第19卷 第6期 兰州工业高等专科学校学报 Vol. 19 No. 6
2012年12月 Journal of Lanzhou Polytechnic College Dec. 2012

文章编号:1009-2269(2012)06-0053-02

求解整数规划的一种新方法*

温大伟[1],谢文环[2]

(1. 兰州城市学院 数学学院,甘肃 兰州 730070;2. 兰州工业学院 公寓管理中心,甘肃 兰州 730050)

摘要:借鉴整数规划分支定界法的思路,通过增加约束条件,使整数规划对应线性规划的可行域一分为二,分别找到整数最优解并比较大小得到整数规划的最优解.

关键词:整数规划;线性规划;约束条件;最优解

中图分类号:O211.67 文献标志码:A

0 引言

整数规划(integer programming,简称IP)是运筹学的一个确定性模型分支.在线性规划问题中,有些最优解可能是分数或小数,而在某些实际问题中常要求最优解是整数最优解.求解整数规划的经典方法主要有分支定界法、割平面法等,主要思想都是在对应线性规划的基础上增加约束条件以后,再利用单纯形法或对偶单纯形法求解.分支定界法是在20世纪60年代初由LandDoig和Dakin等人提出求解整数规划的一种有效的方法,由于这种方法灵活且便于计算机求解,所以是用于求解纯整数规划和混合整数规划的主要方法.但是要根据非整数变量要分支,一个非整数变量要分成两个约束条件,会得到两个相应的线性规划问题,如果非整数变量太多,要求解很多个线性规划问题,非常费事.割平面法是R E Gomory在1958年提出的,它也可求解纯整数规划和混合整数规划,但至今完全用它求解的问题很少,而且经常会遇到收敛很慢的情形.该文主要是利用整数规划分支定界法的求解思路,并借鉴文献[1~4]的方法上作了一些改进,使得求解既简单又容易.

1 算法

设整数规划问题的模型如下

$$\max Z = \boldsymbol{CX}.$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{AX} \leqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X} \geqslant 0, \boldsymbol{X}\text{ 为整数} \end{cases}.$$

其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{C} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$,

$\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$,

$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}$,

$m \leqslant n$, $b \geqslant 0$.

整数规划对应线性规划问题模型如下:

$$\max Z = \boldsymbol{CX}.$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{AX} \leqslant b \\ \boldsymbol{X} \geqslant 0 \end{cases}.$$

设对应线性规划问题有有界可行域,则它的最优解在可行域的顶点处达到[5].设用单纯形法求得的线性规划最优解为 $\boldsymbol{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)^{\mathrm{T}}$,记最优目标函数值为 Z^*.

当 $n = m = 2$ 时,目标函数等值线的斜率记为 k,约束条件(1) $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqslant b_1$ 的斜率为 k_1,约束条件(2) $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leqslant b_2$ 的斜率为 k_2.且

$$k_1 \leqslant k \leqslant k_2.$$

过线性规划最优解 $(x_1^*, x_2^*)^{\mathrm{T}}$ 处的等值线为

$$C_1x_1 + C_2x_2 = Z^*.$$

* 收稿日期:2012-09-03
作者简介:温大伟(1977-),男,甘肃天水人,讲师,硕士.

过线性规划最优解 $(x_1^*, x_2^*)^T$ 处等值线的法线为

$$-C_2x_1 + C_1x_2 = -C_2x_1^* + C_1x_2^* .$$

通过增加约束条件 $-C_2x_1 + C_1x_2 \geqslant -C_2x_1^* + C_1x_2^*$ 与 $-C_2x_1 + C_1x_2 \leqslant -C_2x_1^* + C_1x_2^*$ 得到两个新的整数规划问题 $B_1(k \leqslant k_2)$, $B_2(k_1 \leqslant k)$.

$$\max Z = C_1x_1 + C_2x_2.$$

$$(B_1)\begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leqslant b_2, & (1) \\ -C_2x_1 + C_1x_2 \geqslant -C_2x_1^* + C_1x_2^*, & (2) \\ x_1, x_2 \geqslant 0, \text{为整数}. \end{cases}$$

$$\max Z = C_1x_1 + C_2x_2.$$

$$(B_2)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqslant b_1, & (3) \\ -C_2x_1 + C_1x_2 \leqslant -C_2x_1^* + C_1x_2^*, & (4) \\ x_1, x_2 \geqslant 0, \text{为整数}. \end{cases}$$

根据目标函数的价值系数和约束条件(1)、(3)的边界只要找到离边界最近的所有整数可行解，并通过观察易找到各自的最优解，取其中最大者为原整数规划的最优解.

2　举例

求整数规划问题:

$$\max Z = 5x_1 + 8x_2.$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ 5x_1 + 9x_2 \leqslant 45 \\ x_1, x_2 \geqslant 0, \text{为整数} \end{cases} .$$

对应的线性规划问题为:

$$\max Z = 5x_1 + 8x_2.$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ 5x_1 + 9x_2 \leqslant 45. \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

利用单纯形法求得最优解为

$$(x_1, x_2) = (2.25, 3.75)^T,$$

$$Z^* = \max Z = 41.25 .$$

过线性规划最优解 $(x_1, x_2) = (2.25, 3.75)^T$ 处的等值线为

$$5x_1 + 8x_2 = 41.25 .$$

过线性规划最优解 $(x_1, x_2) = (2.25, 3.75)^T$ 处等值线的法线为

$$-8x_1 + 5x_2 = 0.75 .$$

由法线把可行域一分为二，在两块小可行域上分别找出最优解.

通过增加约束条件 $-8x_1 + 5x_2 \geqslant 0.75$ 与 $-8x_1 + 5x_2 \leqslant 0.75$ 得到两个新的整数规划问题.

$$\max Z = 5x_1 + 8x_2.$$

$$(B_1)\begin{cases} 5x_1 + 9x_2 \leqslant 45, & (1) \\ -8x_1 + 5x_2 \geqslant 0.75, & (2) \\ x_1, x_2 \geqslant 0, \text{为整数}. \end{cases}$$

$$\max Z = 5x_1 + 8x_2.$$

$$(B_2)\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6, & (3) \\ -8x_1 + 5x_2 \leqslant 0.75, & (4) \\ x_1, x_2 \geqslant 0, \text{为整数}. \end{cases}$$

由问题 B_1 知，在以 x_1, x_2 为坐标轴的直角坐标系中，当 x_1 取定时，沿着 x_2 轴的正方向，满足约束条件的 x_2 的最大整数分别为:

当 $x_1 = 2$ 时，$\max x_2 = 3$，$Z_1 = 34$；

当 $x_1 = 1$ 时，$\max x_2 = 4$，$Z_2 = 37$；

当 $x_1 = 0$ 时，$\max x_2 = 5$，$Z_3 = 40$；

同理，当 x_2 取定时，沿着 x_1 轴的正方向，满足约束条件的 x_1 的最大整数分别为:

当 $x_2 = 5$ 时，$\max x_1 = 0$，$Z_4 = 40$；

当 $x_2 = 4$ 时，$\max x_1 = 1$，$Z_5 = 37$；

$$Z_{B_1} = \max\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\} = 40 .$$

由问题 B_2 知，在以 x_1, x_2 为坐标轴的直角坐标系中，当 x_1 取定时，沿着 x_2 轴的正方向，满足约束条件的 x_2 的最大整数分别为:

当 $x_1 = 3$ 时，$\max x_2 = 3$，$Z_1 = 39$；

当 $x_1 = 4$ 时，$\max x_2 = 2$，$Z_2 = 36$；

当 $x_1 = 5$ 时，$\max x_2 = 1$，$Z_3 = 33$；

当 $x_1 = 6$ 时，$\max x_2 = 0$，$Z_4 = 30$；

同理，当 x_2 取定时，沿着 x_1 轴的正方向，满足约束条件的 x_1 的最大整数分别为:

当 $x_2 = 3$ 时，$\max x_1 = 3$，$Z_5 = 39$；

当 $x_2 = 2$ 时，$\max x_1 = 4$，$Z_6 = 36$；

当 $x_2 = 1$ 时，$\max x_1 = 5$，$Z_7 = 33$；

当 $x_2 = 0$ 时，$\max x_1 = 6$，$Z_8 = 30$；

$$Z_{B_2} = \max\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7, Z_8\} = 39 .$$

(下转第 84 页)

An Accounting Study on the Capital Management Mode of Northwest Commonweal Railway with Multi-constructers

MA Li-qian
(International Education School, Tianjin university of commerce, Tianjin 300134, China)

Abstract: Northwest railway is the strongest commonweal-oriented in China railway. Under the umbrella of the capital management mode of northwest commonweal railway with multi-constructers, this article proposes the whole process of capital management, cost control, reasonable clearing and the increase of investment returns, while it analyses the timely and efficient production of authentic and complete corporate financial reporting, the accurate confirmation of capital revenue, the normalization of corporate board of shareholders, directors and supervisors, and the authority and responsibilities of managers, aiming at the effectiveness of power separation and counterbalance to strengthen the government-based regulation.

Key words: northwest Railway; multi-constructers; capital Revenue

(责任编辑: 朱晓燕)

(上接第54页)

由问题 B_1, B_2 比较可知 B_1 的最优解与原整数规划的最优解一致.

3 结语

综上所述,该文通过求解整数规划对应线性规划的最优解,构造过最优解等值线的法线把可行域一分为二,分别找到整数最优解并比较大小得到整数规划的最优解. 而由文献 [4] 已经证明了文献 [1] 的结论只能得到一个可行解,而不能得到最优解.

参考文献:

[1] 宛士春,郭永发. 对求解整数规划方法的新探索 [J]. 青海大学学报: 自然科学版,2003,21(6):63-67.

[2] 斯琴,韩海山. 整数规划松弛领域整点搜索法的改进 [J]. 内蒙古民族大学学报: 自然科学版,2010,25(6):604-606.

[3] 郭永发. 领域整点搜索法求解整数规划 [J]. 数学的实践与认识,2006,36(11):100-104.

[4] 徐大伸. 求解整数规划方法新探 [J]. 华北电力大学学报,2004,31(5):110-112.

[5] 张莹. 运筹学基础 [M]. 北京: 清华大学出版社,2010: 13-16.

A New Method for Solving Integer Programming

WEN Da-wei[1], XIE Wen-huan[2]
(1. College of Mathematics, Lanzhou City University, Lanzhou 730070, China;
2. Apartment Management Center, Lanzhou Institute of Technology, Lanzhou 730050, China)

Abstract: By refering to integer programming branch and bound method, adding constraint conditions, the corresponding feasible domain of linear programming is divided into two parts to find the optimal solution and get optimal solution of integer programming respectively.

Key words: integer programming; linear programming; constraint condition; optimal solution

(责任编辑: 曾贤灏)