

# PRÁCTICA 1: *Cardinalidad*

Pamela Viale

Natalia Colussi

Alejandro Hernández

Valeria Pérez Mogetta

1. Mediante el uso de biyecciones apropiadas, demuestre cada uno de los siguientes ítems:

- (a)  $P = \{x \in \mathbb{N} \mid x \bmod 2 = 0\}$  es equipotente a  $\mathbb{N}$
- (b)  $\mathbb{Z}$  es equipotente a  $\mathbb{N}$
- (c)  $A = \{1, 2, 3\}$  no es equipotente a  $B = \{7\}$
- (d) todos los intervalos reales cerrados y acotados son equipotentes entre sí
- (e)  $(-\infty, \infty)$  es equipotente a  $(0, 1)$  y a  $(0, \infty)$

2. Sean  $A, B, C$  conjuntos cualesquiera. Mostrar que:

- (a) si  $A \subseteq B$  entonces  $\text{card}(A) \preceq \text{card}(B)$
- (b)  $\text{card}(A - B) \preceq \text{card}(A)$
- (c)  $\text{card}(A) = \text{card}(A \times \{b\})$  para cualquier  $b$
- (d)  $\text{card}(A \times B \times C) = \text{card}(A \times (B \times C))$
- (e)  $\text{card}(A \times B) = \text{card}(B \times A)$
- (f) si  $\text{card}(B) \preceq \text{card}(C)$  entonces  $\text{card}(A \times B) \preceq \text{card}(A \times C)$
- (g) si  $\text{card}(A) = n$  entonces  $\text{card}(\mathcal{P}(A)) = 2^n$

3. Demuestre las siguientes propiedades:

- (a) la relación  $\sim$  es una relación de equivalencia
- (b) la relación  $\preceq$  es una relación de orden

4. Mostrar que si  $A \sim B$  y  $C \sim D$  entonces  $A \times C \sim B \times D$ . ¿Vale la afirmación recíproca?

5. Demuestre que si  $A \preceq B$  y  $C \preceq D$ , y además  $B \cap D = \emptyset$ , entonces  $A \cup C \preceq B \cup D$ .

6. Demuestre que  $[0, 1]$  es equipotente a  $[0, 1)$ .

7. Sea  $P_i$  el conjunto de todos los polinomios a coeficientes enteros de grado  $i \in \mathbb{N}_0$ . (Considere al polinomio nulo como un polinomio de grado 0).
  - (a) Describa por comprensión los conjuntos  $P_0$ ,  $P_3$  y  $P_n$ .
  - (b) Describa al conjunto  $P$  de todos los polinomios a coeficientes enteros de grado natural en términos de los conjuntos  $P_i$ .
  - (c) Defina una función  $f : P_i \rightarrow \mathbb{Z}^{i+1}$  inyectiva (demuéstrelo).
  - (d) Valiéndose de todo lo anterior y de las propiedades de las relaciones  $\preceq$  y  $\sim$ , demuestre que  $P$  es numerable.
8. Mostrar que los siguientes conjuntos son infinito numerables:
  - (a)  $A = \left\{ \frac{\sqrt[n]{m}}{n^n} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}$
  - (b)  $B = \{ \text{sucesiones de la forma } \langle s_0, s_0 + r, s_0 + 2r, \dots, s_0 + nr, \dots \rangle \mid s_0, r \in \mathbb{Z} \}$
  - (c)  $C = \{ [a, b] \mid a, b \in \mathbb{Z}, b > a \}$
9. Un número  $r \in \mathbb{C}$  se dice algebraico sii es la solución de una ecuación polinómica a coeficientes enteros, es decir sii  $a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_n r^n = 0$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_i \in \mathbb{Z}$  para  $i = 0, 1, \dots, n$  y  $a_n \neq 0$ . Probar que:
  - (a) todo número racional es algebraico
  - (b) ¿Qué se puede concluir del ítem anterior con respecto a la cardinalidad del conjunto de los números algebraicos?
  - (c)  $\sqrt{2}$  es algebraico
  - (d)  $i$  es algebraico
  - (e) el conjunto de los números algebraicos es numerable
10. Los números que no son algebraicos se denominan trascendentes.
  - (a) Teniendo como hipótesis que  $\mathbb{C}$  no es numerable, probar que existen números trascendentes.
  - (b) Probar que los números trascendentes no son numerables.

Sugerencia: en ambos casos razonar por el absurdo y considerar a los números reales como la unión de algebraicos y trascendentes.

11. Se sabe que  $\aleph_0 < c$ , donde  $\aleph_0 = \text{card}(\mathbb{N})$  y  $c = \text{card}(\mathbb{R})$ . Pero... ¿existe un cardinal  $\alpha$  tal que  $\aleph_0 < \alpha < c$ ? Cantor, al no poder dar una respuesta a esta pregunta, conjetura la validez de la llamada hipótesis del continuo. Esta expresa que:

no existe un cardinal  $\alpha$  tal que  $\aleph_0 < \alpha < c$ .

A partir de esto, al cardinal  $c$  se lo suele llamar también  $\aleph_1$ . Utilizando esta hipótesis, se pide demostrar el siguiente teorema:

$$\text{card}(A) = \aleph_0, \text{card}(B \cup A) = \aleph_1 \Rightarrow \text{card}(B) = \aleph_1$$

12. Sea  $\Sigma$  un conjunto finito de símbolos.  $\Sigma^*$  denota el conjunto de todas las cadenas (secuencias finitas y ordenadas de símbolos) sobre el alfabeto  $\Sigma$ .
- (a) ¿Cuántas cadenas se pueden construir sobre el alfabeto  $\Sigma$ ?
  - (b) Teniendo en cuenta que un lenguaje sobre  $\Sigma$  es un subconjunto de  $\Sigma^*$ , ¿cuántos lenguajes existen sobre el alfabeto  $\Sigma$ ?
13. (a) Muestre que la cardinalidad de  $\mathcal{P}(X)$  es igual a la cardinalidad del conjunto de todas las funciones de  $X$  en  $\{0, 1\}$ .
- (b) Pruebe que  $\text{card}(\{f \mid f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}\}) \preceq \text{card}(\{f \mid f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\})$ .
  - (c) Concluya que  $\aleph_0 < \mathcal{P}(\mathbb{N}) \preceq \text{card}(\{f \mid f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\})$ .
  - (d) Todo programa de computadora puede ser considerado como una cadena sobre el alfabeto presente en el sistema. Por lo tanto, ¿cuántos programas se pueden escribir en una máquina?
  - (e) ¿Qué conclusiones se pueden sacar a partir de los últimos dos ítems?