Primer examen parcial

1. Considere la función h definida por $h(x) = \left|\dfrac{2x+5}{x+1}\right|$.

(a) Determine el dominio de la función h.

Sean las siguientes funciones auxiliares,

$$f(x) = 2x+5, \quad g(x) = x+1, \quad v(x) = |x|.$$

f y g tienen dominio $\mathbb{R}$, por ser funciones lineales afines. v también tiene dominio $\mathbb{R}$ por definición, ya que es la función valor absoluto. Luego, por dominio de función cociente,

$$\mathrm{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \{x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \ / \ g(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x+1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Ahora pensando en la composición $v \circ \frac{f}{g}$,

$$\mathrm{Dom}\left(v \circ \frac{f}{g}\right) = \left\{x \in \mathrm{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) \ / \ \frac{f}{g}(x) \in \mathrm{Dom}\,(v)\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \ / \ \frac{f}{g}(x) \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}\setminus\{-1\}.$$

Por lo tanto, $\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

(b) A partir de la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$, obtenga la gráfica de la función h, especificando las transformaciones realizadas.

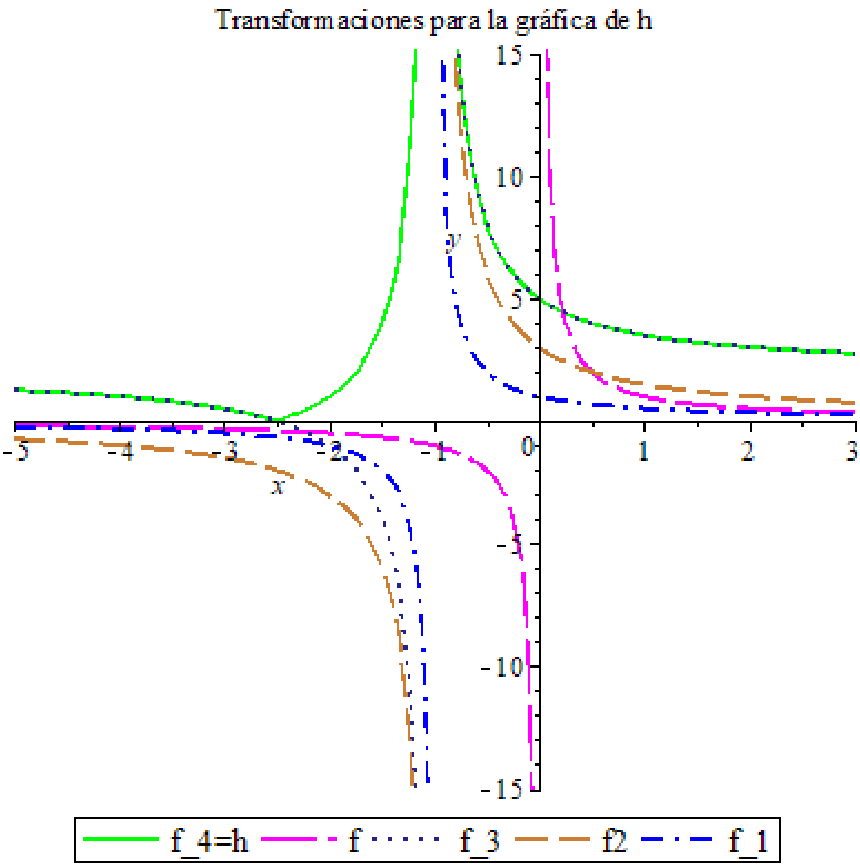
Para elegir las transformaciones a aplicar en la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$, reescribamos la ley de h.

$$\begin{aligned} h(x) &= \left|\frac{2x+5}{x+1}\right| \underset{=}{\text{Ax. 4 y Ax. 5}} \left|\frac{2x+2-2+5}{x+1}\right| = \\ &\underset{=}{\text{Ax. 3}} \left|\frac{2(x+1)-2+5}{x+1}\right| \underset{=}{\text{Ax. 3}} \left|2\,\frac{x+1}{x+1} + \frac{3}{x+1}\right| = \\ &\underset{=}{\text{Ax. 4 y Ax. 6 con } x\neq -1} \left|2 + \frac{3}{x+1}\right|. \end{aligned}$$

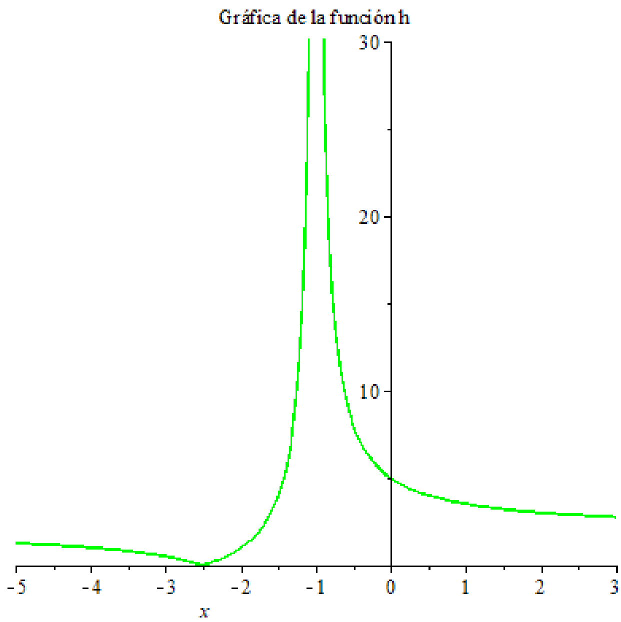
Entonces, podemos elegir una posible secuencia de transformaciones a partir de $f(x) = \frac{1}{x}$.

$f_1(x) = f(x+1) = \dfrac{1}{x+1}$	traslación horizontal 1 a la izquierda
$f_2(x) = 3\ f_1(x) = 3\,\dfrac{1}{x+1}$	dilatación vertical en 3 veces la imagen de f_1
$f_3(x) = f_2(x) + 2 = \dfrac{3}{x+1} + 2$	traslación vertical 2 hacia arriba
$f_4(x) = \lvert f_3(x)\rvert = \left\lvert\dfrac{3}{x+1} + 2\right\rvert$	simetría respecto del eje x sólo para las imágenes negativas

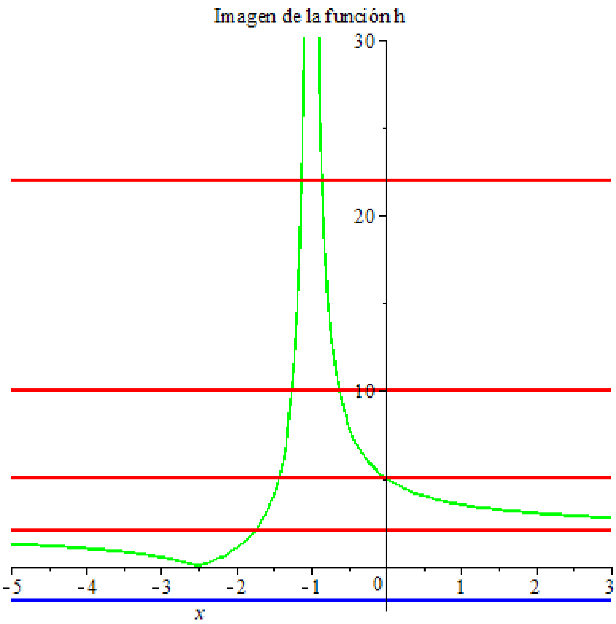
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119



(c) A partir de la gráfica de la función h, determine su conjunto imagen.



Observando la gráfica de la función h, podemos analizar cuáles valores son utilizados como imágenes. Para lo cual se puede trazar rectas horizontales y ver cuáles tienen intersección no vacía con la gráfica.



Las rectas horizontales (rojas) de ordenada no negativa sí intersecan a la gráfca, mientras que las de ordenada negativa (azul), no lo hacen. A partir de este análisis gráfico, observamos que $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}_0^+$.

2. Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2\,x^2, & -1 \leq x < 0 \\ -\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} .$$

(a) Demuestre que f admite inversa y determine analíticamente la ley y el dominio de f^{-1}.

A partir de la definición dada por su ley, se puede observar que $\mathrm{Dom}(f) = [-1, 0) \cup [0, 1] = [-1, 1]$, pues en la primera región es una ley cuadrática que está definida para cualquier número real y en la segunda región se trata del opuesto de una raíz cuadrada, la cual está definida para cualquier número no negativo.

Para mostrar que f admite inversa, vamos a mostrar que resulta estrictamente monótona.

Sean $x_1, x_2 \in [-1, 0)$.

$$-1 \leqq x_1 < x_2 < 0 \xRightarrow{\text{Teo.7-3-ii}} -x_1 \geqq x_1^2 > x_1\,x_2 > 0 \;\wedge\; -x_2 \geqq x_2\,x_1 > x_2^2 > 0 \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{\text{Teo.7-2}} 0 < x_2^2 < x_1^2 \leqq 1 \xRightarrow{\text{Teo.7-3-i}} 0 < 2\,x_2^2 < 2\,x_1^2 \leqq 2 \Rightarrow 0 < f(x_2) < f(x_1) \leqq 2.$$

De aquí, f es estrictamente decreciente en $[-1, 0)$. Además, observemos que resulta

$$x \in [-1, 0) \Rightarrow 2 \geqq f(x) > 0. \tag{1}$$

Sean $x_1, x_2 \in [0, 1]$. Por definición de raíz cuadrada, $\sqrt{x_i} = y_i \Leftrightarrow y_i^2 = x_i \wedge y_i \geqq 0$, $i = 1, 2$. Luego,

$$0 \leqq x_1 < x_2 \leqq 1 \Rightarrow 0 \leqq y_1^2 < y_2^2 \leqq 1 \;\wedge\; y_1 \geqq 0 \wedge y_2 \geqq 0.$$

Si se supone $y_2 \leqq y_1$, entonces

$$0 \leqq y_2 \leqq y_1 \xrightarrow{\text{Teo.7-3-i}} 0 \leqq y_2\ y_2 \leqq y_1\ y_2 \ \wedge\ 0 \leqq y_2\ y_1 \leqq y_1\ y_1 \xrightarrow{\text{Teo.7-2}} 0 \leqq y_2^2 \leqq y_1^2.$$

Por el Teorema 5, esto contradice la hipótesis. Luego, $y_1 < y_2$. Análogamente, $y_2^2 \leqq 1 \Rightarrow y_2 \leqq 1$. Entonces,

$$0 \leqq y_1 < y_2 \Rightarrow 0 \leqq \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \xrightarrow{\text{Teo.7-3-ii}} 0 \geqq -\sqrt{x_1} > -\sqrt{x_2} \Rightarrow f(x_2) < f(x_1) \leqq 0.$$

De aquí, f es estrictamente decreciente en $[0,1]$. Además, observemos que resulta

$$x \in [0,1] \ \Rightarrow\ -1 \leqq f(x) \leqq 0. \qquad (2)$$

Sean ahora $x_1 \in [-1,0)$ y $x_2 \in [0,1]$. Por lo observado anteriormente en (1) y en (2), se tiene $x_1 < x_2$, $f(x_1) > 0$ y $f(x_2) \leqq 0$. Por Teorema 7 ítem 2, $f(x_1) > f(x_2)$.

Por lo tanto, f es estrictamente decreciente en todo su dominio $[-1,1]$. A partir del Teorema 5, f es inyectiva y, luego, admite inversa.

De (1) y (2), para x en el dominio, $f(x) \in [-1,2]$, es decir, $\mathrm{Im}(f) \subset [-1,2]$.

Para mostrar la igualdad de conjuntos, sea $y \in [-1,2]$.

Si $y \in [-1,0]$, consideremos $x = y^2$. Luego, como $x \geqq 0$, $f(x) = -\sqrt{x} = -\sqrt{y^2} = -|y| = y$ pues $y \leqq 0$. Es decir, $y \in \mathrm{Im}(f)$.

Si $y \in (0,2]$, consideremos $x = -\sqrt{\frac{y}{2}}$. Al ser tanto $y > 0$ como $\frac{1}{2} > 0$, x está bien definido y además $x < 0$ por Axioma 8. Luego, $f(x) = 2x^2 = 2\left(-\sqrt{\frac{y}{2}}\right)^2 = 2(-1)^2\left(\sqrt{\frac{y}{2}}\right)^2 = 2\ \frac{y}{2} = y$. Es decir, $y \in \mathrm{Im}(f)$.

Por lo tanto, $\mathrm{Im}(f) = [-1,2] = \mathrm{Dom}\left(f^{-1}\right)$.

Para obtener la ley de la función inversa, recordemos que $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$. Entonces, por el análisis anterior, resulta

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 & -1 \leqq x \leqq 0, \\ -\sqrt{\dfrac{x}{2}} & 0 < x \leqq 2. \end{cases}$$

(b) Si $g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ es la función definida por $g(x) = \mathrm{sen}(x)$, halle la ley y el dominio de la función $f \circ g$.

Recordemos que $\mathrm{Dom}(f) = [-1,1]$ y observemos que $\mathrm{Dom}(g) = [-\pi,\pi]$. Luego,

$$\mathrm{Dom}(f \circ g) = \{x \in \mathrm{Dom}(g)\ /\ g(x) \in \mathrm{Dom}(f)\} = \{x \in [-\pi,\pi]\ /\ \mathrm{sen}(x) \in [-1,1]\}.$$

Puesto que la imagen de la función seno es el intervalo $[-1,1]$, para todo x resulta $g(x) \in [-1,1]$. Entonces, $\mathrm{Dom}(f \circ g) = [-\pi,\pi]$.

Ahora, para $x \in [-\pi,\pi]$,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\mathrm{sen}(x)).$$

Para poder evaluar las imágenes por la función f, observemos que $0 \leqq x \leqq \pi \Rightarrow \operatorname{sen}(x) \geqq 0$ y $-\pi < x < 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(x) < 0$. Además, $\operatorname{sen}(-\pi) = 0$. Entonces,

$$(f \circ g)(x) = f(\operatorname{sen}(x)) = \begin{cases} -\sqrt{\operatorname{sen}(x)} & 0 \leqq x \leqq \pi \vee x = -\pi, \\ 2(\operatorname{sen}(x))^2 & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

3. Determine la veracidad de las siguientes afirmaciones, justificando adecuadamente.

(a) Sean $f(x) = 3|x|$ y $g(x) = \cos(x)$ dos funciones reales. El conjunto imagen de la función $f \circ g$ es un conjunto acotado (superior e inferiormente).

Por definición a partir de la circunferencia trigonométrica, $\operatorname{Im}(g) = [-1, 1]$. Por otro lado,

$$y \in f([-1, 1]) \Leftrightarrow \exists\, x \in [-1, 1] / \ y = f(x) \Leftrightarrow \exists\, x \in [-1, 1] / \ y = 3|x|.$$

Luego,

$$x \in [-1, 1] \xLeftrightarrow{\text{Prop. 2-1 y 2-4-a}} 0 \leqq |x| \leqq 1 \xLeftrightarrow{\text{Teo. 7-1 2 con 3>0}} 0 \leqq 3|x| \leqq 3 \Leftrightarrow f(x) \in [0, 3].$$

Entonces, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 \leqq (f \circ g)(x) \leqq 3$, es decir, 0 es cota inferior del conjunto $\operatorname{Im}(f \circ g)$ y 3 es cota superior de dicho conjunto.

Por lo tanto, la proposición es verdadera.

(b) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ (x + 2\ y)^2 = x^2 + 4\ x\ y + 4\ y^2$.

Sean $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(x + 2\ y)^2 \overset{\text{Def. cuadrado}}{=} (x + 2\ y) \cdot (x + 2\ y) \overset{\text{Ax. 3}}{=} x\ (x + 2\ y) + 2\ y\ (x + 2\ y) =$$
$$\underset{\text{Ax. 3 y Ax. 2}}{=} x^2 + x\ 2\ y + 2\ y\ x + 2\ y\ 2\ y \underset{\text{Ax. 1 y Ax. 2}}{=} x^2 + 4\ x\ y + 4\ y^2.$$

Por lo tanto, el enunciado es verdadero.

(c) Si $t \in \mathbb{R}$ es tal que $|t - 2| < \dfrac{1}{h}, \forall\ h \in \mathbb{N}$, entonces $t = 2$.

Si suponemos $|t - 2| \neq 0$, gracias a la Proposición 2 ítem 1, $|t - 2| > 0$. Luego, por el Corolario 5 ítem (iii), $\exists\ n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < |t - 2|$, contradiciendo la hipótesis.

Entonces, $|t - 2| = 0$. Considerando nuevamente la Proposición 2 ítem 1, $t - 2 = 0$, y, por Corolario 2, $t = 2$.

Por lo tanto, el enunciado es verdadero.

(d) Sea $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x}$. El conjunto de números reales $\{f(n) :\ n \in \mathbb{N}\}$ tiene máximo.

Llamo $A = \{f(n) :\ n \in \mathbb{N}\}$ al conjunto dado.

Supongo $M = \max(A)$. Por definición, $M \in A$, es decir, para algún $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ es $M = f(\tilde{n}) = \dfrac{2\ \tilde{n} - 3}{\tilde{n}}$.
Además, por ser máximo es cota superior, es decir, $\forall k \in \mathbb{N},\ f(k) \leqq M$. Luego,

$$\frac{2k - 3}{k} \leqq \frac{2\ \tilde{n} - 3}{\tilde{n}},\ \forall k \in \mathbb{N} \xLeftrightarrow{\text{Ax.3}} \frac{2k}{k} - \frac{3}{k} \leqq \frac{2\ \tilde{n}}{\tilde{n}} - \frac{3}{\tilde{n}},\ \forall k \in \mathbb{N} \xLeftrightarrow{\text{Ax.6 y Ax.4}}$$
$$\Leftrightarrow 2 - \frac{3}{k} \leqq 2 - \frac{3}{\tilde{n}},\ \forall k \in \mathbb{N} \xLeftrightarrow{\text{Teo. 7-1 y Ax. 4}} -\frac{3}{k} \leqq -\frac{3}{\tilde{n}},\ \forall k \in \mathbb{N} \xLeftrightarrow{\text{Teo.7-3-ii}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{k} \geqq \frac{1}{\tilde{n}},\ \forall k \in \mathbb{N} \xLeftrightarrow{\text{Teo. 7-10}} \tilde{n} \geqq k,\ \forall k \in \mathbb{N},$$

lo cual contradice el hecho que el conjunto $\mathbb{N}$ es no acotado.

Por lo tanto, el enunciado es falso.

(e) Existe una función con dominio $\mathbb{R}$ que es (estrictamente) decreciente y par.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función par.

Supongo f estrictamente decreciente en todo su dominio $\mathbb{R}$. Considerando $a \in \mathbb{R}^+$, por Axioma 8 de orden, $-a \in \mathbb{R}^-$. Luego, por transitividad, $-a < a$. Por ser f estrictamente decreciente, $f(-a) > f(a)$, contradiciendo la paridad de la función f. Por lo tanto, no existe una tal función.

Por lo tanto, el enunciado es falso.