Segundo examen parcial

1. (TEMA 1) Determine la veracidad de las siguientes afirmaciones, justificando adecuadamente.

a. Si la función f es impar, con $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$, entonces $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -3$.

Resolución.

VERDADERO. Por hipótesis:

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, H > 0 :\, x < -H \Rightarrow |f(x) - 3| < \epsilon.$$

Sea $\epsilon > 0$, consideramos $H > 0$ provisto por la definición de límite de la hipótesis. Luego, consideramos $x \in \mathbb{R}$ tal que $(-x) < -H$. Aplicando la hipótesis resulta que $|f(-x) - 3| < \epsilon$. Pero esto es equivalente a

$$x > H \Rightarrow |-f(x) - 3| < \epsilon,$$

en donde aplicamos la imparidad de f y multiplicando ambos lados de la desigualdad $(-x) < -H$ por (-1). Reescribiendo la desigualdad de la derecha resulta:

$$|-f(x) - 3| < \epsilon \Leftrightarrow |-(f(x) + 3)| < \epsilon \Leftrightarrow |(f(x) + 3)| < \epsilon \Leftrightarrow |f(x) - (-3)| < \epsilon.$$

Entonces,

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, H > 0 :\, x > H \Rightarrow |f(x) - (-3)| < \epsilon,$$

es decir, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -3$.

b. La función $g(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x}$ tiene una raíz en el intervalo $[1, 3]$.

Resolución.

FALSO. Observamos que $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{0, 2\}$. Luego, para $x \in \mathrm{Dom}(g)$ (trinomio cuadrado perfecto en el numerador y factorizando por x en el denominador):

$$g(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x} = \frac{(x-2)^2}{x(x-2)},$$

Si $x \in [1, 3]$, debemos considerar $g(x)$ con $x \neq 2$. Luego si $x \in [1, 2) \cup (2, 3]$,

$$g(x) = \frac{(x-2)^2}{x(x-2)} = \frac{x-2}{x} \neq 0,$$

pues $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, pero $2 \notin \mathrm{Dom}(g)$. Concluímos que g no tiene raíces en $[1, 3]$.

c. La ecuación $y = \dfrac{\pi + \sqrt{3}}{2} - \dfrac{x}{2}$ corresponde a la recta tangente a la gráfica de la función $\cos(x)$ en el punto de abscisa $a = \dfrac{\pi}{6}$.

Resolución.

FALSO. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en $(a, f(a))$ es:

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Si $f(x) = \cos(x)$, calculamos la derivada de f y evaluamos f y f' en $a = \dfrac{\pi}{6}$

- $f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$
- $f(a) = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $f'(a) = -\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$

Luego la recta tangente resulta ser:

$$y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad y = \left(\frac{\pi + 6\sqrt{3}}{12}\right) - \frac{x}{2}.$$

Su ordenada al origen es el número escrito en azul, el cual es diferente de $\dfrac{\pi + \sqrt{3}}{2}$, que es la ordenada al origen de la recta propuesta. (Observar que $2 \neq 12 \implies 2^{-1} \neq 12^{-1} \implies \frac{1}{2} \neq \frac{1}{12} \implies \frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{12} \implies \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \frac{\pi+\sqrt{3}}{2} \neq \frac{\pi+6\sqrt{3}}{12}$.) Concluímos que la recta tangente no es la propuesta ya que difieren las ordenadas al origen.

d. La función $h(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$ tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito en $a = 2$.

Resolución.

FALSO. h tiene una discontinuidad en $a = 2$ pues $2 \notin \operatorname{Dom}(h)$. Además,

$$\lim_{x \to 2} h(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-2)}.$$

Por Carácter Local del Límite, como $\dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{(x+3)}{(x+2)}$ para todo $x \in E'(2,1)$, resulta

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+3)}{(x+2)}.$$

Luego, como $\lim\limits_{x \to 2} x + 3 = 5$ y $\lim\limits_{x \to 2} x + 2 = 4 \neq 0$, por Álgebra de Límites finitos para el cociente resulta

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x+3)}{(x+2)} = \frac{5}{4}.$$

Luego, la discontinuidad es evitable ya que existe finito $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$ pero $2 \notin \operatorname{Dom}(h)$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

2. (TEMA 2) Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\,\mathrm{sen}\,(a\,\mathrm{sen}\,(x))}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 2 - a^2, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

a. Encuentre todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales f es una función continua en $x = 0$.

Resolución.

Deseamos hallar los valores de la constante $a \in \mathbb{R}$ tal que f es continua en $x = 0$, i.e. tal que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.
En primer lugar distinguimos el caso 1 en donde $a = 0$ y el caso 2 en donde $a \neq 0$.

Caso 1: Si $a = 0$, tenemos que para $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{2\,\mathrm{sen}(0\,\mathrm{sen}(x))}{x} = \dfrac{2\,\mathrm{sen}(0)}{x} = \dfrac{0}{x} = 0$.
Además, $f(0) = 2 - 0^2 = 2$. Es decir,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0, \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Ergo, f no es continua en $x = 0$ ya que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} 0 = 0 \neq 2 = f(0).$$

Concluímos que si $a = 0$, la función es discontinua en 0.

Caso 2: Si $a \neq 0$,

$$\lim_{x \to 0} f(x) \overset{x \neq 0}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2\,\mathrm{sen}(a\,\mathrm{sen}(x))}{x}.$$

Como $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$, no podemos aplicar Álgebra de límites finitos.
Consideremos las funciones $g(x) = a\,\mathrm{sen}(x)$ y $h(x) = 2\,\mathrm{sen}(x)$. Como ambas son continuas en $\mathbb{R}$, resulta $h \circ g$ continua en $\mathbb{R}$.
Como para todo $x \in \mathbb{R}$, $(h \circ g)(x) = 2\,\mathrm{sen}(a\,\mathrm{sen}(x))$, tenemos que la función $2\,\mathrm{sen}(a\,\mathrm{sen}(x))$ es continua en $\mathbb{R}$.
Observemos que $g(x) \neq 0$ en el entorno reducido de 0, $E'\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Luego, para todo $x \in E'\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ tenemos que

$$\frac{2\,\mathrm{sen}(a\,\mathrm{sen}(x))}{x} = \frac{2\,\mathrm{sen}(a\,\mathrm{sen}(x))}{x} \cdot \frac{a\,\mathrm{sen}(x)}{a\,\mathrm{sen}(x)}.$$

Podemos entonces aplicar el C.L.L. y resulta

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\,\mathrm{sen}(a\,\mathrm{sen}(x))}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\,\mathrm{sen}(a\,\mathrm{sen}(x))}{x} \frac{a\,\mathrm{sen}(x)}{a\,\mathrm{sen}(x)}.$$

Ergo,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{2\,\mathrm{sen}(a\,\mathrm{sen}(x))}{x} \cdot \frac{a\,\mathrm{sen}(x)}{a\,\mathrm{sen}(x)} = \lim_{x \to 0} 2a \cdot \frac{\mathrm{sen}(a\,\mathrm{sen}(x))}{a\,\mathrm{sen}(x)} \cdot \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}.$$

Hemos probado (Prop. 6 del Apunte de la Unidad 3) que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 0.$ (I)

Por otro lado, como hemos mencionado, $g(x) = a\operatorname{sen}(x) \neq 0$ para todo $x \in E'\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Además, como ya vimos que la función auxiliar g es continua en 0, $\lim\limits_{x\to 0} a\operatorname{sen}(x) = a\operatorname{sen}(0) = 0$. Podemos entonces aplicar el resultado del ejercicio 14 ítem (a) de la Práctica 3 parte 1, y obtenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(g(x))}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a\operatorname{sen}(x))}{a\operatorname{sen}(x)} = 1. \qquad \text{(II)}$$

Luego, de (I) y (II), aplicando A.L.F. para el producto resulta

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 2a\frac{\operatorname{sen}(a\operatorname{sen}(x))}{a\operatorname{sen}(x)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 2a \cdot 1 \cdot 1 = 2a.$$

Ahora bien, para que f sea continua en $x = 0$, necesitamos que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Luego,

$$2a = 2 - a^2 \Leftrightarrow a^2 + 2a - 2 = 0.$$

Aplicando la fórmula resolvente para la ecuación cuadrática en la variable a obtenemos los dos valores reales siguientes:

$$a_1 = -1 - \sqrt{3}, \qquad a_2 = -1 + \sqrt{3}.$$

Concluímos que f es continua en $x = 0$ sii $a = a_1$ o $a = a_2$.

b. Para los valores hallados en el ítem anterior, obtener todas las asíntotas de f.

Resolución.

Sea $a \in \{a_1, a_2\}$, i.e. consideremos a alguno de los dos valores hallados en el ítem anterior. Luego,

$$f\,(x) = \begin{cases} \dfrac{2\operatorname{sen}(a\operatorname{sen}(x))}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 2 - a^2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- Asíntotas verticales: Por lo realizado anteriormente sabemos que f es continua en $x = 0$.

  Además, hemos probado en un pasaje del ítem anterior que $2\operatorname{sen}(a\operatorname{sen}(x))$ es continua en $\mathbb{R}$. Por otro lado, sabemos que la función identidad es continua en $\mathbb{R}$. Luego, utilizando Álgebra de Funciones Continuas para el cociente, tenemos que la función $\dfrac{2\operatorname{sen}(a\operatorname{sen}(x))}{x}$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

  Como para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f(x) = \dfrac{2\operatorname{sen}(a\operatorname{sen}(x))}{x}$, entonces f es continua en $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

  En conclusión, f es continua en $\mathbb{R}$, i.e. para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ resulta $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Luego ninguna recta vertical es asíntota de f ya que existen finitos todos los límites $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

- Asíntotas horizontales: Como $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}$, tiene sentido analizar los límites en el infinito para esta función y de esto deducir si tiene alguna asíntota horizontal. Consideraremos primero el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \overset{x\geq 0}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2\,\mathrm{sen}\,(a\,\mathrm{sen}\,(x))}{x}.$$

Sabemos que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Además, para todo $x\in\mathbb{R}$, $|2\,\mathrm{sen}(a\,\mathrm{sen}(x))| \leq 2$. Aplicando entonces la Prop. 9 del Apunte de la Unidad 3 (para el caso del Teorema 6 para límites en el infinito), resulta

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\,\mathrm{sen}\,(a\,\mathrm{sen}\,(x))}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\cdot 2\,\mathrm{sen}\,(a\,\mathrm{sen}\,(x)) = 0.$$

Tenemos entonces que la recta $y=0$ es una asíntota horizontal.

Análogamente se puede probar que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Por lo tanto tenemos como única asíntota horizontal la recta de ecuación $y=0$.

- Asíntotas oblicuas: Recordemos que por definición la recta de ecuación $y=mx+h$ (con $m\neq 0$) es asíntota oblicua de f si $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(mx+h)) = 0$ o $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(mx+h)) = 0$.

  Hemos visto que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

  Además sabemos que si $m>0$ entonces $\lim_{x\to+\infty} mx+h = +\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} mx+h = -\infty$. Surge entonces de la Proposición 9 del Apunte de la Unidad 3 que $\lim_{x\to+\infty} -(mx+h) = -\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} -(mx+h) = +\infty$.
  Luego, aplicando Corolario 7 del Anexo 4 del Apunte de la Unidad 3 resulta que

  $$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(mx+h)) = \lim_{x\to+\infty}(f(x)+(-(mx+h))) = -\infty.$$

  De la misma forma, a partir del Corolario 8 del Anexo 4 del Apunte de la Unidad 3 resulta que

  $$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(mx+h)) = \lim_{x\to-\infty}(f(x)+(-(mx+h))) = +\infty.$$

  Si $m<0$, un razonamiento análogo nos permite probar que

  $$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(mx+h)) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-(mx+h)) = -\infty.$$

  Por lo tanto, como los límites mencionado en la definición de asíntota oblicua no se verifican para ningún $m\neq 0$, tenemos que f no tiene asíntotas oblicuas.

3. (TEMA 3). Determine todos los puntos de continuidad, justificando adecuadamente, y, de existir, clasifique las discontinuidades de la función

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}, & \text{si } x \in [0,9) \cup (9,+\infty), \\ \dfrac{2x\cos(x)-2x}{x^2}, & \text{si } x \in (-\infty,0). \end{cases}$$

Resolución.

Observamos que $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{9\}$. Luego, la función g no es continua en $x = 9$.
Estudiemos los puntos de continuidad de la función g, para ello consideremos los siguientes casos:

- Si $x \in (0,9) \cup (9,+\infty)$ resulta

$$g(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$$

sabemos que es continua por ser cociente de funciones continuas, es decir, podemos pensar a $g(x) = \dfrac{h(x)}{w(x)}$ donde la función $w(x) = x - 9$ es continua por ser lineal y la función $h(x) = \sqrt{x} - 3$ es continua en su dominio por ser resta de funciones continuas. Recordemos que la función raíz cuadrada y la función constante ambas resultan continuas en $(0,9) \cup (9,+\infty)$.

- Si $x \in (-\infty,0)$ resulta

$$g(x) = \frac{2x\cos(x)-2x}{x^2}$$

sabemos que es continua por ser cociente de funciones continuas, es decir, podemos pensar a $g(x) = \dfrac{h(x)}{w(x)}$ donde la función $w(x) = x^2$ es continua por ser la función cuadrática y la función $h(x) = 2x\cos(x) - 2x$ es continua por ser resta de funciones continuas, pues siendo $f(x) = 2x$ continua por ser lineal y sabiendo que la función coseno es continua (T.8), por producto de funciones continuas se puede afirmar que $s(x) = 2x\cos(x)$ es continua.

Por lo analizado anteriormente, g es continua al menos en el conjunto $(-\infty,0) \cup (0,9) \cup (9,+\infty)$.

Analicemos, ahora la continuidad de g en $a = 0$, para ello consideramos los límites laterales

$$\lim_{x\to 0^+} g(x), \lim_{x\to 0^-} g(x).$$

Por la continuidad a derecha en $a = 0$ de la función raíz cuadrada, usando álgebra de límites finitos para la suma, tenemos

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} - 3 = \sqrt{0} - 3 = -3 \ \wedge \ \lim_{x\to 0^+} x - 9 = -9 \neq 0.$$

Luego, por álgebra de límites laterales finitos para el cociente,

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \frac{1}{3}.$$

Ahora evaluemos el otro límite lateral.

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x\,\cos(x) - 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x(\cos(x)-1)}{x^2}.$$

Considerando x en el semi-entorno a izquierda de 0, $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$, observemos que tanto $\cos(x)+1 \neq 0$ como $x \neq 0$. Luego, para todo $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$ tenemos que

$$\frac{2x(\cos(x)-1)}{x^2} = 2\cdot\frac{x}{x}\cdot\frac{(\cos(x)-1)}{x}\cdot\frac{\cos(x)+1}{\cos(x)+1} = 2\cdot\frac{(\cos^2(x)-1)}{x(\cos(x)+1)}.$$

Podemos entonces aplicar el C.L.L. y resulta

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2(\cos^2(x)-1)}{x(\cos(x)+1)}.$$

De la identidad pitagórica de las funciones trigonométricas, dado que $\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)=1$ resulta que $\cos^2(x)-1 = -\operatorname{sen}^2(x)$, entonces:

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-2\,\operatorname{sen}(x)\,\operatorname{sen}(x)}{x(\cos(x)+1)}.$$

Aplicamos álgebra de límites laterales finitos para el cociente: lo escrito en azul tiende a 1 por Proposición 6, lo que está en rojo tiende a 0 pues la función seno es continua en $x=0$ y lo que está en naranja a 2, por ser el coseno una función continua en $x=0$ y álgebra de funciones continuas. Por todo esto, usando álgebra de límites finitos, tenemos

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-2\,\operatorname{sen}(x)\,\operatorname{sen}(x)}{x(\cos(x)+1)} = -2\;1\;0\;\frac{1}{2} = 0.$$

Como

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \frac{1}{3} \neq 0 = \lim_{x\to 0^-} g(x),$$

resulta que g tiene una discontinuidad de salto finito en 0.

Por lo tanto, g resulta exactamente continua en $(-\infty,0)\cup(0,9)\cup(9,+\infty)$.

Nos queda analizar qué tipo de discontinuidad hay en $a=9$, para eso consideremos un entorno reducido por ejemplo de radio 1, $E'(9;1)$. Para todo $x\in E'(9;1)$,

$$g(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}\cdot\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \frac{1}{\sqrt{x}+3}.$$

Luego, por el C.L.L. y álgebra de funciones continuas, tenemos

$$\lim_{x\to 9} g(x) = \lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{6}.$$

Como existe límite finito en $a=9$ concluímos que g tiene una discontinuidad evitable en ese punto.