Funciones Recursivas de Listas

Pablo Verdes

LCC

30 de abril de 2020

Contenidos

- Listas: definición, notaciones
- Concatenación de listas
- Funciones de listas: definición, notaciones
- Funciones base: definición y ejemplos
- Operador composición: definición y ejemplos
- Operador repetición: definición y ejemplos
- El conjunto de Funciones Recursivas de Listas: definición inductiva
- El poder de cálculo de las *FRL*

Listas

- **Definición:** Una **lista** es una secuencia ordenada y finita de cero o más elementos de $\mathbb{N}_0$. Notación:
  - $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ para una lista de longitud k
  - letras mayúsculas (por ej. X, Y, Z) cuando no estemos interesados en la cantidad de elementos, o con supra-índice (por ej. X^k) si lo estamos
  - $[\,]$ para la lista vacía
- Llamaremos $\mathcal{L}$ al conjunto de todas las listas.
- Con $\mathcal{L}^n$ indicaremos el conjunto de listas que poseen exactamente n elementos.
- Con $\mathcal{L}^{\geq n}$ representaremos al conjunto de listas con al menos n elementos. Ejemplos:
  - $\mathcal{L}^{\geq 1}$ es el conjunto de todas las listas salvo la vacía
  - $\mathcal{L}^{\geq 4}$ es el conjunto de todas las listas con al menos 4 elementos

Concatenación de listas

- La operación natural en $\mathcal{L}$ es la concatenación.

- **Definición:**

  Dadas dos listas $X = [x_1, \ldots, x_m]$ e $Y = [y_1, \ldots, y_n]$, llamamos **concatenación** de X e Y a la lista $[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n]$.

  Notación:

  - Usaremos la expresión $[X, Y]$ o equivalentemente X, Y (sin corchetes) para indicar la concatenación de las listas X e Y.
  - Para distinguir en particular ciertos elementos de interés, usaremos notaciones del tipo $[a, X, b, Y]$ —o bien su versión desprovista de corchetes: a, X, b, Y.

- Es fácil probar que se trata de una operación asociativa.
  Elemento neutro: la lista vacía.

Funciones de listas

- **Definición:**

  Las **funciones de listas** son funciones que van de $\mathcal{L}$ en $\mathcal{L}$.

  Notación:

  - Usaremos letras mayúsculas: $F, G, \ldots$
  - Para indicar que una función F asigna a la lista X la lista Y, usaremos la notación $F\ X = Y$ (nótese la omisión de paréntesis). También usaremos las notaciones $F[X] = Y$, $X \xrightarrow{F} Y$, o $X \overset{F}{\text{———}} Y$.

- Observemos que a las funciones numéricas $f : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ definidas anteriormente se las puede considerar como funciones de listas $F : \mathcal{L}^k \to \mathcal{L}^1$. (En realidad, vamos a representar a las funciones numéricas f como funciones de lista $F : \mathcal{L}^k \to \mathcal{L}^{k+1}$ donde $FX = [f(X), X]$. Detalles, más adelante.)

- Tal como hiciéramos para las FR, definiremos un conjunto de funciones base y ciertos operadores. Esto nos permitirá construir recursivamente un conjunto particular de funciones de listas.

Contenidos

- Listas: definición, notaciones
- Concatenación de listas
- Funciones de listas: definición, notaciones
- **Funciones base: definición y ejemplos**
- Operador composición: definición y ejemplos
- Operador repetición: definición y ejemplos
- El conjunto de Funciones Recursivas de Listas: definición inductiva
- El poder de cálculo de las *FRL*

Funciones base

1. Cero a izquierda: $O_i[x_1, x_2, \ldots, x_k] = [0, x_1, x_2, \ldots, x_k]$
2. Cero a derecha: $O_d[x_1, x_2, \ldots, x_k] = [x_1, x_2, \ldots, x_k, 0]$
3. Borrar a izquierda: $\square_i[x_1, x_2, \ldots, x_k] = [x_2, x_3, \ldots, x_k]$
4. Borrar a derecha: $\square_d[x_1, x_2, \ldots, x_k] = [x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}]$
5. Sucesor a izquierda: $S_i[x_1, x_2, \ldots, x_k] = [x_1 + 1, x_2, \ldots, x_k]$
6. Sucesor a derecha: $S_d[x_1, x_2, \ldots, x_k] = [x_1, x_2, \ldots, x_k + 1]$

Funciones base

- Ejemplos:

  1. $O_i[1,2,3] = [0,1,2,3]$
  2. $O_d[1,2,3] = [1,2,3,0]$
  3. $\square_i[2,3,5,7] = [3,5,7]$
  4. $\square_d[2,3,5,7] = [2,3,5]$
  5. $S_i[5,6,7] = [6,6,7]$
  6. $S_d[5,6,7] = [5,6,8]$

- Observemos que:

$$dom(O_i) = dom(O_d) = \mathcal{L}$$
$$dom(\square_i) = dom(\square_d) = \mathcal{L}^{\geq 1}$$
$$dom(S_i) = dom(S_d) = \mathcal{L}^{\geq 1}$$

Operador composición

- **Definición:**

  Sean F y G funciones de listas. Construimos por **composición** la función de listas $H = F \circ G$, que notaremos simplemente $H = FG$, como

  $$H\,X = F[G\,X],$$

  es decir, dada una lista X se aplica primero la función G, y al resultado obtenido se aplica la función F.

- Ejemplos:
  - $O_i O_i\,[1,2,3] = O_i\,[0,1,2,3] = [0,0,1,2,3]$
  - $S_i S_d O_d\,[1,3,5] = S_i S_d\,[1,3,5,0] = S_i\,[1,3,5,1] = [2,3,5,1]$
  - $\square_i \square_d\,[1,2,3,4] = \square_i\,[1,2,3] = [2,3]$
  - $\square_d \square_i\,[1,2,3,4] = \square_d\,[2,3,4] = [2,3]$
  - $S_d S_i O_d O_i\,[X] = [1,X,1], \qquad \square_i \square_d S_d S_i O_d O_i\,X = X$

Operador composición

- **Ejercicio:** Defina las siguientes funciones de listas:

  a. *borraExtremos*, que elimine el primer y último elemento de una lista de longitud al menos dos

  b. *diez*, tal que
  $$diez\,[x_1, \ldots, x_n] = [x_1, \ldots, x_n, 10]$$
  (usando notación de potencia de una función de listas: $S_d^{10}\, O_d$)

  c. *secuencia*, tal que
  $$secuencia\,[x_1, \ldots, x_n] = [0, 1, 2, x_1, \ldots, x_n, 2, 1, 0]$$

- Apreciamos aquí la incomodidad de escribir de derecha a izquierda al componer funciones de listas.

- Por tal motivo, a continuación modificamos nuestra definición de composición.

Operador composición (nuevo)

- **Definición:**

  Sean F y G funciones de listas. Construimos por **composición** la función de listas $H = F \circ G$, que notaremos simplemente $H = FG$, como

  $$H\,X = G[F\,X],$$

  es decir, dada una lista X se aplica primero la función F, y al resultado obtenido se aplica la función G.

  Ejemplo:

  $$S_i S_d O_d\,[1,3,5] = S_d O_d\,[2,3,5] = O_d\,[2,3,6] = [2,3,6,0]$$

- **Dominio de la composición:**

  $$dom(FG) = \{X \in \mathcal{L} \mid X \in dom(F) \ \wedge \ FX \in dom(G)\}$$

  Ejemplos: $\quad dom(\square_i \square_d) = \mathcal{L}^{\geq 2}, \qquad dom(O_d \square_i) = \mathcal{L}$

Operador repetición

- **Definición:**

  Sea $F : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$. Definimos la **repetición** de F, que denotamos $\langle F \rangle$, como:

  $$\langle F \rangle\, [x, Y, z] = \begin{cases} [x, Y, z] & \text{si } x = z \\ F \langle F \rangle\, [x, Y, z] & \text{si } x \neq z \end{cases}$$

- En palabras, la función $\langle F \rangle$ actúa aplicando F hasta que el primer y el último elementos de su argumento son iguales.

- Dominio:
  - Observemos que $\langle F \rangle$ está definida sobre listas de la forma $[x, Y, z]$, es decir, que tienen al menos dos elementos (Y podría ser vacía): $dom(\langle F \rangle) \subseteq \mathcal{L}^{\geq 2}$.
  - Más precisamente, $X \in dom(\langle F \rangle)$ si en la sucesión $\{X, FX, FFX, FFFX, \ldots\}$ existe una lista cuyo primer y último elementos son iguales.

Operador repetición: ejemplos

- **Pasar a izquierda:** $\lhd$
  Esta función envía el elemento del extremo derecho al izquierdo.
  $$X, y \xrightarrow{\lhd} y, X \qquad \lhd = O_i \langle S_i \rangle \square_d$$
- **Pasar a derecha:** $\rhd$
  Esta función envía el elemento del extremo izquierdo al derecho.
  $$x, Y \xrightarrow{\rhd} Y, x \qquad \rhd = O_d \langle S_d \rangle \square_i$$
- **Duplicar a izquierda:** D_i
  Esta función duplica el primer elemento de la lista.
  $$x, Y \xrightarrow{D_i} x, x, Y \qquad D_i = O_d \langle S_d \rangle \lhd$$
- **Duplicar a derecha:** D_d
  Esta función duplica el último elemento de la lista.
  $$X, y \xrightarrow{D_d} X, y, y \qquad D_d = O_i \langle S_i \rangle \rhd$$
- **Intercambiar extremos:** $\leftrightarrow$
  Esta función intercambia los extremos de una lista.
  $$x, Y, z \xrightarrow{\leftrightarrow} z, Y, x \qquad \leftrightarrow = \ \rhd O_i \lhd O_i \langle S_i \rhd \rhd S_i \lhd \lhd \rangle \square_d \square_i \rhd$$

Funciones Recursivas de Listas

- **Definición:**

  Definimos inductivamente el conjunto de **Funciones Recursivas de Listas** *(FRL)* como el menor conjunto tal que:

  - Las funciones base pertenecen a *FRL*.
  - Las funciones obtenidas aplicando un número finito de operaciones de composición y repetición sobre elementos de *FRL* también pertenecen a *FRL*.

- Observemos que todas las funciones vistas en el ejemplo anterior son *FRL*.

- A continuación mostraremos que las *FRL* son, al menos, tan poderosas como las *FR* para representar procedimientos de cálculo.

Contenidos

- Listas: definición, notaciones
- Concatenación de listas
- Funciones de listas: definición, notaciones
- Funciones base: definición y ejemplos
- Operador composición: definición y ejemplos
- Operador repetición: definición y ejemplos
- El conjunto de Funciones Recursivas de Listas: definición inductiva
- **El poder de cálculo de las *FRL***

El poder de cálculo de las *FRL*

- Observemos que las *FR* y las *FRL* 'viven' en mundos diferentes, en el sentido de que operan sobre elementos de distinto tipo.
- Por tal motivo, necesitamos establecer una correspondencia entre los conjuntos *FR* y *FRL*.
- Haciendo abuso de notación, usaremos el símbolo X para denotar tanto a un elemento de $\mathbb{N}_0^k$ como de $\mathcal{L}^k$.
- **Definición:**

  Sea $g : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ una función numérica. Si existe una función de listas F_g tal que $\forall X \in dom(g)$ y $\forall Y$

  $$F_g[X, Y] = [g(X), X, Y]$$

  entonces diremos que F_g **representa** a la función numérica g como una función de listas.

El poder de cálculo de las *FRL*

Teorema:
Para toda función numérica $g \in FR$ existe una función de listas $F_g \in FRL$ que la representa.

D/ Por inducción en *FR*.

- **Casos base:**
  - Funciones cero $c^{(n)}$: $F_c = O_i$ (trivial)
  - Funciones proyección $p_k^{(n)}$: $F_{p_k} = \triangleright^{k-1} D_i (\leftrightarrow \triangleleft)^{k-1}$
  - Función sucesor s: $F_s = D_i S_i$ (trivial)
- **Operador composición:** Lema 1
- **Operador recursión:** Lema 2
- **Operador minimización:** Lema 3 $\square$

El poder de cálculo de las *FRL*

Lema 1: *(La* **composición** *de funciones numéricas de FR que tienen representación en FRL también tiene representación en FRL.)*

Sean las funciones numéricas $f^{(n)}$ y $\{g_i^{(k)}\}_{i=1}^{n}$, con representaciones en *FRL* dadas por F_f y $\{F_{g_i}\}_{i=1}^{n}$ respectivamente. Entonces la composición

$$h = \Phi(f, g_1, g_2, \ldots, g_n)$$

también tiene representación en *FRL*.

D/ Buscamos $F_h \in FRL$ tal que $F_h[X, Y] = [h(X), X, Y]$.

Proponemos

$$F_h = F_{g_1} \rhd F_{g_2} \rhd \ldots F_{g_n} \lhd^{n-1} F_f \rhd \square_i^n \lhd$$

Veamos que dicha función efectivamente representa a la función h.

Lema 1 (cont):

$$F_h = F_{g_1} \triangleright F_{g_2} \triangleright \ldots F_{g_n} \triangleleft^{n-1} F_f \triangleright \square_i^n \triangleleft$$

	$[X, Y]$
F_{g_1}	$[g_1(X), X, Y]$
$\triangleright$	$[X, Y, g_1(X)]$
F_{g_2}	$[g_2(X), X, Y, g_1(X)]$
$\triangleright$	$[X, Y, g_1(X), g_2(X)]$
$\ldots F_{g_n}$	$[g_n(X), X, Y, g_1(X), g_2(X), \ldots, g_{n-1}(X)]$
$\triangleleft^{n-1}$	$[g_1(X), g_2(X), \ldots, g_n(X), X, Y]$
F_f	$[f(g_1(X), g_2(X), \ldots, g_n(X)), g_1(X), g_2(X), \ldots, g_n(X), X, Y]$
	$[h(X), g_1(X), g_2(X), \ldots, g_n(X), X, Y]$
$\triangleright$	$[g_1(X), g_2(X), \ldots, g_n(X), X, Y, h(X)]$
$\square_i^n$	$[X, Y, h(X)]$
$\triangleleft$	$[h(X), X, Y]$

Por lo tanto, F_h representa a la función $h = \Phi(f, g_1, \ldots, g_n)$ en *FRL*. $\square$

El poder de cálculo de las *FRL*

Lema 2: *(La* **recursión** *de funciones numéricas de FR que tienen representación en FRL también tiene representación en FRL.)*

Sean las funciones numéricas $g^{(k)}$ y $h^{(k+2)}$, con representaciones en *FRL* dadas por F_g y F_h respectivamente. Entonces la función $f^{(k+1)}$ definida por recursión

$$f = R(g, h)$$

también tiene representación en *FRL*.

D/ Buscamos $F_f \in FRL$ tal que $F_f[y, X, Y] = [f(y, X), y, X, Y]$.

Proponemos

$$F_f = \rhd F_g O_i \langle \rhd \leftrightarrow \lhd F_h \rhd \square_i S_i \leftrightarrow \lhd \rangle \square_i \leftrightarrow \lhd$$

Veamos que dicha función efectivamente representa a la función f.

Lema 2 (cont):

$$F_f = \triangleright F_g O_i \langle \triangleright \leftrightarrow \triangleleft F_h \triangleright \square_i S_i \leftrightarrow \triangleleft \rangle \square_i \leftrightarrow \triangleleft$$

$$\begin{array}{c|l} & [y, X, Y] \\ \triangleright & [X, Y, y] \\ F_g & [g(X), X, Y, y] \\ O_i & [0, g(X), X, Y, y] \\ & [0, f(0, X), X, Y, y] \end{array}$$

Hay 2 casos posibles: 1) $y = 0$ 2) $y \neq 0$

1) Caso $y = 0$:

$$\begin{array}{c|l} & [y, f(y, X), X, Y, y] \\ \langle \ldots \rangle & [y, f(y, X), X, Y, y] \\ \square_i & [f(y, X), X, Y, y] \\ \leftrightarrow & [y, X, Y, f(y, X)] \\ \triangleleft & [f(y, X), y, X, Y] \end{array}$$

Lema 2 (cont):

$$F_f = \rhd F_g O_i \langle \rhd \leftrightarrow \lhd F_h \rhd \square_i S_i \leftrightarrow \lhd \rangle \square_i \leftrightarrow \lhd$$

2) Caso $y \neq 0$:

$$\begin{array}{c|l}
 & [0, f(0,X), X, Y, y] \\
\rhd & [f(0,X), X, Y, y, 0] \\
\leftrightarrow & [0, X, Y, y, f(0,X)] \\
\lhd & [f(0,X), 0, X, Y, y] \\
F_h & [h(f(0,X), 0, X), f(0,X), 0, X, Y, y] \\
 & [f(1,X), f(0,X), 0, X, Y, y] \\
\rhd & [f(0,X), 0, X, Y, y, f(1,X)] \\
\square_i & [0, X, Y, y, f(1,X)] \\
S_i & [1, X, Y, y, f(1,X)] \\
\leftrightarrow & [f(1,X), X, Y, y, 1] \\
\lhd & [1, f(1,X), X, Y, y]
\end{array}$$

Vemos que el resultado de la repetición será $[y, f(y,X), X, Y, y]$.

Lema 2 (cont):

Finalmente, aplicamos el último bloque de funciones:

$$F_f = \rhd F_g O_i \langle \rhd \leftrightarrow \lhd F_h \rhd \Box_i S_i \leftrightarrow \lhd \rangle \Box_i \leftrightarrow \lhd$$

$$\begin{array}{c|l} & [y, f(y,X), X, Y, y] \\ \Box_i & [f(y,X), X, Y, y] \\ \leftrightarrow & [y, X, Y, f(y,X)] \\ \lhd & [f(y,X), y, X, Y] \end{array}$$

Recapitulando, en ambos casos hemos obtenido:

$$F_f\,[y, X, Y] = [f(y,X), y, X, Y]$$

Por lo tanto, F_f representa a la función $f = R(g,h)$ en FRL. $\Box$

El poder de cálculo de las *FRL*

Lema 3: *(La función numérica que se obtiene por* **minimización** *de otra, representable en FRL, también tiene representación en FRL.)*

Sea la función numérica $h^{(n+1)}$, y F_h su representación en *FRL*. Entonces la función $g^{(n)}$ obtenida por minimización de h:

$$g(X) = M[h](X) = \mu_t(h(t, X) = 0)$$

también tiene representación en *FRL*.

D/ Buscamos $F_g \in FRL$ tal que $F_g[X, Y] = [g(X), X, Y]$.

Proponemos

$$F_g = O_i F_h O_d \langle \square_i S_i F_h \rangle \square_i \square_d$$

Veamos que dicha función efectivamente representa a la función g.

Lema 3 (cont):

$$F_g = O_i F_h O_d \langle \square_i S_i F_h \rangle \square_i \square_d$$

$$\begin{array}{c|l}
 & [X, Y] \\
O_i & [0, X, Y] \\
F_h & [h(0, X), 0, X, Y] \\
O_d & [h(0, X), 0, X, Y, 0]
\end{array}$$

Hay 2 casos posibles: 1) $h(0, X) = 0$ 2) $h(0, X) \neq 0$

1) Caso $h(0, X) = 0$:

$$\begin{array}{c|l}
 & [0, 0, X, Y, 0] \\
\langle \dots \rangle & [0, 0, X, Y, 0] \\
\square_i & [0, X, Y, 0] \\
\square_d & [0, X, Y] \\
 & [\mu_t(h(t, X) = 0), X, Y] \\
 & [g(X), X, Y]
\end{array}$$

Lema 3 (cont):

$$F_g = O_i F_h O_d \langle \square_i S_i F_h \rangle \square_i \square_d$$

2) Caso $h(0, X) \neq 0$:

$$\begin{array}{r|l} & [h(0,X), 0, X, Y, 0] \\ \square_i & [0, X, Y, 0] \\ S_i & [1, X, Y, 0] \\ F_h & [h(1,X), 1, X, Y, 0] \end{array}$$

Vemos que, en general, el efecto de $\square_i S_i F_h$ es transformar

$$[h(t, X), t, X, Y, 0] \quad \text{en} \quad [h(t+1, X), t+1, X, Y, 0].$$

La repetición se aplicará cierto número de veces, k, hasta que $h(k, X) = 0$.

Llegado ese punto, el estado de la lista será

$$[h(k, X), k, X, Y, 0] = [0, k, X, Y, 0]$$

Lema 3 (cont):

Finalmente, aplicamos el último bloque de funciones:

$$F_g = O_i F_h O_d \langle \square_i S_i F_h \rangle \square_i \square_d$$

$$\begin{array}{l|l} \langle \dots \rangle & [0, k, X, Y, 0] \\ \square_i & [k, X, Y, 0] \\ \square_d & [k, X, Y] \\ & [\mu_t(h(t, X) = 0), X, Y] \\ & [g(X), X, Y] \end{array}$$

Recapitulando, en ambos casos hemos obtenido:

$$F_g\,[X, Y] = [g(X), X, Y]$$

Por lo tanto, F_g representa a la función $g = M[h]$ en FRL. $\square$

Conclusión

- Las *FR* se construían a partir de sus funciones base y la aplicación, un número finito de veces, de los operadores composición (Φ), recursión (R) y minimización (M).

- De los lemas demostrados concluimos, por inducción en *FR*, que toda función de *FR* tiene una representación en *FRL*.

- Por lo tanto, las *FRL* son un modelo de cálculo al menos tan poderoso como el de las *FR*.