Práctica 2: Conjuntos Inductivos

Cátedra: Lenguajes Formales y Computabilidad Aulas Virtuales - Pandemia Covid19

Docentes en Práctica

- Alejandro Hernandez
- Natalia Colussi
- Valeria Perez Moguetta

Ejercicio 1:

- Defina inductivamente los siguientes conjuntos:
 - (a) El conjunto de los números naturales múltiplos de 3.
 - (b) El conjunto de los números enteros múltiplos de 3.

- Para dar una definición inductiva tenemos que pensar en los dos aspectos que tiene una definición de este tipo:
 - CASO BASE. ← Podríamos tener más de un caso base.or
 - CASO INDUCTIVO. ___
 - CLAUSURA.

Podríamos tener mas de una regla en el caso inductivo.

Vamos hacer un bosquejo del item (a) el item (b) es similar.

Resolución 1 item (a)

(a) El conjunto de los numeros naturales multiplo de 3. M3 = Im & No: mes multiplo de 3} CASO BASE (1) 0 € M3 CASO INDUCTIVO (ii) SU MEM3 entences n+3 e M3 CLAUSURA iii) Los elementos obtenidos aplicando las respas anteriores son los cínicos elem.

podríamos usar otro caso base?

podríamos formular esta regla de otra manera?. Estaría bien?

No olvidarse de la clausura. Muchas veces la enunciamos al ppio al definir el conjunto. Decimos por ejemplo: "Sea M3 el minímo conjunto talque: ..."

Otra solución para (a)

```
Poduamo revolverlo de otra forma.
: Como ?
 M3= 3 m E M: m es un multysto de 33.
  CASO BASE
  i) 3 € M3
  CASO INDUCTIVO
  u) m, m & M3 entouses m+m & M3
  CLAUSURA
  iii) less elementos oftenidos apticando las
   reglas anteriores son los unicos elementos
```

¿Qué diferencia hay entre ambas definiciones?

¿Hay una que está bien y la otra mal? ¿En qué me favorece en que me perjudica?

Se puede demostrar que son equivalentes. EJERCICIO!

1) item (b)

(b)
$$M_3' = \{ m \in 72 \text{ m es multiple 3 } \}$$
 $M_3' = \{ ... -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, ... \}$
 $M_3 = \{ 0, 3, 6, 9, 12, ... \}$
 M_3' esta definido inductivamenti

 M_3' usamos las justas M_3 y las extendimos.

- La resolución del item (b) que involucra a los Z podrá reutilizar las reglas de la definición de M_3, pero deberá agregar reglas que incluyan a los números negativos.
- Tratar de pensar entonces qué agregarían para incluir a estos últimos números en la definición.

Ejercicio 2:

 Sea Σ = {a, b, c}. Defina inductivamente los siguientes conjuntos y enuncie el principio de inducción primitiva para cada uno de ellos:

(b)
$$B = \{a^n b c^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

2b)
Algunos elementos: b, abcc, aabcccc, aaabcccccc, ...

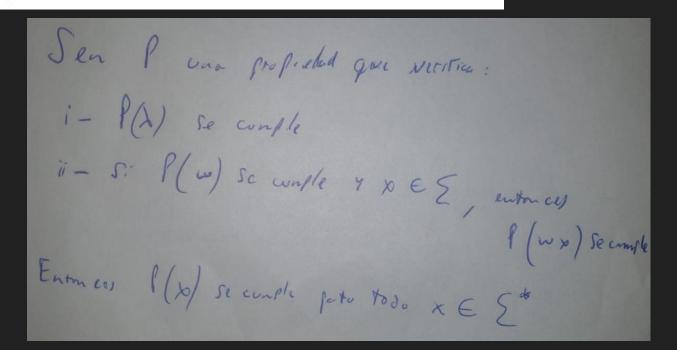
Regla base: b \in B

Regla inductiva: Si w \in B, entonces awcc \in B

Clausura: Los elementos obtenidos aplicando las reglas anteriores son los únicos elementos de B.

Ejercicio 2:

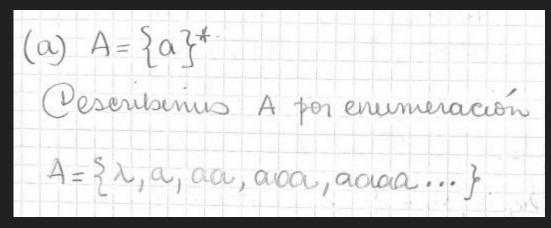
- Sea Σ* el mínimo conjunto de cadenas sobre el alfabeto Σ tal que:
 - (Base) λ ∈ Σ* (λ es la cadena vacía)
 - (Inducción) si w ∈ Σ* y x ∈ Σ entonces wx ∈ Σ*



Ejercicio 3:

- 3. Defina inductivamente los siguientes conjuntos:
 - (a) $A = \{a\}^*$
 - (b) $B = \{\alpha \in \{a, b, c\}^* \mid \alpha \text{ es un palíndromo}\}\$
 - (c) C = {a, b, ab, ba}

Resolución item (a)



Concatenación de letras "a" de longitud arbitraria.

A es un conjunto infinito

Resolución: Ejercicio 3 item (a)

Sea A el minimo conjunto talque:

Definición inductiva cómo veníamos trabajando

r) λ ∈ A : (codena vaciós) CAPO INDUCTIVO:

ii) weA > waeA

Instanciamos algunos valores en las reglas para verificar cómo estamos produciendo los elementos.

Veanus algunos ejemplos.

ZEA = ZA = A EA QEA = QA EA QAEA = QAQA EA

Resolución: Ejercicio 3 item (b)

Describentos a B por enumeración
$$B = \{ \lambda, \alpha, b, c, \alpha\alpha, bb, cc, aba, aca, bab, bcb, cac, cbc, aca, bbb, ccc, ... \}$$

Describimos algunos elementos de B para conocer sus estructura y poder dar las reglas en la definición. Resolución Ejercicio 3: item (b)

Sea B el minimo conjunto talque. → away eB. (CASO IND) 3 coceB

Veamos algunos ejemplos $\lambda \in B$ $\lambda \in B \Rightarrow a_1 \lambda_0 = aa \in B$ $a \in B \Rightarrow b_1 a_2 b_1 \in B$ $a \in B \Rightarrow c_1 a_2 c_1 \in B$

Resolución 3 item (c)

(c)
$$C = \frac{3}{2}a_1b_1, ab_1ba_3$$

• C ya esta dodo por enumeroacón

• C a diferencia de A y B es finito

$C = 4$

- Completar la definición del conjunto inductivo.
- Pensar en las tres partes que deben componer la definición y en qué relación existen entre los elementos.

Ejercicio 4:

4. Considere el conjunto de las matrices

$$M = \left\{ \left[\begin{array}{cc} a & 0 \\ b & c \end{array} \right] \mid a,b,c \in \mathbb{N}_0 \text{ donde } a,b,c \text{ tienen la misma paridad} \right\}$$

- (a) Defina inductivamente al conjunto M.
- (b) Enuncie el principio de inducción primitiva para M.

Ejercicio 4:

ii)
$$Si = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & S \end{pmatrix} \in M$$
, where $\begin{pmatrix} x + 1 & \beta \\ \gamma & S \end{pmatrix} \in M$.

iii) $Si = \begin{pmatrix} x & \beta \\ \gamma & S \end{pmatrix} \in M$, where $\begin{pmatrix} x & \beta \\ \gamma & S \end{pmatrix} \in M$.

iv) $Si = \begin{pmatrix} x & \beta \\ \gamma & S \end{pmatrix} \in M$, where $\begin{pmatrix} x & \beta \\ \gamma & S \end{pmatrix} \in M$.

Ejercicio 5:

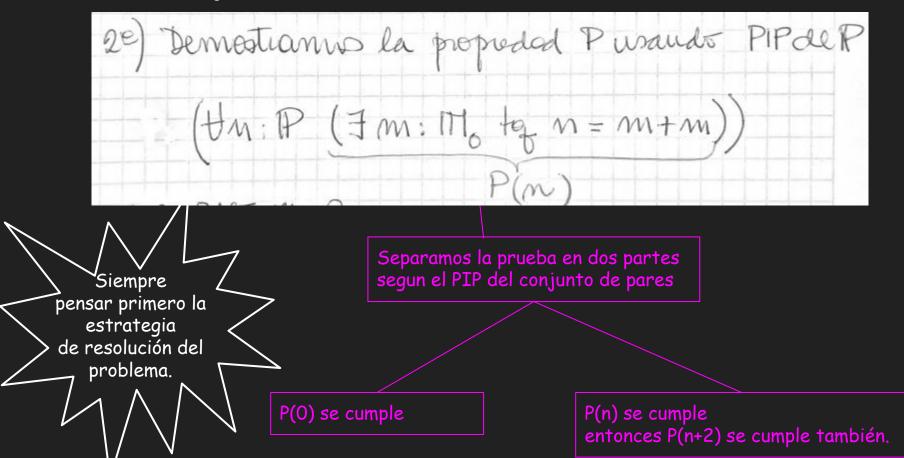
- Enuncie el principio de inducción primitiva para el conjunto ℙ, definido inductivamente como el menor conjunto tal que:
 - 0 ∈ P
 - si $n \in \mathbb{P}$ entonces $(n+2) \in \mathbb{P}$

Utilice este principio para probar que para todo $n \in \mathbb{P}$ existe $m \in \mathbb{N}_0$ tal que n = m + m.

- En este tipo de ejercicio, destacamos que hay dos partes por resolver:
 - o La primera: dar la definición del PIP para el conjunto dado inductivamente.
 - o La segunda: demostar una propiedad que se enuncia al final
- Resolvemos en este orden.

Resolución Ejercicio 5:

1º) Principio de indusción primitira PIP de P Para enunciar el PIP siempre tener a mano la definción Dea Puna propiedod que verifica 0 ∈ P · P(0) se rumple. • si $n \in \mathbb{P}$ entonces $(n + 2) \in \mathbb{P}$ · Si P(n) se cumple con n e P entonces P(n+2) también se cumple. Entonces P(n) se cumple para todo n. P.



PASO INDUCTIVO
$$N \neq 11+2$$

Superierro perto $P(n)$ entences cabernos

que existe $m_0 \in M_0 + q_0 = m_0 + m_0$. (2)

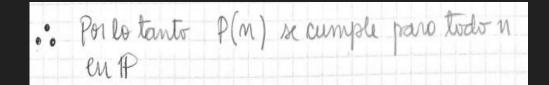
Demostramos que se cumple $P(n+2)$
 $P(n+2) = (\exists m: M_0 \cdot n+2 = m+m)$ (3)

Trataremos de encontrar al m_1 festigo para (3.)

(moH) + (moH)

Cómo nos construímos el testigo en base a lo conocido, la HI de la cual afirmamos que existe el mO que cumple n = mO+mO.

Ya podemos concluir entonces que la propiedad se cumple para P(n+2) también.



Cumpliendose la propiedad para el caso base y para el paso inductivo según el PIP de Pares puedo afirmar que la propiedad vale para todo elemento de Pares.

- 6. Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$. Definimos Δ inductivamente como el menor conjunto tal que:
 - a ∈ ∆
 - si $\alpha \in \Delta$ entonces $b\alpha b \in \Delta$
 - (a) Enuncie el principio de inducción primitiva para Δ.
 - (b) Demuestre que cualquier cadena de Δ tiene un número par de símbolos b.

a)

```
Jea Pona propleded que verifica:
 i) P(a) Se comth
   ii) Si P(X) se consu , enteres P(bab) so comple
Entonce, P(x) se wash para tolo X E A
```

b)

Para probar que cualquier cadena del conjunto tiene un número par de b, primero tenemos que definir nuestra propiedad P:

Sea P la propiedad tal que: $P(x) \sim x$ tiene un número par de b.

Ahora, para probar P, aplicamos el PIP de nuestro conjunto, y debemos probar:

- i) P(a) se cumple.
- ii) Si $P(\alpha)$ se cumple, entonces $P(b\alpha b)$ se cumple.

Ejercicio 7:

- 7. Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$. Definimos Γ inductivamente como el menor conjunto tal que:
 - λ ∈ Γ
 - si $\alpha \in \Gamma$ entonces $b\alpha \in \Gamma$
 - si $\alpha \in \Gamma$ entonces $a\alpha \in \Gamma$
 - (a) Enuncie el principio de inducción primitiva para Γ.
 - El item (a) pueden hacerlo sólos, proceder como lo hicimos en los ejercicios anteriores.

Ejercicio 7 item (b)

- (b) Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:
 - b ∈ Γ
 - a ∈ Γ
 - babacbaca ∈ Γ
 - aba ∈ Γ
- Para <u>demostar que un elemento pertenece al conjunto inductivo</u> lo que hacemos es encontrar una cadena o secuencia de formación del elemento.
 Esto es aplicamos las reglas que producen o construyen dicho elemento.
- Para <u>demostar que un elemento NO pertenece a un conjunto inductivo</u>, lo hacemos mediante una propiedad (que debemos enunciar) la cual se cumple mediante las reglas construcción del conjunto, pero que el elemento en cuestión NO la cumple. De esta forma podemos concluir que no pertenece al conjunto inductivo.

Ejercicio 7 item (b)

CASO ELEMENTO pertenece al conjunto inductivo

- $b \in \Gamma \checkmark$ Secuencia de formación de b: $\epsilon \in \Gamma \Rightarrow^{(ii)} b\epsilon = b \in \Gamma$
- $a \in \Gamma \checkmark$ Secuencia de formación de a: $\epsilon \in \Gamma \Rightarrow^{(iii)} a\epsilon = a \in \Gamma$

Muesto la secuencia de formación y justifico con el número de regla que estoy usando.

Ejercicio 7 item (b)

$$\Sigma = \{a, b, c\}.$$

CASO ELEMENTO NO pertenece al conjunto inductivo

- λ ∈ Γ
- si $\alpha \in \Gamma$ entonces $b\alpha \in \Gamma$
- si $\alpha \in \Gamma$ entonces $a\alpha \in \Gamma$

babacbaca ∈ Γ ×

Lo demostraremos utilizando el Principio de Inducción Primitiva para Γ.

 $P(\alpha)$: α no tiene símbolos c.

Esta es la propiedad que vamos a demostrar y luego usar para probar que la cadena no pertenece al conjunto inductivo

(i) $P(\epsilon)$: ϵ no tiene símbolos c.

- (ii) Supongo que α no tiene símbolos c (HI). Luego $b\alpha$ agrega sólo un símbolo b, y por HI no tiene símbolos c.
- (iii) Supongo que α no tiene símbolos c (HI). Luego $a\alpha$ agrega sólo un símbolo a, y por HI no tiene símbolos c.

Por lo tanto, vale $P(\alpha)$ para todo $\alpha \in \Gamma$.

Como la cadena babacbaca contiene símbolos c, concluímos que babacbaca $\notin \Gamma$.

Ejercicio 7 (c)

- (c) Considere ahora el conjunto Δ definido inductivamente como el menor conjunto tal que:
 - $\lambda \in \Delta$
 - si $\alpha \in \Delta$ entonces $\alpha b \in \Delta$
 - si $\alpha \in \Delta$ entonces $\alpha a \in \Delta$

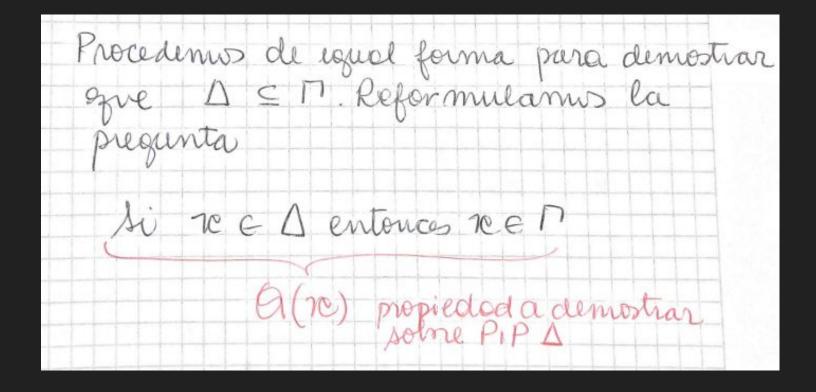
Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

- si $\alpha \in \Delta$ entonces $b\alpha \in \Delta$
- si $\alpha \in \Delta$ entonces $a\alpha \in \Delta$
- Γ ⊆ Δ
- Δ ⊆ Γ
- Δ = Γ

Ejercicio 7 item (c)

(c) Para probar que TC A tenento que pensar en terminos de conjuntos y la operación = y en terminos de PIP Si x e M entonces x e D propiedad a demostrar Sobre PIPT

Ejercicio 7 item (c)



Ejercicio 7 item (c)

Por último si probé MED y DCM
por proprieotad de conjuntos grenultara
tambien valido M=D

Ejercicio 8:

- 8. Definimos inductivamente la relación $S \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ como el menor conjunto tal que:
 - si $n \in \mathbb{N}_0$ entonces $(n, n) \in S$
 - si $(n, m) \in S$ entonces $(n, m + 1) \in S$
 - (a) Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:
 - $(0,0) \in S$
 - 0 ∈ S
 - (2,3) ∈ S
 - $(3,4) \in S$
- Resolver de manera análoga a lo explicado en el ejercicio 7. Misma técnica y estrategia de demostración.
- Construir algunos ejemplos de S para conocer la estructura de los mismo en valores concretos.

Ejercicio 8 (b)

(b) Enuncie el principio de inducción primitiva para S. Demuestre, utilizando este principio, que para todo par (n, m) ∈ S se tiene n ≤ m.

- Resolver en dos partes:
 - Primero enunciar el PIP de S
 - Segundo: demostar usando el PIP la propiedad indicada.
- Expresar formalmente la propiedad para facilitar la prueba inductiva.

Ejercicio 8 item(c)

- (c) Definimos inductivamente Q ⊆ N₀ × N₀ como el menor conjunto tal que:
 - si $n \in \mathbb{N}_0$ entonces $(0, n) \in Q$
 - si $(n,m) \in Q$ entonces $(n+1,m+1) \in Q$

Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

- S ⊆ Q
- Q⊆S
- Q = S
- Resolver con la misma técnica y estrategia que el ejercicio 7 (c).

- Mostraremos, por inducción en la cantidad de caballos, que todos los caballos son del mismo color.
 - Caso base, n = 1: para un conjunto de un único caballo {c₁} la proposición es trivial.
 - Caso inductivo, n = k: Supongamos que, para cualquier conjunto de k caballos, todos resultan ser del mismo color. Sea C = {c₁,...,c_k,c_{k+1}} un conjunto de k + 1 caballos. Por hipótesis inductiva, los caballos en C₁ = {c₁,...,c_k} son todos del mismo color. Por la misma razón, los de C₂ = {c₂,...,c_k,c_{k+1}} también resultan del mismo color. Luego todos los caballos de C son del mismo color.

Explique cuál es el error en el razonamiento dado.