

ÁLGEBRA LINEAL 2023-2DO (LM - PM - LCC)

PRÁCTICA 0: MATRICES - DETERMINANTES - SISTEMAS LINEALES

1. Encontrar matrices $A, B \in \mathcal{M}_2[\mathbb{R}]$ tales que:

- a) $AB = 0, A \neq 0$ y $B \neq 0$.
- b) $AB = 0$ y $BA \neq 0$.
- c) $AA = A, A \neq 0$ y $A \neq \mathbb{I}$.
- d) $AA = 0$ y $A \neq 0$.
- e) $A^2 = -\mathbb{I}$.
- f) $AB = -BA$, sin que $AB = 0$.

2. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- a) La primera fila de AB es una combinación lineal de todas las filas de B ¿Cuáles son los escalares de esta combinación, y cuál es la primera fila de AB ? ¿Y la segunda fila?
 - b) La primera columna de AB es una combinación lineal de todas las columnas de A . ¿Cuáles son los escalares de esta combinación, y cuál es la primera columna de AB ? ¿Y la segunda columna?
3. Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones. Justificar y mostrar un contraejemplo en el caso de que sea FALSO.
- a) Si la primera y la tercera columna de B son iguales, también lo son la primera y la tercera columna de AB .
 - b) Si la primera y la tercera fila de B son iguales, también lo son la primera y la tercera fila de AB .
 - c) Si la primera y la tercera fila de A son iguales, también lo son la primera y la tercera fila de AB .
 - d) $(AB)^2 = A^2B^2$.
4. Demostrar $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}[\mathbb{R}], \forall C \in \mathcal{M}_{n,m}[\mathbb{R}],$ y $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ que vale:
- a) $(A^t)^t = A,$
 - b) $(A + B)^t = A^t + B^t,$
 - c) $(\alpha A)^t = \alpha(A^t),$
 - d) $(AC)^t = C^t A^t$

5. La matriz de rotación del plano x, y en un ángulo θ es

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Recordando algunas identidades trigonométricas, verifique que $A(\theta_1)A(\theta_2) = A(\theta_1 + \theta_2)$. ¿Qué matriz es $A(\theta)A(-\theta)$?

- 6.
- a) Sean A y B dos matrices triangulares inferiores. Muestre que el producto AB es una matriz triangular inferior, y que si A es invertible, A^{-1} también es triangular inferior.
 - b) Sean A y B dos matrices triangulares superiores. Muestre que el producto AB es una matriz triangular superior, y que si A es invertible, A^{-1} también es triangular superior.
 - c) Sean A y B dos matrices diagonales. Muestre que el producto AB es una matriz diagonal, y que si A es invertible, A^{-1} también es una matriz diagonal.

ÁLGEBRA LINEAL 2023-2DO (LM - PM - LCC)

7. Determinar 4 valores distintos $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de modo tal que resulte $\det(A) = 0$, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -4 & 11 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

8. Dados n escalares x_1, \dots, x_n se llama determinante de Vandermonde al siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

- a) Verificar que el determinante de Vandermonde es igual a $\prod_{k < j, j=2}^n (x_j - x_k)$.

Notar que es condición suficiente y necesaria para que el determinante de una colección de n escalares sea 0, que dos de dichos escalares sean iguales.

- b) Determinar para qué valores de α se anula el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ 2 & 1 & -2 & \alpha \\ 4 & 1 & 4 & \alpha^2 \\ 8 & 1 & -8 & \alpha^3 \end{vmatrix}.$$

9. Sea $A \in \mathcal{M}_n[\mathbb{R}]$ probar que, si existe, su inversa es única.

10. Definición: Dada una matriz A , se dice que el rango de A es r , si existe una submatriz cuadrada de orden r con determinante distinto de cero y toda submatriz cuadrada de orden $r + 1$ tiene determinante nulo, conviniendo que el rango de la matriz nula es 0.

- a) Demostrar que el rango r de una matriz cuadrada A de orden n es menor que n si y solo si $|A| = 0$.
b) Calcular el rango de las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

11. Resolver los siguientes sistemas utilizando eliminación gaussiana.

$$\begin{aligned} a) \begin{cases} x_2 + 4x_3 &= -5 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= -2 \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 &= 6 \end{cases} & \quad b) \begin{cases} x_1 - 3x_2 &= -4 \\ 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 &= -8 \\ -4x_1 + 6x_2 - x_3 &= 7 \end{cases} \\ c) \begin{cases} x_1 - 3x_2 &= 5 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$