Práctica 3:
Funciones Recursivas Primitivas
Parte I- FUNCIONES

Cátedra: Lenguajes Formales y Computabilidad
Aulas Virtuales - Pandemia Covid19

Docentes en Práctica

- Alejandro Hernandez
- Natalia Colussi
- Valeria Perez Moguetta

¿Qué vamos a ver en esta parte?

- La idea de la práctica es ayudarlos a resolver y plantear los problemas de la práctica sobre Funciones Recursiva Primitivas (FRP) la cual incluye ejercitación sobre: funciones, relaciones y conjuntos recursivos primitivos.
- Dividiremos la práctica en tres partes:
  - PARTE I = FRP
  - PARTE II = RRP
  - PARTE II = CRP
- En cada parte abordaremos cómo trabajar con los ejercicios de dicha sección.
- Al principio puede resultar un poco complejo definir las funciones de esta forma, quizás por la notación particular que tienen las FRP, pero no debemos perder de vista el objetivo:

Demostrar qué tipo de funciones (poder de cálculo) podemos escribir usando las funciones básicas (cero, proyección y sucesor) y los operadores: composición y recursión.

Ejercicio 1:

1. Mostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $g_n(x) = n$ para todo $x \in \mathbb{N}$ es recursiva primitiva.

- Reescribimos la propiedad a demostar de la siguiente manera:

$$\left(\forall n : \mathbb{N} \bullet \underbrace{(\forall x : \mathbb{N}\ \ g_n(x) = n)}_{P(n)}\right)$$

Es una FRP

Siempre es importante identificar la propiedad que vamos a demostrar en pro de dar una estrategia de prueba

Veamos algunos valores de g_n para entender qué debemos demostrar y cómo lo haremos ...

Ejercicio 1 (continuación)

¿Cuándo es FRP ?

¿Quién sería g_n … ?

$g_1(x) = 1$ $\forall x : \mathbb{N}$ → CONSTANTE 1 Es FRP?

$g_2(x) = 2$ $\forall x : \mathbb{N}$ → CONSTANTE 2. Es FRP?

$\vdots$

$g_n(x) = n$ $\forall x : \mathbb{N}$ → CONSTANTE n. Es FRP?

$\vdots$

Para demostrar que una función es FRP tenemos que poder probar que es:

- una de las funciones básicas
- se puede obtener mediante la composición y/o recursión de las funciones básicas u otras FRP.

La inducción nos permite demostrar que se cumple para todo n en Nat

Al trabajar con $\mathbb{N}$ y variar cada uno de estas funciones sobre este dominio generando una nueva función vamos a probar esta propiedad usando inducción sobre $\mathbb{N}$.

Ejercicio 1 (continuación)

$P(n) \quad (\forall x : \mathbb{N} \cdot g_n(x) = n)$ es FRP.

Probamos por inducción sobre $\mathbb{N}$.

Caso base

CASO BASE $n=0$.

$P(0) : (\forall x : \mathbb{N} \cdot g_0(x) = 0)$ es FRP.

Tomamos $x \in \mathbb{N}$.

$g_0(x)$

$= \langle \text{def. de } g_i \rangle$

0

$= \langle \text{def. de función cero } c^{(1)} \rangle$

$c^1(x)$ $\quad \therefore g_0$ es una FRP.

Paso Inductivo

PASO INDUCTIVO. $n \Rightarrow n+1$

Supongo que se cumple $P(n)$, esto es,

$P(n) : (\forall x : \mathbb{N} \cdot g_n(x) = n)$ es FRP.

probaremos que

$P(n+1) : (\forall x : \mathbb{N} \cdot g_{n+1}(x) = n+1)$ es FRP.

sigue...

Ejercicio 1 (continuación)

Sea $x \in \mathbb{N}$

$g_{n+1}(x)$

$= \langle$ def g_i $\rangle$

$\underbrace{n+1}$

$= \langle$ def de $g_n(x)$ $\rangle$

$\underbrace{g_n(x)+1}$

$= \langle$ def de suc 3.1.4 $\rangle$

$s(g_n(x))$

$= \langle$ def Φ operador $\rangle$

$\Phi(s, g_n)(x)$

$\therefore$ Luego por la def. 3.1.8 apartado b) y la (HI) g_n es una FRP resulta que g_{n+1} es FRP.

La definición de sucesor del apunte de cátedra. La referencia hace alusión a la numeración en dicho apunte.

Por CASO BASE y PASO INDUCTIVO puedo concluir que

$(\forall n : \mathbb{N} \cdot P(n))$ se cumple!

Ejercicio 2:

2. Realizar los siguientes cálculos:

   (a) $dos^{(2)}(17,3) = \Phi\left(s^{(1)}, \Phi\left(s^{(1)}, c^{(2)}\right)\right)(17,3)$

   (b) $Mas2^{(1)}(5) = \Phi\left(s^{(1)}, s^{(1)}\right)(5)$

   (c) $\Sigma^{(2)}(1,3) = R\left(p_1^{(1)}, \Phi\left(s^{(1)}, p_3^{(3)}\right)\right)(1,3)$

   (d) $Pd^{(1)}(412) = R\left(c^{(0)}, p_1^{(2)}\right)(412)$

- En este ejercicio es importante que tengamos presente las definiciones de los operadores de la composición **Φ** y recursión **R** para hacer referencia a ellos.

- Para cada uno de estos casos ya conocemos de antemano cual es el resultado de la operación, ya que son cálculos matemáticos simples, pero lo que nos interesa realmente es que ustedes entiendan cómo se produce el cálculo de forma tal obtener el resultado esperado.

Ejercicio 2 item (a)

(a) $dos^{(2)}(17,3) = \Phi\left(s^{(1)}, \Phi\left(s^{(1)}, c^{(2)}\right)\right)(17,3)$

Tenemos que realizar un cálculo paso a paso hasta alcanzar el valor final, el resultado del cómputo.

Describimos a la función constante $dos^{(2)}$ mediante la composición de FRP

$$dos^{(2)} = \Phi\left(s^{(1)}, \Phi\left(s^{(1)}, c^{(2)}\right)\right)$$

En esta oportunidad, para esclarecer los definiciones de las funciones que debemos aplicar las rescribimos según los grados (aridad) de cada una de ellas para esta función en particular.

Recordamos primero las definiciones

- $s^{(1)}(x) = x+1$ SUCESOR
- $\Phi(f,g)(x) = f(g(x))$ COMPOSICIÓN
- $c^{(2)}(x,y) = 0$ CERO

Ejercicio 2 (a) continuación.

Recuerden que:

- Observamos el proceso del cálculo.

  ¿Cómo se produce el cálculo con las FRP?

- Las justificaciones y referencias están tomadas del apunte de teoría

El apartado (b) es similar a este.

Realizamos ahora el cálculo

$\text{dos}^{(2)}(17,3)$

$= \langle \text{def dos como FRP} \rangle$

$\underline{\Phi}(s^{(1)}, \Phi(s^{(1)}, c^{(2)}))(17,3)$

$= \langle \text{def composición } \Phi \rangle$

$s^{(1)}(\underline{\Phi}(s^{(1)}, c^{(2)})(17,3))$

$= \langle \text{def composición } \Phi \rangle$

$s^{(1)}(s^{(1)}(c^{(2)}(17,3)))$

$= \langle \text{def } c^{(2)} \text{ 3.1.2 - función cero} \rangle$

$s^{(1)}(s^{(1)}(0))$

$= \langle \text{def } s^{(1)} \text{ 3.1.4 - función sucesor} \rangle$

$2.$

Ejercicio 2 item (d)

(d) $Pd^{(1)}(412) = R\left(c^{(0)}, p_1^{(2)}\right)(412)$

(d) $Pd^{(1)}(412) = R(c^{(0)}, p_1^{(2)})(412)$

Recordamos las definiciones para tenerlas presentes y usarlas en el proceso de cálculo pedido en el ejercicio.

Recordamos primero las definiciones.

- $c^{(0)} = 0$ CERO
- $p_1^{(2)}(x,y) = x$ PROYECCIÓN PRIMER COMPONENTE

Prestar atención a la aridad de las funciones en la recursión, y a cada caso según sea el valor de y.

- $R(g^{(0)}, h^{(2)})(y) = \begin{cases} g^{(0)}() & \text{si } y=0 \quad \text{(CASO BASE)} \\ h^{(2)}(y-1, R(g,h)(y-1)) & \text{si } y>0 \quad \text{(CASO RECURSIVO)} \end{cases}$

Ejercicio 2 item (d)

Observar que evaluámos la proyección para calcular el valor, y no nuevamente la recursión. La proyección es la primera operación que podemos resolver sobre toda la expresión.

$$Pd^{(1)}(412)$$

$$= \langle \text{def } Pd^{(1)} \rangle$$

$$R(\overbrace{C^{(0)}}^{g}, \overbrace{P_1^{(2)}}^{h})(412)$$

$$= \langle \text{def } R,\ 412 > 0 \text{ CASO RECURSIVO} \rangle$$

$$\underbrace{P_1^{(2)}}(411, R(C^{(0)}, P_1^{(2)})(411))$$

$$= \langle \text{def proyección } 3.1.3 \rangle$$

$$411.$$

Ejercicio 3

3. Mostrar que las siguientes funciones son FRP:

   (a) $\Pi(y, x) = y \times x$

   (b) $Fac(x) = x!$

   (c) $Exp(y, x) = x^y$

   (d) La función *diferencia*, definida por:

   $$\tilde{d}(y, x) = \begin{cases} 0 & x < y \\ x - y & x \geq y \end{cases}$$

   Notamos generalmente $\tilde{d}(y, x)$ como $x \dot{-} y$.

   (e) La función *distinguidora del cero*, definida por:

   $$D_0(y) = \begin{cases} 0 & y \neq 0 \\ 1 & y = 0 \end{cases}$$

   (f) $k(x, y) = |x - y|$

¿cómo demuestro qué es FRP?

Para demostrar que una función es FRP tenemos que poder probar que es:

- una de las funciones básicas
- se puede obtener mediante la composición y/o recursión de las funciones básicas u otras FRPs.

Ejercicio 3 (a)

(a) ¿ $\Pi(y,x) = y \times x \in$ FRP?

Veamos que Π se puede escribir como FRP.
Para ello tendré que pensar a Π en términos
del operador $\boxed{R(g,h)}$ y FRPs.

Recordamos.

$$f(y,x^k) = \begin{cases} g(x^k) & \text{si } y=0 \\ h(y-1,x^k,f(y-1,X^k)) & \text{si } y>0 \end{cases}$$

g tienen aridad k

h tienen aridad k+2

f tiene aridad k+1

Ejercicio 3 (a)

A partir de este cálculo obtengo a g

Para $\Pi^{(2)}$, $k=1$. esto hace que

$g^{(1)}$ y $h^{(3)}$

Vamos a calcular a $g^{(1)}$ y $h^{(3)}$

- CASO $y=0$

$$\Pi^{(2)}(0,x)$$
$$= \langle \text{def } \Pi \rangle$$
$$0 \times x$$
$$= \langle \text{def } \times \rangle$$
$$0$$
$$= \langle \text{def función } c^{(1)} \rangle$$
$$c^{(1)}(x)$$

$$\boxed{g^{(1)} = c^{(1)}}$$

$g^{(1)}$ es FRP ✓

Ejercicio 3 (a)

- $\underline{\text{CASO } y > 0}$

$\Pi^{(2)}(y, x)$

$= \langle\, y = y + 1 - 1 \,;\, \text{def } \Pi \,\rangle$

$(y - 1 + 1) \times x$

$= \langle\, \text{prop. distrib} \,\rangle$

$(y - 1) \times x + x$

$= \langle\, \text{def } \Pi \,\rangle$

$\Pi^{(2)}(y - 1, x) + x$

Trabajo la expresión para exponer la recursión

Sigue el cálculo en la próxima slide ...

Ejercicio 3 (a)

Buscamos de reescribir en términos de otras FRPs

$$\Pi^{(2)}(y-1, x) + x$$

$$= \langle dy\ \Sigma \rangle$$

$$\Sigma^{(2)}(\Pi^{(2)}(y-1, x), x)$$

$$= \langle dy\ P_3^3, P_1^3 \rangle$$

Reescribo la expresión para llevarla a la forma de h y a la aridad de esta función que como dijimos en el ppio es de 3

$$\Sigma^{(2)}(P_3^3(y-1, x, \Pi^{(2)}(y-1, x)),$$
$$P_2^3(y-1, x, \Pi^{(2)}(y-1, x)))$$

$$= \langle dy\ \Phi \rangle$$

$$\Phi(\Sigma^{(2)}, P_3^3, P_2^3)(y-1, x, \Pi^{(2)}(y-1, x)).$$

Lo llevamos a la forma de h en la recursión R. Siempre tener presente esto.

Ejercicio 3 (a)

Luego $h^{(3)} = \Phi(\Sigma^{(2)}, p_3^{(3)}, p_2^{(3)})$

Por lo tanto siendo $\Sigma^{(2)}$ una FRP y $p_3^{(3)}, p_2^{(3)}$ FRP (por ser funciones básicas) luego la composición Φ de FRP es FRP y con ello <u>h es FRP</u>.

Luego $\Pi^{(2)} = R(c^{(1)}, \Phi(\Sigma^{(2)}, p_3^{(3)}, p_2^{(3)}))$ es una FRP por ser la recursión de FRP.

Resolución de Ejercicios

- El resto de lo ejercicios de esta sección del ítem (b) al item (d) pueden resolverlos de igual manera, no revisten de mayor dificultad. Adelante!!!
- Resolveremos un ejercicio más de esta sección, la función **distinguidora del cero**, que resulta útil para los restantes ejercicios (f) - (i)

(e) La función distinguidora del cero.

$$D_0(y) \doteq \begin{cases} 0 & y \neq 0. \\ 1 & y = 0. \end{cases} \qquad ¿D_0 \text{ es FRP?}$$

Ejercicio 3(d)

¿cómo demuestro qué es FRP?

Siempre recordar esto!!!

Para demostrar que una función es FRP tenemos que poder probar que es:

- una de las funciones básicas
- se puede obtener mediante la composición y/o recursión de las funciones básicas u otras FRPs.

Tengo que demostrar que se puede escribir a D_0 en términos de $R(g,h)$ donde:

$Do^{(1)}$ por lo tanto $g^{(0)}$ y $h^{(2)}$

aridad

$k=0$

$k+1$ $k+2$

Primero determinar la aridad de las funciones

<u>Segundo</u>: definimos la estrategia.

En este caso, demostrar que D_0 es una FRP mediante el operador recursión R.

Recordar la defición de una <u>función f</u> recursivamente usando el operador R.

$$f^{(k+1)}(y, x^k) = \begin{cases} g^{(k)}(x^k) & y = 0 \\ h^{(k+2)}(y-1, x^k, f(y-1, x^k)) & \underline{y > 0} \end{cases}$$

Entonces necesito hallar $g^{(k)}$ y $h^{(k+2)}$ para ello voy a plantear

1) CASO $y=0$ → Para hallar g.

2) CASO $y>0$ → Paro hallar h.

Ejercicio 3(d)

CASO $y=0$ (cálculo $g^{(0)}$)

$D_0^{(1)}(0)$

$= \langle \text{def } D_0^{(1)} \rangle$

1

$= \langle \text{neutro} + \rangle$

$0+1$

$= \langle \text{def } C^{(0)} \text{ y sucesor} \rangle$

$s^{(1)}(c^{(0)}())$

$= \langle \text{def } \Phi \text{ composición} \rangle$

$\Phi(s^{(1)}, c^{(0)})()$.

$$\boxed{\therefore\ g^{(0)} = \Phi(s^{(1)}, c^{(0)})()}$$

$g^{(0)}$ es FRP por ser composición de FRP.

Ejercicio 3(d)

CASO $y > 0$ (calculo $h^{(2)}$)

$$D_0^{(1)}(y)$$

$= \langle$ def $D_0^{(1)}$ con $y > 0 \rangle$

$$0$$

$= \langle$ def $C^{(2)} \rangle$

$$C^{(2)}(y-1, D_0^{(1)}(y-1))$$

$$\boxed{\therefore\ h^{(2)} = C^{(2)}(y-1, D_0^{(1)}(y-1))}$$

$h^{(2)}$ es FRP por ser función básica.

Ejercicio 3(d)

Entonces:

$$\boxed{D_0^{(1)}(y) = R\left(\Phi\left(S^{(1)}, C^{(0)}\right), C^{(2)}\right)(y)}$$

Luego $D_0^{(1)}$ es una FRP.

Seguir Trabajando...

- Continuar trabajando sobre la práctica y realizar consultas sobre los ejercicios que no salen, o aquellos dónde nos trabamos, o también corroborar si lo que se ha hecho esta bien.
- Los escuchamos por los medios de comunicación:
  - Chat de telegram
  - Foros por práctica
  - Aquellos que desean consultar más en privacidad, pueden enviarnos un mail a nuestras direcciones:

- Natalia Colussi (natalia.colussi@gmail.com)
- Alejandro Hernandez (aleh@fceia.unr.edu.ar)
- Valeria Perez Moguetta (valeperezmog@gmail.com