Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Álgebra Lineal (R211 - CE9)

2023

1. Cuerpos

A modo de introducción veamos una estructura algebraica abstracta que nos servirá como punto de partida para la definición de Espacios Vectoriales (recordemos la definición que vimos en Álgebra y Geometría Analítica II). ¿Conocemos cuerpos? Si!! $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$. Sabemos además que $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$ no lo son. ¿Cuál es la diferencia? ¿Cómo definimos *cuerpo de escalares*? Como toda estructura algebraica, la definimos de manera axiomática.

Definición: Sea F un conjunto no vacío dotado de dos operaciones: $+ : F \times F \to F$ llamada *suma* y $\cdot : F \times F \to F$ llamada multiplicación. Decimos que $(F, +, \cdot)$ es un *cuerpo* o que F *es un cuerpo con la suma* $+$ *y el producto* $\cdot$ si se verifican los siguientes axiomas:

(i) la suma es asociativa: para todos $a, b, c \in F$ tenemos que $a + (b + c) = (a + b) + c$,

(ii) existe un elemento neutro para la suma: existe un elemento $0 \in F$ tal que para todo $a \in F$, $a + 0 = 0 + a = a$,

(iii) existencia de opuestos para la suma: dado $a \in F$ existe $b \in F$ tal que $a + b = b + a = 0$,

(iv) la suma es conmutativa: para todos $a, b \in F$ tenemos que $a + b = b + a$,

(v) la multiplicación es asociativa: para todos $a, b, c \in F$ tenemos que $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,

(vi) existe un elemento neutro para la multiplicación: existe un elemento $1 \in F$ tal que para todo $a \in F$, $a \cdot 1 = c \cdot a = a$,

(vii) existencia de inversos para la multiplicación: dado $a \in F^*$ (donde definimos $F^* := F \backslash \{0\}$) existe $b \in F$ tal que $a \cdot b = b \cdot a = 1$,

(viii) el producto es conmutativo: para todos $a, b \in F$ tenemos que $a \cdot b = b \cdot a$,

(ix) distributiva de la multiplicación respecto de la suma: para todos $a, b, c \in F$ tenemos que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

A los elementos de F los llamamos *escalares*.

Ejemplos:

1. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ con las operaciones usuales son cuerpos. EJERCICIO!

2. $\mathbb{Z}$ con las operaciones usuales no es un cuerpo. EJERCICIO!

3. Un subconjunto $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ es un *subcuerpo* si con las operaciones restringidas tenemos que $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ es un cuerpo.

   $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son subcuerpos de $\mathbb{C}$ y $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$. EJERCICIO!

   Puesto que la asociatividad, conmutatividad y distributivas se heredan del cuerpo, bastará con chequear:

   a) para todos $a, b \in \mathbb{F}$ tenemos que $a + b \in \mathbb{F}$, esto es que la suma sea cerrada en $\mathbb{F}$,

   b) para todos $a, b \in \mathbb{F}$ tenemos que $a \cdot b \in \mathbb{F}$, esto es que la multiplicación también sea cerrada en $\mathbb{F}$, *c*) $0, 1 \in \mathbb{F}$ (es decir que ambos neutros para la suma y la multiplicación de $\mathbb{C}$ también sean elementos de $\mathbb{F}$)

d) para todo $a \in \mathbb{F}$ su opuesto $-a \in \mathbb{C}$ también sea un elemento de $\mathbb{F}$, es decir $-a \in \mathbb{F}$,

e) para todo $a \in \mathbb{F}^*$ su inverso $a^{-1} \in \mathbb{C}$ también sea un elemento de $\mathbb{F}$, es decir $a^{-1} \in \mathbb{F}$.

Observemos que aquí hemos usado la notación de opuesto e inverso puesto que estamos en $\mathbb{C}$ y sabemos de su unicidad. Para un cuerpo general, luego de probar la unicidad de opuestos e inversos podríamos dar la misma definición y caracterización de subcuerpo.

Más arriba mencionamos la cadena de contenciones estrictas $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$. Éstos no son los únicos subcuerpos de $\mathbb{C}$. Veamos un subcuerpo de $\mathbb{C}$ que contiene estrictamente a $\mathbb{Q}$ y está estrictamente contenido en $\mathbb{C}$.

Sea el conjunto $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{x + \sqrt{\cdot}y : x, y \in \mathbb{Q}\}$. Este conjunto $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ es un subcuerpo de $\mathbb{C}$. EJERCICIO! Aclaración: $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ es sólo una notación. Decimos que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ es la extensión de $\mathbb{Q}$ por $\sqrt{2}$. Extensión de cuerpos es un tema de importancia en álgebra abstracta, y es la base para la llamada *teoría de Galois*, que tiene importantes aplicaciones por ejemplo en Ecuaciones Diferenciales. Si no conocen a Galois, googleen su historia, es muy interesante (spoiler: se batió duelo a los 20 años!).