

Práctica 3:

Funciones Recursivas Primitivas

Parte I- FUNCIONES

Cátedra: Lenguajes Formales y Computabilidad
Aulas Virtuales - Pandemia Covid19

Docentes en Práctica

- Alejandro Hernandez
- Natalia Colussi
- Valeria Perez Moguetta

¿Qué vamos a ver en esta parte?

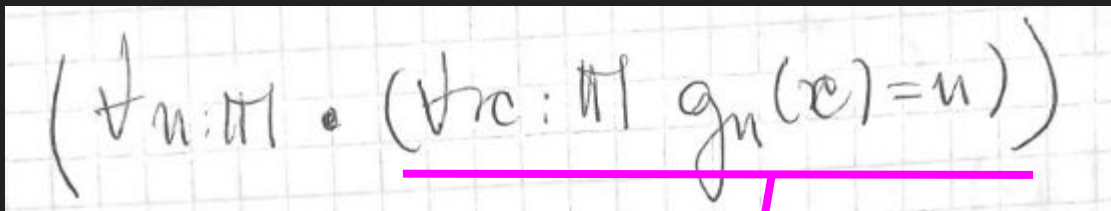
- La idea de la práctica es ayudarlos a resolver y plantear los problemas de la práctica sobre Funciones Recursiva Primitivas (FRP) la cual incluye ejercitación sobre: funciones, relaciones y conjuntos recursivos primitivos.
- Dividiremos la práctica en tres partes:
 - PARTE I = FRP
 - PARTE II = RRP
 - PARTE II = CRP
- En cada parte abordaremos cómo trabajar con los ejercicios de dicha sección.
- Al principio puede resultar un poco complejo definir las funciones de esta forma, quizás por la notación particular que tienen las FRP, pero no debemos perder de vista el objetivo:

Demostrar qué tipo de funciones (poder de cálculo) podemos escribir usando las funciones básicas (cero, proyección y sucesor) y los operadores: composición y recursión.

Ejercicio 1:

1. Mostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $g_n(x) = n$ para todo $x \in \mathbb{N}$ es recursiva primitiva.

- Reescribimos la propiedad a demostrar de la siguiente manera:


$$(\forall n: \mathbb{N} \bullet (\forall x: \mathbb{N} \ g_n(x) = n))$$

Es una FRP

Siempre es importante identificar la propiedad que vamos a demostrar en pro de dar una estrategia de prueba

$P(n)$

Veamos algunos valores de g_n para entender qué debemos demostrar y cómo lo haremos ...

Ejercicio 1 (continuación)

¿Quién sería $g_n \dots$?

$g_1(x) = 1 \quad \forall x: \mathbb{N} \rightarrow \text{CONSTANTE } 1 \quad \text{Es FRP?}$

$g_2(x) = 2 \quad \forall x: \mathbb{N} \rightarrow \text{CONSTANTE } 2 \quad \text{Es FRP?}$

\vdots

$g_n(x) = n \quad \forall x: \mathbb{N} \rightarrow \text{CONSTANTE } n \quad \text{Es FRP?}$

\vdots

¿Cuándo es FRP?

Para demostrar que una función es FRP tenemos que poder probar que es:

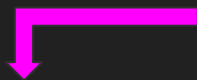
- una de las funciones básicas
- se puede obtener mediante la composición y/o recursión de las funciones básicas u otras FRP.

La inducción nos permite demostrar que se cumple para todo n en \mathbb{N}

Al trabajar con \mathbb{N} y variar cada uno de estas funciones sobre este dominio, generando una nueva función vamos a probar esta propiedad usando inducción sobre \mathbb{N} .

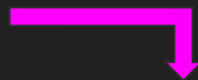
Ejercicio 1 (continuación)

Caso base



$P(n) : (\forall x: \mathbb{N} \cdot g_n(x) = n) \text{ es FRP.}$
Probamos por inducción sobre \mathbb{N} .

Paso Inductivo



CASO BASE $n=0$.

$P(0) : (\forall x: \mathbb{N} \cdot g_0(x) = 0) \text{ es FRP.}$

Tomamos $x \in \mathbb{N}$.

$$g_0(x) \\ = \langle \text{def. de } g_i \rangle_0$$

$= \langle \text{def. de función cero } c^1 \rangle$

$c^1(x)$

$\therefore g_0 \text{ es una FRP.}$

PASO INDUCTIVO. $n \Rightarrow n+1$

Supongo que se cumple $P(n)$, esto es,

$P(n) : (\forall x: \mathbb{N} \cdot g_n(x) = n) \text{ es FRP.}$

probaremos que.

$P(n+1) : (\forall x: \mathbb{N} \cdot g_{n+1}(x) = n+1) \text{ es FRP.}$



sigue...

Ejercicio 1 (continuación)

Sea $x \in \mathbb{N}$

$$g_{n+1}(x) = \langle \text{def } g_i \rangle$$

$$= \langle \text{def } \overset{n+1}{\underbrace{\text{de } g_n(x)}} \rangle$$

$$= \langle \text{def } \overset{g_n(x)+1}{\underbrace{\text{desuc 3.1.4}}} \rangle$$

$$s(g_n(x)) = \langle \text{def } \Phi \text{ operador} \rangle$$

$$\Phi(s, g_n)(x)$$

\therefore Luego por lo def. 3.1.8 apartado b) y la (HI) g_n es una FRP resulta que g_{n+1} es FRP.

La definición de sucesor del apunte de cátedra. La referencia hace alusión a la numeración en dicho apunte.

Por CASO BASE Y PASO INDUCTIVO puedes concluir que

$(\forall n: \mathbb{N} \cdot P(n))$ se cumple!

Ejercicio 2:

2. Realizar los siguientes cálculos:

$$(a) \text{ dos}^{(2)}(17, 3) = \Phi(s^{(1)}, \Phi(s^{(1)}, c^{(2)}))(17, 3)$$

$$(b) \text{ Mas}2^{(1)}(5) = \Phi(s^{(1)}, s^{(1)})(5)$$

$$(c) \Sigma^{(2)}(1, 3) = R(p_1^{(1)}, \Phi(s^{(1)}, p_3^{(3)}))(1, 3)$$

$$(d) \text{ Pd}^{(1)}(412) = R(c^{(0)}, p_1^{(2)})(412)$$

- Para cada uno de estos casos ya conocemos de antemano cual es el resultado de la operación, ya que son cálculos matemáticos simples, pero lo que nos interesa realmente es que ustedes entiendan cómo se produce el cálculo de forma tal obtener el resultado esperado.

- En este ejercicio es importante que tengamos presente las definiciones de los operadores de la composición Φ y recursión R para hacer referencia a ellos.

Ejercicio 2 ítem (a)

$$(a) \text{ dos}^{(2)}(17, 3) = \Phi(s^{(1)}, \Phi(s^{(1)}, c^{(2)}))(17, 3)$$

Tenemos que realizar un cálculo paso a paso hasta alcanzar el valor final, el resultado del cómputo.

Describimos a la función constante $\text{dos}^{(2)}$ mediante la composición de FRP

$$\text{dos}^{(2)} = \Phi(s^{(1)}, \Phi(s^{(1)}, c^{(2)}))$$

En esta oportunidad, para esclarecer las definiciones de las funciones que debemos aplicar las describimos según los grados (aridad) de cada una de ellas para esta función en particular.

Recordamos primero las definiciones

- $s^{(1)}(x) = x + 1$ SUCESOR
- $\Phi(f, g)(x) = f(g(x))$ COMPOSICIÓN
- $c^{(2)}(x, y) = 0$ CERO

Ejercicio 2 (a) continuación.

Recuerden que:

- Observamos el proceso del cálculo.

¿Cómo se produce el cálculo con las FRP?

- Las justificaciones y referencias están tomadas del apunte de teoría

El apartado (b) es similar a este.

Realizamos ahora el cálculo

$$\begin{aligned} & \text{dos}^{(2)}(17,3) \\ &= \langle \text{def dos como FRP} \rangle \\ & \quad \Phi(s^{(1)}, \Phi(s^{(1)}, c^{(2)}))(17,3) \\ &= \langle \text{def composición } \Phi \rangle \\ & \quad s^{(1)}(\Phi(s^{(1)}, c^{(2)})(17,3)) \\ &= \langle \text{def composición } \Phi \rangle \\ & \quad s^{(1)}(s^{(1)}(c^{(2)}(17,3))) \\ &= \langle \text{def } c^{(2)} \text{ 3.1.2 - función cero} \rangle \\ & \quad s^{(1)}(s^{(1)}(0)) \\ &= \langle \text{def } s^{(1)} \text{ 3.1.4 - función sucesor} \rangle \\ & \quad 2. \end{aligned}$$

Ejercicio 2 item (d)

$$(d) \quad Pd^{(1)}(412) = R\left(c^{(0)}, p_1^{(2)}\right)(412)$$

$$(d) \quad Pd^{(1)}(412) = R\left(c^{(0)}, p_1^{(2)}\right)(412)$$

Recordamos primero las definiciones.

- $c^{(0)} = 0$ CERO

- $p_1^{(2)}(x, y) = x$ PROYECCIÓN PRIMER COMPONENTE

Recordamos las definiciones para tenerlas presentes y usarlas en el proceso de cálculo pedido en el ejercicio.

Prestar atención a la aridad de las funciones en la recursión, y a cada caso según sea el valor de y .

- $R(g^{(0)}, h^{(2)})(y)$

$$\begin{cases} g^{(0)} & \text{si } \underline{y=0} \quad (\text{CASO BASE}) \\ h^{(2)}(y-1, R(g, h)(y-1)) & \text{si } \underline{y>0} \quad (\text{CASO RECURSIVO}) \end{cases}$$

Ejercicio 2 item (d)

Observar que evaluámos la proyección para calcular el valor, y no nuevamente la recursión. La proyección es la primera operación que podemos resolver sobre toda la expresión.

$$\begin{aligned} & \overset{(1)}{Pd}(412) \\ &= \langle \text{def } \overset{(1)}{Pd} \rangle_h \\ & \quad R(\overset{(0)}{C}, \overset{(2)}{P_1})(412) \\ &= \langle \text{def } R, 412 \rangle_0 \text{ CASO RECURSIVO} \\ & \quad \underbrace{P_1^{(2)}(411, R(\overset{(0)}{C}, \overset{(2)}{P_1})(411))}_1 \\ &= \langle \text{def } \text{proyección } 3.1.3 \rangle \\ & \quad 411. \end{aligned}$$

Ejercicio 3

3. Mostrar que las siguientes funciones son *FRP*:

(a) $\Pi(y, x) = y \times x$

(b) $Fac(x) = x!$

(c) $Exp(y, x) = x^y$

(d) La función *diferencia*, definida por:

$$\tilde{d}(y, x) = \begin{cases} 0 & x < y \\ x - y & x \geq y \end{cases}$$

Notamos generalmente $\tilde{d}(y, x)$ como $x \dot{-} y$.

(e) La función *distinguidora del cero*, definida por:

$$D_0(y) = \begin{cases} 0 & y \neq 0 \\ 1 & y = 0 \end{cases}$$

(f) $k(x, y) = |x - y|$

¿cómo demuestro qué es FRP?

Para demostrar que una función es FRP tenemos que poder probar que es:

- una de las funciones básicas
- se puede obtener mediante la composición y/o recursión de las funciones básicas u otras FRPs.

Ejercicio 3 (a)

$$(a) \quad \Pi(y, x) = y \times x \in \text{FRP?}$$

Veamos que Π se puede escribir como FRP.
Para ello tendré que pensar a Π en términos
del operador $R(g, h)$ y FRPs.

Recordamos.

$$f(y, x^k) = \begin{cases} g(x^k) & \text{si } \underline{y=0} \\ h(y-1, x^k, f(y-1, x^k)) & \text{si } \underline{y>0} \end{cases}$$

f tiene aridad $k+1$

g tienen aridad k

h tienen aridad $k+2$

Ejercicio 3 (a)

A partir de este
cálculo obtengo a g

Para $\pi^{(2)}$, $k=1$. esto hace que
 $g^{(1)}$ y $h^{(3)}$

Vamos a calcular a $g^{(1)}$ y $h^{(3)}$

• CASO $y=0$

$$\pi^{(2)}(0, x) \\ = \langle \text{def } \pi \rangle \\ 0 \times x$$

$$= \langle \text{def } x \rangle \\ 0$$

$$= \langle \text{def función } c^{(1)} \rangle \\ c^{(1)}(x)$$

$$g^{(1)} = c^{(1)}$$

$g^{(1)}$ es FRP ✓

Ejercicio 3 (a)

Trabajo la
expresión
para
exponer la
recursión

• Caso $y > 0$

$$\pi^{(z)}(y, x)$$
$$= \langle y = y + 1 - 1; \text{def } \pi \rangle$$
$$\rightarrow (y - 1 + 1) \times x.$$
$$= \langle \text{prop. distrib} \rangle$$
$$(y - 1) \times x + x.$$
$$= \langle \text{def } \pi \rangle$$
$$\pi^{(z)}(y - 1, x) + x$$

Sigue el cálculo en la próxima slide ...

Ejercicio 3 (a)

Buscamos de reescribir en términos de otras FRPs

$$\begin{aligned} & \pi^{(2)}(y-1, x) + x \\ & \leftarrow \langle \text{def } \Sigma \rangle \\ & \Sigma^{(2)}(\pi^{(2)}(y-1, x), x) \\ & = \langle \text{def } p_3, p_1^3 \rangle \end{aligned}$$

Reescribo la expresión para llevarla a la forma de h y a la aridad de esta función que como dijimos en el ppio es de 3

$$\begin{aligned} & \Sigma^{(2)}(p_3^3(y-1, x, \pi^{(2)}(y-1, x)) \\ & \quad \cdot p_2^3(y-1, x, \pi^{(2)}(y-1, x))) \\ & = \langle \text{def } \Phi \rangle \end{aligned}$$

$$\Phi(\Sigma^{(2)}, p_3^3, p_2^3)(y-1, x, \pi^{(2)}(y-1, x)).$$

Lo llevamos a la forma de h en la recursión R. Siempre tener presente esto.

Ejercicio 3 (a)

$$\text{Luego } h^{(3)} = \Phi(\mathcal{Z}^{(2)}, p_3^{(3)}, p_2^{(3)})$$

Por lo tanto siendo $\mathcal{Z}^{(2)}$ una FRP y
 $p_3^{(3)}, p_2^{(3)}$ FRP (por ser funciones básicas)
luego la composición Φ de FRP es FRP y
con ello h es FRP.

$$\text{Luego } \pi^{(2)} = R(c^{(1)}, \Phi(\mathcal{Z}^{(2)}, p_3^{(3)}, p_2^{(3)}))$$

es una FRP por ser la recursión de FRP.

Resolución de Ejercicios

- El resto de lo ejercicios de esta sección del ítem (b) al ítem (d) pueden resolverlos de igual manera, no revisten de mayor dificultad. Adelante!!!
- Resolveremos un ejercicio más de esta sección, la función distinguidora del cero, que resulta útil para los restantes ejercicios (f) - (i)

(e) La función distinguidora del cero.

$$D_0(y) = \begin{cases} 0 & y \neq 0 \\ 1 & y = 0 \end{cases}$$

c Do es FRP?

Ejercicio 3(d)

¿cómo demuestro qué es FRP?

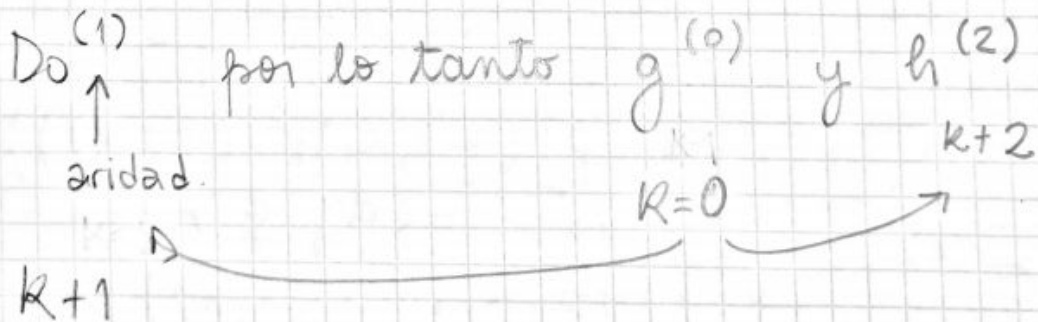
Siempre recordar esto!!!



Para demostrar que una función es FRP tenemos que poder probar que es:

- una de las funciones básicas
- se puede obtener mediante la composición y/o recursión de las funciones básicas u otras FRPs.

Tengo que demostrar que se puede escribir
a D_0 en términos de $R(g, h)$ donde:



Primero
determinar la
aridad de las
funciones

Segundo: definimos la estrategia.

En este caso, demostrar que D_0 es una FRP mediante el operador recursión R.

Recordar la definición de una función f recursivamente usando el operador R.

$$f^{(k+1)}(y, x^k) = \begin{cases} g^{(k)}(x^k) & y=0 \\ h^{(k+2)}(y-1, x^k, f(y-1, x^k)) & y>0 \end{cases}$$

Entonces necesito hallar $g^{(k)}$ y $h^{(k+2)}$ para ello voy a plantear

1) CASO $y=0 \rightarrow$ Para hallar g .

2) CASO $y>0 \rightarrow$ Para hallar h .

Ejercicio 3(d)

CASO $\gamma=0$ (cálculo $g^{(0)}$)

$$D_0^{(1)}(0)$$

$$= \langle \text{def } D_0^{(1)} \rangle$$

$$1$$

$$= \langle \text{neutro} + \rangle$$

$$0+1$$

$$= \langle \text{def } C^{(0)}, \text{ sucesor} \rangle$$

$$S^{(1)}(C^{(0)}(1))$$

$$= \langle \text{def } \Phi \text{ composición} \rangle$$

$$\Phi(S^{(1)}, C^{(0)})(1).$$

$$\boxed{\therefore g^{(0)} = \Phi(S^{(1)}, C^{(0)})(1)}$$

$g^{(0)}$ es FRP por
ser composición de
FRP.

Ejercicio 3(d)

Caso $y > 0$ (calcular $h^{(2)}$)

$$D_0^{(1)}(y) \\ = \langle \text{def } D_0^{(1)} \text{ con } y > 0 \rangle$$

$$= \langle \text{def } C^{(2)} \rangle$$

$$C^{(2)}(y-1, D_0^{(1)}(y-1))$$

$$\therefore h^{(2)} = C^{(2)}(y-1, D_0^{(1)}(y-1))$$

$h^{(2)}$ es FRP por ser función básica.

Ejercicio 3(d)

Entonces:

$$D_0^{(1)}(y) = R(\Phi(S^{(1)}, c^{(0)}), c^{(2)})(y)$$

Luego $D_0^{(1)}$ es una FRP.

Seguir Trabajando...

- Continuar trabajando sobre la práctica y realizar consultas sobre los ejercicios que no salen, o aquellos dónde nos trabamos, o también corroborar si lo que se ha hecho esta bien.
- Los escuchamos por los medios de comunicación:
 - Chat de telegram
 - Foros por práctica
 - Aquellos que desean consultar más en privacidad, pueden enviarnos un mail a nuestras direcciones:

- Natalia Colussi (natalia.colussi@gmail.com)
- Alejandro Hernandez (aleh@fceia.unr.edu.ar)
- Valeria Perez Moguetta (valeperezmog@gmail.com)