第 31 卷第 5 期
2004 年 9 月

华北电力大学学报
Journal of North China Electric Power University

Vol.31, No.5
Sep., 2004

求解整数规划方法新探

徐大申，邱启荣，何凤霞，彭武安

（华北电力大学 数理学院，北京 102206）

摘要：文献 [1] 提出了求解整数规划问题的一种新方法——松弛最优解邻域整点搜索法。本文用反例说明用松弛最优解邻域整点搜索法求得的最优解不一定是整数规划问题的最优解，并给出了直接搜索的改进算法。

关键词：整数规划；松弛问题；分枝定界法；邻域

中图分类号：O241.6　　**文献标识码：**A　　**文章编号：**1007-2691（2004）05-0110-03

New exploration of solving integer programming

XU Da-shen，QIU Qi-rong，HE Feng-xia，PENG Wu-an

（School of Mathematic and Physics，North China Electric Power University，Beijing 102206，China）

Abstract: In the paper [1], author gave a new method of solving integer programming: search method of neighborhood integer point of the solution of relaxation problem. In this paper, it is proved by the example that the search method of neighborhool integer point for solving IP problem is wrong, and an improvement is given for direct manhunt method.

Key words: integer programming; relaxation problem; brach-bound; neighborhood

引　言

分枝定界法是求解整数规划问题各种方法中最为实用和有效的方法，但也存在致命的缺陷。为了克服分枝定界法的缺陷，文献 [1] 中，提出一种借用分枝定界法的基本思路，但其求解方法和过程均有别于分枝定界法的新解法——松弛最优解邻域整点搜索法。

文献 [1] 中，引入了如下松弛最优解邻域整点的概念。

设线性规划问题

$$\max z=cx,$$
$$(\mathrm{LP})\ \text{s.t.}\begin{cases}Ax\leq b\\ x\geq 0\end{cases}$$

的最优解为$x^*=(x_1^*,\ x_2^*,\cdots,\ x_n^*)^{\mathrm{T}}$。称满足如下条件的点$X$的集合

$$X=\{x=(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n)^{\mathrm{T}}|[x_j^*]\leq x_j\leq[x_j^*]+1,\ j=1,2,\ \cdots,\ n\}$$

为松弛最优解邻域整点。

文献 [1] 中，证明了如下定理。

定理（邻域边界相对最优定理）：

设线性规划问题

$$\max z=cx,$$
$$(\mathrm{IP})\ \text{s.t.}\begin{cases}Ax\leq b\\ x\geq 0\end{cases}$$

的最优解为$x^*=(x_1^*,\ x_2^*,\cdots,\ x_n^*)^{\mathrm{T}}$。

（1）若新增下界约束$x_j\leq[x_j^*]$，则在后继问题的最优解中，$x_j=[x_j^*]$；

（2）若新增上界约束$x_j\geq[x_j^*]+1$，则在后继问题的最优解中，$x_j=[x_j^*]+1$。

由该定理，得出了如下结论：如果 IP 问题存在松弛最优解，就一定存在最优解，且最优解一定存在于邻域边界的整点中。在此基础上，给出了求

收稿日期：2003-04-01.

作者简介：徐大申（1948 —），男，华北电力大学数理学院数理系副教授.

解整数规划问题的松弛最优解邻域整点搜索法：在求解松弛问题应用了一次 LP 解法之后，直接在邻域边界的整点中寻求最优解。

下面给出一个反例，此例不仅说明了文献 [1] 的定理是错误的，也说明了松弛最优解邻域整点搜索法得到的解不一定是整数规划问题的最优解。

1　反例

考虑如下整数规划问题：

$$\max\ z=5x_1+8x_2\ ,$$
$$(\text{IP})\quad \text{s.t.}\begin{cases}x_1+x_2\le 6\\ 5x_1+9x_2\le 45\\ x_1,x_2\text{是非负整数}\end{cases}。$$

由分枝定界法求得，(IP)问题的最优解为$x_{\text{IP}}^*=(0,\ 5)^{\text{T}}$，$\max\ z=40$。

用单纯形法求得它的松弛问题：

$$\max\ z=5x_1+8x_2\ ,$$
$$(\text{LP})\quad \text{s.t.}\begin{cases}x_1+x_2\le 6\\ 5x_1+9x_2\le 45\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$$

的最优解为$x_{\text{LP}}^*=(2.25,3.75)^{\text{T}}$,$\max\ z=41.25$。

用松弛最优解邻域整点搜索法计算结果见表 1。

表 1　用文献 [1] 方法的求解结果

Tab.1 Calculation results with method in reference [1]

$(x_1,x_2)^{\text{T}}$	目标值	$5x_1+8x_2\le 41.25$	$x_1+x_2\le 6$	$5x_1+9x_2\le 45$
$(2,3)^{\text{T}}$	34	√	√	√
$(2,4)^{\text{T}}$	42	×		
$(3,3)^{\text{T}}$	39	√	√	√
$(3,4)^{\text{T}}$	47	×		

由此可得，用文献 [1] 提出的松弛最优解邻域整点搜索法求得的（IP）问题的最优解为$x^*=(3,\ 3)^{\text{T}}$，$\max\ z=39$。事实上，该解不是（IP）问题的最优解，最优解为$x_{\text{ILP}}^*=(0,\ 5)^{\text{T}}$，$\max\ z=40$。

2　改进算法

前面的反例说明，松弛最优解邻域整点搜索法得到的解不一定是整数规划问题的最优解。但由松弛最优解邻域整点搜索法得到的解$\tilde{x}$是一个接近最优解的可行解。因此，如果将条件$cx\ge c\tilde{x}$作为过滤条件，将使绝大多数的可行解排除在最优解之外。

记号：球面$B(x,\delta)=\{y:\|y-x\|_1=\delta\}$。

若x_0是整数点，m是正整数，记

$\text{BI}(x_0,\ m)=\{x|x\in B(x_0,\ m),x$的所有分量是整数$\}$。

将$\tilde{x}$作为（ILP）问题的初始可行解$x^{(0)}$。在可行域内寻找满足$cx\ge c\tilde{x}$的最优解。由此得到，求解（IP）问题解的直接搜索解法。

算法步骤：

（1）求松弛问题（LP）的最优解x_{LP}^*。

（2）如果x_{LP}^*满足整数条件，得（IP）问题的最优解$x_{\text{ILP}}^*=x_{\text{LP}}^*$；否则，转（3）。

（3）用松弛最优解邻域整点搜索法求（IP）问题的近似最优解$\tilde{x}$。

（4）置$k=0$，$x^{(k)}=\tilde{x}$，$m=1$。

（5）在$\text{BI}(x^{(k)},\ m)$中，寻找满足$cx^{(k)}<cx\le cx_{\text{LP}}^*$，$Ax\le b$，$\boldsymbol{x}$是非负整数向量的点$x$。如果找到一点$\hat{x}$，则转（6）；否则，转（7）。

（6）置$k=k+1$，$x^{(k)}=\hat{x}$，转（5）。

（7）如果$m<L$，置$m=m+1$，转（5）；否则，得问题的最优解$x_{\text{ILP}}^*=x^{(k)}$，结束。

注 1：（7）中的L是根据可行域估计的可行解与$\tilde{x}$的距离的上界。

注 2：对于大规模问题，约束条件较多，而引入的过滤条件$cx^{(k)}<cx\le cx_{\text{LP}}^*$只有一个，在可行域内，整数点的个数是有限的，其中绝大多数点不满足$cx^{(k)}<cx\le cx_{\text{LP}}^*$，它们一定不是（IP）问题的最优解，因此，不需对它们进行可行性检验。故本解法可以极大地减少计算量，提高计算效率。

算法举例：求整数规划问题

$$\max\ z=5x_1+8x_2\ ,$$
$$(\text{ILP})\quad \text{s.t.}\begin{cases}x_1+x_2\le 6\\ 5x_1+9x_2\le 45\\ x_1,x_2\text{是非负整数}\end{cases}$$

的最优解。

由前面计算得，$\tilde{x}=(3,3)^{\text{T}}$。由约束条件可得可行域内的点$x=(x_1,x_2,)^{\text{T}}$满足$0\le x_1\le 6$，$0\le x_2\le 5$，因此$\max\{\|x-(3,3)^{\text{T}}\|_1:x$ 是(IP)问题的可行解$\}\le 6$。故可取$L=6$。

置$k=0$，$x^{(0)}=\tilde{x}=(3,\ 3)^{\text{T}}$。按上述计算方法选取$m=1,2$ 时计算结果如表 2，表 3 所示。

表 2，表 3 中，由于前项检验未通过，所以对于

$$x_1+x_2\le 6,\quad 5x_1+9x_2\le 45$$

两项的检验已没有意义，故未列出。

类似验算后可知，在$\text{BI}(x^{(0)},\ 3)$，$\text{BI}(x^{(0)},\ 4)$内没有满足条件

$$39<5x_1+8x_2\le 41.25,$$

表2 m=1时的求解结果

Tab.2 Calculation results when m=1

$BI(x^{(0)},1)$	$5x_1+8x_2>39$	$5x_1+8x_2\le 41.25$
$(3,2)^T$	×	
$(3,4)^T$	√	×
$(4,3)^T$	√	×
$(2,3)^T$	×	

表3 m=2时的求解结果

Tab.3 Calculation results when m=3

$BI(x^{(0)},2)$	$5x_1+8x_2>39$	$5x_1+8x_2\le 41.25$
$(3,1)^T$	×	
$(3,5)^T$	√	×
$(1,3)^T$	×	
$(5,3)^T$	√	×
$(4,4)^T$	√	×
$(4,2)^T$	×	
$(2,4)^T$	√	×
$(2,2)^T$	×	

$$x_1+x_2\le 6, 5x_1+9x_2\le 45,$$
$$x_1\ge 0, x_2\ge 0$$

的点。

在$BI(x^{(0)}, 5)$内有一个满足条件的点$\hat{x}=(0, 5)^T$。置$k=1, x^{(1)}=\hat{x}=(0,5)^T$。由于在$BI(x^{(0)},5)$，$BI(x^{(0)},6)$内没有满足条件

$$40<5x_1+8x_2\le 41.25,$$
$$x_1+x_2\le 6, 5x_1+9x_2\le 45,$$
$$x_1\ge 0, x_2\ge 0$$

的点，因此，（IP）问题的最优解为

$$x^*_{ILP}=(0, 5)^T, \ \max z=40。$$

在单纯形法的求解过程中，由于分枝会产生不仅在数量上的连续倍增,而且规模越来越大的IP问题使计算工作量非常大。以本例为例，n=2，m=2（n为原变量个数，m为约束方程的个数）。用原来的分枝定界法，需要求7个线性规划问题的解（见文献［2］），而且，随着分枝的进行，约束条件越来越多，计算量也越来越大。

用本文的方法，只需要用单纯形法求一次松弛问题的最优解。从算例可知，绝大部分$BI(x_0, m)$中的点不满足过滤条件：$cx^{(k)}<cx\le cx^*_{LP}$。因此，在最大程度上减少了计算量。本文的方法思路清晰，易于编程实现。

3 结 论

本文算例说明，文献［1］的定理是错误的，松弛最优解邻域整点搜索法得到的解不一定是整数规划问题的最优解，因此，试图通过松弛最优解邻域整点搜索法求出所有整数规划问题的最优解是不可能的。在本文中，提出了利用过滤条件的直接搜索算法。算例说明，算法是有效的。

参考文献：

[1] 宛士春，郭永发. 对求解整数规划方法的新探索［J］. 青海大学学报（自然科学版），2003，21（6）：63-67.

[2] 唐焕文，秦学志. 实用最优化方法［M］. 大连：大连理工大学出版社，2001.246-276.

（责任编辑：吴 勃）

（上接第109页）

用v'作横坐标，$\Delta G(v')$作纵坐标，作$\Delta G(v')$与v'关系图。对其作直线拟合，拟合结果为

$$\Delta G(v')=a+bv'=1\ 984.987-55.046v'。$$

由（13）式可得到

$$\omega_e'=a-b=2\ 040.03\ \mathrm{cm}^{-1}。$$

上述各量的理论值与实验结果及相对误差列于表3。

表3 实验结果与理论值的比较

Tab.3 Experimental and theoretical results comparison

分子常数	实验值/cm^{-1}	理论值[4] /cm^{-1}	相对误差/(%)
ω_e'	2 040.03	2 047.17	0.349

4 结 论

氮分子的激发态光谱，在实际应用以及科学理论工作中都具有很重要的研究价值。本文以直流辉光放电作激励源，对氮分子进行激发，得到了氮分子$C^3\Pi_u\to B^3\Pi_g$电子态之间跃迁的荧光发射谱，并对该荧光发射谱进行分析和计算，得出氮分子上能级$C^3\Pi_u$态的振动基频为2 040.03 cm^{-1}，实验结果与理论值符合得较好。

参考文献：

[1] 王辉，蔡佩佩. N_2第一正带的塞曼调制磁旋转光谱分析［J］. 化学物理学报，1997,10（2）：117-123.

[2] 高涛，唐永建. N_2分子$X\Sigma_g$，$A\Sigma_u$和$B\Pi_g$的势能函数［J］. 原子与分子物理学报，1998,15（3）：329-334.

[3] James G k. Medium resolution studies of extreme ultraviolet emission from N_2 by electron impact: the effect of predissociation on the emission cross section of the $B^1\Pi_u$ state［J］. J. Phys. B，1990,23（2）：2055-2081.

[4] G 赫兹堡. 分子光谱与分子结构（第1卷）［M］. 北京：科学出版社，1983.112,446.

（责任编辑：王立新）