Simulacro del Parcial 2 - 22/05/2023

Nombre: Legajo: Carrera:

1. Considere el espacio de funciones continuas en el intervalo $[0,1]$ a valores reales con el producto interno usual:

$$< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)dx, \qquad \text{para } f, g \in C([0,1]).$$

Considere además el sev W de los polinomios de grado a lo sumo 2, y su base $B = \{1, x, x^2\}$:

$$W = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in C([0,1]) : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} = span\{1, x, x^2\}.$$

(a) Halle una b.o.n. para W.
(b) Halle la proyección ortogonal p_W de la función $g(x) = \sin(x) \in C([0,1])$.
(c) Calcule la norma de dicha proyección ortogonal (deje expresado el cálculo).
(d) Halle el complemento ortogonal del subespacio $U = span\{1, \sqrt{3}(2x-1)\}$ de W.
(e) Calcule $p_U(g)$ y $p_{U^\perp}(g)$.
(f) Considere el producto interno restrigido al subespacio W. Halle la matriz del producto interno respecto de la b.o.n.

2. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcule el polinomio característico de A.
(b) Calcule los autovalores de A.
(c) Calcule los autoespacios asociados a cada autovalor de A.
(d) Descomponga, si es posible, $\mathbb{R}^3$ en suma directa de autoespacios.
(e) Justifique que A diagonalizable e indique una forma diagonal D para A.
(f) De una base de $\mathbb{R}^3$ de autovalores de A.
(g) Encuentre la matriz de cambio de base P tal que $D = PAP^{-1}$.
(h) Indique si $P = C_{B\to E}$ o si $P = C_{E\to B}$. Justifique.

3. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{C}^{2\times 2} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ dada por

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b+d \\ c+d & -d \end{pmatrix},$$

y considere la base canónica de $\mathbb{C}^{2\times 2}$ $E = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$.

(a) Calcule el polinomio minimal de $[T]_E$.
(b) Indique si T es diagonalizable. Justifique su respuesta.
(c) En caso de ser diagonalizable, de una matriz diagonal D semejante a $[T]_E$.