

# Cardinalidad

Pablo Verdes

LCC

5 de marzo de 2020

# ¿Por qué estudiamos cardinalidad?

- Recordemos nuestro objetivo: **modelar el proceso de cálculo**.
- ¿Cuál es el tipo de cálculo más elemental? ¿Sumar? No, es contar.

## Contar: finito vs. infinito

- Supongamos que se nos pide ordenar conjuntos según su tamaño.
- Si los conjuntos son finitos, es fácil: contamos sus elementos y ordenamos los conjuntos de acuerdo a los números obtenidos.
- ¿Pero qué hacemos si algunos conjuntos son infinitos? ¿Qué sentido tiene 'más grande' o 'más pequeño' si no les podemos asignar un número a su tamaño?
- Para resolver este problema se introduce el concepto de **cardinalidad**, que generaliza la idea de 'tamaño' al caso de conjuntos infinitos.
- Entenderemos mejor el proceso de contar conjuntos finitos, y también veremos que existen diferentes 'tipos' de conjuntos infinitos.

# Conjuntos contables

- Consideremos un conjunto finito, por ej. las letras del alfabeto:

$$S = \{a, b, c, \dots, x, y, z\}$$

- ¿Qué significa **contar** los elementos de este conjunto?
- En esencia, **contar es numerar**: asignar a cada elemento del conjunto un único número natural, comenzando en 1 y de manera ascendente:

$a$	$b$	$c$	$\dots$	$x$	$y$	$z$
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
1	2	3	$\dots$	26	27	28

- Obs. que también se puede pensar como la creación de una **biyección** entre el conjunto  $S$  y el subconjunto de los naturales  $\{1, 2, 3, \dots, 28\}$ .

# (Repaso) Funciones inyectivas

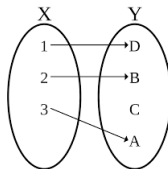
- **Definición:**  $f : X \rightarrow Y$  es **inyectiva** sii

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

o, equivalentemente,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- **Gráficamente:**



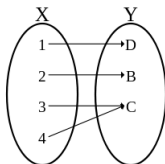
- **Prop.:** Sean  $X, Y$  conjuntos finitos;  $n_X, n_Y$  su cantidad de elementos. Si existe  $f : X \rightarrow Y$  inyectiva, entonces  $n_X \leq n_Y$ .

# (Repaso) Funciones sobreyectivas

- **Definición:**  $f : X \rightarrow Y$  es **sobreyectiva** sii

$$\forall y \in Y \ \exists x \in X \mid f(x) = y$$

- **Gráficamente:**



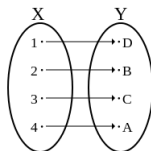
- **Prop.:** Sean  $X, Y$  conjuntos finitos;  $n_X, n_Y$  su cantidad de elementos. Si existe  $f : X \rightarrow Y$  sobreyectiva, entonces  $n_X \geq n_Y$ .

# (Repaso) Funciones biyectivas

- Definición:

$f : X \rightarrow Y$  es **biyectiva**

- Gráficamente:



- Prop.:** Sean  $X, Y$  conjuntos finitos;  $n_X, n_Y$  su cantidad de elementos. Si existe  $f : X \rightarrow Y$  biyectiva, entonces  $n_X = n_Y$ .
- Por analogía con el caso de conjuntos finitos, se usan los conceptos de funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas para generalizar la idea de comparación de tamaños al caso de conjuntos infinitos.

# Definiciones

- Dos conjuntos  $A$  y  $B$  tienen la **misma cardinalidad** (son **equipotentes**) si existe una biyección de  $A$  en  $B$ .  
Notación:  $\#A = \#B$ ,  $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ ,  $A \sim B$
- La **cardinalidad** de un conjunto  $A$  es **anterior** a la de un conjunto  $B$  si existe una función inyectiva  $f$  de  $A$  en  $B$ .  
Notación:  $\#A \preceq \#B$
- Si además ninguna de las inyecciones  $f : A \rightarrow B$  es sobreyectiva, entonces  $\#A \prec \#B$  (estrictamente anterior).
- Un conjunto es **finito** cuando es: 1) vacío, o bien 2) equipotente a  $\{1, 2, \dots, n\}$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ . En caso contrario, se dice **infinito**.
- Un conjunto  $A$  es **contable** o **numerable** si existe  $f : A \rightarrow \mathbb{N}$  inyectiva. Si existe  $f : A \rightarrow \mathbb{N}$  biyectiva se dice que  $A$  es **infinito numerable**. En caso contrario, se dice que  $A$  es **no numerable**.
- Cardinalidad de los números naturales:  $\#\mathbb{N} = \aleph_0$  (aleph cero).

# Unión numerable de conjuntos numerables

- Un conjunto  $F$  se dice una **familia de conjuntos** si sus elementos son, a su vez, conjuntos.
- $F$  es una familia **indexada de conjunto índice**  $I$  (no vacío) si existe una función con dominio  $I$  y recorrido  $F$ .
- Llamando  $S_\alpha$  con  $\alpha \in I$  a los elementos de la familia  $F$ , podremos entonces escribir  $F = \{S_\alpha \mid \alpha \in I\}$ .
- Consideremos ahora el caso particular en que los elementos de  $F$ , que hemos rebautizado  $S_\alpha$ , son conjuntos numerables (finitos o infinitos).
- Supongamos además que el conjunto índice  $I$  es numerable (finito o infinito).
- En dicho caso, la unión de los elementos de la familia,  $\bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha$ , será también numerable.



# Teorema 1

La unión numerable de conjuntos numerables es numerable.

## Demostración:

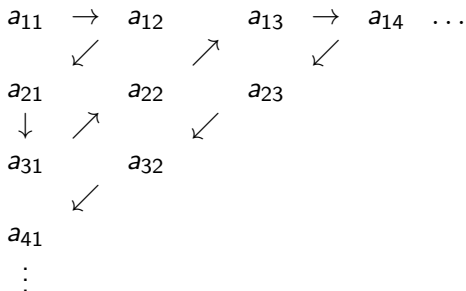
- Nos pondremos en el peor caso posible: supondremos que tanto los conjuntos  $S_\alpha$  como el conjunto índice  $I$  son infinitos.
- Dado que el conjunto índice  $I$  es infinito numerable, sin pérdida de generalidad podemos considerar de aquí en más que  $I = \mathbb{N}$ .
- Podemos entonces escribir  $F = \{S_\alpha \mid \alpha \in I\} = \{S_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ .
- Debemos mostrar que la unión  $S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$  es equipotente a  $\mathbb{N}$ .
- Dado que  $S_i$  es infinito numerable, podemos escribir

$$S_i = \{a_{ik} \mid k \in \mathbb{N}\} = \{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}, \dots\}$$

- Observemos que podemos organizar a los elementos de la unión de acuerdo a la siguiente tabla:

$$\begin{array}{ccccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
 \end{array}$$

- Podemos entonces contarlos de la siguiente manera:



- Por lo tanto,  $S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$  es equipotente a  $\mathbb{N}$ .



# Corolarios

- **Corolario 1.1:**  $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$

**D/** Escribimos a  $\mathbb{Z}$  como u.n.c.n.:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1\} \cup \{0\} \cup \{1, 2, 3, \dots\}$$

- **Corolario 1.2:**  $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$

**D/** Escribimos a  $\mathbb{Q}$  como u.n.c.n.:

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \quad A_k = \{\dots, -\frac{2}{k}, -\frac{1}{k}, \frac{0}{k}, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots\}$$

- **Corolario 1.3:**  $\mathbb{N}^d \sim \mathbb{N}$

**D/** Por inducción en  $d$ .

Caso  $d = 1$ : vale trivialmente.

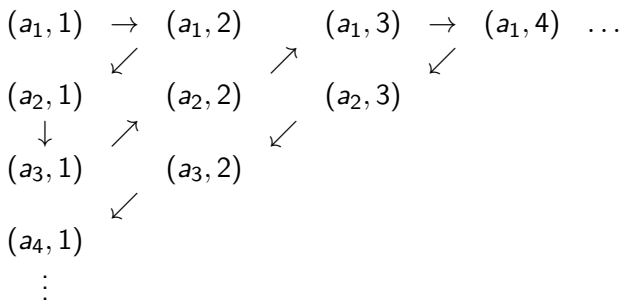
Ahora probemos que si  $\mathbb{N}^d$  es numerable,  $\mathbb{N}^{d+1}$  también.

## Corolarios (cont)

Para mostrar que  $\mathbb{N}^{d+1}$  es numerable, escribimos  $\mathbb{N}^{d+1} = \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}$ .

Como  $\mathbb{N}^d$  es numerable, podemos denotar a sus elementos  $a_1, a_2, a_3, \dots$

Disponemos  $\mathbb{N}^{d+1}$  de acuerdo a la siguiente tabla y usamos el mismo argumento que en el Teorema 1:



# Conjuntos no numerables

- Por lo visto hasta aquí, pareciera que todos los conjuntos son numerables.
- Esto no es cierto, como veremos en el siguiente:

## Teorema 2

El conjunto  $\mathbb{R}$  de los números reales es no numerable.

### Demostración:

- Alcanza con probar que el intervalo  $(0, 1) \subset \mathbb{R}$  es no numerable.  
(¿Por qué?)
- Representamos a sus elementos por su expansión decimal infinita, por ejemplo  $0.229384112598\dots$

(Para evitar ambigüedades, no usaremos expansiones con un número infinito de nueves.)

- Por el absurdo, supongamos que  $(0, 1) \subset \mathbb{R}$  es numerable.
- Habrá entonces en  $(0, 1)$  un primer elemento, segundo, tercero, etc.

- Podemos entonces listarlos del siguiente modo:

$$\begin{array}{l}
 0.\underline{a_{11}}a_{12}a_{13}a_{14}\dots \\
 0.a_{21}\underline{a_{22}}a_{23}a_{24}\dots \\
 0.a_{31}a_{32}\underline{a_{33}}a_{34}\dots \\
 0.a_{41}a_{42}a_{43}\underline{a_{44}}\dots \\
 \vdots
 \end{array}$$

- Consideremos ahora el número  $b = 0.b_1b_2b_3b_4\dots$  donde cada  $b_k$  puede ser cualquier dígito **excepto**  $a_{kk}$ , es decir, los subrayados en la diagonal.
- Es claro que  $b \in (0, 1)$  pero no figura en el listado, ya que difiere de cada número de la lista en por lo menos un dígito.
- Esto constituye una contradicción, luego el intervalo  $(0, 1) \subset \mathbb{R}$  es no numerable.  $\square$

# Conjuntos no numerables

- El intervalo  $(0, 1)$ , y por lo tanto  $\mathbb{R}$ , es no numerable.
- De hecho, tienen la misma cardinalidad (queda como ejercicio).  
Notación:  $\#\mathbb{R} = c$
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ ,  $\mathbb{Q}$  numerable,  $\mathbb{R}$  no numerable  $\Rightarrow \mathbb{I}$  no numerable
- Es claro que  $\aleph_0 < c$ .
- ¿Existen conjuntos con una cardinalidad posterior a  $c$ ?
- Podríamos intentar con productos cartesianos de  $\mathbb{R}$ ;  
sin embargo, se puede demostrar que  $\forall d \in \mathbb{N} \quad \#(\mathbb{R}^d) = c$ .
- La respuesta a la pregunta anterior es **sí**: existen conjuntos con una cardinalidad posterior a  $c$ .
- Veremos ahora un método que, dado un conjunto  $S$  (finito o infinito), nos permite construir otro con una cardinalidad estrictamente posterior.



# El conjunto de partes de un conjunto

- **Definición:** Dado un conjunto  $S$ , el **conjunto de partes** de  $S$ , denotado  $\mathcal{P}(S)$ , es el conjunto de todos los subconjuntos de  $S$ .

- Ejemplo:

$$S = \{a, b, c\}$$

$$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

- En el caso finito, es claro que  $\mathcal{P}(S)$  tiene estrictamente más elementos que  $S$ .

(De hecho, si  $S$  tiene  $n$  elementos,  $\mathcal{P}(S)$  tendrá  $2^n$  elementos —ejercicio).

- Ahora extenderemos dicho resultado al caso de conjuntos infinitos. Más precisamente, demostraremos que:

$$\text{card}(S) \prec \text{card}(\mathcal{P}(S))$$

## Teorema 3

Para todo conjunto  $S$ ,  $\text{card}(S) \prec \text{card}(\mathcal{P}(S))$ .

### Demostración:

- $f(x) = \{x\}$  es una inyección de  $S$  en  $\mathcal{P}(S)$ . Por lo tanto
$$\text{card}(S) \preceq \text{card}(\mathcal{P}(S))$$
- Ahora veamos que no existe función de  $S$  en  $\mathcal{P}(S)$  sobreyectiva.
- Por el absurdo: sea  $f : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$  sobreyectiva.
- Todo elemento del codominio tendrá pre-imagen:

$$\forall A \in \mathcal{P}(S) \quad \exists a \in S \mid f(a) = A$$

$$\forall A \subset S \quad \exists a \in S \mid f(a) = A$$

- Hay dos posibilidades:      (1)  $a \in A$       (2)  $a \notin A$
- Definamos un nuevo subconjunto de  $S$ :

$$B = \{a \in S \mid a \notin f(a)\}$$

*(elementos de  $S$  que no pertenecen a su imagen)*

- $B \in \mathcal{P}(S)$ ,  $f$  sobreyectiva  $\Rightarrow \exists b \in S \mid f(b) = B$
- Pregunta: ¿ $b \in B$ ?
- Supongamos que  $b \in B$ . Entonces, por definición de  $B$ ,  $b$  no pertenece a su imagen:  $b \notin f(b) = B$ . Absurdo.
- Supongamos que  $b \notin B$ . Entonces, por definición de  $B$ ,  $b$  pertenece a su imagen:  $b \in f(b) = B$ . Absurdo.
- Por lo tanto  $\nexists f : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$  sobreyectiva.  $\square$

- **Consecuencia:** dado un conjunto  $S$ , podemos construir una sucesión de conjuntos de cardinalidad 'creciente':

$$S, \mathcal{P}(S), \mathcal{P}(\mathcal{P}(S)), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))), \dots$$

En particular:

$$\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))), \dots$$

- ¿Será  $\mathbb{N}$  el conjunto infinito más 'pequeño'? Respuesta: sí.

## Teorema 4: (El conjunto infinito más pequeño es $\mathbb{N}$ )

Para todo conjunto infinito  $A$ ,  $\aleph_0 \preceq \text{card}(A)$ .

### Demostración:

- Sea  $A$  un conjunto infinito.
- $A$  infinito  $\Rightarrow A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_1 \in A$
- $A$  infinito  $\Rightarrow A \neq \{x_1\} \Rightarrow \exists x_2 \in A \mid x_2 \neq x_1$
- $A$  infinito  $\Rightarrow A \neq \{x_1, x_2\} \Rightarrow \exists x_3 \in A \mid x_3 \neq x_1, x_2$
- $A$  infinito  $\Rightarrow A \neq \{x_1, x_2, x_3\} \Rightarrow \exists x_4 \in A \mid x_4 \neq x_1, x_2, x_3$
- ...
- Así, se puede construir una sucesión  $(x_n)_{n \geq 1}$  de elementos de  $A$  tales que  $x_i \neq x_j$  si  $i \neq j$ .
- Definiendo  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$  tal que  $f(i) = x_i$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ , tenemos que  $f$  es inyectiva. Luego  $\aleph_0 \preceq \text{card}(A)$ .  $\square$

- ¿Qué hace un programa? Desde el punto de vista de la máquina, sus entradas y salidas son cadenas de 0s y 1s.
- Podemos decir entonces que un programa es una  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .
- Recíprocamente: dada una  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  arbitraria, ¿podemos escribir un programa que la calcule?
- La teoría de cardinalidad permite responder esta pregunta (ver último ejercicio de la práctica):

$$\text{card}(\{p \mid p \text{ programa}\}) \prec \text{card}(\{f \mid f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\})$$

- Por lo tanto, existen infinitos posibles cálculos para los cuales no se puede escribir un programa.
- ¿Cuáles son? ¿Se pueden resolver cambiando el lenguaje?
- Estas son algunas de las preguntas que consideraremos en la materia.