PRÁCTICA 4: *Funciones Recursivas*

Pamela Viale Natalia Colussi Alejandro Hernández Valeria Perez Mogetta

1. Demuestre que las funciones recursivas primitivas son totales.

2. Sea $\{f_k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ el conjunto de funciones de Ackermann visto en teoría. Demuestre las siguientes propiedades:

   (a) $\forall k \in \mathbb{N} \quad f_k(x) \in FRP$

   (b) $\forall x, k \in \mathbb{N} \quad f_k(x) > x$

   (c) $\forall x_1, x_2, k \in \mathbb{N} \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f_k(x_1) < f_k(x_2)$

   (d) $\forall x, k \in \mathbb{N} \quad f_k(x) < f_{k+1}(x)$

3. Defina las siguientes funciones como FR:

   (a) $f(x, y) = x - y$

   (b) $g(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$

   (c) $h(x) = \sqrt{x}$

4. Sea la función $div(x, y) = \lfloor x/y \rfloor$. Se pide:

   (a) Exprese la función $div(x, y)$ como FR suponiendo que $0/0$ no está definido.

   (b) Exprese la función $div(x, y)$ como FR suponiendo que $0/0 = 0$.

   (c) Defina la función $mod(x, y)$ (que da el resto de la división entera entre x e y) como FR utilizando la definición de $div(x, y)$.

5. Considere la función:

$$menos(x, y) = \begin{cases} x & \text{si} \;\; y = 0 \\ pd(menos(x, pd(y))) & \text{si} \;\; y \geq 1 \end{cases}$$

   (a) Calcule $f(4)$, donde f se define como $f(x) = \mu_y(menos(x, pd(y)))$.

   (b) ¿Es parcial o total la función definida en el ítem anterior?

6. Si $g(x, y)$ es una FRP y $m \in \mathbb{Z}$, defina una FR que halle el menor valor de y donde g vale m.

7. Escriba la siguiente función como FR: $g(y, x) = \sqrt[y]{x^2 + x + 6}$. ¿Podríamos definir esta función como FRP? Justifique.

8. Muestre que la siguiente función es FR:

$$\begin{array}{rccc} r: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & n & \to & r(n) = \lfloor log_2((n+3)^3) \rfloor \end{array}$$

9. Sea $f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ es par} \\ 3n+1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$. Defina una función recursiva $F(x)$ que devuelva la mínima cantidad de aplicaciones sucesivas de f que son necesarias para llegar a 1. Por ejemplo:

   - $f(f(f(8))) = 1$, por lo que $F(8) = 3$
   - $f(f(f(f(f(f(f(f(f(13))))))))) = 1$, por lo que $F(13) = 9$

   Ayuda: no intente resolver analíticamente cuál es el mínimo número de veces que se necesita aplicar f para un argumento n cualquiera con la intención de luego implementar dicha solución analítica. En cambio, proponga directamente una función que haga el trabajo de encontrar dicho número por usted.