

## PRÁCTICA 2: *Conjuntos Inductivos*

Pamela Viale

Natalia Colussi

Alejandro Hernández

Valeria Perez Mogetta

1. Defina inductivamente los siguientes conjuntos:
  - (a) El conjunto de los números naturales múltiplos de 3.
  - (b) El conjunto de los números enteros múltiplos de 3.
2. Sea  $\Sigma = \{a, b, c\}$ . Defina inductivamente los siguientes conjuntos y enuncie el principio de inducción primitiva para cada uno de ellos:
  - (a)  $\Sigma^*$
  - (b)  $B = \{a^n bc^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
3. Defina inductivamente los siguientes conjuntos:
  - (a)  $A = \{a\}^*$
  - (b)  $B = \{\alpha \in \{a, b, c\}^* \mid \alpha \text{ es un palíndromo}\}$
  - (c)  $C = \{a, b, ab, ba\}$
4. Considere el conjunto de las matrices
 
$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{N}_0 \text{ donde } a, b, c \text{ tienen la misma paridad} \right\}$$
  - (a) Defina inductivamente al conjunto  $M$ .
  - (b) Enuncie el principio de inducción primitiva para  $M$ .
5. Enuncie el principio de inducción primitiva para el conjunto  $\mathbb{P}$ , definido inductivamente como el menor conjunto tal que:
  - $0 \in \mathbb{P}$
  - si  $n \in \mathbb{P}$  entonces  $(n + 2) \in \mathbb{P}$

Utilice este principio para probar que para todo  $n \in \mathbb{P}$  existe  $m \in \mathbb{N}_0$  tal que  $n = m + m$ .

6. Sea  $\Sigma = \{a, b, c\}$ . Definimos  $\Delta$  inductivamente como el menor conjunto tal que:

- $a \in \Delta$
- si  $\alpha \in \Delta$  entonces  $b\alpha b \in \Delta$

- (a) Enuncie el principio de inducción primitiva para  $\Delta$ .
- (b) Demuestre que cualquier cadena de  $\Delta$  tiene un número par de símbolos  $b$ .

7. Sea  $\Sigma = \{a, b, c\}$ . Definimos  $\Gamma$  inductivamente como el menor conjunto tal que:

- $\lambda \in \Gamma$
- si  $\alpha \in \Gamma$  entonces  $b\alpha \in \Gamma$
- si  $\alpha \in \Gamma$  entonces  $a\alpha \in \Gamma$

- (a) Enuncie el principio de inducción primitiva para  $\Gamma$ .
- (b) Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

- $b \in \Gamma$
- $a \in \Gamma$
- $babacbac \in \Gamma$
- $aba \in \Gamma$

(c) Considere ahora el conjunto  $\Delta$  definido inductivamente como el menor conjunto tal que:

- $\lambda \in \Delta$
- si  $\alpha \in \Delta$  entonces  $\alpha b \in \Delta$
- si  $\alpha \in \Delta$  entonces  $\alpha a \in \Delta$

Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

- si  $\alpha \in \Delta$  entonces  $b\alpha \in \Delta$
- si  $\alpha \in \Delta$  entonces  $a\alpha \in \Delta$
- $\Gamma \subseteq \Delta$
- $\Delta \subseteq \Gamma$
- $\Delta = \Gamma$

8. Definimos inductivamente la relación  $S \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$  como el menor conjunto tal que:

- si  $n \in \mathbb{N}_0$  entonces  $(n, n) \in S$
- si  $(n, m) \in S$  entonces  $(n, m + 1) \in S$

(a) Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

- $(0, 0) \in S$
- $0 \in S$
- $(2, 3) \in S$
- $(3, 4) \in S$

(b) Enuncie el principio de inducción primitiva para  $S$ . Demuestre, utilizando este principio, que para todo par  $(n, m) \in S$  se tiene  $n \leq m$ .

(c) Definimos inductivamente  $Q \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$  como el menor conjunto tal que:

- si  $n \in \mathbb{N}_0$  entonces  $(0, n) \in Q$
- si  $(n, m) \in Q$  entonces  $(n + 1, m + 1) \in Q$

Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

- $S \subseteq Q$
- $Q \subseteq S$
- $Q = S$

9. Mostraremos, por inducción en la cantidad de caballos, que todos los caballos son del mismo color.

- Caso base,  $n = 1$ : para un conjunto de un único caballo  $\{c_1\}$  la proposición es trivial.
- Caso inductivo,  $n = k$ : Supongamos que, para cualquier conjunto de  $k$  caballos, todos resultan ser del mismo color. Sea  $C = \{c_1, \dots, c_k, c_{k+1}\}$  un conjunto de  $k + 1$  caballos. Por hipótesis inductiva, los caballos en  $C_1 = \{c_1, \dots, c_k\}$  son todos del mismo color. Por la misma razón, los de  $C_2 = \{c_2, \dots, c_k, c_{k+1}\}$  también resultan del mismo color. Luego todos los caballos de  $C$  son del mismo color.

Explique cuál es el error en el razonamiento dado.