ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА

Андреев А. И.,
кандидат физико-математических наук,
e-mail: andranatoliy@yandex.ru
Андреев В. А.,
физик, МГУ,
e-mail: andrvova@yandex.ru

ОТКРЫТИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Матричный полином f(A) степени n, связанный со скалярным полиномом f(λ) матрицы A(n,n) и с его коэффициентами p_k, имеет матрицы-корни (решения) A_k, k = 1,2,…, обращающие матричный полином в **нулевой** f(A) = 0(n,n):

$f(A) = A^n + p_1A^{n-1} + p_2A^{n-2}\ldots + p_nE.$

ОБОСНОВАНИЕ ОТКРЫТИЯ.

Спектральный анализ имеет широкое применение в различных прикладных направлениях. Квантовая теория содержит множество спектральных задач с применением самосопряженных линейных операторов. Собственные значения самосопряженного оператора определяют спектр энергии квантовой системы, а собственные вектора являются волновыми функциями квантовой системы. С каждым линейным оператором связана матрица.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАТРИЧНЫХ ПОЛИНОМОВ.

В составе полиномов различают матричные полиномы с матричными и скалярными коэффициентами.

Матричные полиномы делятся на полиномы с правым и левым значением [6]. Соответствующие определения приведены ниже.

$\sum_k B_k A^k = B_0A^n + B_1A^{n-1} + B_2A^{n-2} \ldots + B_n$ – полином с правым значением,

$\sum_k A^k B_k = A^nB_0 + A^{n-1}B_1 + A^{n-2}B_2 \ldots + B_n$ – полином с левым значением.

В полиномах с правым значением степени матрицы A^k записываются справа от матриц коэффициентов B_k, а в полиномах с левым значением матрицы A^k записываются слева от коэффициентов матриц B_k. Существование матричных полиномов с левым и правым значением приводит к необходимости различать правое и левое деление полиномов, правый и левый остаток деления. Для матричных полиномов со скалярными коэффициентами справедливо $\lambda_k A^k = A^k\lambda_k$.

Матричные полиномы со скалярными коэффициентами f(A) часто определяют заменой в скалярном полиноме f(λ) скалярной переменной λ матрицей A(n,n).

С каждой матрицей A(n,n) связана спектральная матрица (λE – A). Определитель спектральной матрицы является скалярным полиномом f(λ) исходной матрицы A(n,n):

$\det(\lambda E - A) = f(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \ldots + p_n.$

Скалярному полиному f(λ) соответствует каноническое разложение:

$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)\ldots(\lambda - \lambda_n),$

где λ_k, k = 1, 2,…n – корни спектрального полинома f(λ) = 0.

Со скалярным полиномом f(λ) связан матричный полином f(A):

$f(A) = A^n + p_1A^{n-1} + p_2A^{n-2} + \ldots + p_nE$.

Поэтому между полиномами f(λ) и f(A) существует **взаимно однозначное** соответствие:

f(λ) ↔ f(A). Полиному f(λ) соответствует полином f(A) при замене λ → A(n,n) и наоборот.

Алгебраическая операция над множеством элементов называется замкнутой, если она не выводит за пределы исходного множества элементов. Алгебраическая операция извлечения квадратного корня из отрицательных чисел в поле вещественных чисел незамкнутая. Незамкнутость алгебраической операции приводит к необходимости расширения исходного множества элементов элементами из другого множества. Введение комплексных чисел в математику приводит к замкнутости алгебраической операции извлечения квадратного корня из любых чисел, включая отрицательные. Для многих прикладных направлений применение поля комплексных чисел является достаточным.

В теории групп фундаментальным является условие замкнутости групповой операции. Определение группы включает определение множества элементов, составляющих группу, и определение групповой операции. Определением групповой операции является таблица умножения, часто называемая квадратом Кейли. Например, группа симметрии куба порядка 48 содержит 48 элементов и 48 матриц в линейном представлении. Таблица умножения элементов симметрии куба содержит 48^2 = 2304 элемента, из которых нетождественными являются только 48 элементов исходной группы. Остальные элементы таблицы умножения повторяют исходные элементы группы ввиду замкнутости групповой операции.

Теория групп является основой теории симметрии кристаллов. В работе [4] в простой форме определены все 32 класса симметрии кристаллов на основе теории групп.

В теории полиномов уравнение полинома f(z) = 0 степени n с комплексными коэффициентами p_k называется алгебраическим уравнением [5]:

$f(z) = z^n + p_1 z^{n-1} + p_2 z^{n-2} \ldots + p_n = 0$.

Значения переменной $z = z_k$, которые обращают полином f(z) в нуль, называются корнями полинома f(z). Значение переменной z, для которого функция f(z) = 0, называется корнем уравнения f(z) = 0. Не для всякой функции f(z) существует корень - решение, обращающее ее в нуль. Фундаментальная функция Эйлера $z(x) = e^{jxk}$ или $z(x) = e^{-jxk}$ при любом значении переменной x не равна нулю. Поэтому функция Эйлера не имеет корней, так как $z(x) \neq 0$ при любом значении переменной x.

Лагранж назвал функцию петербургского академика Эйлера e^{jxk} самым замечательным открытием математики [2]. В цифровой обработке спектральный анализ занимает первое место. Основой спектрального анализа является быстрое преобразование Фурье. Для дискретных исходных данных **f**(n) = **f**(x_k) определяют фундаментальную матрицу Эйлера W(n,n) = [$\mathbf{z}^0$ $\mathbf{z}^1$ $\mathbf{z}^2$ … $\mathbf{z}^n$], где $\mathbf{z}^k(n) = e^{jkm2\pi/n}$, m = 0,1,…n – дискретная функция Эйлера. В работе [1] быстрое преобразование Фурье определено в простой форме. В работе [3] быстрое преобразование использовано для обоснования сверхбыстрых оптимальных фильтров.

По основной теореме алгебры любой полином f(z) степени n имеет ровно n корней. Основная теорема алгебры является основой теории линейных операторов, включающих операторы дифференцирования, интегрирования, матрицы и другие линейные преобразования.

Со скалярным полиномом f(z) взаимно однозначно связан матричный полином f(A), в котором скалярная переменная z заменена матрицей A(n,n):

$f(z) = z^n + p_1 z^{n-1} + p_2 z^{n-2} \ldots + p_n \rightarrow f(A) = A^n + p_1 A^{n-1} + p_2 A^{n-2} \ldots + p_n E$.

Особенности матричного полинома f(A), взаимно однозначно связанного со скалярным полиномом f(λ) = det (λE – A), определяет сформулированная и доказанная ниже теорема о **нулевом матричном полиноме** f(A).

ТЕОРЕМА **о нулевом матричном полиноме**. Матричный полином f(A), связанный со скалярным полиномом f(λ) = det (λE – A), является нулевой матрицей 0(n,n).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим теорию присоединенных матриц в доказательстве теоремы о **нулевом матричном полиноме** f(A) = 0(n,n).

С любой матрицей A(n,n) связана спектральная матрица (λE – A) = B и присоединенная к спектральной матрица (λE – A)^ = B^. С любой матрицей A(n,n) связана присоединенная матрица A(n,n)^ и справедливо тождество присоединенных матриц:

AA^ = A^A = E det A

Матрица E det A = αE(n,n) называется скалярной, представляет произведение единичной матрицы E(n,n) на скаляр α. Если матрица A(n,n) вырожденная, тогда связанная с ней скалярная матрица E det A = 0(n,n) является нулевой, так как α = det A = 0.

В спектральных задачах определитель спектральной матрицы B = (λE – A) по условию **всегда** является нулевым: det (λE – A) = det B = 0.

Применим **тождество присоединенных матриц** к спектральной матрице

B = (λE– A):

BB^ = E det B = E det(λE – A) = f(λ) E или BB^ = f(λ) E,

где учтено det B = det (λE – A) = f(λ).

В каждой части полученного равенства BB^ = f(λ)E заменим скалярную переменную λ матрицей A(n,n):

BB^ = (λE – A) B^ → (AE – A) B^ = (A – A) B^ = 0(n,n)B^ = 0(n,n) – для левой части,

$f(\lambda)E = E (\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} \ldots + p_n) \rightarrow E (A^n + p_1A^{n-1} \ldots + p_nE) = E f(A) = f(A)$ для правой части.

Приравняв правую часть нулевой левой части, получим:

f(A) = 0(n,n)..

Равенство f(A).= 0(n,n) доказывает теорему о **нулевом матричном полиноме** f(A), связанном со скалярным полиномом f(λ) = det (λE – A) = 0..

С любой матрицей A(n,n) связан скалярный полином f(λ) = det (λE – A) и взаимно однозначный со скалярным полиномом f(λ) нулевой матричный полином f(A)↔ f(λ).

Согласно доказанной выше теореме о **нулевом матричном полиноме**.

Замена скалярной переменной λ матрицей A(n,n) используется, например, при доказательстве обобщенной теоремы Безу в [6]:

(A – λE) ≠ 0(n,n) → (A – AE) = (A – A) ≡ 0(n,n).

Основу публикуемого ОТКРЫТИЯ по МАТЕМАТИКЕ составляет доказательство существования для любого нулевого матричного полинома f(A) = 0(n,n) матриц–решений $A_k(n,n)$, которые обращают матричный полином в нулевую матрицу $f(A_k) = 0(n,n)$.

ТЕОРЕМА. Для любого матричного полинома f(A) = 0(n,n) существуют матрицы-корни полинома – решения $A_k(n,n)$, обращающие полином f(A) в нулевую матрицу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы применим доказанную выше теорему о существовании **нулевого матричного полинома** f(A) = 0(n,n) для любой матрицы A(n,n).

Заменим в матричном полиноме $f(A) = (A^n + p_1A^{n-1} \ldots + p_nE)$ матрицу A(n,n) скалярной матрицей $\lambda_kE(n,n)$, где λ_k, - любой корень скалярного полинома f(λ) исходной матрицы A(n,n), k = 1,2…. В результате матричный полином f(A) преобразуется в нулевую матрицу 0(n,n):

$f(A) = (A^n + p_1A^{n-1} \ldots + p_nE) \rightarrow f(\lambda_kE) = (\lambda_kE)^n + p_1(\lambda_kE)^{n-1} \ldots + p_nE$.

Для единичной матрицы $E^m = E$ для любых целых чисел m. Поэтому из приведенного равенства следует:

$f(\lambda_k E) = (\lambda_k E)^n + p_1(\lambda_k E\ )^{n-1}\ldots + p_n E$.= $(\lambda_k^n + p_1\lambda_k^{n-1}\ldots + p_n)E = f(\lambda_k)E = 0(n,n)$.

Каждое собственное значение λ_k матрицы A(n,n) является корнем скалярного полинома $f(\lambda_k) = 0$ и обращает его в нуль.

Поэтому справедливо выражение для любого матричного полинома f(A):

$f(\lambda_k E) \equiv 0(n,n)$.

Полученное равенство $f(\lambda_k E) \equiv 0(n,n)$ доказывает теорему о существовании **корней-матриц**, обращающих матричный полином f(A) в нулевую матрицу и являющихся решениями матричного полинома f(A).

Из теоремы о нулевом матричном полиноме f(A) следует: любая матрица A(n,n) обращает свой матричный полином f(A) в нулевую матрицу, является **корень-матрицей** (решением) матричного полинома f(A) = 0(n,n).

С любой матрицей A(n,n) связан скалярный полином f(λ), который в канонической форме имеет вид:

$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\,(\lambda - \lambda_2)\,(\lambda - \lambda_3)\ldots(\lambda - \lambda_n)$.

Заменим в канонической форме скалярного полинома f(λ) скалярную переменную λ матрицей A(n,n):

$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\ldots(\lambda - \lambda_n) \rightarrow\ f(A) = (A - \lambda_1 E)\,(A - \lambda_2 E)\ldots(A - \lambda_n E) = (A^n + p_1 A^{n-1}\ldots + p_n E\,)$.

В полученном равенстве каждый линейный множитель $(A - \lambda_k E)$ является ненулевой бином – матрицей $(A - \lambda_k E)$ и не обращает в нуль матричный полином.f(A). Но произведение **всех** ненулевых матричных линейных множителей $(A - \lambda_1 E)\,(A - \lambda_2 E)\ldots(A - \lambda_n E) = 0(n,n) = f(A)$ является нулевой матрицей.

Операции умножения скаляров (чисел) и матриц существенно отличаются. Если произведение скаляров ab = 0, тогда один из множителей должен быть нулевым. Из нулевого произведения матриц AB = 0(n,n) не следует, что одна из матриц A или B нулевая.

По **основной теореме алгебры** для любого скалярного полинома f(z) степени n существует n корней z_k, k = 1, 2, … n. Публикуемое ОТКРЫТИЕ по МАТЕМАТИКЕ доказывает **основную теорему алгебры** о существовании **корней-матриц** матричного полинома f(A) произвольной матрицы A(n,n).

С любой матрицей A(n,n) связаны два полинома: скалярный полином f(λ) и матричный полином f(A). Корнями скалярного полинома f(λ) являются числа λ_k. Корнями матричного полинома f(A) являются матрицы $A_k(n,n)$.

Число корней скалярного полинома f(λ) порядка n равно n . Число корней-матриц матричного полинома f(A) зависит от спектральных особенностей исходной матрицы A(n,n). Для матриц A(n,n), в которых все собственные значения λ_k однократные, число матриц-корней $A_k(n,n)$ матричного полинома f(A) равно n +1. Каждому собственному значению λ_k соответствует матрица-корень $A_k(n,n) = \lambda_k E(n,n)$, k = 1, 2, … n и исходная матрица- корень A(n,n).

Кратность собственных значений исходной матрицы A(n,n) соответственно уменьшает число матриц-корней полинома f(A). Например, для матрицы A(n,n) в форме жордановой клетки матричный полином f(A).имеет только две матрицы-корни: исходная матрица A(n,n) и единственная скалярная матрица $A_k(n,n) = \lambda E(n,n)$. Любая матрица в форме жордановой клетки имеет единственное собственное значение λ.

С матричным полиномом f(A) связана теорема Гамильтона–Кели, по которой любая квадратная матрица A(n,n) удовлетворяет своему характеристическому уравнению [6]. Например, с матрицей A(2,2) = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ связана спектральная матрица

B(2,2) = λE – A = $\begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 1 & \lambda - 3 \end{bmatrix}$ и полином det B = $f(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 7$. Заменив в спектральной матрице B(2,2) скалярную переменную λ исходной матрицей A(2,2) и вычислив определитель полученной матрицы $\widetilde{B}$, получим полином f(A):

$$\widetilde{B} = \begin{bmatrix} A-2E & -E \\ E & A-3E \end{bmatrix}, \quad \det \widetilde{B} = \quad f(A) =$$

(A – 2E) (A – 3E) + E^2 = A^2 – 5A + 7E.

(Операция сложения матриц определена только для согласованных по размерности матриц, поэтому каждый скаляр в матрице $\widetilde{B}$ умножен на единичную матрицу E(n,n)).

Гамильтон опубликовал теорему в1853 году для матриц 2×2 без доказательства. Позднее Кели сформулировал более общее утверждение. Первое доказательство опубликовал Фробениус в 1878 году.

В литературе подчеркивается: из равенства det A = 0 не следует A = 0. Аналогично, из det (λE – A) = 0 не следует f(A) = 0(n,n). По доказанной выше теореме о **нулевом матричном** полиноме для любой матрицы A(n,n) существует **нулевой матричный полином** f(A). Определитель нулевой матрицы также нулевой, поэтому из f(A) = 0(n,n) следует det f(A) = 0.

Для матричного полинома f(A) существуют два способа его определения.

В способе 1 скалярная переменная λ скалярного полинома f(λ) заменяется матрицей:
$f(\lambda) = \lambda^{n} + p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} \ldots + p_n \rightarrow f(A) = A^{n} + p_1 A^{n-1} + p_2 A^{n-2} \ldots + p_n E$.

В способе 2 скалярную переменную λ заменяют матрицей A(n,n) в спектральной матрице

(A – λE), затем вычисляют определитель полученной матрицы:

$$(A - \lambda E) = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \,\ldots\ldots\ldots\, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots\ldots a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} a_{11}E - A & a_{12}E \,\ldots\ldots\ldots\, a_{1n}E \\ a_{21}E & a_{22}E - A \ldots\ldots a_{2n}E \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}E & a_{n2}E \ldots\ldots\ldots a_{nn}E - A \end{bmatrix} = B.$$

det B = f(A), что согласуется с теоремой Гамильтона-Кели.

Публикуемое ОТКРЫТИЕ по МАТЕМАТИКЕ расширяет область основной теоремы алгебры о корнях скалярных полиномов в область существования корней-матриц матричных полиномов, в которых независимой переменной является произвольная матрица A(n,n).

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев, А. И. Способ сверхбыстрого преобразования Фурье // Геофизика. – М. : ГЕРС, 2003. – № 2.

2 Андреев, А. И. Быстрое двумерное преобразование Фурье // Геофизика. – М. : ГЕРС, 2007. – № 2.

3. Андреев, А. И. Сверхбыстрый оптимальный фильтр // Технологии сейсморазведки. – М. : ГЕРС, 2006. – № 1.

4. Андреев, А. И., Андреев, В. А. Фундаментальная теория неприводимых представлений групп, групп симметрии кристаллов // Мир Современной Науки. – М. : ПЕРО, 2014. – № 3.

5. Смирнов, В. И. Курс высшей математики. – Т. 1, – М. : Изд-во технико-теоретической литературы, 1957.

6. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц. – М. : Наука, 1988.