Anexo. **Más resultados sobre límites**

Repaso de definiciones

Definición. Límite finito

Se dice que un número L es el límite de la función f en el punto a, y se nota

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

si para cualquier $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$, tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(F) \wedge \ 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \epsilon.$$

Definición. Límites laterales finitos

-a- Se dice que un número L es el límite por derecha de la función f en el punto a, y se nota

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L,$$

si para cualquier $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$, tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge \ a < x < a + \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \epsilon.$$

-b- Se dice que un número L es el límite por izquierda de la función f en el punto a, y se nota

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L,$$

si para cualquier $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$, tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(F) \wedge \ a - \delta < x < a \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \epsilon.$$

Definición. Límites laterales infinitos

-a- Se dice que el límite por derecha de la función f en el punto a es **más infinito**, y se nota

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty,$$

si para cualquier $M > 0$, existe un número $\delta > 0$, tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge \ a < x < a + \delta \ \Rightarrow \ f(x) > M.$$

-b- Se dice que el límite por derecha de la función f en el punto a es **menos infinito**, y se nota

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty,$$

si para cualquier $M > 0$, existe un número $\delta > 0$, tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge \ a < x < a + \delta \ \Rightarrow \ f(x) < -M.$$

-c- Análogamente, se definen los límites por izquierda de la función f en el punto a cuando sean $+\infty$ o $-\infty$, considerando los semientornos a izquierda $a-\delta < x < a$.

Definición. Límites en el infinito

-a- Se dice que el límite cuando x tiende a más infinito de una función f es L, y se nota

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L,$$

si para cualquier $\epsilon > 0$, existe un número $H > 0$, tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge \ x > H \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \epsilon.$$

-b- Se dice que el límite cuando x tiende a menos infinito de una función f es L, y se nota

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L,$$

si para cualquier $\epsilon > 0$, existe un número $H > 0$, tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge \ x < -H \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \epsilon.$$

-c- Se dice que el límite cuando x tiende a más infinito de una función f es más infinito, y se nota

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

si para cualquier $M > 0$, existe un número $H > 0$, tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge \ x > H \ \Rightarrow \ f(x) > M.$$

-d- Se dice que el límite cuando x tiende a más infinito de una función f es menos infinito, y se nota

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty,$$

si para cualquier $M > 0$, existe un número $H > 0$, tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge \ x > H \ \Rightarrow \ f(x) < -M.$$

-e- Se dice que el límite cuando x tiende a menos infinito de una función f es más infinito, y se nota

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty,$$

si para cualquier $M > 0$, existe un número $H > 0$, tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge \ x < -H \ \Rightarrow \ f(x) > M.$$

-f- Se dice que el límite cuando x tiende a menos infinito de una función f es menos infinito, y se nota

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty,$$

si para cualquier $M > 0$, existe un número $H > 0$, tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge \ x < -H \ \Rightarrow \ f(x) < -M.$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Algunos resultados - Más álgebra de límites

Teorema. *Sea $a \in \mathbb{R}$, sean f y g funciones reales tales que*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim_{x \to a^+} g(x) = +\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x \to a^+} (f+g)(x) = +\infty.$$

Demostración. Recordemos que $\mathrm{Dom}(f+g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$.

Sea $M > 0$ cualquiera. A partir de la definición, queremos hallar $\delta > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \wedge\ a < x < a + \delta \ \Rightarrow (f+g)(x) > M.$$

En primer lugar, como $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$, en particular se sabe que $\exists\ \delta_1 > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge\ a < x < a + \delta_1 \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < 1 \ \Rightarrow\ L - 1 < f(x) < L + 1 \ \Rightarrow\ f(x) > L - 1. \quad (1)$$

Como $\lim_{x \to a^+} g(x) = +\infty$, considerando $K = \max\{M, M - L + 1\}$, resulta $K > 0$, y sabemos que $\exists\ \delta_2 > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(g) \wedge\ a < x < a + \delta_2 \ \Rightarrow\ g(x) > K \ \Rightarrow\ g(x) > M - L + 1. \quad (2)$$

Considerando ahora $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, se tiene $\delta > 0$ tal que, por (1) y (2),

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \wedge\ a < x < a + \delta \ \Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) > (L-1) + (M - L + 1) = M.$$

Es decir, para $M > 0$ hemos encontrado un $\delta > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f+g) \wedge\ a < x < a + \delta \ \Rightarrow (f+g)(x) > M.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \to a^+} (f+g)(x) = +\infty.$$

□

Corolario. *Sea $a \in \mathbb{R}$, sean f y g funciones reales tales que*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim_{x \to a^+} g(x) = -\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x \to a^+} (f+g)(x) = -\infty.$$

Demostración. Consideremos la función $\tilde{g}$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(g) \ \Rightarrow \tilde{g}(x) = -g(x).$$

Luego, por el ítem 4 del Teorema 10 de la página 21 del apunte, sabemos que

$$\lim_{x \to a^+} \tilde{g}(x) = +\infty$$

(En realidad, estaríamos usando la Proposición 7 por tratarse de límites laterales).

Entonces, con $\tilde{g}$ y f se puede utilizar el teorema anterior y obtener el resultado de este corolario.

□

Corolario. *Sea $a \in \mathbb{R}$, sean f, g_1 y g_2 funciones reales tales que*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim_{x \to a^-} g_1(x) = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \to a^-} g_2(x) = -\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x \to a^-} (f + g_1)(x) = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \to a^-} (f + g_2)(x) = -\infty.$$

Demostración. Para ver este corolario basta reescribir la demostración del teorema anterior considerando siempre los semientornos a izquierda del punto a, es decir, $a - \delta < x < a$.

□

Teorema. *Sea $a \in \mathbb{R}$, sean f y g funciones reales tales que*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \neq 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \to a^+} g(x) = +\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x \to a^+} (fg)(x) = \begin{cases} +\infty & L > 0, \\ -\infty & L < 0. \end{cases}$$

Demostración. Consideremos primero el caso $L > 0$.

Recordemos que $\mathrm{Dom}(fg) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$.

Sea $M > 0$ cualquiera. A partir de la definición, queremos hallar $\delta > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \wedge \ a < x < a + \delta \ \Rightarrow (fg)(x) > M.$$

Como $\lim_{x \to a^+} f(x) = L > 0$, aplicando el Teorema 4 (para el caso de límite lateral) del Apunte de la Unidad 3, sabemos que existe $\rho > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge \ a < x < a + \rho \ \Rightarrow f(x) > \frac{L}{2} > 0.$$

Consideremos ahora $K = \dfrac{2M}{L}$. Luego, $K > 0$, ya que $M > 0$ y $L > 0$. Ahora, como $\lim_{x \to a^+} g(x) = +\infty$, entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(g) \wedge \ a < x < a + \delta_1 \ \Rightarrow g(x) > K.$$

Consideremos entonces $\delta = \min\{\rho, \delta_1\}$. Resulta $\delta > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \wedge \ a < x < a + \delta \ \Rightarrow f(x)g(x) > \frac{L}{2}\, K = \frac{L}{2}\, \frac{2M}{L} = M.$$

Es decir, a partir de un $M > 0$ dado, hemos encontrado un $\delta > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(fg) \wedge \ a < x < a + \delta \ \Rightarrow (fg)(x) > M.$$

Consideremos ahora el caso $L < 0$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Sea $M > 0$ cualquiera. A partir de la definición, queremos hallar $\delta > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \wedge \ a < x < a + \delta \ \Rightarrow (fg)(x) < -M.$$

Como $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L < 0$, aplicando nuevamente el Teorema 4, sabemos que existe $\rho > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge \ a < x < a + \rho \ \Rightarrow f(x) < \frac{L}{2} < 0.$$

Consideremos ahora $K = \dfrac{-2M}{L}$. Luego, $K > 0$, ya que $M > 0$ y $L < 0$.

Ahora, como $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = +\infty$, entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(g) \wedge \ a < x < a + \delta_1 \ \Rightarrow g(x) > K.$$

Consideremos entonces $\delta = \min\{\rho, \delta_1\}$. Resulta $\delta > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \wedge \ a < x < a + \delta \ \Rightarrow f(x) < \frac{L}{2} < 0 \ \wedge \ g(x) > K \ \Rightarrow f(x)g(x) < \frac{L}{2}\,K.$$

Es decir, a partir de un $M > 0$ dado hemos encontrado un $\delta > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(fg) \wedge \ a < x < a + \delta \ \Rightarrow (fg)(x) > M.$$

□

Corolario. *Sea $a \in \mathbb{R}$, sean f y g funciones reales tales que*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \neq 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \to a^+} g(x) = -\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x \to a^+} (fg)(x) = \begin{cases} -\infty & L > 0, \\ +\infty & L < 0. \end{cases}$$

Demostración. Consideremos la función $\tilde{g}$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(g) \ \Rightarrow \tilde{g}(x) = -g(x).$$

Luego, por el ítem 4 del Teorema 10 de la página 21 del apunte, sabemos que

$$\lim_{x \to a^+} \tilde{g}(x) = +\infty$$

(En realidad, estaríamos usando la Proposición 7 por tratarse de límites laterales).

Entonces, con $\tilde{g}$ y f se puede utilizar el teorema anterior y obtener el resultado de este corolario.

□

Corolario. *Sea $a \in \mathbb{R}$, sean f, g_1 y g_2 funciones reales tales que*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L \neq 0 \quad \wedge \quad \lim_{x\to a^-} g_1(x) = +\infty \wedge \quad \lim_{x\to a^-} g_2(x) = -\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x\to a^-} (f \cdot g_1)(x) = \begin{cases} +\infty & L > 0, \\ -\infty & L < 0. \end{cases}$$

y

$$\lim_{x\to a^-} (f \cdot g_2)(x) = \begin{cases} -\infty & L > 0, \\ +\infty & L < 0. \end{cases}$$

Demostración. Para ver este corolario basta reescribir la demostración del teorema anterior considerando siempre los semientornos a izquierda del punto a, es decir, $a - \delta < x < a$.

□

Teorema. *Sean f y g funciones reales tales que*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x\to+\infty} (f+g)(x) = +\infty.$$

Demostración. Probemos primero que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f+g)(x) = +\infty$.

Recordemos que $\mathrm{Dom}(f+g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$.
Sea $M > 0$ cualquiera. A partir de la definición, queremos hallar $H > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \wedge \ x > H \ \Rightarrow (f+g)(x) > M.$$

En primer lugar, como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, se sabe que $\exists\ H_1 > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge \ x > H_1 \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < 1 \ \Rightarrow \ L - 1 < f(x) < L + 1 \ \Rightarrow \ f(x) > L - 1. \tag{3}$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, considerando $K = \max\{M, M - L + 1\}$, resulta $K > 0$, y sabemos que $\exists\ H_2 > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(g) \wedge \ x > H_2 \ \Rightarrow \ g(x) > K \ \Rightarrow \ g(x) > M - L + 1. \tag{4}$$

Considerando ahora $H = \max\{H_1, H_2\}$, se tiene $H > 0$ tal que, por (3) y (4),

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \wedge \ x > H \ \Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) > (L-1) + (M - L + 1) = M.$$

Es decir, para $M > 0$ hemos encontrado un $H > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f+g) \wedge \ x > H \ \Rightarrow (f+g)(x) > M.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to+\infty} (f+g)(x) = +\infty.$$

□

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Corolario. *Sean f y g funciones reales tales que*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x\to+\infty} (f+g)(x) = -\infty.$$

Demostración. Consideremos la función $\tilde{g}$ tal que

$$x \in \text{Dom}(g) \ \Rightarrow \tilde{g}(x) = -g(x).$$

Luego, por álgebra de límites en el infinito, sabemos que

$$\lim_{x\to a^+} \tilde{g}(x) = +\infty$$

Entonces, con $\tilde{g}$ y f se puede utilizar el teorema anterior y obtener el resultado de este corolario. □

Corolario. *Sean f, g_1 y g_2 funciones reales tales que*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim_{x\to-\infty} g_1(x) = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to-\infty} g_2(x) = -\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x\to-\infty} (f+g_1)(x) = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to-\infty} (f+g_2)(x) = -\infty.$$

Demostración. Para ver este corolario basta reescribir la demostración del teorema anterior o del corolario anterior, considerando siempre $x < -H$ y las adaptaciones que correspondan. □

Teorema. *Sean f y g funciones reales tales que*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \neq 0 \quad \wedge \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x\to+\infty} (fg)(x) = \begin{cases} +\infty & L > 0, \\ -\infty & L < 0. \end{cases}$$

Demostración. Consideremos primero el caso $L > 0$.
Recordemos que $\text{Dom}(fg) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$.
Sea $M > 0$ cualquiera. A partir de la definición, queremos hallar $H > 0$ tal que

$$x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \wedge \ x > H \ \Rightarrow (fg)(x) > M.$$

Como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L > 0$, aplicando el Teorema 4 (para el caso de límite en el infinito) del Apunte de la Unidad 3, sabemos que existe $T > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge\ x > T\ \Rightarrow f(x) > \frac{L}{2} > 0.$$

Consideremos ahora $K = \dfrac{2M}{L}$. Luego, $K > 0$, ya que $M > 0$ y $L > 0$. Ahora, como $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, entonces existe $H_1 > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(g) \wedge\ x > H_1\ \Rightarrow g(x) > K.$$

Consideremos entonces $H = \max\{T, H_1\}$. Resulta $H > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \wedge\ x > H\ \Rightarrow f(x)g(x) > \frac{L}{2}\,K = \frac{L}{2}\,\frac{2M}{L} = M.$$

Es decir, a partir de un $M > 0$ dado, hemos encontrado un $H > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(fg) \wedge\ x > H\ \Rightarrow (fg)(x) > M.$$

Consideremos ahora el caso $L < 0$.

Sea $M > 0$ cualquiera. A partir de la definición, queremos hallar $H > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \wedge\ x > H\ \Rightarrow (fg)(x) < -M.$$

Como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L < 0$, aplicando nuevamente el Teorema 4, sabemos que existe $T > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge\ x > T\ \Rightarrow f(x) < \frac{L}{2} < 0.$$

Consideremos ahora $K = \dfrac{-2M}{L}$. Luego, $K > 0$, ya que $M > 0$ y $L < 0$.

Ahora, como $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, entonces existe $H_1 > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(g) \wedge\ x > H_1\ \Rightarrow g(x) > K.$$

Consideremos entonces $H = \max\{T, H_1\}$. Resulta $H > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \wedge\ x > H\ \Rightarrow f(x) < \frac{L}{2} < 0\ \wedge\ g(x) > K\ \Rightarrow f(x)g(x) < \frac{L}{2}\,K.$$

Es decir, a partir de un $M > 0$ dado hemos encontrado un $H > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(fg) \wedge\ x > H\ \Rightarrow (fg)(x) > M.$$

$\square$

Corolario. *Sean f y g funciones reales tales que*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \neq 0 \quad \wedge \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x\to+\infty} (fg)(x) = \begin{cases} -\infty & L > 0, \\ +\infty & L < 0. \end{cases}$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Demostración. Consideremos la función $\tilde{g}$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(g) \ \Rightarrow \tilde{g}(x) = -g(x).$$

Luego, por el ítem 4 del Teorema 10 de la página 21 del apunte (para el caso de límite en el infinito), sabemos que

$$\lim_{x \to +\infty} \tilde{g}(x) = +\infty$$

Entonces, con $\tilde{g}$ y f se puede utilizar el teorema anterior y obtener el resultado de este corolario.

□

Corolario. *Sean f, g_1 y g_2 funciones reales tales que*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \neq 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \to -\infty} g_1(x) = +\infty \wedge \quad \lim_{x \to -\infty} g_2(x) = -\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x \to -\infty} (f \cdot g_1)(x) = \begin{cases} +\infty & L > 0, \\ -\infty & L < 0. \end{cases}$$

y

$$\lim_{x \to -\infty} (f \cdot g_2)(x) = \begin{cases} -\infty & L > 0, \\ +\infty & L < 0. \end{cases}$$

Demostración. Para ver este corolario basta reescribir la demostración del teorema anterior considerando siempre $x < -H$ y las adaptaciones que correspondan.

□

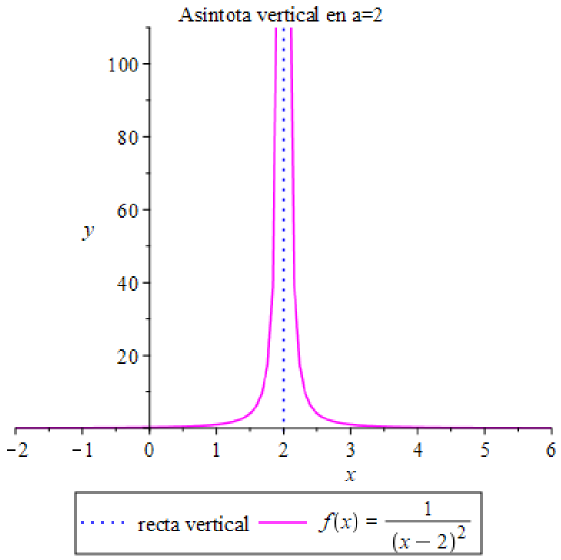
Repaso: Asíntotas

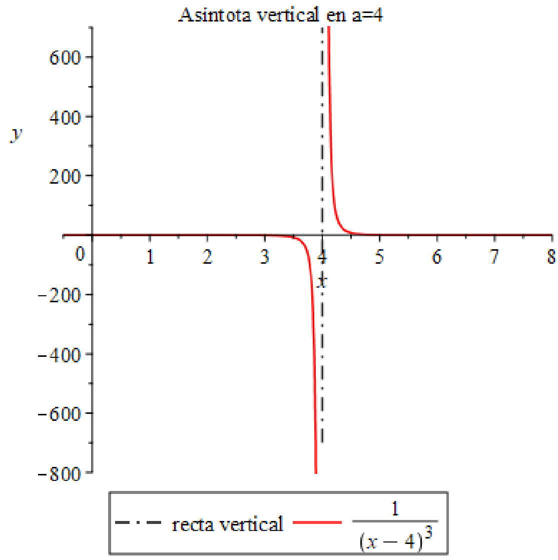
Ahora podemos definir formalmente la idea de asíntota que ya veníamos usando.

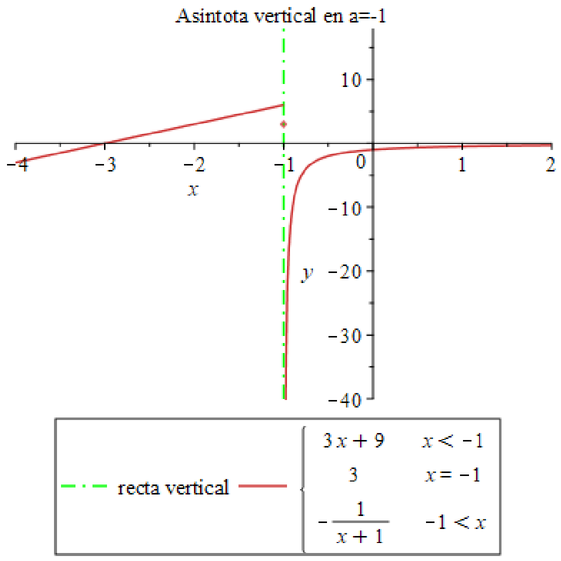
Definición. Se dice que la recta vertical $x = a$ es una *asíntota vertical* de la función f en el punto a si se verifica **por lo menos uno** de estos cuatro límites

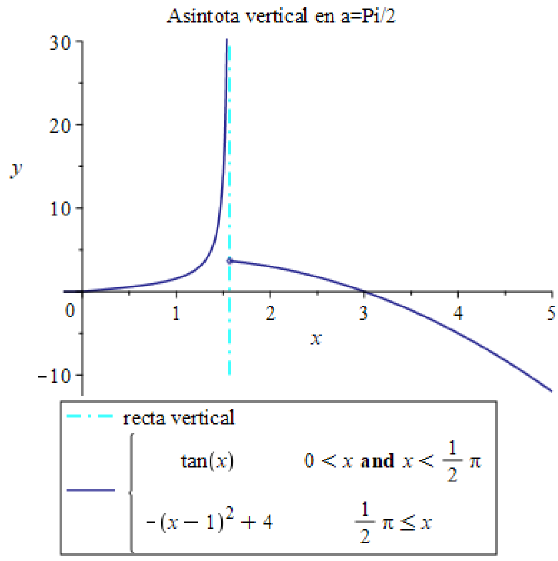
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty.$$

Algunos ejemplos







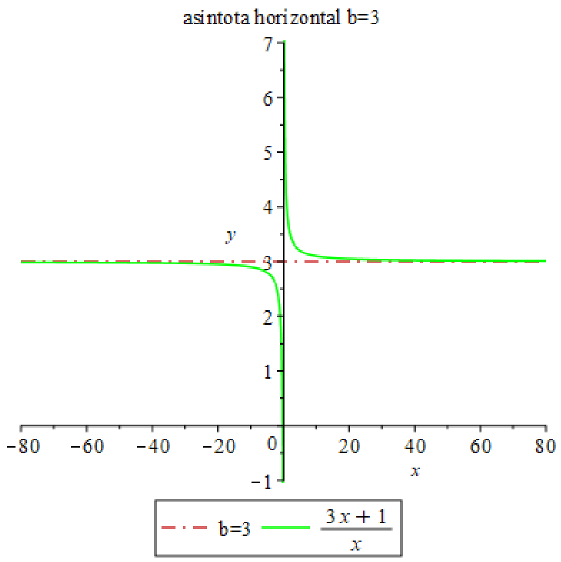


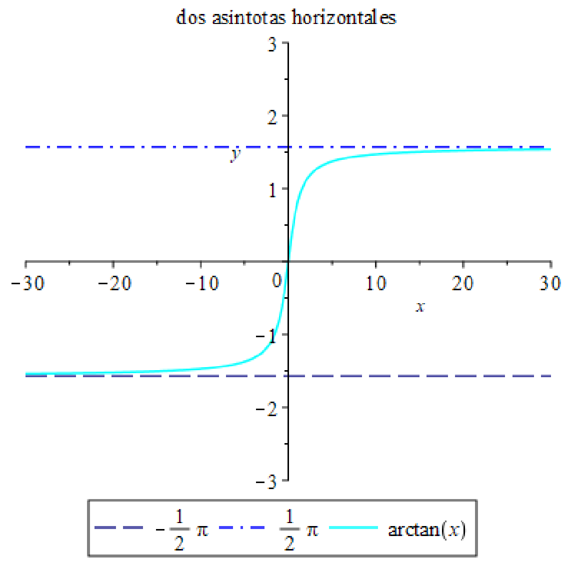
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

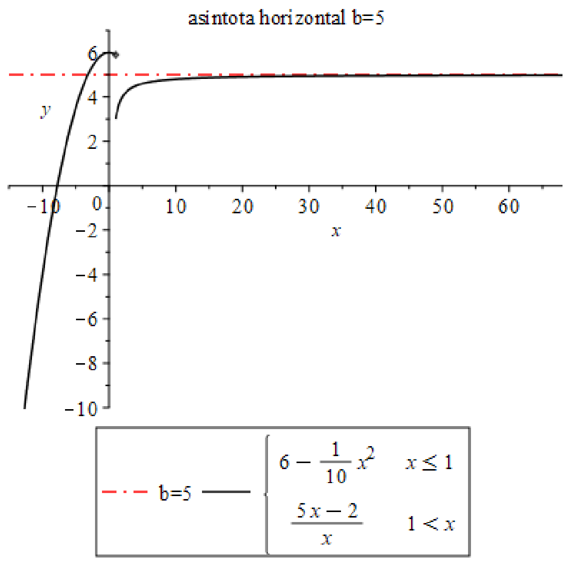
Definición. Se dice que la recta horizontal $y = b$ es una *asíntota horizontal* de función f si se verifica **por lo menos uno** de estos dos límites

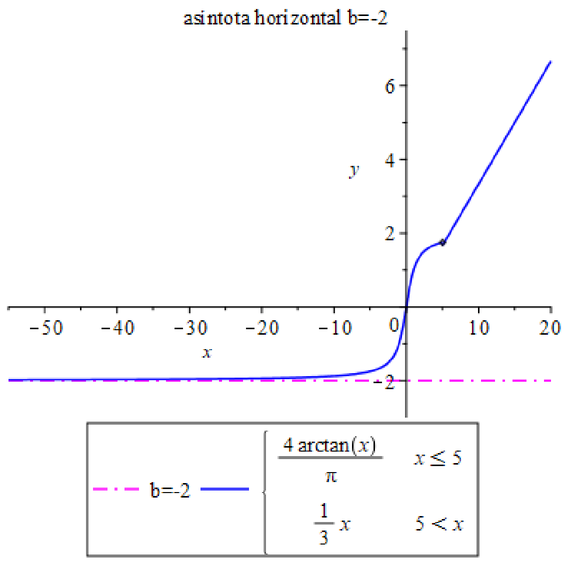
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

Algunos ejemplos





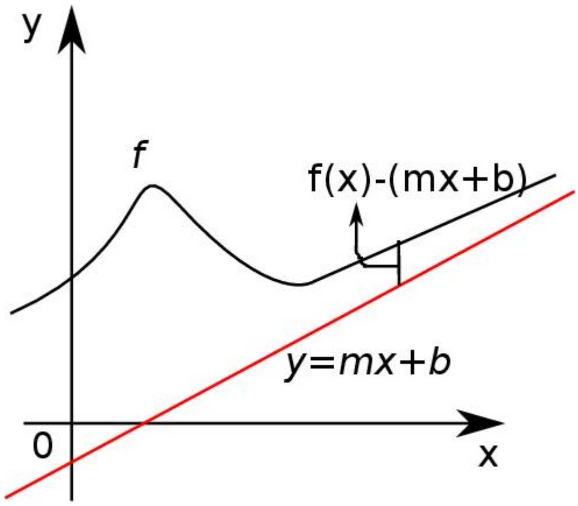




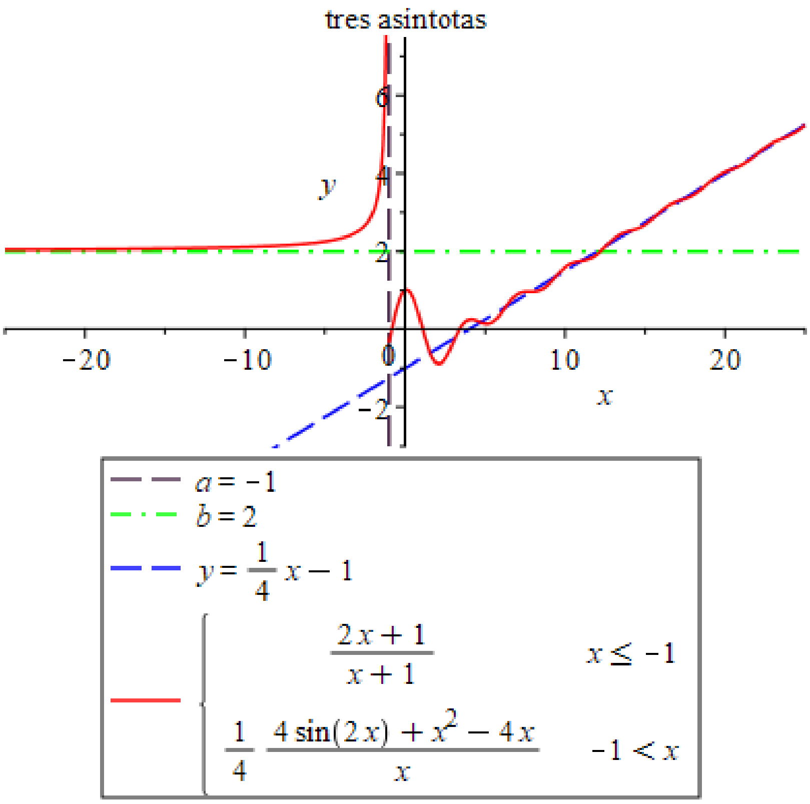
Definición. Se dice que la recta $y = mx + b$, con $m \neq 0$, es una *asíntota oblicua* de la función f si se verifica **por lo menos uno** de estos dos límites

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$$

La definición indica que la distancia entre la curva $y = f(x)$ y la recta $y = mx + b$ tiende a 0, como se observa en la figura .



Ejemplo



Ejercicios

1. Calcular los siguientes:

   a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2x^4 + x^3 + 1}{x^2}$.

   b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^4 + x^3 + x - 1}{x^2}$.

   c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{x - \frac{\pi}{2}}{sen(x - \frac{\pi}{2})}\, tan(x)$

2. Calcular los límites necesarios para verificar las asíntotas de los ejemplos anteriores. Observar que en cada ejemplo se presenta la ley de la función, la ecuación de las asíntotas y las gráficas completas.

3. Determinar, si existen, todas las asíntotas de las siguientes funciones.

   a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 10 \\ \dfrac{x-1}{x^2 - 10x} & \text{si } x > 10. \end{cases}$

   b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{3x-5}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{x^4 - 1}{x^3} & \text{si } x > 2. \end{cases}$

4. Probar que si
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim_{x \to a^+} g(x) = \pm\infty,$$
   entonces
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f}{g}(x) = 0.$$
   Sugerencia: Una opción para probarlo es utilizar el item 1 de la Proposición 10, el Teorema 3 y el Teorema 6 del Apunte de la Unidad 3. En cada caso con el límite que corresponda.

   Observar que este resultado también es válido si reemplazamos $x \to a^+$ por $x \to a^-$, $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$.