Práctica 2: Conjuntos Inductivos

Cátedra: Lenguajes Formales y Computabilidad
Aulas Virtuales - Pandemia Covid19

Docentes en Práctica

- Alejandro Hernandez
- Natalia Colussi
- Valeria Perez Moguetta

Ejercicio 1:

1. Defina inductivamente los siguientes conjuntos:

    (a) El conjunto de los números naturales múltiplos de 3.

    (b) El conjunto de los números enteros múltiplos de 3.

- Para dar una definición inductiva tenemos que pensar en los dos aspectos que tiene una definición de este tipo:

    - CASO BASE.
    - CASO INDUCTIVO.
    - CLAUSURA.

Podríamos tener más de un caso base.or

Podríamos tener mas de una regla en el caso inductivo.

- Vamos hacer un bosquejo del item (a) el item (b) es similar.

Resolución 1 item (a)

(a) El conjunto de los números naturales múltiplo de 3.

$M3 = \{m \in \mathbb{N}_0 : m$ es múltiplo de $3\}$

CASO BASE

(i) $0 \in M_3$.

CASO INDUCTIVO

(ii) Si $n \in M_3$ entonces $n+3 \in M_3$.

CLAUSURA

iii) Los elementos obtenidos aplicando las reglas anteriores son los únicos elem. de M_3.

podríamos usar otro caso base?

podríamos formular esta regla de otra manera?. Estaría bien?

No olvidarse de la clausura. Muchas veces la enunciamos al ppio al definir el conjunto. Decimos por ejemplo: *"Sea M3 el minímo conjunto talque: …"*

Otra solución para (a)

Podríamos resolverlo de otra forma.
¿Cómo?

$M_3 = \{ m \in \mathbb{N} : m$ es un múltiplo de $3 \}$.

<u>CASO BASE</u>

i) $3 \in M_3$.

<u>CASO INDUCTIVO</u>

ii) $m, n \in M_3$ entonces $m+n \in M_3$

<u>CLAUSURA</u>

iii) Los elementos obtenidos aplicando las reglas anteriores son los únicos elementos de M_3.

¿Qué diferencia hay entre ambas definiciones?

¿Hay una que está bien y la otra mal? ¿En qué me favorece en que me perjudica?

Se puede demostrar que son equivalentes. EJERCICIO!

1) item (b)

(b) $M'_3 = \{ m \in \mathbb{Z} \cdot m \text{ es múltiplo } 3 \}$

$M'_3 = \{ \ldots -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \ldots \}$

$M_3 = \{ 0, 3, 6, 9, 12, \ldots \}$.

M_3 esta definido inductivamente

M'_3 usamos las reglas M_3 y las extendemos.

- La resolución del item (b) que involucra a los Z podrá reutilizar las reglas de la definición de M_3, pero deberá agregar reglas que incluyan a los números negativos.
- Tratar de pensar entonces qué agregarían para incluir a estos últimos números en la definición.

Ejercicio 2:

2. Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$. Defina inductivamente los siguientes conjuntos y enuncie el principio de inducción primitiva para cada uno de ellos:

   (a) Σ^*

   (b) $B = \{a^n b c^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

2b)

Algunos elementos: $b, \overbrace{a}^{1}b\overbrace{cc}^{2}, \overbrace{aa}^{2}b\overbrace{cccc}^{4}, \overbrace{aaa}^{3}b\overbrace{cccccc}^{6}, \ldots$

Regla base: b \in B

Regla inductiva: Si w \in B, entonces awcc \in B

Clausura: Los elementos obtenidos aplicando las reglas anteriores son los únicos elementos de B.

Ejercicio 2:

a)

- Sea Σ^* el mínimo conjunto de cadenas sobre el alfabeto Σ tal que:
  - (Base) $\lambda \in \Sigma^*$ (λ es la cadena vacía)
  - (Inducción) si $w \in \Sigma^*$ y $x \in \Sigma$ entonces $wx \in \Sigma^*$

Sea P una propiedad que verifica:

i- $P(\lambda)$ se cumple

ii- Si $P(w)$ se cumple y $x \in \Sigma$, entonces $P(wx)$ se cumple

Entonces $P(x)$ se cumple para todo $x \in \Sigma^*$

Ejercicio 3:

3. Defina inductivamente los siguientes conjuntos:

(a) $A = \{a\}^*$

(b) $B = \{\alpha \in \{a, b, c\}^* \mid \alpha \text{ es un palíndromo}\}$

(c) $C = \{a, b, ab, ba\}$

Resolución item (a)

(a) $A = \{a\}^*$

Describimos A por enumeración

$A = \{\lambda, a, aa, aaa, aaaa \ldots\}$

Concatenación de letras "a" de longitud arbitraria.

A es un conjunto infinito

Resolución: Ejercicio 3 item (a)

Sea A el mínimo conjunto talque:

CASO BASE

i) $\lambda \in A$ (cadena vacía)

CASO INDUCTIVO:

ii) $w \in A \Rightarrow wa \in A$

Definición inductiva cómo veníamos trabajando

Veamos algunos ejemplos.

$\lambda \in A$

$\lambda \in A \Rightarrow \lambda a = a \in A$

$a \in A \Rightarrow aa \in A$

$aa \in A \Rightarrow aaa \in A$

Instanciamos algunos valores en las reglas para verificar cómo estamos produciendo los elementos.

Resolución: Ejercicio 3 item (b)

$B = \{\alpha \in \{a,b,c\}^* \mid \alpha \text{ es un palíndromo}\}$

① Describimos a B por enumeración

$B = \{\lambda, a, b, c, aa, bb, cc, aba, aca, bab, bcb, cac, cbc, aaa, bbb, ccc, \dots\}$

Describimos algunos elementos de B para conocer sus estructura y poder dar las reglas en la definición.

Resolución Ejercicio 3: item (b)

Sea B el mínimo conjunto talque.

i) $\lambda, a, b, c \in B$ (BASE)

ii) Si $\underline{w} \in B \Rightarrow a\underline{w}a \in B$. (CASO IND)

iii) Si $\underline{w} \in B \Rightarrow b\underline{w}b \in B$ (CASO IND)

iv) Si $\underline{w} \in B \Rightarrow c\underline{w}c \in B$ (CASO IND)

Veamos algunos ejemplos:

$\lambda \in B$

$\lambda \in B \Rightarrow a\lambda a = aa \in B$

$a \in B \Rightarrow bab \in B$

$aa \in B \Rightarrow caac \in B$

Resolución 3 item (c)

(c) $C = \{a, b, ab, ba\}$

- C ya esta dado por enumeración
- C a diferencia de A y B es <u>finito</u>

$\#C=4$

- Completar la definición del conjunto inductivo.
- Pensar en las tres partes que deben componer la definición y en qué relación existen entre los elementos.

Ejercicio 4:

4. Considere el conjunto de las matrices

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{N}_0 \text{ donde } a, b, c \text{ tienen la misma paridad} \right\}$$

(a) Defina inductivamente al conjunto M.

(b) Enuncie el principio de inducción primitiva para M.

Ejercicio 4:

i) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$

i') $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M$

ii) Si $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M$, entonces $\begin{pmatrix} \alpha+2 & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M$

iii) Si $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M$, entonces $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma+2 & \delta \end{pmatrix} \in M$

iv) Si $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M$, entonces $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta+2 \end{pmatrix} \in M$

Ejercicio 5:

5. Enuncie el principio de inducción primitiva para el conjunto $\mathbb{P}$, definido inductivamente como el menor conjunto tal que:

   - $0 \in \mathbb{P}$
   - si $n \in \mathbb{P}$ entonces $(n+2) \in \mathbb{P}$

   Utilice este principio para probar que para todo $n \in \mathbb{P}$ existe $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $n = m + m$.

- En este tipo de ejercicio, destacamos que hay dos partes por resolver:
  - La primera: dar la definición del PIP para el conjunto dado inductivamente.
  - La segunda: demostar una propiedad que se enuncia al final
- Resolvemos en este orden.

Resolución Ejercicio 5:

1º) <u>Principio de inducción primitiva PIP de $\mathbb{P}$</u>

Sea P una propiedad que verifica:

- $P(0)$ se cumple.
- Si $P(n)$ se cumple con $n \in \mathbb{P}$ entonces $P(n+2)$ también se cumple.

Entonces $P(n)$ se cumple para todo n . $\mathbb{P}$.

Para enunciar el PIP siempre tener a mano la defición del conjunto.

- $0 \in \mathbb{P}$
- si $n \in \mathbb{P}$ entonces $(n+2) \in \mathbb{P}$

Resolución ejercicio 5

2º) Demostramos la propiedad P usando PIP de $\mathbb{P}$

$$(\forall n : \mathbb{P} \ (\underbrace{\exists m : \mathbb{N}_0 \text{ tq } n = m+m}_{P(n)}))$$

Separamos la prueba en dos partes segun el PIP del conjunto de pares

P(0) se cumple

P(n) se cumple
entonces P(n+2) se cumple también.

Siempre
pensar primero la
estrategia
de resolución del
problema.

Resolución ejercicio 5

CASO BASE $n=0$

$$P(0) = (\exists m : \mathbb{N}_0 \text{ tq } 0 = m+m)$$

Tenemos que encontrar el "testigo" m que haga valer la igualdad $0 = m+m$.

Tomamos $m=0$ (1), luego:

$0 = m+m$

$= \langle$ def m $\rangle$

$0 = 0+0$

$= \langle$ algebra $\rangle$

$0=0$

Por lo tanto, tomando $m=0$ se cumple $P(0)$.

Resolución ejercicio 5

PASO INDUCTIVO $n \Rightarrow n+2$

Suponemos cierto $P(n)$ entonces sabemos que existe $m_0 \in \mathbb{N}_0$ tq $n = m_0 + m_0$. (2)

Demostramos que se cumple $P(n+2)$

$$P(n+2) = (\exists m : \mathbb{N}_0 \bullet n+2 = m+m) \quad (3)$$

Trataremos de encontrar al m_1 testigo para (3)

Resolución ejercicio 5

$n+2$

$= \langle HI\ (2)\quad n = m_0 + m_0,\ m_0 \in \mathbb{N}_0 \rangle$

$(m_0 + m_0) + 2$

$= \langle \text{álgebra} \rangle$

$(m_0 + m_0) + (1+1)$

$= \langle \text{algebra} + \rangle$

$(m_0+1) + (m_0+1)$

Luego si tomamos $m_1 = m_0+1$, $m_1 \in \mathbb{N}_0$ ya que $m_0 \in \mathbb{N}_0$, podemos afirmar que (3) se cumple

$\therefore$ Por lo tanto $P(n)$ se cumple para todo n en $\mathbb{P}$

Cómo nos construímos el testigo en base a lo conocido, la HI de la cual afirmamos que existe el m0 que cumple n = m0+m0.

Ya podemos concluir entonces que la propiedad se cumple para P(n+2) también.

Cumpliendose la propiedad para el caso base y para el paso inductivo según el PIP de Pares puedo afirmar que la propiedad vale para todo elemento de Pares.

Ejercicio 6

6. Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$. Definimos Δ inductivamente como el menor conjunto tal que:

- $a \in \Delta$
- si $\alpha \in \Delta$ entonces $b\alpha b \in \Delta$

(a) Enuncie el principio de inducción primitiva para Δ.

(b) Demuestre que cualquier cadena de Δ tiene un número par de símbolos b.

Ejercicio 6

a)

Sea P una propiedad que verifica:

i) $P(a)$ se cumple

ii) Si $P(\alpha)$ se cumple, entonces $P(b\alpha b)$ se cumple

Entonces $P(x)$ se cumple para todo $x \in \Delta$.

Ejercicio 6

b)

Para probar que cualquier cadena del conjunto tiene un número par de b, primero tenemos que definir nuestra propiedad P:

Sea P la propiedad tal que: P(x) ~ x tiene un número par de b.

Ahora, para probar P, aplicamos el PIP de nuestro conjunto, y debemos probar:

i) P(a) se cumple.

ii) Si P(α) se cumple, entonces P(bαb) se cumple.

Ejercicio 7:

7. Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$. Definimos Γ inductivamente como el menor conjunto tal que:

- $\lambda \in \Gamma$
- si $\alpha \in \Gamma$ entonces $b\alpha \in \Gamma$
- si $\alpha \in \Gamma$ entonces $a\alpha \in \Gamma$

(a) Enuncie el principio de inducción primitiva para Γ.

- El item (a) pueden hacerlo sólos, proceder como lo hicimos en los ejercicios anteriores.

Ejercicio 7 item (b)

(b) Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

- $b \in \Gamma$
- $a \in \Gamma$
- $babacbaca \in \Gamma$
- $aba \in \Gamma$

- Para **<u>demostar que un elemento pertenece al conjunto inductivo</u>** lo que hacemos es encontrar una cadena o secuencia de formación del elemento. Esto es aplicamos las reglas que producen o construyen dicho elemento.
- Para **<u>demostar que un elemento NO pertenece a un conjunto inductivo</u>**, lo hacemos mediante una propiedad (que debemos enunciar) la cual se cumple mediante las reglas construcción del conjunto, pero que el elemento en cuestión NO la cumple. De esta forma podemos concluir que no pertenece al conjunto inductivo.

Ejercicio 7 item (b)

- CASO ELEMENTO pertenece al conjunto inductivo

- $b \in \Gamma$ ✓

  Secuencia de formación de b:

  $\epsilon \in \Gamma \Rightarrow^{(ii)} b\epsilon = b \in \Gamma$

- $a \in \Gamma$ ✓

  Secuencia de formación de a:

  $\epsilon \in \Gamma \Rightarrow^{(iii)} a\epsilon = a \in \Gamma$

Muesto la secuencia de formación y justifico con el número de regla que estoy usando.

Ejercicio 7 item (b)

$\Sigma = \{a, b, c\}$.

- $\lambda \in \Gamma$
- si $\alpha \in \Gamma$ entonces $b\alpha \in \Gamma$
- si $\alpha \in \Gamma$ entonces $a\alpha \in \Gamma$

- CASO ELEMENTO NO pertenece al conjunto inductivo

- *babacbaca* $\in \Gamma$ ×

Lo demostraremos utilizando el Principio de Inducción Primitiva para Γ.

$P(\alpha)$: α no tiene símbolos c.

Esta es la propiedad que vamos a demostrar y luego usar para probar que la cadena no pertenece al conjunto inductivo

(i) $P(\epsilon)$: ϵ no tiene símbolos c.

(ii) Supongo que α no tiene símbolos c (HI). Luego $b\alpha$ agrega sólo un símbolo b, y por HI no tiene símbolos c.

(iii) Supongo que α no tiene símbolos c (HI). Luego $a\alpha$ agrega sólo un símbolo a, y por HI no tiene símbolos c.

Por lo tanto, vale $P(\alpha)$ para todo $\alpha \in \Gamma$.
Como la cadena *babacbaca* contiene símbolos c, concluímos que *babacbaca* $\notin \Gamma$.

Ejercicio 7 (c)

(c) Considere ahora el conjunto Δ definido inductivamente como el menor conjunto tal que:

- $\lambda \in \Delta$
- si $\alpha \in \Delta$ entonces $\alpha b \in \Delta$
- si $\alpha \in \Delta$ entonces $\alpha a \in \Delta$

Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

- si $\alpha \in \Delta$ entonces $b\alpha \in \Delta$
- si $\alpha \in \Delta$ entonces $a\alpha \in \Delta$
- $\Gamma \subseteq \Delta$
- $\Delta \subseteq \Gamma$
- $\Delta = \Gamma$

Ejercicio 7 item (c)

(c) Para probar que $\Gamma \subseteq \Delta$ tenemos que pensar en terminos de conjuntos y la operación $\subseteq$ y en terminos de PIP

$$\Gamma \subseteq \Delta$$

$$\underbrace{\text{Si } x \in \Gamma \text{ entonces } x \in \Delta}_{P(x)}$$

propiedad a demostrar sobre PIP Γ

Ejercicio 7 item (c)

Procedemos de igual forma para demostrar que $\Delta \subseteq \Gamma$. Reformulamos la pregunta

$$\underbrace{\text{Si } x \in \Delta \text{ entonces } x \in \Gamma}_{Q(x)}$$

propiedad a demostrar sobre PIP Δ

Ejercicio 7 item (c)

Por último si probé $\Gamma \subseteq \Delta$ y $\Delta \subseteq \Gamma$ por propiedad de conjuntos resultará también válido $\Gamma = \Delta$

Ejercicio 8:

8. Definimos inductivamente la relación $S \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ como el menor conjunto tal que:

- si $n \in \mathbb{N}_0$ entonces $(n, n) \in S$
- si $(n, m) \in S$ entonces $(n, m+1) \in S$

(a) Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

- $(0, 0) \in S$
- $0 \in S$
- $(2, 3) \in S$
- $(3, 4) \in S$

- Resolver de manera análoga a lo explicado en el ejercicio 7. Misma técnica y estrategia de demostración.
- Construir algunos ejemplos de S para conocer la estructura de los mismo en valores concretos.

Ejercicio 8 (b)

(b) Enuncie el principio de inducción primitiva para S. Demuestre, utilizando este principio, que para todo par $(n, m) \in S$ se tiene $n \leq m$.

- Resolver en dos partes:
  - Primero enunciar el PIP de S
  - Segundo: demostar usando el PIP la propiedad indicada.
- Expresar formalmente la propiedad para facilitar la prueba inductiva.

Ejercicio 8 item(c)

(c) Definimos inductivamente $Q \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ como el menor conjunto tal que:

- si $n \in \mathbb{N}_0$ entonces $(0, n) \in Q$
- si $(n, m) \in Q$ entonces $(n+1, m+1) \in Q$

Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

- $S \subseteq Q$
- $Q \subseteq S$
- $Q = S$

- Resolver con la misma técnica y estrategia que el ejercicio 7 (c).

Ejercicio 9

9. Mostraremos, por inducción en la cantidad de caballos, que todos los caballos son del mismo color.

   - Caso base, $n = 1$: para un conjunto de un único caballo $\{c_1\}$ la proposición es trivial.
   - Caso inductivo, $n = k$: Supongamos que, para cualquier conjunto de k caballos, todos resultan ser del mismo color. Sea $C = \{c_1, \ldots, c_k, c_{k+1}\}$ un conjunto de $k+1$ caballos. Por hipótesis inductiva, los caballos en $C_1 = \{c_1, \ldots, c_k\}$ son todos del mismo color. Por la misma razón, los de $C_2 = \{c_2, \ldots, c_k, c_{k+1}\}$ también resultan del mismo color. Luego todos los caballos de C son del mismo color.

   Explique cuál es el error en el razonamiento dado.