定界法求解大规模的 IP 问题效率低。

4　对分枝定界法的改进

为了克服分枝定界法的缺陷，我们从深入探索和挖掘 LP 的优化机理中，发现一些很好的规律，并通

过反复验证和理论分析，对分枝定界法的基本原理有了进一步的认识和运用，极大地简化了求解过程，提出一种借用分枝定界法的基本思路，但其求解方法和过程均有别于分枝定界法的新解法。

4.1 有关概念

4.1.1 松弛最优解 指略去变量为整数的约束条件后原IP问题B的松弛问题A的最优解，记为：

$$\begin{cases} X^{*}=(X_1^{*}, X_2^{*} \cdots, X_n^{*})^T \\ Z^{*}=\sum_{j=1}^{n} C_j X_j^{*} \end{cases}$$

4.1.2 松弛最优解邻域(简称邻域) 指满足如下条件的解点 X 的集合：

$$[X_j^{*}] \leqslant X_j \leqslant [X_j^{*}]+1 \ (j=1, 2, \cdots, n)$$

4.1.3 界限约束与弱化约束 弱化约束是指满足条件 $X_j^1 \leqslant X_j^{*}$ 的约束条件：$X_j \leqslant X_j^1$(求极大解)。或满足条件 $X_j^1 > X_j^{*}$ 的约束条件 $X_j \geqslant X_j^1$(求极小解)。下界约束指如下约束条件：$X_j^{*} \leqslant [X_j^{*}]$；上界约束，指如下形式的约束：$X_j \geqslant [X_j^{*}]+1$。式中：$X_j^{*}$ 为松弛最优解的任一分量，可以是小数或非负整数。

4.2 有关定理与推论

4.2.1 定理1(弱化约束定理)

命题1 在求极大解的LP中，下界约束为弱化约束。

证明 满足弱化约束 $X_j \leqslant X_j^1$ 的唯一条件是满足 $X_j^1 \leqslant X_j^{*}$。下界约束 $X_j \leqslant [X_j^{*}]$ 中的 $[X_j^{*}]$ 满足 $[X_j^{*}] \leqslant X_j^{*}$ 的要求。故命题得证。

命题2 若问题B存在松弛最优解，则新增弱化约束后，仍存在可行解。

证明 用 X_j^{*} 表示松弛最优解的任一分量，则 X_j 的可行域为：$0 \leqslant X_j \leqslant X_j^{*}$，而弱化约束 $X_j \leqslant X_j^1$，已满足条件 $X_j^1 \leqslant X_j^{*}$，故 X_j^1 仍在 X_j 的可行域中，命题得证。

4.2.2 定理2(邻域边界相对最优定理)

设 X_j^{*} $(j=1, 2, \cdots, n)$ 是求极大解的IP问题B的松弛最优解的任一分量，则以下命题成立。

命题3 若新增下界约束 $X_j \leqslant [X_j^{*}]$，则在后继问题的最优解中，$X_j=[X_j^{*}]$(即 X_j 的最优解一定落在下界上)。

命题4 若新增上界约束 $X_j \geqslant [X_j^{*}]+1$ 后其后继问题存在最优解，则在最优解中 $X_j=[X_j^{*}]+1$(即 X_j 的最优解一定落在上界上)。

证明 由前面对标准型的描述可知 $C_j > 0 (j=1, 2, \cdots, n)$，即：$\frac{\partial Z}{\partial X_j}=C_j > 0$，故目标函数在从 $[X_j^{*}]-\varepsilon$(ε 为满足 $0 < \varepsilon < 1$ 的任意实数)至 X_j^{*} 的区间内 Z 为 X_j 的单调递增函数。设 $X_j^{(1)}=[X_j^{*}]$ 为满足条件 $X_j=[X_j^{*}]$ 的解，$X_j^{(2)}=[X_j^{*}]-\varepsilon$ 为满足条件 $X_j < [X_j^{*}]$ 的解，Z_1，Z_2 分别为对应于 $X_j^{(1)}$ 和 $X_j^{(2)}$ 的目标函数值。因为 $X_j^{(1)} > X_j^{(2)}$，故 $Z_1 > Z_2$，命题3成立。

又从LP为凸规划的性质，可知松弛最优解为全局最优解，目标函数 Z 为单峰函数。从 X_j^{*} 到 $[X_j^{*}]+1$ 的区间内，Z 为 X_j 的单调递增函数。同理可证明命题4成立。

4.2.3 推论

推论 若IP问题B存在松弛最优解 X^{*}，则B一定存在最优解。且最优解点必然存在于邻域边界的整点集合之中。

证明 对松弛最优解的每个分量 X_j^{*} $(j=1, 2, \cdots n)$，均增加下界约束，由定理1和定理2相结合，可知在邻域边界的整点中至少存在一个B的可行解，再与定理2的邻域边界相对最优原理相结合，则说明在邻域边界的整点中不仅存在IP的可行解，而且IP的最优解就在其中。推论得证。

5 结论

通过以上分析，可知IP问题只要存在松弛最优解，就一定存在最优解，且最优解一定存在于邻域边

界的整点之中。这种新的解法可以称为松弛最优解邻域整点搜索法。

该方法最大的特点是思路清晰，简捷高效。摆脱了分枝定界法的缺陷，在求解松弛问题应用了一次 LP 解法之后，即可确定各变量的上下界，无须进行第二次 LP 的求解，直接在邻域边界的整点中寻求最优解。而邻域边界上整点的个数是有限的，为 2^n 个。其中大约半数的整点因为 $Z > Z^*$（松弛最优解的 Z 法）为非可行解，无须进行可行性检验，其余整点的解按 Z 值大小，从大到小依次排列检验顺序。检验中发现的第一个可行解即为最优解。大量算例证实，被第一个检验的整点即为可行解，即最优解（求解方法和算例检验，详见本课题成果之二——松弛最优解邻域整点搜索法求解大规模整数规划问题）。

参考文献：

[1] 钱颂迪. 运筹学[M]. 北京：清华大学出版社，1990. 116－123.

[2] 宛士春. 对求解 0－1 规划的两种隐枚举法的评价与改进[J]. 青海师范大学学报（自然科学版），1995，(1)：16－22.

[3] 胡运权. 运筹学教程[M]. 北京：清华大学出版社，1999. 112－120.

[4] 李京文，郑友敬. 技术经济手册理论方法卷[M]. 北京：中国科学技术出版社，1990. 356－358.

[5] 贾志宽. 农业系统工程[M]. 世界图书出版公司，1992.

（责任编辑　唐宏伟）

（上接第 56 页）

2.4　误差分析

误差产生原因：从测量结果看，中性轴处应变值不为零，发生组合变形，施加的荷载与中性轴不垂直；应变片粘贴不准确；应变仪接线线丝太细会造成应变值读数不准确；钢—铝两根梁结合处达不到无摩擦相互密合程度；仪器的精密程度等。

3　应力分析

理论计算铝—钢组合梁的应力分布如图 4 所示。楔块梁应力分布如图 5 所示。实验分析所得铝—钢组合梁的应力分布、楔块梁应力分布如图 7 所示。

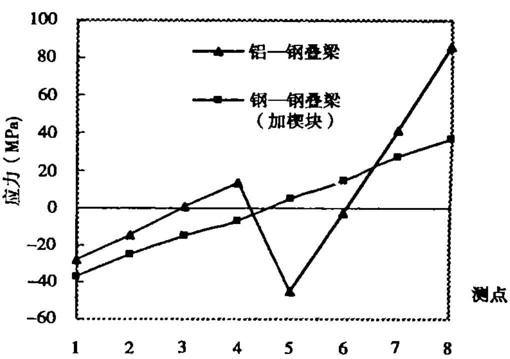

图 7　组合梁、楔块梁应力分布示意

（1）由理论计算可知，两根同截面不同材料的梁相互叠合后的应力分布与两根同截面同种材料加楔块梁相互叠合后的应力分布都呈线性规律分布。

（2）两根同截面不同材料的小梁相互叠合后的应力分布（图 4）与两根同截面同种材料的小梁相互叠合后的应力分布有所不同，抗弯刚度 EI 大处所承担的应力值也大。

（3）两根同截面同种材料加楔块梁比两根同截面不同材料相互叠合后的梁的承载能力有所提高。

4　结语

从理论分析与实验计算都验证了两根同截面同种材料加楔块梁及两根同截面不同材料相互叠合后的梁的应力分布的正确性，但由于实验偏差造成了理论值与实验值不完全相同。

参考文献：

[1] 苏翼林. 材料力学[M]. 北京：高等教育出版社，1986. 131－132.

（责任编辑　王宝通）