UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO

CARDINALIDAD

INTRODUCCION A LA MATEMATICA

Lic. ELISA N. PETRONE

1989

INTRODUCCION

El principal objetivo de este trabajo es estudiar los conjuntos infinitos, exponiendo el actual tratamiento del tema, obra del matemático alemán Georg Cantor (1845-1918), quien a fines del siglo pasado logró sistematizar las ideas desordenadas que giraban alrededor del mismo desde varios siglos antes y avanzar en el análisis de, hasta entonces, insospechados resultados.

La preocupación por definir "el infinito" es muy antigua, manteniéndose a lo largo del tiempo la noción intuitiva de "mucho" o "que no puede ser contado" como su equivalente natural.

Antiguamente se entendía como una especie de tope, más allá del cual no podía haber nada.

Lo que fue variando de una civilización a otra es la "ubicación" de ese tope. A medida que la posibilidad de contar progresaba el infinito se corría.

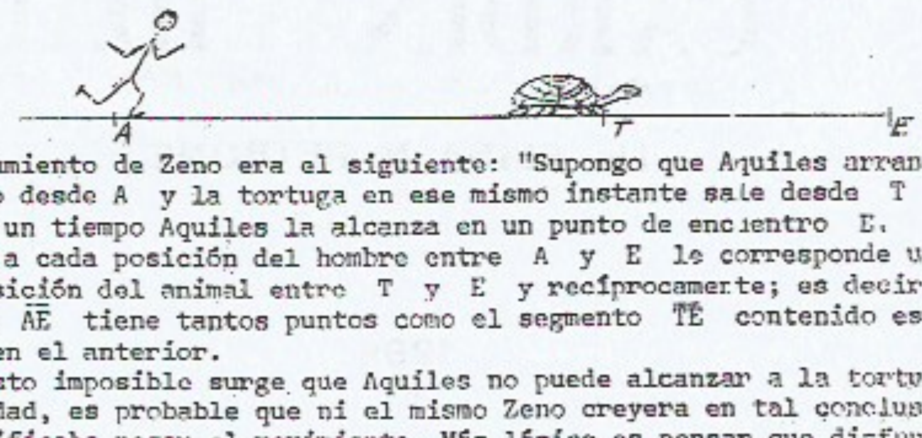
Los antiguos hindúes llamaban "pradha" a un número del orden de 10^{13} al que consideraron "el último número más allá del cual la mente humana no podía avanzar".

Varios siglos después Arquímedes calculó que el número de granos de arena en un globo del tamaño de la esfera celestial sería del orden de 10^{52}. Ese fue entonces su infinito.

Así fueron encontrados números cada vez mayores hasta que se comprendió que no puede haber límite al pensamiento humano. No importa cuán numerosa sea una colección, uno siempre puede, al menos, imaginar otra mayor agregando uno o más entes a la anterior.

Los griegos no pudieron definir el infinito pero sí entendieron su esencia: un conjunto infinito es el que no tiene "topes", que no se cierra, que no termina nunca. Por ejemplo, sabían que el conjunto de puntos de cualquier segmento de recta es infinito.

Este avance en la comprensión de la idea les acarreó nuevas inquietudes. Es célebre la paradoja de Zeno según la cual Aquiles nunca podría alcanzar a una tortuga.



El razonamiento de Zeno era el siguiente: "Supongo que Aquiles arranca corriendo desde A y la tortuga en ese mismo instante sale desde T y luego de un tiempo Aquiles la alcanza en un punto de encuentro E.

Entonces a cada posición del hombre entre A y E le corresponde una única posición del animal entre T y E y recíprocamente; es decir, el segmento $\overline{AE}$ tiene tantos puntos como el segmento $\overline{TE}$ contenido estrictamente en el anterior.

Siendo esto imposible surge que Aquiles no puede alcanzar a la tortuga".

En realidad, es probable que ni el mismo Zeno creyera en tal conclusión que significaba negar el movimiento. Más lógico es pensar que disfrutaba volando con su intelecto, creando estas "paradojas" que no lograban todavía desentrañar ni él ni sus contemporáneos.

En el siglo XVII Galileo acepta que "el segmento $\overline{AE}$ tenga tantos puntos como el segmento $\overline{TE}$, siendo $\overline{TE}$ una parte de AE" pero no logra todavía explicarlo adecuadamente. Volveremos más adelante sobre sus ideas al respecto.

A principios del siglo XIX el respetado matemático C. F. Gauss decía: "Protesto contra el uso de magnitudes infinitas como si fuera algo terminado; este uso no es admisible en matemática. El infinito es sólo una "forma de hablar ... ", creándose un "horror infinity" que hasta casi fines de siglo fue la actitud habitual de los matemáticos.

La matemática debía ocuparse solamente de magnitudes finitas y números finitos mientras que el tratamiento del actual infinito debía dejarse a la Filosofía.

Cantor, pese a la indiscutible autoridad de Gauss, se dedicó al tema poniendo de manifiesto una gran intuición creativa y mucha energía para perseverar, dado que muchos de sus contemporáneos discutían fuertemente su trabajo.

Por ejemplo, Kronecker rehusa publicarlo argumentando que era oscuro o falso, "traído al mundo cien años antes de tiempo".

Poco a poco fueron aceptándose sus teorías y actualmente hay consenso en aceptar la legitimidad de las mismas.

Mostraremos entonces cómo pueden definirse y estudiarse las magnitudes infinitamente grandes siguiendo sus ideas.

Descubriremos a lo largo del trabajo que en este tema se evidencia fuertemente una de las principales características de la matemática: en ella, más que en cualquier otra ciencia, reina la libre creación.

No es un accidente que en el nacimiento de la teoría de conjuntos (1883) se acuñara la expresión:

> "La verdadera esencia de la matemática es su libertad"

Ø 1- Equipotencia - Conjuntos finitos e infinitos

La definición de conjunto infinito que presentaremos responde a la antigua intuición de "no contable". Previo a ello entonces deberemos definir qué se entiende por "contable".

Nuevamente la intuición nos dice que esto ocurre cuando el conjunto puede ponerse en correspondencia biunívoca con algún conjunto del tipo

$\{1,2,\ldots n\}, n \in \mathbb{N}$

Formalizaremos a continuación estas ideas.

Definición:

Dados A y B conjuntos, se dice que A es "coordinable con" o "equipotente a" B si existe una biyección de A en B.

Ejemplos:

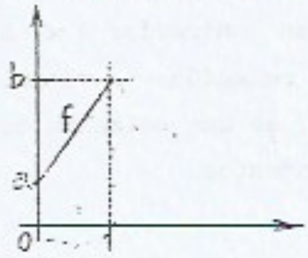
1- $[0,1]$ es equipotente a $[a;b]$ $\forall\ a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$

En efecto, la función

$f : [0,1] \longrightarrow [a,b]$

$x \longrightarrow f(x) = (b-a)x + a$

es biyectiva



2- $P = \{x \in N \; ; \; x \text{ es par}\}$ es equipotente a N

Basta ver que la función $f : P \longrightarrow N$

$$x \longrightarrow f(x) = \frac{x}{2} \text{ es biyectiva}$$

3- $A = \{1,2,3\}$ no es equipotente a $B = \{4\}$

Esto surge del siguiente hecho: cualquier función que tenga a B como codominio será una función constante y por lo tanto no inyectiva si el dominio tiene 2 o más elementos. Tal es nuestro caso.

• A es eq. a B $\Longleftrightarrow$ $\exists\, f : A \longrightarrow B$ biyección.

Teorema

La relación de "equipotencia" o de "coordinabilidad" definida anteriormente es una relación de equivalencia.

Demostración:

Debemos ver que dicha relación satisface las propiedades: i) reflexiva; ii) simétrica; iii) transitiva.

Sean A, B y C conjuntos

i) Todo conjunto A es equipotente a sí mismo.

En efecto, la función $id_A : A \longrightarrow A$ es biyectiva cualquiera sea A

Observación: Si $A = \emptyset$ la función id_A es la función vacía, es decir, la función cuya gráfica es vacía. O sea, $id_{\emptyset} = (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$, biyectiva por vacuidad.

ii) A equipotente a B $\Longrightarrow \exists f : A \longrightarrow B$, función biyectiva $\longrightarrow$

$\Longrightarrow \exists f^{-1} : B \longrightarrow A$, función biyectiva $\Longrightarrow$ B es equipotente a A.

iii) A equipot. a B $\Longrightarrow \exists f : A \longrightarrow B$, función biyectiva

B equipot. a C $\Longrightarrow \exists g : B \longrightarrow C$, función biyectiva

$\Longrightarrow$ la función

$g \circ f : A \longrightarrow C$ es una función biyectiva $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ A es equipotente a C.

Observaciones

1- De ahora en más simbolizaremos a esta relación con el símbolo $\sim$, es decir, escribiremos $A \sim B$ para significar A es equipotente a B. Caso contrario: $A \not\sim B$

2- La relación $\sim$ vincula conjuntos cualesquiera entre sí. Por lo tanto, es una relación de equivalencia en el "conjunto" de todos los conjuntos.

Dicho ente en realidad, visto desde un punto de vista rigurosamente lógico, no puede ser un conjunto (considerarlo así da origen a paradojas como la de Cantor). La presentación axiomática de la teoría de conjuntos contempla esta situación, pero nosotros trabajaremos intuitivamente como si fuera un conjunto y así le llamaremos, sin que aparezcan dificultades en el marco de este curso.

Definición:

Sea A un conjunto. Se llama "número cardinal de A" o "cardinal de A" o "potencia de A" a la clase de equivalencia de A módulo la relación de equipotencia.

Dicha clase será simbolizada así: card (A) o, más brevemente, así $\mathcal{C}(A)$.

Ejemplos

1- Todos los conjuntos unitarios son coordinables entre sí. Más aún, ellos constituyen un cardinal al que convendremos en simbolizar con 1 ,

2- Todos los conjuntos de dos elementos son coordinables entre sí. También ellos constituyen un cardinal al que convendremos en simbolizar con 2.

3- Generalizando, si $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (n elementos distintos) diremos que $c(X) = n$

4- Veremos que $c(\emptyset) = \{\emptyset\}$

Para ello probaremos que: $A \neq \emptyset \Longrightarrow A \not\sim \emptyset$

Sea $A \neq \emptyset$ y supongamos que $\exists f : A \longrightarrow \emptyset$ función biyectiva

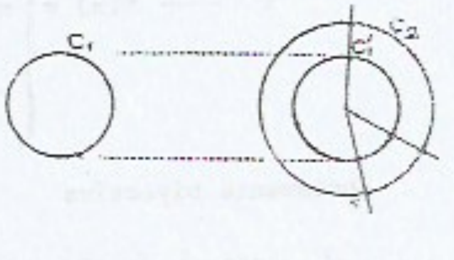
$$\left.\begin{array}{l} A \neq \emptyset \Longrightarrow \exists\, x \in A \\ \\ f : A \longrightarrow \emptyset \text{ es función} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists f(x) \in \emptyset \quad \text{absurdo}$$

Convención: $\mathcal{C}(\emptyset) = 0$

5- Los conjuntos de puntos de dos circunferencias cualesquiera en un mismo plano son equipotentes

Sean C_1 y C_2 dos circunferencias.

Sea C'_1 la circunferencia que se obtiene al trasladar C_1 hasta que su centro coincida con el de C_2.



$C_1 \sim C'_1$ por ser la traslación una función biyectiva

$C'_1 \sim C_2$ se ve "tirando rayos" desde el centro común y haciendo corresponder las intersecciones entre sí

<u>Observación</u>: Si no son coplanares el resultado sigue valiendo. Habrá que agregar, eventualmente, una rotación adecuada.

6- $[0,1] \sim (0,1)$

Llamando $A = [0,1] - \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$ se tiene

$$\begin{array}{ccccccc}
[0,1] = & A & \cup \{ 0, & 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \dots, \frac{1}{n}, \dots \} \\
& \downarrow id_A & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
(0,1) = & A & \cup \{ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{5}, & \dots, \frac{1}{n}, \dots \}
\end{array}$$

y también, siendo ambas uniones disjuntas.

Las flechitas existentes entre las expresiones anteriores sugieren una biyección posible. Su ley está dada por

$f : [0,1] \longrightarrow (0,1)$

$$x \longrightarrow f(x) = \begin{cases} x \quad \text{si } \underbrace{x \neq \frac{1}{n} \;\; \forall\, n \in N \wedge x \neq 0}_{\text{si } x \in A} \\ \frac{1}{2} \quad \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{n+2} \quad \text{si } x = \frac{1}{n},\ n \in N \end{cases}$$

7- $[0,1] \sim [0,1)$

Razonando en forma análoga al ejemplo anterior descubrimos la función

$f : [0,1] \longrightarrow [0,1)$

$$x \longrightarrow f(x) = \begin{cases} x \quad \text{si } x \neq \frac{1}{n} \;\; \forall\, n \in N \\ \frac{1}{n+1} \quad \text{si } x = \frac{1}{n},\ n \in N \end{cases}$$

obviamente biyectiva

Se usa el 0 del ejemplo anterior.

$[0,1] - \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \quad \frac{1}{n} \right\}$

8- $\underline{[0,1] \sim (0,1]}$ Puede [illegible] $[0,1] \sim [0,1) \sim (0,1]$

La función $f(x) = 1 - x$ permite asegurar que $(0,1] \sim [0,1)$

Combinando con el ejemplo anterior se obtiene lo deseado.

$[0,1] \sim (0,1) \sim [0,1) \sim (0,1]$

9- $\underline{[a,b] \sim (a,b) \sim [a,b) \sim (a,b] \quad \forall\, a,b \in R\ ,\ a<b}$

Considerando $f(x) = (b-a)\,x + a$ se establecen biyecciones entre intervalos análogos (abiertos, cerrados, semiabiertos) de extremos 0,1 y a,b

Usando los ejemplos 6,7 y 8 se completa la idea.

Habiéndose formalizado la idea de correspondencia biunívoca de la que hablábamos al principio pasaremos a definir las nociones de "finito" e "infinito"

__Definición:__ A es finito si $\exists\, n \in N / A \sim [1,n]$ ó si $A = \emptyset$

Se dice que un conjunto A es "__finito__" si es vacío o es coordinable con un intervalo natural $[1,n]_N = \{1,2,3,\ldots,n\}$

Se dice que A es "__infinito__" en caso contario.

__Observaciones__

1°) $A \sim [1,n]_N \iff \mathcal{C}(A) = n$

2°) Siendo $A \neq \emptyset$ se tiene que:

A es finito $\iff \exists\, n \in N / \quad A \sim [1,n]_N$

A es infinito $\iff \nexists\, n \in N / \quad A \sim [1,n]_N \iff A \not\sim [1,n]_N \quad \forall\, n \in N$

3°) Los términos "finito" e "infinito" se aplican tanto a un conjunto como a su cardinal.

__Por ejemplo__: si $Y = \{2,6,9\}$ es $\mathcal{C}(Y) = 3$

Y es un conjunto finito y 3 es un cardinal finito.

Cuando un conjunto es infinito se dice también que su cardinal es "transfinito".

4°) La anterior definición emplea los números naturales que deberán, por ende, conocerse previamente.

Comentaremos, más adelante, otra forma de definir conjuntos infinitos sin emplear los naturales, pudiendo entonces __definir__ a un número natural como el cardinal de un conjunto finito.

Dado que a partir de N pueden construirse todos los demás conjuntos numéricos se tiene entonces que puede edificarse toda la matemática sobre la teoría de conjuntos

---

$\{2,5,7,11\} = Z$

$\mathcal{C}(Z) = 4$

Es natural preguntarse ahora ¿existen conjuntos infinitos? ó bién ¿verifican esta definición de infinito los conjuntos que nuestra intuición nos señalaba como tales?

Veremos que sí

{1}

Lema

$$\boxed{N \sim N - \{x\} \quad \forall x \in N}$$

demostración:

Deberemos encontrar una biyección entre ambos conjuntos

La siguiente disposición nos sugiere una:

$N \longrightarrow 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \ldots\ldots\ldots \; x-1 \; , \; x \; , \; x+1 \; , \ldots\ldots\ldots$

$N - \{x\} \longrightarrow 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \ldots\ldots\ldots \; x-1 \; , \; x+1 \; , \; x+2 \; , \ldots\ldots\ldots$

es decir, la función $f : N \longrightarrow N - \{x\}$

$$n \longrightarrow f(n) = \begin{cases} n & \text{si } n < x \\ n+1 & \text{si } n \geq x \end{cases}$$

$n < x$ $\quad n < x$

es biyectiva.

Teorema

N es un conjunto infinito

demostración:

Debemos ver que $N \not\sim [1,n]_N \quad \forall n \in N$. Lo haremos empleando el principio de inducción matemática

i) Para $n = 1$ es claramente cierto $(N \not\sim [1,1]_N = \{1\})$ [illegible]

[illegible]

ii) Debemos probar que $N \not\sim [1,n]_N \Longrightarrow N \not\sim [1,n+1]_N$

Esto equivale a probar su enunciado contrarecíproco:

$N \sim [1,n+1]_N \longrightarrow N \sim [1,n]_N$

y así lo haremos por resultar más sencilla la prueba

$N \sim [1,n+1]_N \Longrightarrow \exists f : N \_\_ [1,n+1]_N$ biyectiva $\Longrightarrow$ existe un único $b \in N \,/\, f(b) = n+1$ [illegible]

Entonces $f/_{N - \{b\}, \, [1,n]_N} : N - \{b\} \longrightarrow [1,n]_N$ es biyectiva

$x \longrightarrow f(x)$

resultando así $N - \{b\} \sim [1,n]_N$

Por el lema anterior se tiene entonces que $N \sim [1,n]_N$

Corolario

$$A \sim N \Longrightarrow A \text{ infinito}$$

demostración obvia

Cuales conj equip con N. Deberalo [illegible]

Como consecuencia de este corolario tenemos, por ejemplo, que:

1- $P = \left\{\text{naturales pares}\right\}$ es infinito

2- $\left\{x \in N \;/\; x \neq 9\right\}$ es infinito

3- $\left\{\text{naturales impares}\right\}$ es infinito, por ser biyectiva la función

$$\begin{aligned} f : N &\longrightarrow \left\{\text{naturales impares}\right\} \\ n &\longrightarrow f(n) = 2\,n - 1 \end{aligned}$$

Propiedades (a probar como ejercicio en la práctica)

1- Todo subconjunto de un conjunto finito es finito ← [illegible]

2- Si un conjunto contiene un subconjunto infinito es infinito ← [illegible]

3- La unión de dos conjuntos finitos es un conjunto finito. [illegible]

4- Si A es un conjunto infinito y F es un subconjunto finito de A resulta A - F infinito. [illegible]

Ejemplos de aplicación

1- Z, Q, R son conjuntos infinitos. ([illegible])

2- $\left\{x \in N \;/\; x > 9\right\}$ es infinito. [illegible]

3- $\left\{1,2,3,4,5,7,9,11 \ldots\right\} = \left\{\text{naturales impares}\right\} \cup \left\{2,4\right\}$ es infinito por prop.

Nos dedicaremos en la próxima sección a estudiar más en detalle los conjuntos equipotentes a N.

§ 2- Conjuntos numerables [illegible]

Definición:

Si $A \sim X$ siendo $X \subset N$ se dice que A es "numerable"

Si $A \sim N$ se dice que A es "infinito numerable"

Observaciones:

1- La palabra numerable tiene, pues, un sentido amplio. Cuando se dice que un conjunto es numerable significa que el mismo es finito o bien es infinito equipotente a N.

Cuando sea este último el caso, e interese destacarlo, diremos que es infinito numerable.

numerable

2- Se dice que un conjunto es "<u>no numerable</u>" cuando no verifica la definición de numerable. Es decir $A \nsim X \ \forall X \subset \mathbb{N} \rightarrow A$ no numerable

A es no numerable $\iff \nexists X \subset N \ / \ X \sim A$

Es claro que A no numerable $\Rightarrow$ A infinito

Por el momento no conocemos la respuesta a la siguiente pregunta: ¿Existen conjuntos no numerables? Volveremos sobre este punto despúes que conozcamos mejor a los conjuntos numerables.

3- Así como pusimos una "etiqueta" a cada cardinal de conjuntos finitos, buscaremos una forma de designar brevemente al cardinal de los conjuntos infinitos numerables.

Siguiendo a Cantor diremos que $\mathcal{C}(N) = \aleph_0$ Aleph

$\aleph$ es la primera letra del alfabeto hebreo. Se lee "alef"

<u>Lema</u>

A es infinito numerable $\iff$ A puede considerarse una sucesión inyectiva $\iff$ (Si puede ordenarse [illegible])

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ verificando: $(i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j)$

<u>dem</u>

$\rightarrow$) A infinito numerable $\Rightarrow \exists f : N \rightarrow A$ función biyectiva $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(N) = A = \{f(n), n \in N\} = \{f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots\}$

donde $i \neq j \Rightarrow f(i) \neq f(j)$ por inyectiva

Tomando $a_n = f(n)$ se tiene la tesis

$\Leftarrow$) Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} \ / \ i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j$

Definiendo $f : N \rightarrow A$

$n \rightarrow f(n) = a_n$ resulta ser una biyección y por lo tanto $A \sim N$.

<u>Nota:</u>

Si $A = \{a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots\}$ pero no puede garantizarse inyectividad resulta que A es numerable, sin poder precisarse si es finito o infinito. [illegible] puedo decir que es numerable

<u>Ejemplo:</u>

$A = \{5,6,5,6,5,6, \ldots, 5,6, \ldots\} = \{5,6\}$

es un conjunto finito.

$B = \{1,4,9,16,25,36, \ldots, n^2, \ldots\}$

$I = \{1,3,5,7,9,11, \ldots, 2n-1, \ldots\}$

son conjuntos infinitos numerables.

Conclusión:

Un conjunto es numerable si y solo si puede ponerse en forma de sucesión. Informalmente, esto equivale a decir que puede encontrarse una forma de "ordenar" o "recorrer" el conjunto a partir de un elemento y pasando por cada uno de sus elementos una única vez.

Este recurso es bastante usado para justificar la numerabilidad de ciertos conjuntos.

Debe estipularse en cada caso:

- 1°- Cuál es el primer elemento
- 2°- Una regla que precise inequívocamentecuál es el consecutivo de cada elemento.

Veamos algunos ejemplos:

1- Z es infinito numerable

-------, -4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4, ----------

La anterior disposición sugiere, graficamente, una forma de recorrer Z. El primer elemento es "0" y la regla es "siga la flecha". Por lo tanto Z es numerable.

Observando además que no se pasa 2 veces por un mismo elemento se concluye que es infinito numerable.

Notemos que la misma idea podría expresarse escribiendo

$Z = \{0,1,-1,2,-2,3,-3, \text{------------}\}$

que es,claramente, una sucesión inyectiva

2- N x N es infinito numerable

Para verlo disponemos sus elementos según el siguiente esquema

(1,1) →	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	---------
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	---------
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3.5)	---------
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	---------
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

$\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \{\underbrace{(1,1)}_{+1}, \underbrace{(1,2),(2,1)}_{+2}, \underbrace{(1,3),(2,2),(3,1)}_{+3}, \dots\}$

Al igual que en el ejemplo 1 las flechas sugieren una posible forma de recorrer todo el conjunto sin repetir elementos.

3- Q es infinito numerable

Podemos emplear la misma idea del ejemplo anterior. Esto es:

3- Q^+ es numerable

$\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$

[illegible] $\Rightarrow$ Q^+ es numerable

$$
\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \text{-----} \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \text{-----} \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \text{-----} \\
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & & \text{-----} \\
\vdots & \vdots & \vdots & &
\end{array}
$$

No hay duda que, siguiendo las flechas, pasaremos por todos los números racionales.

Lo que aquí se advierte es que sí pasaremos varias veces por ellos.

Por lo tanto, del anterior análisis, se desprende que Q es numerable

El hecho de que Q es infinito surgió anteriormente al considerar que contiene conjuntos infinitos

---

Hay conjuntos infinitos numerables en los que resulta muy complicado intuir o expresar una forma de recorrerlo.

Necesitaremos entonces disponer de otras condiciones que nos aseguren que un conjunto es infinito numerable

Estudiaremos pues propiedades de los mismos que nos proveerán tales herramientas.

Propiedades de los conjuntos numerables

Teorema

Todo subconjunto de un conjunto numerable es numerable

dem.

Sean A y B conjuntos, $B \subset A$, A numerable: Probaremos que B resulta numerable.

A numerable $\Longrightarrow \exists X \subset N \ / \ A \sim X \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \exists X \subset N \ / \ \exists f : A \longrightarrow X$ función biyectiva

Restringiendo el dominio a B y el codominio a f(B) se obtiene entonces otra función biyectiva

Es decir $f_{/B} : B \longrightarrow f(B)$

$$x \longrightarrow (f_{/B})(x) = f(x) \quad \text{es biyectiva}$$

Luego

$B \sim f(B) \subset X \subset N$ Resulta entonces B numerable

Teorema

Todo conjunto infinito contiene un subconjunto infinito numerable

dem

Sea A un conjunto infinito. Llamemos $\mathcal{F} = P(A) - \{\emptyset\}$

Se tiene pues que $X \in \mathcal{F} \Longleftrightarrow X \subset A \wedge X \neq \emptyset$

Reiteraremos un procedeimiento de selección de elementos de A que nos proveerá una sucesión inyectiva

$A \in \mathcal{F} \longrightarrow$ elegimos $a_1 \in A$

$A - \{a_1\} \in \mathcal{F} \longrightarrow$ elegimos $a_2 \in A - \{a_1\}$ $(a_2 \neq a_1)$

$A - \{a_1, a_2\} \in \mathcal{F}$ elegimos $a_3 \in A - \{a_1, a_2\}$

— — — — — — — — — — — — $(a_3 \neq a_1 \wedge a_3 \neq a_2)$

$A - \{a_1, a_2, \ldots a_n\} \in \mathcal{F}$ elegimos $a_{n+1} \in A - \{a_1, \ldots, a_n\}$

$$(a_{n+1} \neq a_i \qquad 1 \leq i \leq n)$$

— — — — — — — — — — — —

¿podría ocurrir que este proceso deba interrumpirse?

Esto sería únicamente si $\exists j \in N / A - \{a_1, a_2, \ldots, a_j\} \notin \mathcal{F}$

En este caso, sería $A - \{a_1, a_2, \ldots, a_j\} = \emptyset$ de donde

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_j\}$ absurdo pues A es infinito.

Por lo tanto, el procedimiento anterior no se interrumpe nunca y nos permite construir el conjunto

$B = \{ a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots \}$ que verifica:

i) $B \subset A$ ya que $a_n \in A - \{ a_1, \ldots, a_{n-1} \} \subset A$ $\forall n \geqslant 1$ y $a_1 \in A$.

ii) B es infinito numerable, porque sus elementos constituyen una sucesión inyectiva

---

Repasaremos, a continuación, dos definiciones relativas a familias de conjuntos.

Sea $\{ A_i \}_{i \in I}$ (I conjunto no vacío) una familia de conjuntos:

<u>Definición 1:</u> $\bigcup_{i \in I} A_i = \{ x \,/\, x \in A_i, \text{ para algún } i \in I \}$

<u>Definición 2:</u> Se dice que $\{ A_i \}_{i \in I}$ es "disjunta dos a dos" si verifica: $i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

<u>Teorema</u>

Unión numerable de conjuntos numerables es numerable

<u>dem.</u>

Estamos diciendo: Si $\{ A_i \}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos tal que I es numerable y A_i es numerable $\forall i \in I$ entonces:

$$\bigcup_{i \in I} A_i \text{ es numerable}$$

Recordemos que la palabra "numerable" tiene un sentido amplio. Estamos, por lo tanto, ante una pluralidad de casos posibles. Analizaremos primero el más numeroso, es decir:

<u>1º Caso</u>: Supongamos
$$\begin{cases} \text{i)} & I \text{ infinito} \\ \text{ii)} & A_i \text{ infinito } \forall i \in I \\ \text{iii)} & \{A_i\}_{i \in I} \text{ disjunta dos a dos} \end{cases}$$

Siendo I infinito numerable se tiene $I \sim N$.
Por comodidad en la escritura, pensemos que $I = N$
(sino, es cuestión de "reordenarlo" según la biyección existente con N)
Por otro lado, cada A_i, $i \in N$, es infinito numerable y puede ser escrito como una sucesión inyectiva.

$$A_i = \left\{ a_1^i , a_2^i , a_3^i , \ldots\ldots , a_n^i , \ldots\ldots \right\}$$

Dispongamos los elementos de $\bigcup_{i \in N} A_i$ según el siguiente "cuadro"

$$\begin{array}{cccccc}
a_1^1 \rightarrow & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & \longleftarrow A_1 \\
a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \ldots\ldots\ldots\ldots & \longleftarrow A_2 \\
a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & \ldots\ldots\ldots\ldots & \longleftarrow A_3 \\
a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Se observa que, en el mismo, no hay elementos repetidos y por lo tanto, al recorrerlo "por diagonales" según el esquema anterior, se pasa por cada elemento una única vez.
Entonces

$$\bigcup_{i \in N} A_i = \left\{ a_1^1 , a_2^1 , a_1^2 , a_3^1 , a_2^2 , a_1^3 , a_4^1 , a_3^2 , a_2^3 , a_1^4 , a_5^1 , \ldots\ldots \right\}$$

siendo esta sucesión inyectiva.
Por lo tanto $\bigcup_{i \in I} A_i$ es numerable.

Caso general

I puede ser finito; $\left\{ A_i \right\}_{i \in I}$ puede no ser disjunta dos a dos y algunos A_i pueden ser finitos.
Resulta entonces

$$\bigcup_{i \in I} A_i \subset \left\{ a_1^1, a_2^1, a_1^2, a_3^1, a_2^2, a_1^3, a_4^1 \; . \right\}$$

por cuanto algunos a_j^i pueden no existir, o estar repetidos, y por lo

tanto $\bigcup_{i \in I} A_i$ es numerable .

Ejemplos:

1- $\left\{ \frac{\sqrt{m}}{n} , m \in N , n \in N \right\}$ es numerable

Basta pensar $\left\{ \frac{\sqrt{m}}{n}, m , n \in N \right\} = \bigcup_{n \in N} \left\{ \frac{\sqrt{m}}{m}, m \in N \right\} =$

$$= \bigcup_{n \in N} \left\{ \frac{1}{n} , \frac{\sqrt{2}}{n}, \frac{\sqrt{3}}{n}, \dots . \right\}$$

2- $\left\{ x^y , x \in Q^+ , y \in Q \right\}$ es numerable, ya que

$$\left\{ x^y , x \in Q^+ , y \in Q \right\} = \bigcup_{x \in Q^+} \left\{ x^y , y \in Q \right\}$$

=

3- $P = \left\{ p \text{ polinomio a coeficientes enteros} \right\}$ es numerable

Dados n, m naturales, sea

$$T_{(m,m)} = \left\{ p \text{ polinomio} \; / \; p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m, a_m \neq 0, \right.$$

$$\left. a_i \in Z, \; i = 0,1,\dots,m, \; |a_0| + |a_1| + \dots + |a_m| = n \right\}$$

Se ve claramente que:

i) $T_{(n,m)}$ es finito, $\forall n,m \in N$

ii) $P = \bigcup_{(n,m) \in N \times N} T_{(n,m)}$

Siendo P unión numerable de conjuntos finitos resulta numerable

4- El conjunto de los números algebraicos es numerable

Definición:

Un número $r \in R$ se dice algebraico si es solución de una ecuación polinómica a coeficientes enteros, es decir, si

$a_o + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_m r^n = 0$ para algún

$n, m \in N,\ a_i \in Z \qquad i = 0, 1, \dots, m$

Si llamamos $A = \{$ números algebraicos $\}$ se ve que

$r \in A \Longleftrightarrow \exists p \in P \,/\, p(r) = 0$ (P del ej. 3)

Por lo tanto

$$A = \bigcup_{p \in P} \{\text{soluciones de } p\} = \bigcup_{p \in P} \{r \,/\, p(r) = 0\}$$

Al ser A unión numerable de conjuntos finitos resulta numerable

NOTA: para completar la presentación de los números algebraicos, diremos que:

i) Todo número racional es algebraico.

ii) Existen números algebraicos irracionales.

iii) Los números reales que no son algebraicos se denominan "trascendentes".

Las demostraciones de i) y ii) son muy simples

y se dejan como ejercicio.

3- Otras consideraciones sobre conjuntos infinitos

Definición:

Dados dos conjuntos A y B se dice que B es subconjunto propio de A si verifica $\emptyset \neq B \subsetneq A$.

Teorema: Un conjunto es infinito $\iff$ es coordinable con algún subconjunto propio de sí mismo.

Dem

$\Rightarrow$) Siendo A infinito sabemos, por un teorema anterior, que $\exists B \subset A$, B infinito numerable.
Sea $f: B \longrightarrow N$ biyectiva y llamemos $b = f^{-1}(1)$.
Entonces resulta biyectiva la restricción $f/_{B - \{b\}\ ,\ N - \{1\}}$

Por lo tanto

$$B - \{b\} \sim N - \{1\} \sim N \sim B$$

es decir, $\exists \varphi : B \longrightarrow B - \{b\}$ biyectiva

Siendo $A = (A - B) \cup B$

$A - \{b\} = (A - B) \cup (B - \{b\})$, ambas uniones disjuntas, resulta biyectiva la función

$$g: A \longrightarrow A - \{b\}$$

$$x \longrightarrow g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in A - B \\ \varphi(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

$\Leftarrow$) Sea B subconjunto propio de A coordinable con él.
Sean $f: A \longrightarrow B$ biyectiva y $u_1 \in A - B$ ($A - B \neq \emptyset$)
A partir de ellos construiremos una sucesión de elementos de A como sigue:

$u_1 \in A \longrightarrow$ llamemos $u_2 = f(u_1) \in B \subset A$

$u_2 \in A \longrightarrow$ llamemos $u_3 = f(u_2) \in B \subset A$

....

$u_{n-1} \in A \longrightarrow$ llamemos $u_n = f(u_{n-1}) \in B \subset A$

....

El conjunto $A' = \{u_1; u_2; u_3; \text{-------} ; u_n; \text{-------}\}$

así construido es numerable y está contenido en A. Falta analizar si es infinito. Esto quedará garantizado si probamos que vale:

$$i \neq j \rightarrow u_i \neq u_j.$$

Supongamos que esto no es así, es decir, que existen en la sucesión elementos repetidos.
En ese caso, recorreremos la sucesión desde u_1 "en adelante" chequeando para cada elemento si coincide con alguno anterior, y en algún momento encontraremos a u_q; el primer elemento que coincide con alguno anterior, digamos u_p^q $(p < q)$

$$\left.\begin{array}{l} u_1 \notin B \\ u_i \in B \ \forall\, i \geq 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow u_i \neq u_1 \ \forall\, i \geq 2 \Longrightarrow p \geq 2 \Longrightarrow u_p = f(u_{p-1})$$

$$q > p \geq 2 \Longrightarrow u_q = f(u_{q-1})$$

Al ser f biyectiva resulta $u_{p-1} = u_{q-1}$. Esto contradice el hecho de que u_q era el primer elemento en la sucesión coincidente con alguno anterior.
Luego A' es infinito de donde resulta A infinito.

El teorema anterior muestra una importante propiedad de la que gozan sólo los conjuntos infinitos.
Este hecho había sido advertido pero no aceptado por los griegos y continuó preocupando por siglos a los matemáticos. En 1638, Galileo en su "Diálogo sobre dos nuevas ciencias" lo menciona en una conversación entre tres hombres del Renacimiento sobre las cuestiones concernientes al infinito, que a continuación transcribimos (parcialmente):

"Salviati: ..... Voy a hacerle una pregunta a Simplicio: ¿Usted sabe cuáles números (naturales) son cuadrados y cuáles no ?

Simplicio: Estoy enterado de que un número cuadrado es aquél que se obtiene como resultado de la multiplicación de otro número por sí mismo: así 4, 9, ... son cuadrados que se obtienen multiplicando 2, 3, ... por ellos mismos.

Salviati: Muy bien. También sabe que así como los productos se llaman "cuadrados" los factores se llaman "raíces". Y que aquellos números que no son el producto de dos factores iguales no son cuadrados . Luego, yo aseguro que todos los números (incluyendo ambos: cuadrados y no cuadrados) son más que los cuadrados solos. Es cierto lo que digo ¿ no ?

Simplicio: Muy cierto.

Salviati: Si ahora pregunto cuántos cuadrados hay, cualquiera me respondería, verazmente, que hay tantos cuadrados como sus correspondientes raíces, ya que todo cuadrado tiene una única raíz y toda raíz tiene un único cuadrado.

Simplicio: Precisamente.

Salviati: Y si yo pregunto ahora cuántes raíces hay, no puede negarse que hay tantas como los números, pues todo número es raíz de algún cuadrado.
Siendo esto así debemos decir que hay tantos cuadrados como números, pues hay tantos cuadrados como sus raíces y todos los números son raíces.
¡Pero habíamos dicho que existan más números que cuadrados !......

Sagredo: ¿Qué podemos concluir, entonces, en estas circunstancias ?

Salviati: Hasta donde yo veo, sólo podemos inferir que la totalidad de los números son infinitos, que el número de cuadrados es infinito, que el número de raíces ess infinito.
Que no es el número de cuadrados menor que la totalidad de los números ni mayor; finalmente que los términos "igual", "mayor" y "menor" no pueden aplicarse al infinito, sólo a cantidades finitas....

Sagredo: A mí también me parece que un número infinito no puede ser mayor, menor o igual que otro"......

Se desprende de la lectura del texto que Galileo advertía el particular comportamiento de los conjuntos infinitos descripto en el teorema, pero se resistía a considerar "iguales" la "cantidad" de elementos de un conjunto y de una parte propia del mismo.
Esto sigiió así durante mucho tiempo.
Nadie se atrevía a descreer de un principio filosófico muy arraigado: "El todo es mayor que la parte".

En 1887 Dedekind, en vez de pelear contra este hecho que parecía ser una paradoja, lo toma como definición de conjunto infinito.

Esta presentación de un conjunto infinito es menos intuitiva que la que hemos dado en este trabajo pero tiene una virtud: no requiere del conocimiento previo de los búmeros naturales, tan sólo emplea nociones relativas a la teoría de conjuntos.
De esta forma pueden darse las nociones de equipotencia entre conjuntos, conjuntos infinitos (finitos los que no son infinitos), cardinales, basándose en una teoría axiomática de conjuntos y luego pueden definirse los números naturales como cardinales de ciertos conjuntos.
A partir de N pueden construirse todos los restantes conjuntos numéricos y por ende toda la matemática puede edificarse sobre la teoría de conjuntos.

Otro aspecto mencionado en el "Diálogo..." es la aparente imposibilidad de establecer un orden entre conjuntos infinitos. ¿Será esto así ? ¿No habré dosconjuntos infinitos con distintos cardinales "comparables" ?
Para ir trabajando en este sentido preguntámosnos, por ahora, ¿Existe algún conjunto infinito no numerable ?. Por ejemplo: ¿Es R numerable o no ?

Cantor planteaba está última pregunta a Dedekind en una carta que le enviara el 29 de noviembre de 1873, manifestándole:

"A primera vista uno se dice a sí mismo: No, es imposible pues N consiste en partes discretas y R es un continuo.
Pero nada está probado por esta objeción.
Si bien siento cada vez más que no es posible encontrar una biyección entre N y R no puedo, por otro lado, justificar la razón de este hecho, lo cual me preocupa aunque sea tal vez muy simple.
A primera vista ¿no parece imposible que N pueda ser relacionado con el conjunto de todos los racionales positivos ? Y sin embargo no es difícil probar que si puede serlo"

Dedekind no pudo resolverle el problema a Cantor. Este último lo hizo, remitiéndole el 7 de diciembre de 1873 una nueva carta con la demostración ideada. Posteriormente, en 1890, encontró una segunda prueba, mucho más simple que la anterior, que es la que veremos a continuación.

<u>Teorema</u>

El conjunto de los números reales no es numerable.

<u>Demostración</u>

Sabemos que $R \sim [0,1)$. Por lo tanto probando que $[0,1)$ no es numerable estará concluido el teorema.

Veamos primero que:

$$[0,1) \sim A = \left\{ 0,\ d_1\, d_2\, d_3 \ldots\ldots / d_i \in \mathbb{Z}\ \ 0 \leq d_i \leq 9,\ \text{sin período } 9 \right\}$$

Esto surge al considerar la representación decimal de cada número en $[0,1)$, completando con ceros, y optando por la representación sin período 9 cuando sea el caso.

Por ejemplo: $0,39479999 \ldots\ldots = 0,3947\widehat{9}$ lo tomaremos como $0,3948000 \ldots\ldots$

Ahora veremos que A no es numerable.
Mostraremos para ello que <u>ninguna</u> sucesión de elementos de A puede cubrir a dicho conjunto.
Sea entonces una sucesión de elementos de A como sigue:

$$\left\{ x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n, \ldots\ldots \right\}$$

donde $x_i = 0,\ d^i_1\, d^i_2\, d^i_3 \ldots\ldots\ldots\ldots$ sin período 9

y con $d^i_j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq d^i_j \leq 9$, $\quad \forall i,\ j \in N$

Sea $Z = 0,\ Z_1\, Z_2\, Z_3 \ldots\ldots$ con $Z_i = \begin{cases} 1 & \text{si } d^i_i = 2 \\ 2 & \text{si } d^i_i \neq 2 \end{cases}$

Es claro que $Z \in A$ y sin embargo $Z \neq x_i \quad \forall i \in N$ ya que

$$Z_i \neq d^i_i \quad \forall i \in N$$

ORIGINAL

Definición:

Diremos que $c(R) = c$

Si $A \sim R$ se dice que A " tiene la potencia del continuo" (nombre introducido por Cantor)

Tenemos pues otro cardinal transfinito además de $\aleph_0$. ¿Será posible compararlos, pese a las opiniones de Salviati y Sagredo ? Encararemos esta cuestión en la siguiente sección.
Antes, mencionemos otra interesante consecuencia del teorema anterior

Teorema

Existen números reales trascendentes.

Demostración

Siendo $T = \{$ números reales trascendentes $\}$

$A = \{$ números reales algebraicos $\}$

es $R = A \cup T$

Si $T = \emptyset$ resulta $R = A$ absurdo pues A es numerable y R no.
Luego $T \neq \emptyset$

En realidad este teorema, consecuencia de los estudios de Cantor, no sorprendió por el resultado en sí sino por la simplicidad con que surge.
Otras demostraciones, de tipo constructivo, se conocían ya por ese entonces. Por ejemplo, en 1844 LIOUVILLE había demostrado que son trascendentes todos los números de la forma:

$$x = \frac{d_1}{10^{1!}} + \frac{d_2}{10^{2!}} + \frac{d_3}{10^{3!}} + \ldots\ldots + \frac{d_k}{10^{k!}} + \ldots\ldots\ldots =$$

$$= 0,d_1\ d_2 000\ d_3\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 00d_4\ 0\ldots\ldots$$

donde d_i son dígitos cualesquiera, de los cuales hay infinitos no nulos.
Dichos números reciben el nombre de "números de Liouville".

(Puede verse la demostración en "Análisis Matemático"- J. Rey Pastor- P. Pi Calleja- C. Trejo- Cap. IV)

En 1873 HERMITE probó que e es trascendente y en 1882 LINDEMANN que π lo es.
Más aún LINDEMANN probó que e^x, $x \neq 0$ y $\ln x$, $x \neq 1$ son trascendentes cualquiera sea x algebraico.

ORIGINAL

Todos los números mencionados forman un conjunto numerable de números reales trascendentes. Se nos ocurre entonces otra pregunta: ¿Cuál es el cardinal de T? Siendo $R = A \cup T$, A numerable y R no numerable concluímos que T no es numerable, es decir $c(T) \neq \aleph_0$ ¿Será c ?
Esto también será tratado en la siguiente sección.

§ 4- Orden entre cardinales

Así como pudimos decir que dos conjuntos son equipotente a través de una adecuada correspondencia entre ambos y sin necesidad de contar sus elementos (cosa, por otro lado, imposible si son conjuntos infinitos), definiremos ahora cuándo el cardinal de un conjunto es menor o igual que otro.
Es decir, trataremos de hacerlo estableciendo una adecuada correspondencia entre los conjuntos y extendiendo la noción intuitiva de orden entre cardinales de conjuntos finitos.
Pensemos en un gran teatro colmado de gente parada. Al acercarse la hora de la función comienzan a sentarse, hasta que se observa que todos los asistentes están sentados y sobran algunas butacas vacías.
La conclusión inmediata es: hay menos asistentes que butacas.
Lo interesante de esta observación es que se formula sin conocer ni el número de asistentes ni el de butacas.
El hecho de que a cada persona le corresponde una butaca y sobran butacas, clave de esta idea, puede plantearse como una correspondencia biunívoca entre $\{$ personas $\}$ y un subconjunto de $\{$butacas$\}$.

<u>Definición:</u>

Sean α y β dos números cardinales. Se dice que α es anterior a β y lo simbolizaremos así $\alpha \leq \beta$ si, siendo A y B conjuntos de cardinales α y β respectivamente, se tiene que A es coordinable con una parte de B.
Es decir

$$\alpha \leq \beta \iff \exists f: A \rightarrow C \text{ biyectiva}, \quad C \subset B$$
$$\iff \exists f: A \rightarrow B \text{ inyectiva}$$

<u>Lema:</u>

La anterior es una buena definición.

<u>Demostración</u>

Supongamos $A \sim A'$

$B \sim B'$

$\exists f: A \rightarrow B$ inyectiva

¿Podremos asegurar que $\exists g: A' \rightarrow B'$ inyectiva ?
Estamos en presencia de la siguiente situación:

ORIGINAL

$$A' \xrightarrow[\text{biyectiva}]{\varphi} A \xrightarrow[\text{inyectiva}]{f} B \xrightarrow[\text{biyectiva}]{\psi} B'$$

Entonces $\psi \circ f \circ \varphi : A' \longrightarrow B'$ es inyectiva

Notación: $\alpha < \beta$ significará $\alpha \leq \beta \wedge \alpha \neq \beta$

Si $\alpha = c(A)$ y $\beta = c(B)$ resulta fácil ver que $\alpha < \beta \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow A \sim C, C \subset B \quad \wedge \quad A \nsim B$

Ejemplos

1- $N \longrightarrow R$
$n \longmapsto n$ es inyectiva $\Longrightarrow \aleph_0 \leq c$

Más aún, $N \nsim R \quad \Longrightarrow \aleph_0 < c$

2- $\{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow N$
$x \longmapsto x$ es inyectiva $\Longrightarrow n \leq \aleph_0$
$\forall n \in N$

Puede probarse fácilmente que no existe ninguna biyección entre ambos conjuntos y por lo tanto $n < \aleph_0 \quad \forall n \in N$

Teorema:

La relación definida anteriormente es una relación de orden en el conjunto de todos los cardinales

Demostración

1) La relación es reflexiva:
Dado α cardinal, ¿ es $\alpha \leq \alpha$?

Si $\alpha = c(A)$, A conjunto sabemos que
$id_A : A \longrightarrow A$ es biyectiva de donde $c(A) \leq c(A)$

2) La relación es transitiva
Debemos probar que $\alpha \leq \beta \wedge \beta \leq \gamma \Longrightarrow \alpha \leq \gamma$
Sean A, B y C conjuntos de cardinales α, β y γ respectivamente.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \leq \beta \Rightarrow \exists f: A \longrightarrow B \text{ inyectiva} \\ \beta \leq \gamma \Rightarrow \exists g: B \longrightarrow C \quad '' \end{array}\right\} \Longrightarrow g \circ f: A \longrightarrow C \text{ es inyectiva} \Longrightarrow \alpha \leq \gamma$$

3) La relación es antisimétrica
Aceptaremos este resultado. Su demostración debida a CANTOR - BERNSTEIN puede consultarse en Dubiño (1)

ORIGINAL

Observación:

La relación anterior extiende la relación de orden (habitual) existente en $\mathbb{N}$.
En efecto, sean $n, m \in \mathbb{N}$, A y B conjuntos tales que $c(A) = n$ y $c(B) = m$.
Pueden tomarse $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $B = \{1, 2, \ldots, m\}$

$$n \leq m \Longleftrightarrow \exists f: A \longrightarrow B \text{ función inyectiva} \Longleftrightarrow$$

como cardinales

$$\Longleftrightarrow \exists f: \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, m\} \text{ func. inyectiva} \Longleftrightarrow n \leq m$$

como naturales

Teorema

$$\aleph_0 \leq \alpha \quad \forall \alpha \text{ cardinal transfinito}$$

Demostración

Ya vimos que todo conjunto infinito contiene un subconjunto infinito numerable.

La función "inyección" del subconjunto en el conjunto nos da entonces el resultado buscado.

Como consecuencia del teorema anterior surge que $\aleph_0 < c$. Inmediatamente surge una nueva pregunta: ¿Habrá algún subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ que no sea equipotente a $\mathbb{N}$ ni a $\mathbb{R}$? Es decir, ¿existe un cardinal transfinito α tal que $\aleph_0 < \alpha < c$ o por el contrario c es el cardinal "siguiente" de $\aleph_0$?

Cantor, que fue quien primero se planteó tal pregunta, no pudo encontrar una respuesta a la misma. Optó, sin embargo, por conjeturar la validez de la así llamada "Hipótesis del continuo": $\nexists$ cardinal $\alpha \,/\, \aleph_0 < \alpha < c$.

A partir de ella, comienzan a llamarle $\aleph_1$ a c, y surgen resultados interesantes como los siguientes:

Lema

$$c(A) = \aleph_0 \quad \wedge \quad c(A \cup B) = \aleph_1 \Longrightarrow c(B) = \aleph_1$$

Demostración

$$\left.\begin{array}{l} B \subset A \cup B \\ c(A \cup B) = \aleph_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow c(B) \leq \aleph_1$$

$$\text{Si } c(B) < \aleph_1 \underset{\text{H.C.}}{\Longrightarrow} c(B) \leq \aleph_0 \Longrightarrow c(A \cup B) = \aleph_0 \text{ absurdo}$$

ORIGINAL

Luego $c(B) = \aleph_1$

Aplicación:

$$c(\{\text{irracionales}\}) = \aleph_1$$

$$C(\{\text{trascendentes}\}) = \aleph_1$$

es decir ! hay muchos más números irracionales que racionales y trascéndentes que algebraicos ! Este resultado "shockea" a la intuición. Siempre ha parecido que los números trascendentes son números "raros", difíciles de conseguir. Sin embargo, si tomáramos un número real al azar, lo más probable es que resulte trascendente por ser éstos tantos como los reales.

La hipótesis del continuo es independiente de los axiomas de la teoría de conjuntos. Esto fue probado por Paul J. Cohen en 1963.

Otra pregunta que se hizo Cantor fue ¿Serán $\aleph_0$ y $\aleph_1$ los dos únicos cardinales transfinitos o habrá otros ? De haberlos deberán ser mayores que $\aleph_1$. El siguiente teorema nos da la respuesta

Teorema (Cantor)

$$c(A) < c(P(A)) \text{ cualquiera sea el conjunto } A$$

Demostración

La aplicación
$$\begin{aligned} A &\longrightarrow P(A) \\ x &\longrightarrow \{x\} \end{aligned} \quad \text{es inyectiva}$$

$$\therefore \quad c(A) \leq c(P(A))$$

Veremos a continuación que cualquier función $f: A \longrightarrow P(A)$ no es sobreyectiva.

Sea $X = \{x \in A / x \notin f(x)\} \subset A \implies X \in P(A)$

Veremos que $X \notin f(A) = \mathrm{Im}\,(f)$

Si $X \in f(A) \implies \exists\ b \in A / f(b) = X$. Pero entonces

$$b \in X \underset{\text{definic. de } X}{\iff} b \notin f(b) \underset{f(b)=X}{\iff} b \notin X \quad \text{absurdo} \quad !$$

luego $c(A) \neq c(P(A))$ de donde surge la tesis.

El teorema anterior funciona como una "fábrica" de cardinales transfinitos cada vez mayores.

$$c(N) < c(P(N)) \overset{\text{puede probarse}}{=} \aleph_1 < c(P(R)) < c(P(P(R))) < \cdots\cdots\cdots$$

ORIGINAL

Para esta enorme familia de cardinales, finitos e infinitos, Cantor definió además operaciones suma, producto y potencia, siempre usando solamente elementos de la teoría de conjuntos, cuidando de extender las operaciones habituales en N y probando las propiedades por ellas verificadas.
Puede consultarse al respecto Dubiña (1) o Lipschutz (2).
De esta forma, como ya comentamos anteriormente, pueden construirse N y los demás conjuntos numéricos, a partir de la teoría de conjuntos.

Este es otro importante aspecto de la teoría de cardinalidad, además del de resolver los enigmas que preocuparon a tantos matemáticos durante tantos siglos.

BIBLIOGRAFIA

1- DUBIÑA, Lía - Introducción a la teoría de conjuntos - Eudeba.

2- LIPSCHUTZ, Seymour - Teoría de conjuntos y temas afines - Serie Schaum - Mc Graw Hill.

3- STEIN, Sherman - Mathematics - The man made Universe- W.H. Freeman and. Co.

Referencias históricas extraídas de:

- FRAENKEL, A - Abstract Set Theory - North Holland Publishing Co

- J. REY PASTOR - P. Pi Calleja - C.A. Trejo.
  Análisis Matemático - Vol 1 - Ed. Kapelusz

- Singh, Jagjit - Great Ideas of Modern Mathematics- Their nature and use - Dover publications, Inc.

ORIGINAL

$\sup\{d, d'\}$ e $\inf\{d, d'\}$, que existen en C, pertenecen también al subconjunto D; es decir, D será subretículo de $(C, \leqslant)$ si $(D, \leqslant)$ es retículo. Así, por ejemplo, para el retículo que constituye el conjunto de los números enteros positivos ordenado por divisibilidad, el subconjunto de los números pares es un subretículo suyo.

Ejercicio. Probar que, si $f:(A, \leqslant) \to (B, \leqslant)$ es un isomorfismo de conjuntos ordenados y $(A, \leqslant)$ es un retículo, entonces $(B, \leqslant)$ también es un retículo. Para ello, póngase de manifiesto que, para cualesquiera $b, b' \in B$, se verifica que:

$$\sup\{b, b'\} = f(\sup\{f^{-1}(b), f^{-1}(b')\})$$

y que:

$$\inf\{b, b'\} = f(\inf\{f^{-1}(b), f^{-1}(b')\}).$$

ORIGINAL
Centro de Estudiantes

Lección 5. POTENCIA DE UN CONJUNTO

5.1. CONJUNTOS EQUIPOTENTES

Cuando, dados dos conjuntos A y B, existe una aplicación biyectiva entre ellos, se dirá que ambos conjuntos tienen igual potencia o que son equipotentes; para expresar que los conjuntos A y B son equipotentes se recurre al signo $\simeq$ y se escribe $A \simeq B$. Para probar que dos conjuntos tienen igual potencia hay que localizar una biyección entre ambos; el hecho de no localizar, en sucesivos intentos, una aplicación biyectiva de A en B no basta para afirmar que no son equipotentes, ya que para ello habría que probar que toda aplicación de uno en otro no puede ser biyectiva.

La equipotencia de conjuntos goza evidentemente de las siguientes propiedades:

a) Todo conjunto es equipotente a sí mismo. En efecto, para cualquiera que sea el conjunto A, la aplicación idéntica es una biyección de A en A.

b) Si un conjunto A es equipotente a otro B, entonces B es equipotente a A; es decir,

$$A \simeq B \implies B \simeq A.$$

En efecto, por ser A equipotente a B existe una aplicación $f: A \to B$ que es biyectiva, entonces su aplicación recíproca $f^{-1}: B \to A$ es una aplicación biyectiva de B en A, luego B es equipotente a A.

c) Si el conjunto A es equipotente al B y éste lo es a un tercer conjunto C, entonces A es equipotente a C; es decir:

$$(A \simeq B \wedge B \simeq C) \implies A \simeq C.$$

En efecto, por hipótesis existen dos aplicaciones $f: A \to B$ y $g: B \to C$, ambas biyectivas, luego $g \circ f: A \to C$ es también una biyección de A en

La equipotencia cumple, pues, los tres requisitos de una relación de equivalencia; si tuviera entonces sentido hablar del conjunto de todos los conjuntos, resultaría que para él la equipotencia sería una equivalencia, y se podrían considerar las clases de equivalencia que permitirían clasificar los conjuntos según su potencia; ahora bien, como tal conjunto no existe, la situación se complica. Lo que sí es cierto, sin embargo, es que la equipotencia es una relación de equivalencia para cualquier familia de conjuntos que se considere; pudiendo por tanto clasificar, respecto de la potencia, conjuntos diversos.

5.1.1. Cardinal de un conjunto

No pudiendo hablar de las clases de equivalencia para la relación de equipotencia, ha de procederse de otra forma para establecer unas categorías de conjuntos atendiendo a su potencia. El hecho de cumplirse las tres propiedades antes estudiadas permite la clasificación de los conjuntos respecto de su potencia en clases disjuntas: a cada conjunto se le asignará un objeto matemático, que se llamará cardinal de dicho conjunto, y que compartirá con todos los conjuntos que sean equipotentes a él; el cardinal de un conjunto A se representará por $\operatorname{card} A$. De lo dicho se deduce que dos conjuntos A y B tienen igual cardinal si ambos conjuntos son equipotentes, es decir,

$$(A \simeq B) \iff (\operatorname{card} A = \operatorname{card} B).$$

Obsérvese que al no poder hablar de conjunto cociente, la precedente forma de introducir los cardinales queda ambigua. Nótese que los números cardinales desempeñan un papel secundario y que todo lo que sigue podía ser estudiado sin recurrir a ellos; no obstante, su utilización da claridad y sencillez de expresión a los enunciados.

5.1.2. Relación de orden entre cardinales

Entre los distintos cardinales se define una relación $\leqslant$ atendiendo al siguiente criterio: se dice que $a = \operatorname{card} A$ es menor o igual que $b = \operatorname{card} B$, y se representa escribiendo $a \leqslant b$, si A es equipotente a una parte de B o, lo que es igual, si existe una aplicación inyectiva de A en B; cuando esto ocurre, se dice también que A tiene su potencia menor o igual que la de B. Es evidente que esta relación no depende de los representantes A y B; es decir, si $A \simeq A'$ y $B \simeq B'$, entonces $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B$ sii $\operatorname{card} A' \leqslant \operatorname{card} B'$. Esta relación $\leqslant$ es reflexiva, asimétrica y transitiva, es decir, es una relación de orden:

a) Reflexiva: para cualquiera que sea $a = \operatorname{card} A$, como A es equipotente a sí mismo, es $a \leqslant a$.

b) Antisimétrica: si A es equipotente a una parte de B y B es equipotente a una parte de A, entonces A y B son equipotentes. Esta propiedad recibe el nombre de teorema de Bernstein; por las dificultades que encierra, se omite su demostración.

c) Transitiva: si $a = \operatorname{card} A \leqslant b = \operatorname{card} B$ y $b = \operatorname{card} B \leqslant c = \operatorname{card} C$, entonces $a \leqslant c$. En efecto, se sabe que existen una aplicación inyectiva de A en B y otra aplicación también inyectiva de B en C; la composición de ambas es, pues, inyectiva de A en C, luego $a \leqslant c$.

Si $a = \operatorname{card} A$ y $b = \operatorname{card} B$ son tales que $a \leq b$ y $a \neq b$, se escribe $a < b$: es decir, el cardinal a es estrictamente menor que el cardinal b si A es equipotente a una parte de B, pero no lo es a todo B. Se dice, pues, que $\operatorname{card} A < \operatorname{card} B$ si, existiendo aplicaciones inyectivas de A en B, ninguna de ellas es sobreyectiva.

5.2. CONJUNTOS FINITOS

A partir del conjunto vacío ϕ se pueden construir los siguientes conjuntos:

$$\phi$$
$$\{\phi\}$$
$$\{\phi, \{\phi\}\}$$
$$\{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

ORIGINAL
Centro de Estudiantes

en donde cada conjunto consta de los elementos del anterior y de un nuevo elemento, el propio conjunto anterior. Los cardinales de estos conjuntos se designan por los símbolos 0, 1, 2, 3, ...; estos cardinales constituyen el conjunto $\mathbb{N}$ que, una vez dotado de la adecuada estructura algebraica, recibe el nombre de conjunto de los números naturales. El conjunto ϕ, cuyo cardinal es 0 (cero), no posee ningún elemento; el conjunto $\{\phi\}$, cuyo cardinal es 1 (uno), se dice que tiene un único elemento, y lo mismo se dice de todos los conjuntos equipotentes a él; del conjunto $\{\phi, \{\phi\}\}$ y de todos sus equipotentes, cuyo cardinal es 2 (dos), se dice que tienen dos elementos; etc.

Los conjuntos que tienen por cardinal un elemento de $\mathbb{N}$, es decir, los conjuntos de cardinal natural se llaman *conjuntos finitos*; dicho de otra forma, un conjunto se dice que es finito si es equipotente a uno de los ϕ, $\{\phi\}$, $\{\phi, \{\phi\}\}$, $\{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$, ... Según se acaba de anunciar, se llama «número de elementos» de un conjunto finito al cardinal de dicho conjunto; resulta entonces que dos conjuntos finitos tienen la misma potencia si, y sólo si, tienen igual número de elementos, es decir, entre dos conjuntos finitos se puede establecer una biyección cuando, y sólo cuando, ambos conjuntos tienen el mismo número de elementos. De todo ello se infiere que para un conjunto finito no es posible establecer una biyección de él con una de sus partes propias; o, dicho de otra forma, un conjunto finito no es equipotente con ninguna de sus partes propias.

5.3. CONJUNTOS INFINITOS

Los conjuntos finitos, ya definidos en el apartado anterior, gozan —como ya se indicó— de la propiedad de no ser equipotentes a ninguna de sus partes propias; hay, sin embargo, otros conjuntos que son equipotentes a alguna de sus partes propias, a tales conjuntos se les da el calificativo de infinitos. Aun cuando no se demuestre aquí, no puede menos de constatarse la siguiente propiedad: un conjunto es infinito, es decir, es equipotente a alguna parte propia suya, si, y sólo si, no es un conjunto finito; los conjuntos infinitos son, pues, los conjuntos que no son finitos. Se dan a continuación varios ejemplos de conjuntos infinitos, poniendo de manifiesto que son equipotentes a alguna de sus partes propias.

5.3.1. El conjunto $\mathbb{N}$ es infinito

Para comprobar esta afirmación bastará con encontrar una biyección entre $\mathbb{N}$ y una de sus partes propias; esto se va a hacer para dos subconjuntos, pero se podría hacer con muchos más.

a) Sea $C = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\} = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de los cuadrados de los números naturales; evidentemente $C \subset \mathbb{N}$, pues el cuadrado de un número natural es también un natural, pero además C es una parte propia de $\mathbb{N}$, ya que hay muchos números naturales que no son cuadrados perfectos. Pues bien, ocurre que $\mathbb{N} \simeq C$; para probarlo basta con encontrar una biyección $f: \mathbb{N} \to C$, y una tal biyección es la definida por $f(n) = n^2$.

b) Sea $C = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots\} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de los naturales pares, el cual es un subconjunto propio de $\mathbb{N}$; pues bien, $\mathbb{N}$ y C son equipotentes, ya que la aplicación f definida por $f(n) = 2n$ es una biyección de $\mathbb{N}$ en C.

5.3.2. El conjunto $\mathbb{R}$ es infinito

Se trata de probar que el conjunto de los números reales es equipotente a alguna de sus partes propias; además de hacer esta comprobación, se establecerán algunas biyecciones entre distintas partes de $\mathbb{R}$, las cuales serán de aplicación más adelante.

a) El conjunto de los números reales es equipotente al intervalo real $]-1, 1[$, el cual es un subconjunto propio de $\mathbb{R}$. En efecto, la aplicación f, de $]-1, 1[$ en $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x/(1 - x^2)$ es evidentemente una biyección; la existencia de esta biyección confirma la anunciada equipotencia y, por tanto, $\mathbb{R}$ es un conjunto infinito.

b) Dos intervalos abiertos no vacíos cualesquiera de la recta real son conjuntos equipotentes. En efecto: sean $I =]a_1, a_2[$ y $J =]b_1, b_2[$ dos intervalos no vacíos de la recta real, la aplicación $f: I \to J$, definida mediante $f(x) = [(b_1 - b_2)x + (a_1 b_2 - a_2 b_1)]/(a_1 - a_2)$, es evidentemente una aplicación biyectiva de I en J y, por tanto, la propiedad propuesta es cierta.

c) El conjunto $\mathbb{R}$ es equipotente a cualquier intervalo abierto no vacío de números reales, y en particular al intervalo $]0, 1[$. Esta afirmación es consecuencia inmediata de las dos propiedades anteriores.

5.4. CONJUNTOS NUMERABLES

Según se hizo notar expresamente en el apartado 5.3.1, el conjunto $\mathbb{N}$ es infinito; dicho conjunto infinito y todos sus equipotentes se dice que tienen la potencia numerable o que son conjuntos numerables. El cardinal de $\mathbb{N}$ se denota por $\aleph_0$ (alef cero; alef, primera letra del alfabeto hebreo). Un conjunto es, pues, numerable cuando es posible ponerlo en correspondencia biyectiva con el conjunto de los números naturales. Si C es numerable, existe una correspondencia biyectiva $f: \mathbb{N} \to C$, de manera que todo elemento de C es imagen de un cierto natural; si se designa por c_n a la imagen en C por f del natural n, es decir, $c_n = f(n)$, el conjunto C puede escribirse en la forma $C = \{c_n / n \in \mathbb{N}\} = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots\}$. Recíprocamente, todo conjunto de la forma $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\}$ es numerable, ya que la aplicación $f: \mathbb{N} \to C$ definida por $f(n) = c_n$ es evidentemente una biyección. De todo ello se infiere que un conjunto es numerable si, y sólo si, es posible designar a todos y cada uno de sus elementos mediante subíndices naturales de manera que dos elementos no tengan igual subíndice y que todo número natural sea subíndice de algún elemento; esto se expresará abreviadamente diciendo que un conjunto es numerable cuando es posible numerar, con todos los elementos de $\mathbb{N}$, todos sus elementos. Además del conjunto $\mathbb{N}$ hay otros muchos conjuntos que son numerables; por ejemplo, en el apartado anterior ya quedó probado que el conjunto de los cuadrados perfectos y el de los números pares son numerables. Se pretende ahora localizar otros conjuntos numerables y ello no sólo como ejercicio de aplicación, sino sobre todo para calibrar el alcance de la potencia del numerable. Con este fin se estudiarán algunas propiedades básicas que permitirán probar posteriormente sin dificultad la numerabilidad de varios conjuntos de uso frecuente.

5.4.1. Propiedad

La unión de un número finito de conjuntos numerable es a su vez un conjunto numerable; es decir, si $C_1, C_2, \dots, C_p$ son conjuntos numerables, entonces $C = \bigcup_{i=1}^{p} C_i$ es numerable.

Para cerciorarse de la veracidad de esta propiedad basta con demostrarla para el caso de dos únicos conjuntos, pues, para el caso de un número p cualquiera de conjuntos, se hallaría la unión de los dos primeros, la cual sería un conjunto numerable, que se uniría con el tercero, y así sucesivamente hasta el lugar p. Sean, pues, dos conjuntos numerables $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ y $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$; su unión puede escribirse en la forma:

$$A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots\},$$

donde si algún elemento estuviese en A y B no se le consideraría más que una vez; $A \cup B$ es equipotente a $\mathbb{N}$, ya que la aplicación $f: A \cup B \to \mathbb{N}$ definida por $f(a_i) = 2i$, $f(b_i) = 2i - 1$, es una biyección, con lo cual queda probada la proposición.

5.4.2. Propiedad

La unión de conjuntos numerables en cantidad numerable es también un conjunto numerable; es decir, si $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ son conjuntos numerables, entonces $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ es numerable.

En efecto, los conjuntos $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$, por ser numerables, pueden expresarse de la siguiente manera:

$$C_1 = \{c_{11}, c_{12}, c_{13}, \dots, c_{1m}, \dots\}$$
$$C_2 = \{c_{21}, c_{22}, c_{23}, \dots, c_{2m}, \dots\}$$
$$C_3 = \{c_{31}, c_{32}, c_{33}, \dots, c_{3m}, \dots\}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$C_n = \{c_{n1}, c_{n2}, c_{n3}, \dots, c_{nm}, \dots\}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

ORIGINAL
Centro de
Estudiantes

el conjunto C, unión de todos ellos, es entonces $C = \{c_{ij} / i, j \in \mathbb{N}\}$, en donde se entiende que si algún elemento se repitiese habría de ser tenido en cuenta una sola vez; se trata de probar la numerabilidad de C, y para ello se va a ir tomando sus elementos de la siguiente manera: primero se toma el elemento c_{11} (cuya suma de subíndices es dos), a continuación se toman los elementos cuya suma de subíndices es tres, comenzando por el que tiene menor su primer subíndice (c_{12} y c_{21}), después se toman los elementos cuya suma de subíndices es cuatro, eligiéndolos por orden creciente de su primer subíndice (c_{13}, c_{22}, c_{31}), luego se toman los elementos cuya suma de subíndices es cinco y haciéndolo por orden creciente de sus primeros subíndices ($c_{14}, c_{23}, c_{32}, c_{41}$), etc.; procediendo de esta forma se tiene la certeza de que ningún elemento de C queda olvidado; por tanto, C puede expresarse en la forma:

$$C = \{c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{13}, c_{22}, c_{31}, \dots, c_{1n}, c_{2,n-1}, \dots, c_{n-1,2}, c_{n1}, \dots\} \text{[illegible]}$$

una vez que C se ha expresado de esta manera, cerciorarse de que es un conjunto numerable no encierra dificultad, pues resulta trivial el obtener una numeración de sus elementos; compruébese que dicha numeración atribuye al elemento c_{pq} el natural:

$$(p+q-2)(p+q-1)/2+p.$$

5.4.3. Propiedad

El producto cartesiano de un número finito de conjuntos numerables es un conjunto numerable; es decir, si $C_1, C_2, \dots, C_p$ son p conjuntos numerables, entonces el conjunto $C = C_1 \times C_2 \times \dots \times C_p$ es también numerable.

Al igual que con la propiedad 5.4.1, basta hacer la demostración para el caso de dos conjuntos, pues con repetir sucesivamente la demostración p veces se obtiene el resultado apetecido. Sean, pues, A y B dos conjuntos numerables, los cuales pueden, en consecuencia, escribirse en la forma:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} \quad \text{y} \quad B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\};$$

el conjunto

$$C = A \times B = \{(a_i, b_j) / i, j \in \mathbb{N}\}$$

consta, pues, de los siguiente elementos:

$$\begin{array}{l}
(a_1, b_1),\ (a_1, b_2),\ (a_1, b_3),\ \ldots,\ (a_1, b_j),\ \ldots \\
(a_2, b_1),\ (a_2, b_2),\ (a_2, b_3),\ \ldots,\ (a_2, b_j),\ \ldots \\
(a_3, b_1),\ (a_3, b_2),\ (a_3, b_3),\ \ldots,\ (a_3, b_j),\ \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(a_i, b_1),\ (a_i, b_2),\ (a_i, b_3),\ \ldots,\ (a_i, b_j),\ \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Tomando entonces estos elementos en el orden que indican las diagonales señaladas en el cuadro anterior: primero el elemento de la primera diagonal, después los dos elementos de la segunda en el sentido que indica la flecha, luego los tres elementos de la tercera diagonal comenzando según el sentido de la flecha, etc., el conjunto C puede escribirse en la forma:

$$C = A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_3, b_1), (a_2, b_2), (a_1, b_3), \ldots, (a_1, b_n), (a_2, b_{n-1}), \ldots, (a_n, b_1), \ldots\},$$

resultando ya evidente su numerabilidad y, por tanto, la veracidad de la propiedad. Obsérvese que el camino seguido para realizar esta demostración es, en esencia, el mismo que el que se tomó para probar la propiedad anterior.

5.4.4. Numerabilidad del conjunto $\mathbb{Z}$

Como consecuencia de la propiedad 5.4.1. se obtiene con facilidad que el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros es un conjunto numerable, es decir, equipotente a $\mathbb{N}$. En efecto, es evidente que $\mathbb{Z}$ es la unión de los conjuntos $\{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ y $\{0, -1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots\}$, los cuales son evidentemente numerables; la propiedad citada confirma, pues, la numerabilidad de $\mathbb{Z}$, la cual queda también palpable si se escribe $\mathbb{Z}$ de la siguiente manera:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots, n, -n, \ldots\}.$$

5.4.5. Numerabilidad del conjunto $\mathbb{Q}$

El hecho de que el conjunto $\mathbb{Q}$ sea numerable, como se comprobará en seguida, es, en principio, inesperado y un tanto desconcertante, pues a primera vista cabía pensar que el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es «mucho más numeroso» que el de los naturales; esta sospecha infundada proviene de que, en la ordenación habitual de los racionales, entre dos números racionales cualesquiera, siempre hay nuevos racionales (el racional $(p/q + r/s)/2$ está comprendido entre p/q y r/s), situación que no se presenta para los números naturales ni para los enteros. Pues bien, a pesar de esta apariencia de «mayor abundancia» de números racionales que de números naturales, ambos conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$ son equipotentes. En efecto, es evidente que, para cualquiera que sea el número natural $n > 0$, $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots, i, -i, \ldots\}$ es equipotente al conjunto $C_n = \{0, 1/n, -1/n, 2/n, -2/n, \ldots, i/n, -i/n, \ldots\}$, y como $\mathbb{Z}$ es numerable, también lo es C_n; ahora bien, como $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ son conjuntos numerables, en virtud de la propiedad 5.4.2, su unión es un conjunto numerable, es decir, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ es numerable, pero dicho conjunto no es otro que $\mathbb{Q}$, pues todo racional, cualesquiera que sean su numerador y denominador, ha de pertenecer forzosamente a uno al menos de los conjuntos C_n. Resulta, pues, que, contra la primera impresión intuitiva, el conjunto de los números racionales es también un conjunto numerable.

5.5. POTENCIA DEL CONTINUO

Se llama potencia del continuo a la potencia del conjunto $\mathbb{R}$, el cual, según ya quedó demostrado, es un conjunto infinito: tienen, pues, potencia del continuo todos los conjuntos equipotentes al de los números reales. El cardinal de $\mathbb{R}$ se denota por $\mathfrak{c}$ ($\mathfrak{c}$ gótica) y a veces por $\aleph_1$ (alef uno). Como quiera que $\mathbb{N}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$, resulta evidente que la potencia del continuo es superior o quizá igual a la del numerable; se probará a continuación que hay que descartar esta última posibilidad, es decir, que card $(\mathbb{N}) <$ card $(\mathbb{R})$. Obsérvese que los campos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ tienen igual potencia, la del numerable, y que, según se verá en breve, el conjunto de los números reales tiene ya mayor potencia; esta situación pone de manifiesto que aunque para los números reales ocurre, al igual que para los racionales, que entre dos de ellos hay siempre otro, no por eso tienen igual potencia, sino que el infinito de $\mathbb{R}$ es superior al de $\mathbb{Q}$.

5.5.1. La potencia del continuo es superior a la del numerable

Como $\mathbb{N}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$, la aplicación inclusión $i: \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{R}$ es inyectiva; por tanto, card $\mathbb{N} \leq$ card $\mathbb{R}$. Todo estriba, pues, en demostrar que, como $\mathbb{R}$ es equipotente al intervalo real $]0, 1[$, ninguna de las aplicaciones de $\mathbb{N}$ en $]0, 1[$ puede ser sobreyectiva. Sea, pues, una aplicación $f: \mathbb{N} \to]0, 1[$ cualquiera: los elementos $f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$ son todos ellos números reales del intervalo $]0, 1[$ y, por consiguiente expresables, de manera decimal ilimitada [*], en la forma:

$$\begin{array}{l}
f(1) = 0'a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \ldots \\
f(2) = 0'a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f(n) = 0'a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn} \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

ORIGINAL
Centro de
Estudiantes

Considérese entonces el siguiente número real del intervalo $]0, 1[$:

$$r = 0'a_1\, a_2 \ldots a_q \ldots$$

donde $a_i = a_{ii} - 1$, si $a_{ii} \neq 0$, $a_i = a_{ii} - 1$, si $a_{ii} = 9$; el número r así obtenido no es ninguno de los $f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$, pues para todo n, $f(n) \neq r$,

[*] Obsérvese que si la forma decimal de un número real no tiene más que un número finito de cifras, como, por ejemplo, [illegible] $= 0'33$, sustituyendo la última cifra decimal por el número natural inmediato anterior y siguiéndole de infinitos nueves ($0'33 = 0'32999\ldots$) se obtiene su forma decimal ilimitada.

ya que tienen distinta, al menos, la cifra de lugar n; resulta entonces que r es del conjunto de llegada $[0, 1[$, pero no lo es del conjunto imagen $f(\mathbb{N})$ y en consecuencia f no es sobreyectiva, como había que probar.

5.5.2. El conjunto $\mathbb{C}$ tiene la potencia del continuo

Se trata de demostrar que el conjunto de los números complejos tiene igual potencia que el de los números reales o, lo que es equivalente, que existe una biyección entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}$. Para cualquiera que sea el número complejo $z=(a, b)$, donde a y b son dos números reales y, por tanto, expresables en forma decimal con p y q cifras, respectivamente, antes de la coma de decimales, si es $n=\max(p, q)$, poniendo $n-p$ ceros delante de la primera cifra de a y $n-q$ delante de la primera de b, los números a y b pueden escribirse en la forma $a=a_1 a_2 \ldots a_n' \alpha_1 \alpha_2 \ldots$ y $b=b_1 b_2 \ldots b_n' \beta_1 \beta_2 \ldots$; haciendo, pues, corresponder a z el real $r=a_1 b_1 a_2 b_2 \ldots a_n b_n' \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \ldots$, se establece una correspondencia biyectiva de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{R}$, que confirma que $\mathbb{C}$ posee la potencia del continuo.

5.6. OTRAS POTENCIAS DE CONJUNTOS INFINITOS

Se trata de probar aquí que para cualquier cardinal siempre hay otro superior a él; con ello, entre otras cosas se descarta la posibilidad de que la potencia del continuo fuese lo suficientemente «fuerte» como para pensar que no hubiera cardinales superiores al de $\mathbb{R}$. Para probar esta afirmación se demuestra a continuación el teorema de Cantor; aplicado reiteradamente, permite encontrar conjuntos con potencia superior a cualquiera dada.

5.6.1. Teorema de Cantor

Para todo conjunto C se verifica que $\operatorname{card} C < \operatorname{card} \mathcal{P}(C)$.

Este teorema en los casos en que C es finito es de demostración trivial, ya que: si $C=\phi$, entonces $\operatorname{card} \phi=0$ y $\operatorname{card} \mathcal{P}(\phi)=1$; si C es finito, entonces $\operatorname{card} C=n \in \mathbb{N}$ y $\operatorname{card} \mathcal{P}(C)=2^n$ y $n<2^n$. La dificultad se presenta en el caso de ser C infinito. Como, para cualquier C, la aplicación $C \to \mathcal{P}(C)$, que a cada $c \in C$ le asocia $\{c\} \in \mathcal{P}(C)$, es inyectiva pero no sobreyectiva, resulta que el $\operatorname{card} C$ no puede ser superior a $\operatorname{card} \mathcal{P}(C)$. Para demostrar el teorema, basta, pues, comprobar que no existe ninguna biyección entre C y $\mathcal{P}(C)$; se procede por reducción al absurdo, es decir, suponiendo que existe una biyección $f: C \to \mathcal{P}(C)$ y llegando así a una contradicción. En el supuesto, pues, de que exista una tal biyección f, considérese el subconjunto D de C formado por aquellos elementos que no pertenecen a su imagen, es decir, $D=\{c \in C \mid c \notin f(c)\}$, y sea $d=f^{-1}(D)$; entonces, el elemento $d \in C$ o es de D o no pertenece a D, analizando ambas posibilidades, se llega a:

— Si $d \notin D$, entonces, según la definición de D, sería $d \in f(d)=D$, en contradicción con lo supuesto;

— Si $d \in D$, entonces, según la definición de D, sería $d \notin f(d)=D$, en contradicción con lo supuesto;

no pudiendo presentarse ninguna de las dos únicas alternativas posibles, no hay más remedio que desechar la existencia de una biyección entre C y $\mathcal{P}(C)$, como se pretendía demostrar.

5.6.2. Ejercicio

Se va a probar, como ejercicio, que $\operatorname{card} \mathbb{R}=\operatorname{card} \mathcal{P}(\mathbb{N})$, es decir, que existe una biyección entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ y el intervalo real $[0, 1[$. Para ello, se recurre a la forma decimal ilimitada en base 2 de los números reales: todo número real, del intervalo $[0, 1[$, puede expresarse de modo único en la forma $0'\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_i \ldots$, en donde α_i, $i=1, 2, \ldots$, es igual a 0 ó 1. Considérese la aplicación $[0, 1[\to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ que a cada $0'\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_i \ldots$ le hace corresponder el conjunto $\{n \in \mathbb{N} \mid \alpha_n=1\}$; esta aplicación es evidentemente biyectiva, siendo su aplicación recíproca aquella que a cada $C \subset \mathbb{N}$ le asocia el número real $0'\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots \in [0, 1[$ definido mediante $\alpha_n=1$, si $n \in C$, $\alpha_n=0$, si $n \notin C$, $n=1, 2, \ldots$ La existencia de esta biyección permite afirmar que $\mathbb{R}$ es equipotente a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Cabe preguntarse si habrá cardinales comprendidos entre $\operatorname{card} \mathbb{N}=\aleph_0$ y $\operatorname{card} \mathbb{R}=\aleph_1$, es decir, si existirá algún conjunto cuya potencia sea estrictamente superior a la del numerable y estrictamente inferior a la del continuo. Se ha demostrado que ésta es una cuestión irresoluble: es decir, ya sea admitiendo, ya sea negando la existencia de un tal conjunto, no se llega a ninguna contradicción. La hipótesis que establece que no existe ningún cardinal entre los de $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ recibe el nombre de *hipótesis del continuo*.

ORIGINAL
Centro de
Estudiantes

EJERCICIOS AL CAPÍTULO 1

1.1. Dados tres conjuntos A, B y C, pruébese que:

$$\left.\begin{array}{l}(A \cup B) \subset (A \cup C) \\ (A \cap B) \subset (A \cap C)\end{array}\right\} \Longrightarrow B=C.$$

1.2. Si X e Y son dos subconjuntos de un conjunto U, pruébese que:

$$[(X \cap Y') \cup (X' \cap Y)=\phi] \Longrightarrow X=Y$$
$$[(X \cap Y') \cap (X' \cap Y)=Y] \Longrightarrow X=\phi$$

(La «prima» indica complementario en U.)

1.3. Si $X \triangle Y$ denota la diferencia simétrica de los conjuntos X e Y y si, éstos son finitos, se llama distancia de X a Y al número de elementos de la diferencia simétrica, que se representa por $d(X, Y)$, demuéstrese que:

a) $A \triangle C \subset (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$;
b) $d(A, C) \leqslant d(A, B)+d(B, C)$.

(A, B y C conjuntos cualesquiera.)

1.4. Pruébese que un conjunto finito de n elementos tie[illegible]

1.5. Dados dos conjuntos A y B y un grafo $G \subset A$[illegible] defina $G(A')=\{b \in B \mid \exists a \in A'$ tal que (a, b)[illegible]

a) Si A', $A'' \subset A$ y $G \subset A \times B$, entonces [illegible]
b) Si A', $A'' \subset A$ y $G \subset A \times B$, entonces [illegible] con-
un contraej. estos conjuntos no son ig[illegible]
c) Si G', $G'' \subset A \times B$, entonces $(G' \cap G'')(A$[illegible] junto