FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ÁLGEBRA LINEAL (R211 - CE9)
2023

7. Bases y dimensión - VERSIÓN BORRADOR

Rápido llegamos a la definición de base. Para dimensión necesitamos más trabajo.

Definición 1. *V F-ev.*

*Una **base** de V es un conjunto generador li.*

*V se dice que es **finito dimensional** si tiene una base finita.*

Observaciones 1.

1. *V finito dimensional no nos dice qué es lo que entendemos por dimensión ni cómo la definimos.*
2. *No hay unicidad para las bases de un ev. Vamos a ver que en el caso finito dimensional, todas tienen igual cardinal, luego podemos definir dimensión.*

Ejemplo 1. *BASES CANÓNICAS - EJERCICIO: COMPLETAR DETALLES*

1. $\mathbb{F}^n$, $B = \{e_i\}$.
2. $\mathbb{F}_n[x]$, $B = \{x^i : i = 0, \dots n\}$.
3. $\mathbb{F}[x]$, $B = \{x^i : i \in \mathbb{N}_0\}$, *es infinito dimensional.*
4. $\mathbb{F}^{m\times n}$, $B = \{E_{ij}\}$.
5. $\mathbb{F}^\infty$, $B = \{e_i\}$, *es infinito dimensional.*

Observación 1. *NO TENEMOS SENTIDO PARA LA EXPRESIÓN $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i v_i$, NO USAMOS TALES EXPRESIONES.*

La clave para poder dar una buena definición de base viene dada en la siguiente proposición, que dice que

en un ev, dados un conjunto generador S y un conjunto li T siempre es $|T| \leq |S|$.

Proposición 1. *V F-ev. Si V está generado por un conjunto S de cardinal finito n, entonces todo conjunto T de vectores li de V es finito y más aún, si su cardinal es m, entonces $m \leq n$ (porqué?).*

Demostración. $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ tq $< S >= V$.

$T \subset V$ li. Si T infinito, todo subconjunto T es li por definición. Luego basta considerar el caso que $T = \{u_1, \dots, u_m\}$ li y probar que debe ser $m \leq n$.

Como $< S >= V$, todo vector de T se escribe como cl de los elementos de S:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \alpha_{11} v_1 + \alpha_{12} v_2 + \cdots + \alpha_{1n} v_n \\
u_2 &= \alpha_{21} v_1 + \alpha_{22} v_2 + \cdots + \alpha_{2n} v_n \\
&\vdots \\
u_m &= \alpha_{m1} v_1 + \alpha_{m2} v_2 + \cdots + \alpha_{mn} v_n
\end{aligned}$$

Llamemos $A = (\alpha_{ij})$ a la matriz en $F^{m\times n}$ de coeficientes de las expresiones anteriores. Consideremos el sistema homogéneo $A^T X = 0$, observar acá que tomamos la traspuesta de A, luego X es el vector de m incógnitas $x_1, \ldots, x_m$ y el sistema consta de n ecuaciones y m incógnitas. Sea $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ una solución del sistema (que sabemos que siempre existe, porqué?), y veamos que debe ser la trivial, es decir, que el sistema homogéneo tiene sólo la solución trivial. Para esto, planteamos la cl

$$\begin{aligned}\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_m u_m &= \beta_1(\alpha_{11}v_1 + \cdots + \alpha_{1n}v_n) + \cdots + \beta_m(\alpha_{m1}v_1 + \cdots + \alpha_{mn}v_n)\\ &= \beta_1\alpha_{11}v_1 + + \cdots + \beta_1\alpha_{1n}v_n + \cdots + \beta_m\alpha_{m1}v_1 + \cdots + \beta_m\alpha_{mn}v_n\\ &= (\beta_1\alpha_{11} + \cdots + \beta_m\alpha_{m1})v_1 + \cdots + v_1 + \beta_1\alpha_{1n} \cdots + \beta_m\alpha_{mn}v_n,\end{aligned}$$

y puesto que $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ es una solución de $A^T X = 0$, tenemos que cada coeficiente de la cl resultante debe ser 0. Así, el sistema homogéneo tiene una única solución, esto significa que no hay variables libres, y como tiene n filas y m columnas, debe ser $m \leq n$. □

Corolario 1. *V F-ev finito dimensional. Entonces todas sus bases tienen igual cantidad de elementos.*

Demostración. Si B_1, B_2 bases de V de cardinales n_1, n_2 respectivamente, entonces:

- como B_1 genera y B_2 li, debe ser $n_2 \leq n_1$,

- como B_2 genera y B_1 li, debe ser $n_1 \leq n_2$.

Así, $n_1 = n_2$. □

Definición 2. *V F-ev finito dimensional.*

*La **dimensión de** V **sobre** F es la cantidad de elementos de sus bases. Denotamos $dim_F V$.*

Definimos además la dimensión del espacio trivial como $dim_F\{\overline{0}\} = 0$.

Corolario 2. *V F-ev finito dimensional con $dim_F V = n$. Entonces:*

- *Si $S \subset V$ y $|S| > n$ entonces S es ld.*
- *Si $S \subset V$ y $|S| < n$ entonces S no genera V.*

Demostración. EJERCICIO. □

La gracia de las bases es que nos provee unicidad de escritura, y más aún, esta propiedad de unicidad de escritura *caracteriza* a las bases.

Proposición 2. *V F-ev finito dimensional con $dim_F V = n$. Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$.*

B es base de V sii pc $v \in V$ $\exists! \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ tq $v = \alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_n v_n$.

Demostración. =>) Como $< B >= V$, existen tales escalares. Como B li, son únicos. En efecto, si existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ y $\beta_1, \ldots, \beta_n \in F$ tq

- $v = \alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_n v_n$ y

- $v = \beta_1 v_1 + \ldots \beta_n v_n$,

entonces restando ambas expresiones obtenemos

- $\overline{0} = (\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \ldots (\alpha_n - \beta_n)v_n$ y puesto que B es li, cada coeficiente debe ser 0, luebo $\alpha_i = \beta_i$.

<=) Puesto que, por hipótesis todo vector de V es cl de elementos de V, B genera V. La unicidad de escritura se da en particular para $\overline{0}$, luego tenemos que B debe ser li. □

La siguiente proposición nos dice que en un ev finito dimensional:

- *todo conjunto generador se puede reducir a una base*, y que

- *todo conjunto li se puede extender a una base.*

Proposición 3. *V F-ev finito dimensional con $dim_F V = n$. Sea $S = \{v_1, \dots, v_s\}$.*

1. *Si S genera V entonces existe $B \subset S$ tal que B es base de V.*
2. *Si S es li entonces existe $T = \{v_{s+1}, \dots, v_n\}$ tq $B = S \cup T$ es base de V.*

Demostración. 1. Si S es li, $B = S$ es base de V (observar que en tal caso $s = n$).

Si S no es li, debe ser $s > n$, luego existe $v \in S$ tq $v \in < S \backslash \{v\} >$ y más aún, $< S \backslash \{v\} > = < S > = V$ (porqué? ver los ejercicios del práctico).

Ahora bien, si $S \backslash \{v\}$ es li, $B = S \backslash \{v\}$ es base. Si no es li, procedemos inductivamente.

El proceso se detiene pues no puede existir un conjunto generador con menos de n elementos.

2. Si S genera V, $B = S$ es base de V (observar que en tal caso $s = n$).

Si S no genera V debe ser $s < n$. Sea B una base cualquiera de V, luego existe $v \in B$ tq $v \notin < S >$. Entonces $S \cup \{v\}$ es li.

Ahora bien, si $B = S \cup \{v\}$ genera V, B es base. Si no genera, procedemos inductivamente.

El proceso se detiene al completar un conjunto li de n elementos.

$\square$

Como corolario obtenemos algo que a priori parece trivial: todo ev finito dimensional tiene base. Para ev's infinito dimensionales esto es cierto y es difícil de probar. Y para estructuras más abstractas (como por ejemplo los llamados *módulos* sobre un anillo), es muchísimo más difícil de probar, incluso la noción de base es difícil de definir. La importancia entonces radica en entender que el hecho de que el ev sea finito dimensional nos permite caracterizar completamente un espacio a partir de su base, y esto no siempre es fácil de probar.

Corolario 3. *V F-ev con $dim_F V = n$. Entonces tiene base.*

El próximo corolario también es importante. Tener una *descomposición* de un ev en «partecitas» no es trivial, y sirve para estudiar por separado cada partecita para entender como funciona el todo. A lo largo de la carrera verán infinidad de descomposiciones de todos los objetos que se les ocurran. Es importante poder descomponer pero también poder volver a «unir».

Corolario 4. *V F-ev finito dimensional con $dim_F V = n$. $U \subset V$ sev. Entonces $dim_F U \leq n$ y existe $W \subset V$ sev tq $V = U \oplus W$.*

Demostración. Si $dim_F U > n$ y S es una base de U, entonces S es li y su cardinal es mayor a n. Esto no puede ser (porqué?). Luego $dim_F U \leq n$.

Sea entonces $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ y por la proposición sabemos que existe $T = \{v_{m+1}, \dots, v_n\}$ tq $B = S \cup T$ es base de V. Sea entonces $W = < T >$. Veamos que W es el complemento buscado, vd, que $V = U \oplus W$. Para esto usamos la caracterización de suma directa (ver práctico). Bastará con probar que $V = U + W$ y que $U \cap W = \{\overline{0}\}$.

Veamos que $V = U + W$. Para esto necesitamos probar que todo $v \in V$ puede escribirse como suma de un elemento de U y uno de W. En efecto, dado $v \in V$ al ser B base, existen $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n \in F$ tq $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m + \alpha_{m+1} v_{m+1} + \cdots + \alpha_n v_n$, de donde observamos que $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m \in U$ y $w = \alpha_{m+1} v_{m+1} + \cdots + \alpha_n v_n \in W$ y $v = u + w$.

Finalmente, sea $v \in U \cap W$. Entonces existen $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n \in F$ tq $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$ y $v = \alpha_{m+1} v_{m+1} + \cdots + \alpha_n v_n$, de donde sigue que

$$\overline{0} = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m - \alpha_{m+1} v_{m+1} - \cdots - \alpha_n v_n.$$

Luego cada $\alpha_i = 0$ (porqué?), luego $v = \overline{0}$. $\square$

Recordar que a veces, cuando el cuerpo se sobreentiende, podemos prescindir del subíndice $_F$ en el símbolo para la dimensión: $dim_F V = dim V$.

Estamos en condiciones de probar algo más general para sumas (no necesariamente directas), y la prueba es muy linda!

Teorema 1. *V F-ev y $U_1, U_2 \subset V$ sev finito dimensionales. Entonces*

$$dim(U_1 + U_2) = dim U_1 + dim U_2 - dim(U_1 \cap U_2).$$

Demostración. Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ una base de $U_1 \cap U_2$.

- Completamos S a una base de U_1: $T_1 = \{u_1, \ldots, u_r\}$.

- Completamos S a una base de U_2: $T_2 = \{w_1, \ldots, w_s\}$.

Así,

- $dim U_1 = m + r$.

- $dim U_2 = m + s$.

Veamos que $B = S \cup T_1 \cup T_2$ es base de $U_1 + U_2$.

Tenemos en primer lugar que $U_1 \subset < B >$ y $U_2 \subset < B >$, luego $U_1 + U_2 =< B >$ (porqué?). Veamos que es li. Para esto, planteamos:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_r u_r + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_s w_s = \overline{0},$$

where $a = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m \in < S >$, $b = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_r u_r \in < T_1 > \subset U_1$ y $c = \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_s w_s \in < T_2 > \subset U_2$. Luego, $c = -a - b \in U_1 \cap U_2$ (porqué?). Entonces, existen $d_1, \ldots, d_m \in S$ tq $c = d_1 v_1 + \cdots + d_m v_m$. Así,

$$c = \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_s w_s = d_1 v_1 + \cdots + d_m v_m,$$

de donde $\overline{0} = \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_s w_s - d_1 v_1 - \cdots - d_m v_m$, esto es, una cl de elementos de $S \cup T_2$ que es base de U_2 y por lo tanto li. Como está igualada al vector nulo, resulta que $c_i = d_i = 0$. Sigue entonces que $a_i = b_i = 0$ (porqué?). Así, B es base del espacio suma $U_1 + U_2$.

Finalmente,

$$dim(U_1 + U_2) = m + r + s = m + r + m + s - m = dim U_1 + dim U_2 - dim(U_1 \cap U_2).$$

$\square$

Ejemplo 2. *BASES CANÓNICAS - EJERCICIO: COMPLETAR DETALLES*

1. $\mathbb{F}^n$, $B = \{e_i\}$, $dim \mathbb{F}^n = n$.
2. $\mathbb{F}_n[x]$, $B = \{x^i : i = 0, \ldots n\}$, $dim \mathbb{F}_n[x] = n + 1$.
3. $\mathbb{F}[x]$, $B = \{x^i : i \in \mathbb{N}_0\}$, *es infinito dimensional.*
4. $\mathbb{F}^{m \times n}$, $B = \{E_{ij}\}$, $dim \mathbb{F}^{m \times n} = mn$.
5. $\mathbb{F}^\infty$, $B = \{e_i\}$, *es infinito dimensional.*