УДК 51(091) Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2010. Вып. 3

МАТЕМАТИКА И ФИЛОСОФИЯ (О ДИАЛЕКТИКЕ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ)

В. Ф. Осипов

С.-Петербургский государственный университет,
д-р физ.-мат. наук, профессор

«Математика содержит в себе черты волевой деятельности, умозрительного рассуждения и стремления к эстетическому совершенству. Ее основные и взаимно противоположные элементы — логика и интуиция, анализ и конструкция, общность и конкретность. Как бы ни были различны точки зрения, питаемые теми или иными традициями, только совместное действие этих полярных начал и борьба за их синтез обеспечивают жизненность, полезность и высокую ценность математической науки».

Курант Р., Роббинс Г. [1].

История математики предлагает нам целую гамму примеров, показывающих, как в повторении результатов одинаково произведенных действий человек, используя способность своего ума к абстрактному мышлению, формулирует гипотезы. Многократно подтвержденная на практике гипотеза становится законом. Закон вместе с вытекающими из него следствиями уже образует модель некоторой части мира. В результате возникает гомоморфизм структуры мира в искусственную модель, созданную человеком. В частности, так возникают математические структуры. Например, уже в глубокой древности практическая деятельность приводит к возникновению понятия целого числа как эквивалента конечных равномощных множеств предметов различной природы [2]. Следует заметить, что математическое творчество есть особая форма человеческой деятельности, объектами этой деятельности являются абстракции разного уровня. Простейшие понятия математики (например, число, точка, прямая) есть концепции, исходящие непосредственно из нашего чувственного опыта. Но привычки математика иметь дело с теми или иными абстрактными понятиями также являются источником новых более абстрактных понятий, при этом наблюдается своеобразный перенос чувственной интуиции на эти более абстрактные понятия. Так, в XIX веке родилась многоуровневая абстракция группы, позволившая объединить различные математические направления; основные законы арифметики превратились в аксиомы алгебраической теории полей, а геометрический язык, первоначально возникший в геометрии в результате простейших идеализаций чувственного восприятия пространства, в XX веке становится наиболее мощным методом исследования проблем функционального анализа.

Возвращаясь к античности, легко проследить, что, хотя практические потребности и связь с физической реальностью в большой мере участвовали в создании греческой математики, возникает и теоретико-постулативная тенденция, а вместе с ней и идеалы евклидовой строгости, отказ от которых приводил не только в древности, но и в новое время к кризисам в обоснованиях. Наконец, подчеркнем, что уже в античности математика стала объектом философских дискуссий. Греческие мыслители прекрасно понимали, что значительные трудности, связанные с основными математическими концепциями — непрерывностью, движением, бесконечностью — имеют не только математический характер.

© В. Ф. Осипов, 2010

Особый характер математического творчества и абстрактное содержание математики создают иллюзию свободного «чистого» мышления. Например, у Платона математические понятия и идеи существуют самостоятельно, без всякой связи с реальным миром. Не останавливаясь более подробно на идеалистическом характере философии Платона, Пифагора и др., отметим, что указанная мировоззренческая позиция тормозила развитие математики, ограничивая, например, геометрические проблемы измерения площадей и объемов только к фигурам второго порядка, из которых якобы и устроен наш идеальный мир. И только в XVII веке Кеплер приводит формулу для вычисления площади фигуры, ограниченной кубическими параболами. Далее, раздвоение мира на реальное и идеальное, существование идеальных сущностей у Платона вместе с удивительной логической стройностью евклидовой геометрии — вот основа представлений Канта об априорном характере геометрических понятий. По-видимому, такие геометрические представления в большой степени повлекли взгляды на пространство, как на априорную форму восприятия и, вообще, на априорную форму человеческого рассудка. Можно было бы продолжить перечисление различных течений в понимании сущности математики. Однако ограничимся неевклидовыми геометриями. К концу XIX столетия благодаря работам Бельтрами и Клейна, посвященным проблемам непротиворечивости геометрии, стал ясен множественный характер некоторых утверждений, независимых от абсолютной геометрии. Например, логически непротиворечивой является любая из геометрий: Евклида, Лобачевского и Римана. Но какая из геометрий есть геометрия нашего мира? Разумеется, мы сознательно упростили вопрос, но это сделано только для того, чтобы описать ту ситуацию, в которой выдающийся математик А. Пуанкаре пришел к конвенционализму — одному из субъективно-идеалистических течений в философии.

Аналогичная, но более сложная обстановка возникла в теории множеств после работ Коэна о гипотезе континуума. Некоторые из математиков считают, что в одинаковой степени правомерны как теория, в которой между счетной мощностью и континуумом нет других кардиналов (то есть прав был Кантор), так и теория, в которой имеет место отрицание гипотезы континуума. Другие же не исключают и такую концепцию континуума, при которой он не будет иметь никакой мощности. Возможно, что «представление о множестве, состоящем из элементов, действительно рискует оказаться адекватным лишь для конечных или счетных множеств, тогда как высшие бесконечности могут оказаться абстракциями от объектов совершенно другого типа» [3, с. 148]. В настоящее время нет каких-либо серьезных оснований для той или иной точки зрения на природу континуума. Более того, представляется совершенно неясным, является вопрос о природе континуума внутренней математической проблемой или ответ следует искать в более глубоком изучении внешнего мира.

Рассмотрим еще один пример, иллюстрирующий взаимодействие математики с теоретической физикой. Имеется в виду одно из современных понятий топологии и дифференциальной геометрии — понятие расслоенного пространства. Хорошо известно, что второй класс Черна (индекс Понтрягина) есть число инстантонов, играющее важную роль в классической теории калибровочных полей (полей Янга—Миллса) [4, с. 114]. До открытия указанной связи между математикой и физикой существовала точка зрения на классы Черна, как на такие абстракции в математике, которые никому не нужны: пусть другие математики занимаются этим пустым и бессмысленным занятием, мы же имеем дело с математикой, а не с теологией! Кстати, то же можно было бы сказать о неразрешимости в радикалах уравнения пятой степени. Однако в настоящее время теория Галуа является одним из основных разделов, с которым каждый серьезный студент-математик должен познакомиться в первые же годы обучения. С другой стороны, победное шествие «Великого Объединения» в теории взаимодействий элементарных частиц (стремление к эстетическому совершенству вселяет в нас уверенность, что протон нестабилен!) заставило большинство физиков-теоретиков выучить современную дифференциальную геометрию. Другая точка зрения состоит в том, что классы Черна — актуальная математика, так как они используются в физике. Обе точки зрения метафизичны. Первая связана с отрицанием правомерности чистых абстракций в математике, а вторая ставит процесс развития математики в зависимость от физики. Конечно, как расслоенные пространства, так и калибровочные поля выросли от одного корня, но это суть два стебля, развивающиеся близко друг от друга, но все-таки, мы подчеркиваем, это разные стебли.

Что же такое математика? Попробуем дать ответ по схеме математического метода последовательных приближений. В качестве начального приближения рассмотрим шуточный ответ: математика есть наука о математическом. А математическое?

> «Что это значит — каждый знает,
> Кто ездил во сне верхом без коня»

— ответим вместе с Готфридом Келлером. Конечно, ответ не очень-то содержательный (начальное приближение), но психологически верный. Творчески работающему математику не очень нравится, когда касаются его любимого предмета. Но это есть только одна сторона медали, а на другой — признание известного французского математика Н. Бурбаки: «столь же редко приходится видеть математика, обладающего высокой философской культурой, сколь и философа, широко знакомого с математикой; воззрения математиков на вопросы философского порядка, даже когда эти вопросы относятся к их науке, чаще всего представляют собой взгляды, полученные из вторых или из третьих рук, происходя от источников сомнительной ценности» [5, с. 309]. Кроме того, отметим путаницу, а порой и просто профессиональную некомпетентность, которые возникают при использовании математических понятий (точнее, соответствующих этим понятиям слов) при создании тех или иных художественных образов. Так, читателя, не слишком хорошо, но все-таки знакомого с математическим анализом, могут позабавить следующие слова: «Только допустив бесконечно малую единицу для наблюдения — дифференциал истории, то есть однородные влечения людей, и достигнув искусства интегрировать (брать суммы этих бесконечно малых), мы можем надеяться на постигновение законов истории» [6, с. 273].

Далее, раскроем трактат Н. Бурбаки «Элементы математики». В начале трактата мы читаем: «Со времени греков говорить “математика” значит говорить “доказательство”». Взяв эти слова за определение математики, мы вынуждены поговорить о доказательстве. Воспользуемся Плутархом: «Прочитавши доказательство, данное им (Архимедом), нам кажется, что мы сами дали бы это доказательство — так оно просто и легко» [7]. Таким образом, доказательство проводится на простом и понятном языке и обладает необходимым свойством всеобщности: это такое рассуждение одного человека, которое убеждает второго в истинности утверждения настолько, что он готов его пересказать третьему. Однако не будем увлекаться. Ясно, что убедительность и всеобщность являются необходимыми качествами любого доказательного рассуждения. Здесь же речь идет о математике, так что нужно говорить не о доказательстве вообще, а о математическом доказательстве. Уже греки хорошо осознавали различие между логическими и математическими доказательствами. В «Псаммите» Архимеда мы находим: «Государь! Сказанное мною покажется, конечно, невероятным многим из тех, кто не изучал математики, но будет достоверно, потому что доказано для тех, кто ею занимался» [7].

Не вдаваясь в подробности, изложим, следуя Д. Гильберту [8], основную идею современной теории математического доказательства. Прежде всего, имеется некоторый формализованный язык, с помощью которого мы все высказывания, составляющие вместе некоторую ветвь математики, превращаем в формулы. Эти формулы отличаются от обычных формул рассматриваемой области математики только тем, что в них встречаются знаки $\Rightarrow$ (следует), $\wedge$ (и), $\vee$ (или), $-$ (отрицание), а также кванторы $\forall$ (любой) и $\exists$ (существует). Некоторые из формул называются аксиомами. Доказательство наглядно предстает перед нами состоящим из выводов по схеме

$$\frac{\begin{array}{c}A\\ A \Rightarrow B\end{array}}{B}\ ,$$

в которой каждая посылка, то есть A и $A \Rightarrow B$, либо является аксиомой или получается из аксиомы путем подстановки, либо совпадает с полученной ранее из доказательства формулой или получается из такой формулы с помощью подстановки. Формула называется доказуемой, если она либо является аксиомой, либо является конечной формулой некоторого доказательства. Как будто бы все ясно! Но в действительности математик в своей работе никогда (точнее, почти никогда) не пользуется формализованными текстами и даже не использует частичных и неполных формализаций, доставляемых алгебраическими и другими подобными исчислениями. Его вполне удовлетворяет то состояние, когда опыт и математическое чутье подсказывают ему, что перевод на формализованный язык возможен и является всего лишь упражнением в терпении. Здесь следует заметить, что описанная схема математического доказательства в текущей деятельности математика предстает как бы конечной целью исследования. Поэтому не случайно, говоря о прогрессе чистой математики, Ж. Дьедонне [9, с. 9–21] вместе с решением проблем и пониманием математических феноменов рассматривает и необходимость вводить хорошие обозначения и удобные алгоритмы.

Наконец, нам хотелось бы завершить разговоры о математическом доказательстве примером, показывающим, как в математике возникает необходимость перехода к более строгому доказательству. В математическом анализе имеется следующая теорема Больцано—Коши: функция, непрерывная на промежутке и принимающая на концах этого промежутка значения разных знаков, обращается в нуль в некоторой внутренней точке промежутка. Доказательство: ясно, что любая непрерывная кривая, соединяющая точки A и B, расположенные по разные стороны от прямой Ox, должна пересекать эту прямую хотя бы в одной точке. Приведенному доказательству трудно возразить! Однако в курсе анализа это доказательство нельзя считать строгим. Дело в том, что непосредственное пространственное восприятие неточно, что существует, например, порог для восприятия с помощью глаза, как бы этот последний ни был вооружен. То же самое применимо не только к восприятию, но и к абстрактному представлению о пространстве, которое каждый носит с собою. Наше доказательство теоремы Больцано—Коши является строгим с точностью до пространственной интуиции непрерывных кривых. Рассмотрим теперь наше представление о непрерывной кривой. Разумеется, говоря о непрерывной кривой, мы одновременно представляем и траекторию движения какого-то тела, и длинный, сравнительно с толщиной, шнур и т. д. Но эти представления мы берем не во всем разнообразии их свойств и не с максимальной точностью, а лишь с точки зрения их одномерной протяженности и расположения в пространстве. Возникающее так понятие непрерывной кривой отражает свойства материальных предметов, законы материального мира. Его идеальный характер означает просто отвлечение от несущественных свойств материальных вещей. Но здесь необходимо проявить максимальную осторожность! Как бы ни был многообразен наш «опыт быстротекущей жизни», он конечен, поэтому на каждом историческом этапе существуют неизвестные человеку явления природы. В нашем случае можно сказать, что абстракция непрерывной кривой, обладая известной обобщенностью, может не отражать, например, свойства траектории броуновской частицы. Исторически так и произошло с понятием непрерывной кривой в математическом анализе. Хорошо известно то удивление, которое вызвал среди математиков пример непрерывной функции, недифференцируемой в каждой точке. Следовательно, на определенном (исторически сложившемся) уровне строгости математических доказательств приведенное выше доказательство теоремы Больцано—Коши является вполне удовлетворительным. Однако в дальнейшем сложившиеся представления о непрерывных кривых вступают в противоречие с новыми явлениями, и новый уровень строгости возникает в результате преодоления ограниченности непосредственного чувственного восприятия, первоначально приведшего к пространственной интуиции аналитических кривых. Таков диалектический характер развития математики от геометрического континуума в анализе бесконечно малых до арифметического континуума в современном математическом анализе. Нужно сказать, что рассмотренная на примере представлений о континууме особенность развития является характерной для математики вообще. Поступательное развитие математики, характеризующееся в целом логическим способом мышления, сменяется качественной перестройкой, новые интуитивные представления создают своеобразный каркас, в который не только включаются уже известные математические факты, но и вливаются новые результаты. Другими словами, новые представления являются необходимой предпосылкой для дальнейшего бурного развития математики.

Далее, несколько слов о чрезвычайно важном и плодотворном методе идеальных элементов в математике. Известно, что различные непараллельные прямые в одной плоскости пересекаются в одной и только одной точке. Ясно, что это не верно для параллельных прямых. Однако математика обладает удивительной особенностью, заключающейся в стремлении сделать свои утверждения всеобщими. Так возникает понятие бесконечно удаленной точки. Аналогично возникает понятие идеальной прямой — знаменитой бесконечно-удаленной прямой в проективной геометрии. Геометр сказал бы, что на декартовой плоскости можно, странствуя, все более удаляться и потеряться без надежды на возвращение, в то время как в проективной плоскости почти все — в поле зрения наблюдателя. Специалистам известно, что в результате теория конических сечений делается почти совсем легкой, значительно упрощается ньютоновская классификация вещественных кривых третьего порядка. Приведем другие примеры идеальных элементов: комплексные числа, идеальные числа Куммера, p-адические числа; в анализе — вещественные числа, интеграл Лебега, обобщенные функции.

Ясно, что говоря о том, что параллельные прямые пересекаются или, например, уравнение $x^2 + 1 = 0$ имеет решение, мы произносим бессмыслицу с позиций первоначальных ограниченных представлений, но «бессмыслицу эту не следует выбрасывать прочь, как негодную тряпку. Путем долгого и разнообразного опыта мы пришли к выводу, что нет ничего более ценного, чем получающаяся таким путем бессмыслица. Необходимо только дать себе отчет в том, что мы имеем дело именно с бессмыслицей и, установив это, придать ей смысл. Мы придаем бессмыслице смысл, вкладывая новое значение в слова или символы, делающее возможным ответ на вопрос, на который первоначально ответа не было» [10, с. 39].

Разумеется, в природе нет мнимых и гиперкомплексных чисел, нет p-адических чисел и аделей, нет δ-функции Дирака. Однако трудно найти математика, который бы сомневался в их реальном существовании. Более того, трудно найти человека, который усомнился бы в существовании шара, окружности, целого числа, хотя их тоже нет в реальном мире. В чем же дело?

По А. Д. Александрову «математика — наука о формах и отношениях, взятых в отвлечении от их содержания» [11, с. 329]. Эти формы, отвлеченные от содержания, выступают в математике как самостоятельные объекты, так что объектами математики являются числа, а не совокупности предметов, геометрические фигуры, а не реальные тела и т. д. Числа, точки, прямые, плоскости можно рассматривать как простейшие абстракции, имеющие определенную чувственную интерпретацию. Кроме того, как указывает А. Д. Александров, «математика абсолютизирует свои абстракции, ее понятия, возникнув и определившись, закрепляются и рассматриваются как данные». И далее: «. . . придавая своим понятиям самодовлеющие значения, математика уже тем самым делает их основанием для образования новых понятий, для новых ступеней абстракции».

Таким образом, с одной стороны, реальность идеальных элементов обусловлена их абсолютизацией. С другой стороны, необходимо подчеркнуть, что новые понятия в математике не возникают произвольно, представления математики о реальности идеальных элементов основаны, например, на том успехе при решении ранее неприступных проблем математики (и не только математики!), который оказался возможным при расширении объектов старого типа. Например, введение δ-функции Дирака позволило обосновать символическое исчисление Хевисайда, которое использует инженер при расчете электрических цепей (в реальности телевидения никто не сомневается). Кроме того, выше мы указывали, как при отвлечении от несущественных свойств объектов мы приходим к абстракции непрерывной кривой. Точно так же обобщенные функции есть абстракция непрерывных, когда мы отвлекаемся от многих функциональных свойств. Например, в математической физике функции очень часто появляются под знаков интеграла, поэтому нам нужны только те свойства функции, которые так или иначе связаны с интегрированием по частям. Другими словами, понятие обобщенной функции возникает в результате многоуровневой абстракции. Далее, как уже указывалось, идеальные элементы возникают при желании распространить те или иные утверждения даже на тот случай, когда это невозможно. Здесь мы снова приходим к противоречию: иррациональность $\sqrt{2}$ означает, что уравнение $2p^2 = q^2$ не имеет решений в области положительных целых чисел, мнимая единица i есть корень уравнения $x^2 + 1 = 0$, неразрешимого в множестве вещественных чисел, не существует интегрируемой по Лебегу функции со свойствами, которые приписал Дирак δ-функции, занимаясь квантовой механикой, и т. д. Возникающее противоречие устраняется при помощи идеальных высказываний. Не останавливаясь более подробно на том, как это делается, отметим, что с применением метода идеальных элементов связано одно условие — это доказательство непротиворечивости. Именно, расширение посредством приобщения идеальных элементов дозволено только в том случае, когда при этом в старой, более узкой области математики не возникает никаких противоречий, то есть если соотношения, которые выявляются для старых объектов при исключении идеальных, всегда остаются справедливыми в этой старой области математики.

Любопытно отметить, что еще Ф. Клейн в своих лекциях по истории математики указывал на тесную связь развития математики с методами ее преподавания. Так, говоря об известном курсе анализа О. Л. Коши [12], он писал: «Тем более удивительно, что они (идеи о современном арифметизированном анализе) возникли из преподавательской деятельности Коши в Политехнической школе. Это лишний раз доказывает, какие необычайно высокие с чисто математической стороны требования были положены школой в основу системы обучения, преследовавшей практические цели» [13, с. 120]. Можно сказать, что процесс абстракции в математике обусловлен не только ее внутренним развитием или приложениями, но и необходимостью преподнести эту математику более широкому кругу людей, занимающихся практической деятельностью.

Вся история развития математики от первых эмпирических попыток решения простейших задач до настоящего времени есть диалектический процесс. Выше мы на примерах показали, как возникают противоречия и как они преодолеваются. Именно на этом пути открываются возможности решения математических проблем. Логико-постулативные тенденции сменяются мощным взлетом интуитивных представлений, которые в свою очередь качественно меняют наши представления о строгости математических доказательств. И этот процесс непрерывен и бесконечен. Различные области математического знания унифицируются, а сфера приложений математических методов расширяется. Само представление мыслителей о сущности математики тоже развивается диалектическим путем. По Ф. Энгельсу чистая математика имеет своим предметом пространственные формы и количественные отношения действительного мира. Именно пространственные формы и количественные отношения являются простейшими характеристиками действительного мира, допускающими формализацию. Поэтому не случайно, что первыми хорошо разработанными областями математики были геометрия и арифметика. Геометрия Евклида и Арифметика Диофанта — это как бы первые плоды элементарных абстракций от непосредственного чувственного восприятия. К концу XIX века последовательное абстрагирование, логически строгая аксиоматическая дедукция и последующее еще более широкое обобщение превратили геометрию и арифметику в проективную, синтетическую, алгебраическую геометрии, геометрии Лобачевского и Римана, теорию многомерного пространства, теорию функций, аналитическую и алгебраическую теории чисел. XX век нам также дал ряд великолепнейших новых завоеваний.

Литература

1. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика. М.; Л., 1947.
2. *Эсхил.* Прикованный Прометей. М., 1970.
3. *Манин Ю. И.* Доказуемое и недоказуемое. М., 1979.
4. *Емельянов В. М.* Стандартная модель и ее расширения. М., 2007.
5. *Бурбаки Н.* Теория множеств. М., 1965.
6. *Толстой Л. Н.* Собр. соч. Т. 6. М., 1951.
7. *Архимед.* Исчисление песчинок. Классики естествознания. М.; Л., 1932.
8. *Гильберт Д.* Основания геометрии. М.; Л., 1948.
9. *Дьедонне Ж.* О прогрессе математики. Историко-математ. Исслед. Вып. 21. М., 1976.
10. *Клиффорд В.* Здравый смысл точных наук. М., 1910.
11. *Александров А. Д.* Математика. Философская энциклопедия. Т. 3. М., 1964.
12. *Коши О. Л.* Алгебраический анализ. Лейпциг, 1864.
13. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в 19-ом столетии. М.; Л., 1937.

Статья поступила в редакцию 30 ноября 2009 г.