

PRÁCTICA 3: *Funciones Recursivas Primitivas*

Dante Zanarini

Denise Marzorati

Alejandro Hernández

Valeria Perez Mogetta

Funciones recursivas primitivas

1. Mostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $g_n(x) = n$ para todo $x \in \mathbb{N}$ es recursiva primitiva.

2. Realizar los siguientes cálculos:

$$(a) \text{ dos}^{(2)}(17, 3) = \Phi(s^{(1)}, \Phi(s^{(1)}, c^{(2)}))(17, 3)$$

$$(b) \text{ Mas2}^{(1)}(5) = \Phi(s^{(1)}, s^{(1)})(5)$$

$$(c) \Sigma^{(2)}(1, 3) = R(p_1^{(1)}, \Phi(s^{(1)}, p_3^{(3)}))(1, 3)$$

$$(d) \text{ Pd}^{(1)}(412) = R(c^{(0)}, p_1^{(2)})(412)$$

3. Mostrar que las siguientes funciones son *FRP*:

$$(a) \Pi(y, x) = y \times x$$

$$(b) \text{ Fac}(x) = x!$$

$$(c) \text{ Exp}(y, x) = x^y$$

(d) La función *diferencia*, definida por:

$$\tilde{d}(y, x) = \begin{cases} 0 & x < y \\ x - y & x \geq y \end{cases}$$

Notamos generalmente $\tilde{d}(y, x)$ como $x \dot{-} y$.

(e) La función *distinguidora del cero*, definida por:

$$D_0(y) = \begin{cases} 0 & y \neq 0 \\ 1 & y = 0 \end{cases}$$

$$(f) k(x, y) = |x - y|$$

(g) La función $E^{(2)}$ definida por:

$$E(x, y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$$

(h) La función $\neg E^{(2)}$ definida por:

$$\neg E(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

(i) La función *signo*, definida por:

$$Sgn(y) = \begin{cases} 0 & y = 0 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$$

4. Definir la siguiente función: $\hat{d}(x, y) = \begin{cases} 0 & x < y \\ x - y & x \geq y \end{cases}$.

Sugerencia: utilizar la función \tilde{d} definida en el ejercicio anterior.

5. Sumatorias y productorias:

(a) Sea $f^{(2)}$ una *FRP* de dos variables. Definimos dos nuevas funciones $F^{(2)}$ y $G^{(2)}$ de la siguiente manera:

$$F^{(2)}(y, x) = \sum_{z=0}^y f^{(2)}(z, x)$$

$$G^{(2)}(y, x) = \prod_{z=0}^y f^{(2)}(z, x)$$

Mostrar que F y G son *FRP*.

(b) Más generalmente, sea $f^{(k+1)}$ una *FRP* de $k + 1$ variables. Definimos dos nuevas funciones $F^{(k+1)}$ y $G^{(k+1)}$ de la siguiente manera:

$$F(y, X) = \sum_{z=0}^y f(z, X)$$

$$G(y, X) = \prod_{z=0}^y f(z, X)$$

donde X representa una k -upla. Mostrar que F y G son *FRP*.

6. Sea $f^{(1)} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Definimos una nueva función $F^{(2)}$ llamada función *potencia* de f como

$$F(y, x) = \begin{cases} x & y = 0 \\ f(F(y-1, x)) & y > 0 \end{cases}$$

Notamos generalmente $F(y, x)$ como $f^y(x)$.

- (a) Mostrar que $\Sigma(y, x) = s^y(x)$.
- (b) Mostrar que si f es una *FRP*, entonces F resulta una *FRP*.
- (c) Escribir la función diferencia \hat{d} utilizando la función potencia.

Conjuntos recursivos primitivos

- 7. Mostrar que todo subconjunto unitario de \mathbb{N} es un *CRP*.
- 8. Probar que si $A, B \subseteq \mathbb{N}$ son *CRP*, entonces $\neg A$, $A \cup B$ y $A \cap B$ son *CRP*.
- 9. Mostrar que todos los subconjuntos finitos de \mathbb{N} son *CRP*.
- 10. Repetir los tres ejercicios anteriores considerando ahora subconjuntos de \mathbb{N}^k con $k \in \mathbb{N}$.
- 11. Mostrar que el conjunto de los números pares es un *CRP*.
- 12. Mostrar que el conjunto de los múltiplos de 3 es un *CRP*.

Sugerencia: Probar que la función $r_3 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que toma un natural y devuelve el resto de la división entera por 3 es una *FRP*, y usarla para escribir la función característica de los múltiplos de 3.

Relaciones recursivas primitivas

Una relación $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se dice *recursiva primitiva* (RRP) si es un CRP.

13. Mostrar que $=, \neq, \leq$ y $>$ son RRP.

14. Probar que si $R, S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ son RRP, entonces también lo son las relaciones T, U y $\neg R$, donde

$$\begin{aligned} xTy &= xRy \wedge xSy \\ xUy &= xRy \vee xSy \\ x(\neg R)y &= \neg(xRy) \end{aligned}$$

15. Teniendo en cuenta los resultados del ultimo ítem, ¿cómo podríamos haber probado que \neq y $>$ son RRP?

16. Sea $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Definimos $\bigwedge R$ y $\bigvee R$ de la siguiente manera:

$$x\left(\bigwedge R\right)y \iff \forall k \in \mathbb{N}/0 \leq k \leq y \text{ se tiene } xRk$$

$$x\left(\bigvee R\right)y \iff \exists k \in \mathbb{N}/0 \leq k \leq y \text{ para el cual } xRk$$

Probar que si R es una RRP, entonces $\bigwedge R$ y $\bigvee R$ también son RRP.

Varios

17. Probar que la relación de divisibilidad entre naturales es una RRP.

Sugerencia: Defina la familia de funciones $r_a^{(1)}, a = 1, 2, \dots$; donde $r_a^{(1)}(n)$ devuelve el resto de dividir n por a , y escriba la función característica de la relación en términos de estas funciones.

18. Probar que las siguientes funciones son FRP:

$$(a) \ f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es múltiplo de } 3 \\ x+3 & \text{si } x \text{ tiene resto } 1 \text{ en la división por } 3 \\ x! & \text{si } x \text{ tiene resto } 2 \text{ en la división por } 3 \end{cases}$$

$$(b) \ \max(x, y) = \begin{cases} y & x \leq y \\ x & y \leq x \end{cases}$$