Autómatas de Pila

Pablo Verdes

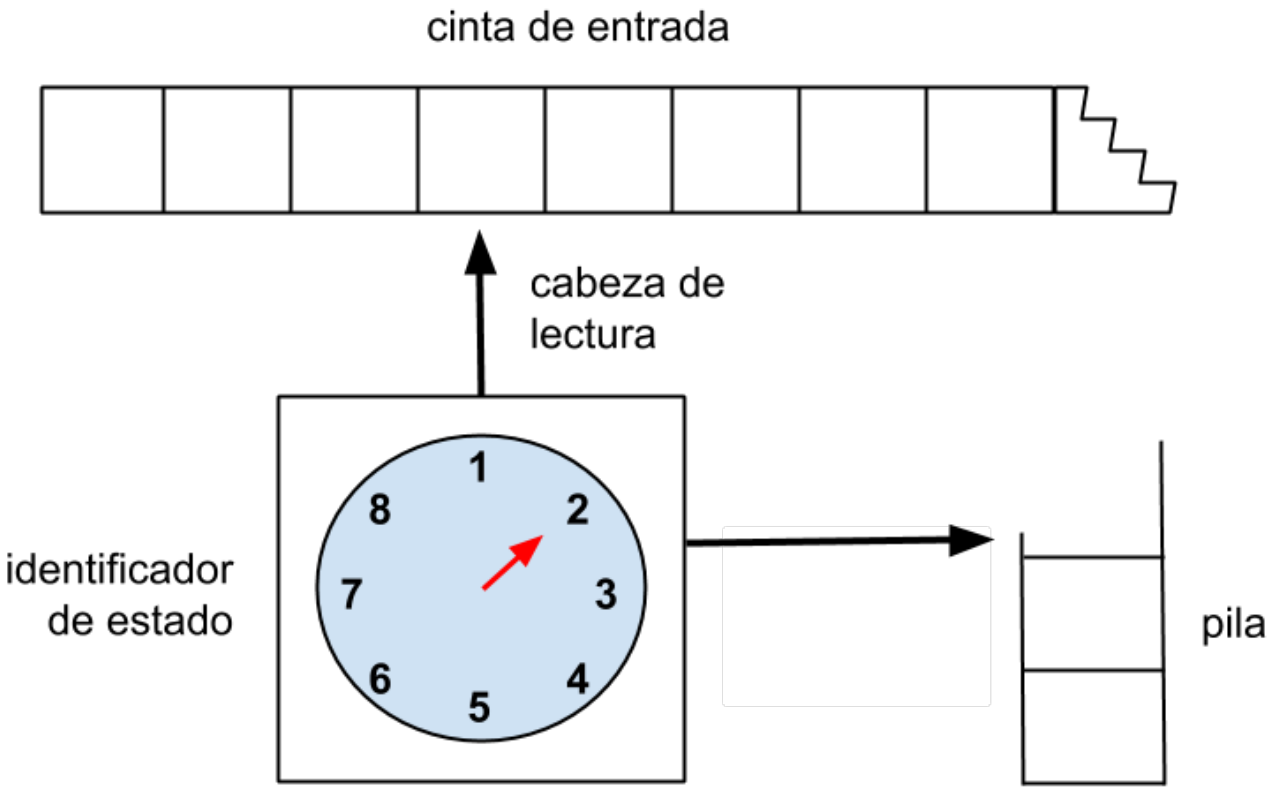
LCC

4 de junio de 2020

Introducción

- En la unidad anterior estudiamos los AEF y su poder de reconocimiento de lenguajes —en particular, sus límites.
- Allí, intentamos aumentar la capacidad de reconocimiento de los AEF introduciendo no determinismo en sus sistemas de transiciones.
- Sin embargo, encontramos que los AEFND reconocen el mismo conjunto de lenguajes que los AEF, esto es, el conjunto de los lenguajes regulares, $\mathcal{L}_3$.
- En esta unidad estudiaremos una generalización de los AEFND, llamada autómatas de pila.
- El ingrediente principal en este tipo de autómatas es la presencia de una **memoria** (pila) donde se puede almacenar información a medida que se procesa una palabra de entrada.
- Recordemos que el problema de los AEF era que no podían 'recordar' la cantidad de símbolos leídos.

Introducción



Introducción

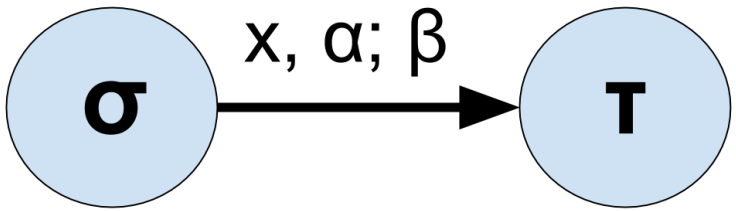
- Los símbolos que pueden almacenarse en esta pila constituyen un conjunto finito. Este conjunto puede incluir, o no:
  - los símbolos del alfabeto de la máquina
  - símbolos adicionales que la máquina utiliza como marcadores internos, por ej. para separar secciones que tengan interpretaciones distintas o para indicar que la pila está vacía (usualmente, el símbolo #).

- Las transiciones que ejecutan los AP deben ser variantes de la siguiente secuencia básica:
  1. leer un símbolo de la entrada
  2. extraer un símbolo de la pila
  3. insertar un símbolo en la pila
  4. pasar a un nuevo estado

Autómatas de pila

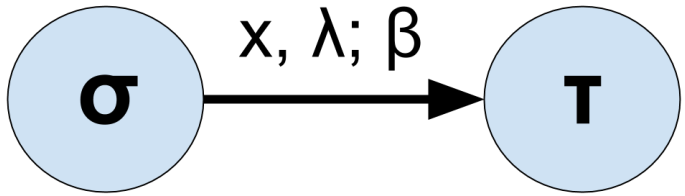
- A este proceso se lo representa con la notación $(\sigma, x, \alpha; \beta, \tau)$, donde:
  - σ es el estado actual
  - x es el símbolo del alfabeto que se lee en la entrada
  - α es el símbolo que se extrae de la pila
  - β es el símbolo que se inserta en la pila
  - τ es el nuevo estado al que pasa el autómata

- Gráficamente: arcos con etiquetas $x, \alpha; \beta$

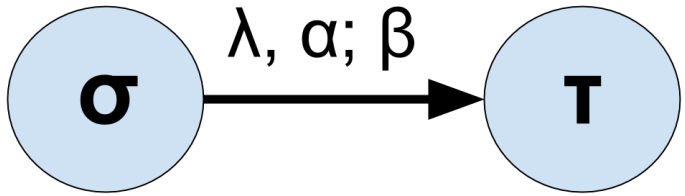


Autómatas de pila

- Se obtienen variantes de este proceso básico de transición permitiendo que las transiciones lean, extraigan o inserten la cadena vacía.
- Ejemplos:
  - En el estado σ: si se lee x de la entrada, no extraer nada de la pila, insertar β en la pila y pasar al estado τ.

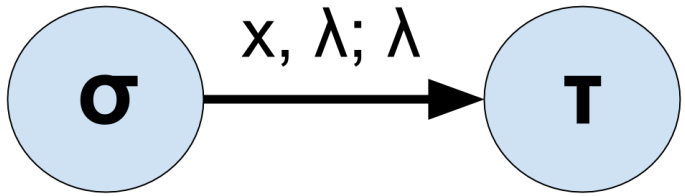


  - En el estado σ: no leer nada de la entrada, extraer α de la pila, insertar β en la pila y pasar al estado τ.

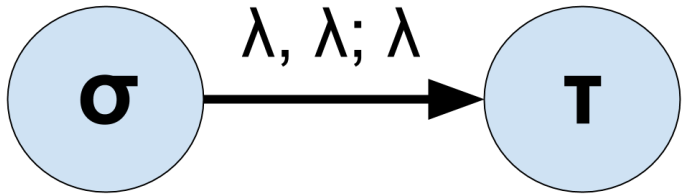


Autómatas de pila

- Ejemplos:
  - En el estado σ: si se lee x de la entrada, no extraer ni insertar nada en la pila y pasar al estado τ (este tipo de transición ignora la pila: se reduce al tipo de transición de un AEF).



  - En el estado σ: no leer nada de la entrada, no extraer ni insertar nada en la pila y pasar al estado τ (transición espontánea).



Autómatas de pila

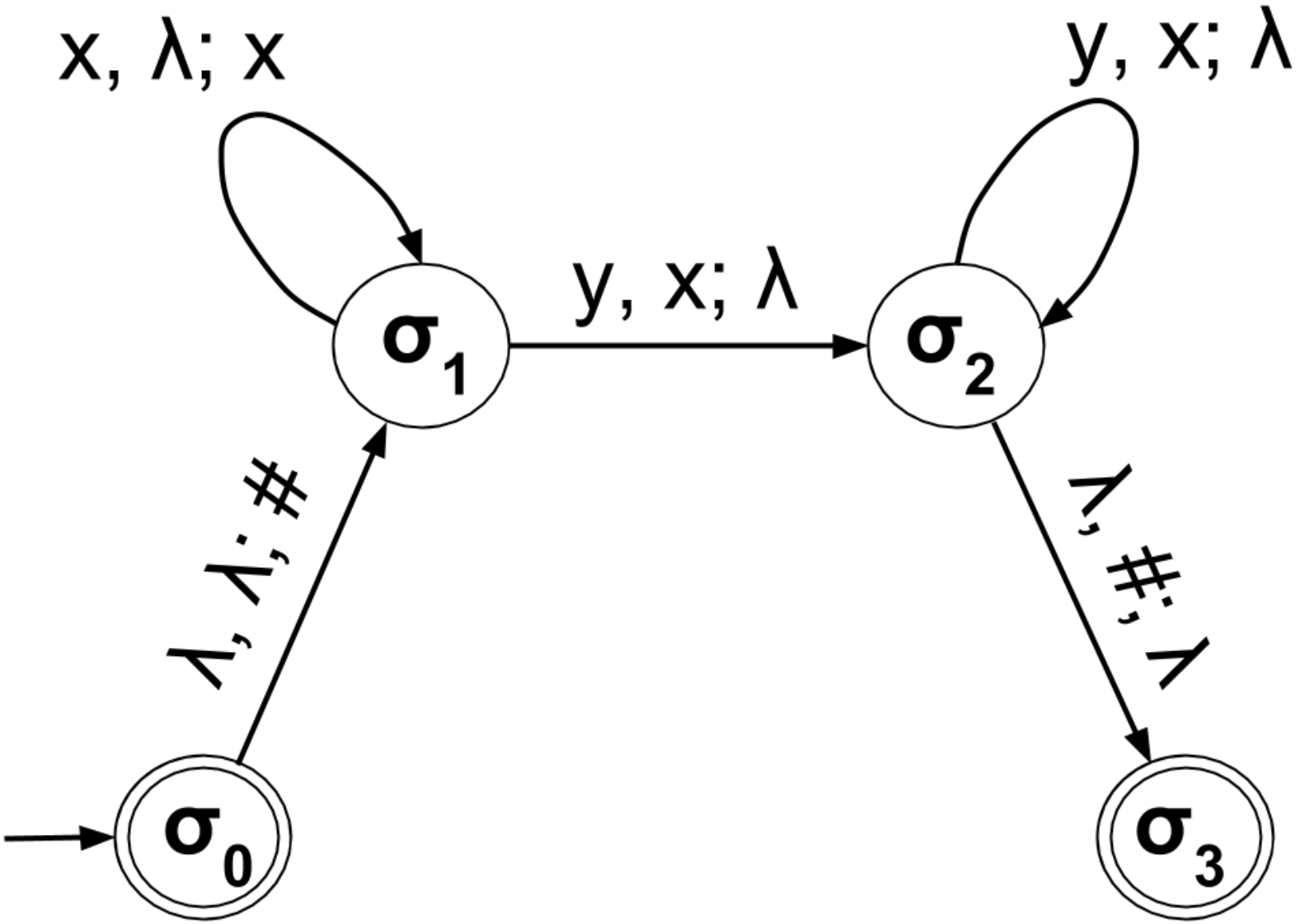
Definición: Un autómata de pila (AP) es una tupla

$$A = (S, \Sigma, \Gamma, T, \sigma, Ac)$$

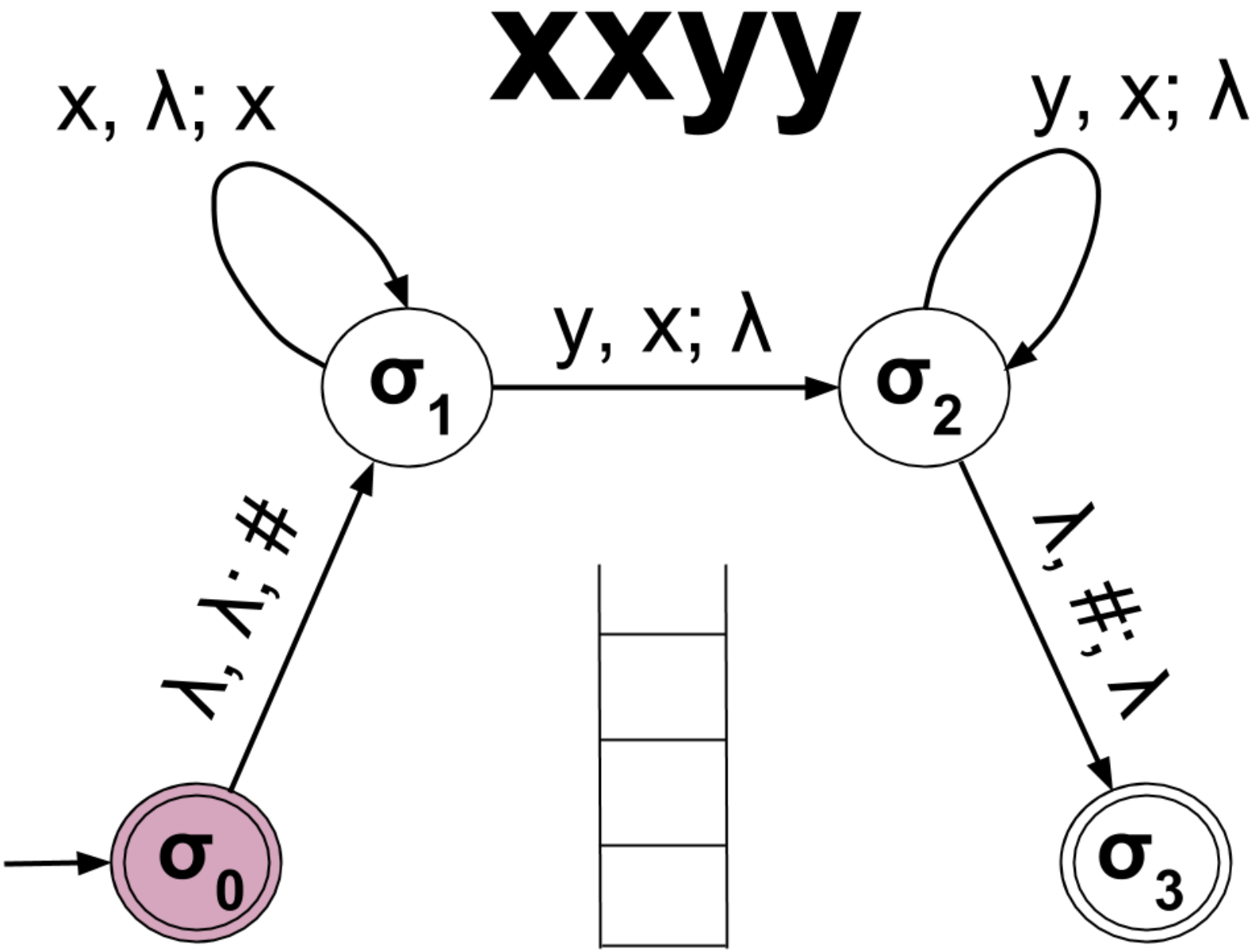
donde:

- S es un conjunto finito de **estados**
- Σ es un conjunto finito de **símbolos de entrada**
- Γ es un conjunto finito de **símbolos de pila**
- $T \subseteq S \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times (\Gamma \cup \{\lambda\}) \times (\Gamma \cup \{\lambda\}) \times S$ es una **relación de transición**
- $\sigma \in S$ es el **estado inicial**
- $Ac \subseteq S$ es un conjunto de **estados de aceptación**

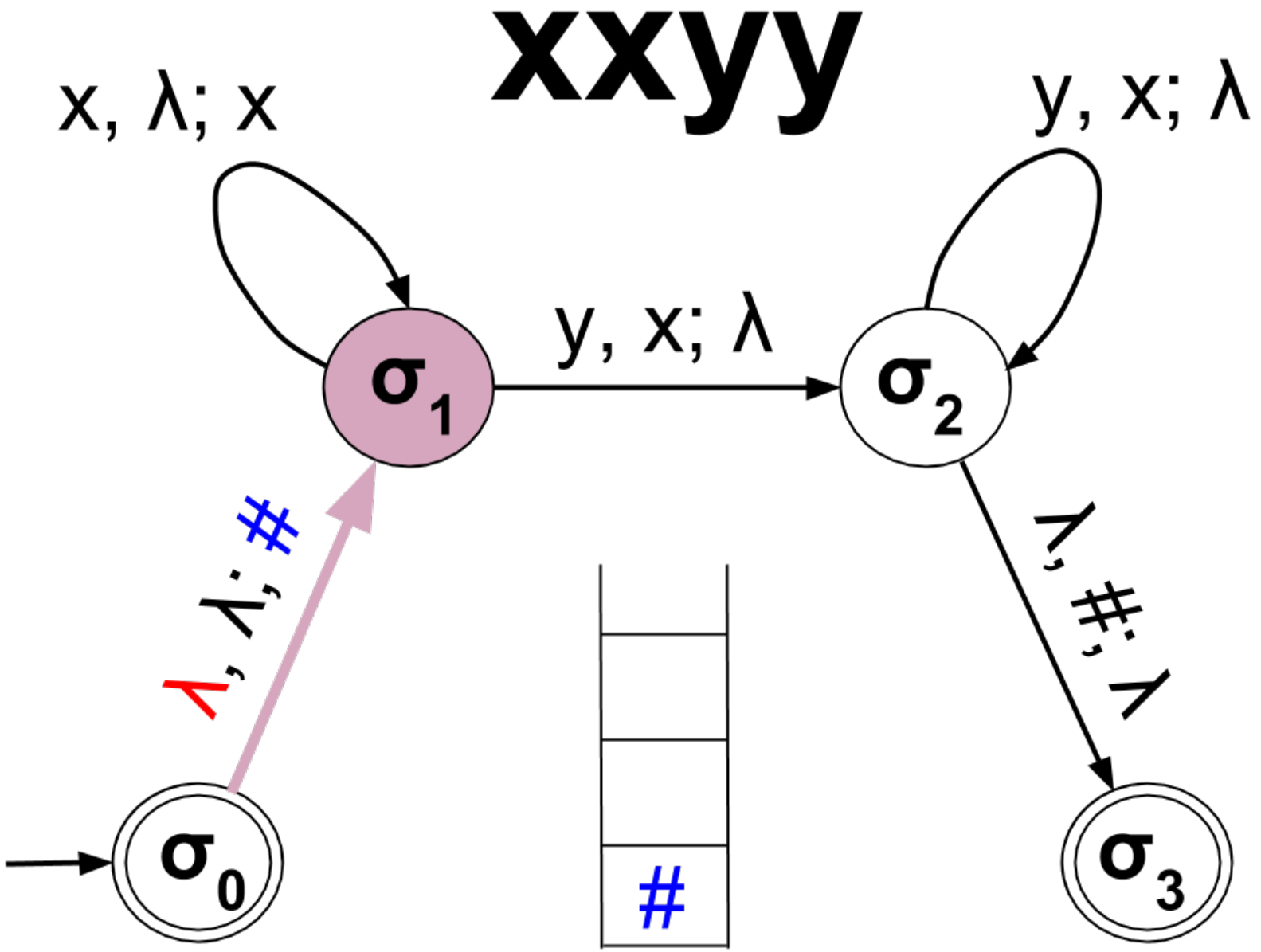
Ejemplo



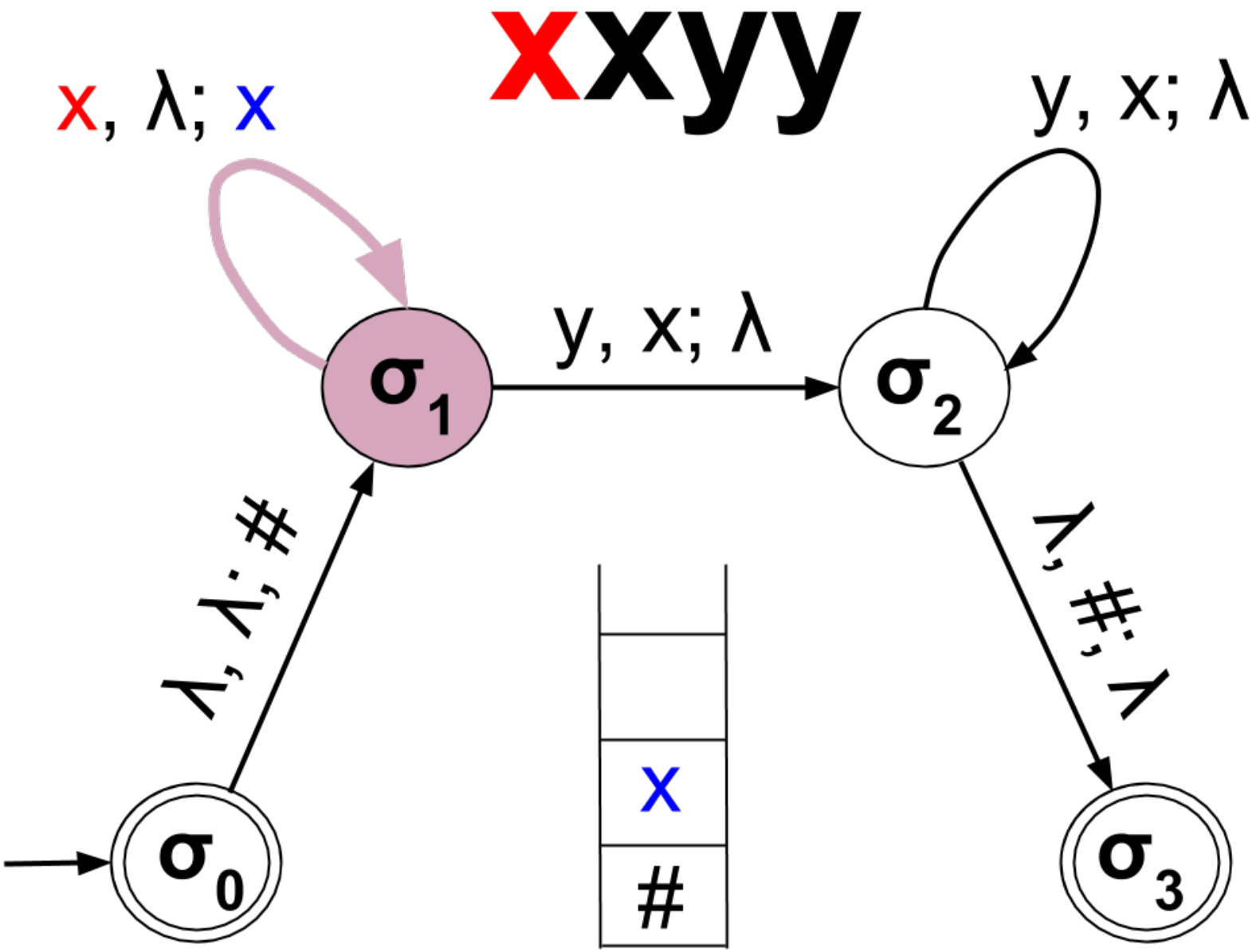
Ejemplo



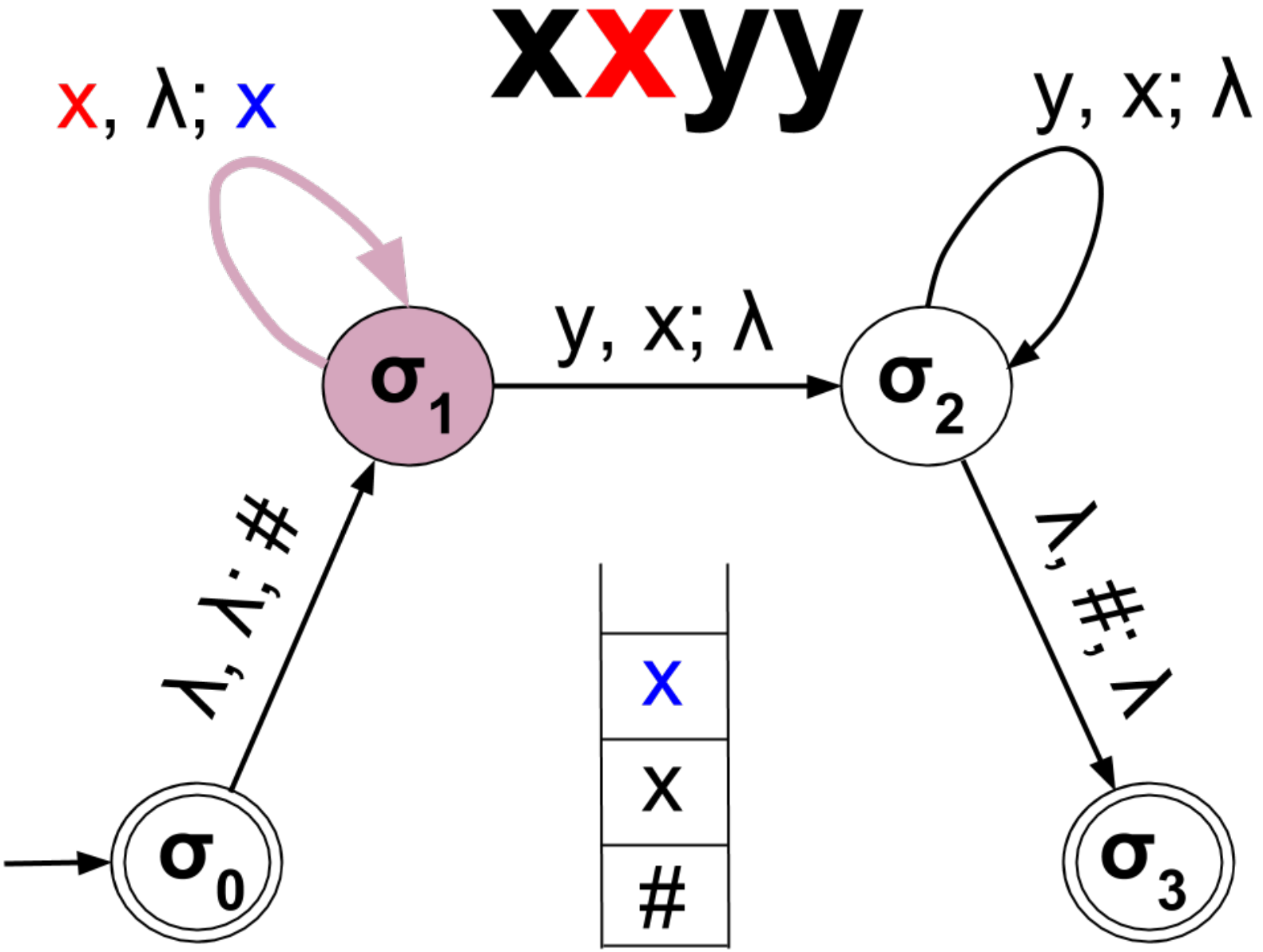
Ejemplo



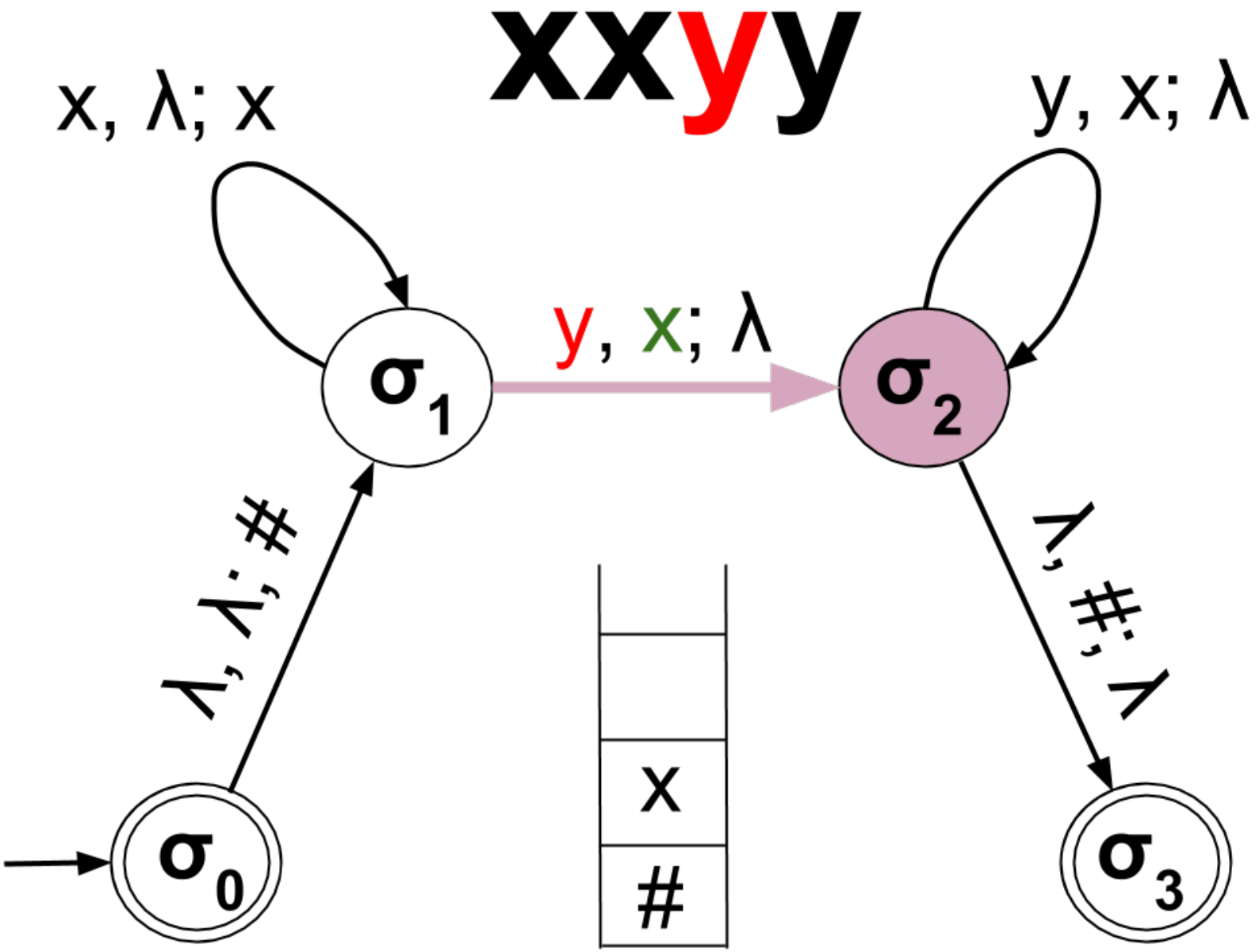
Ejemplo



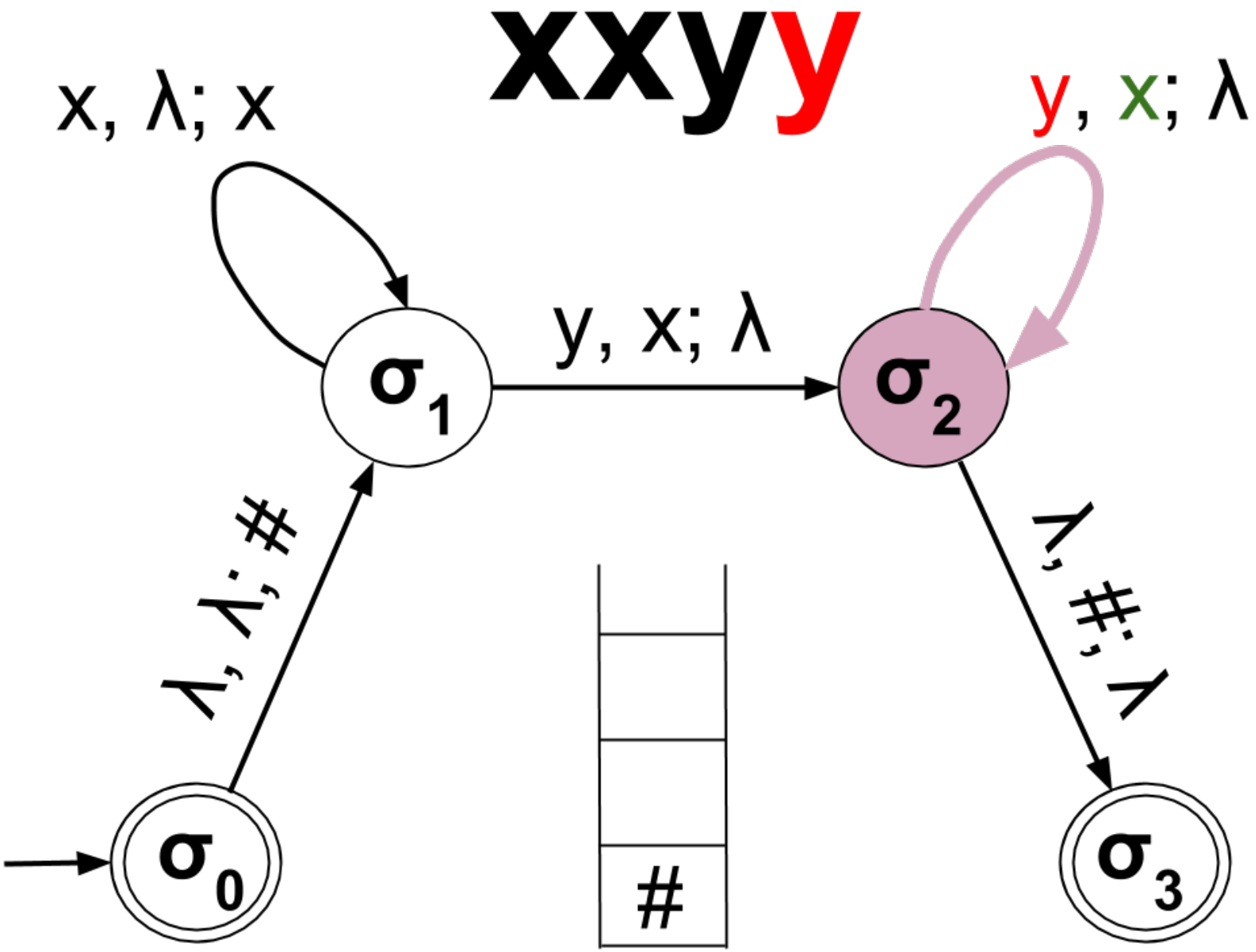
Ejemplo



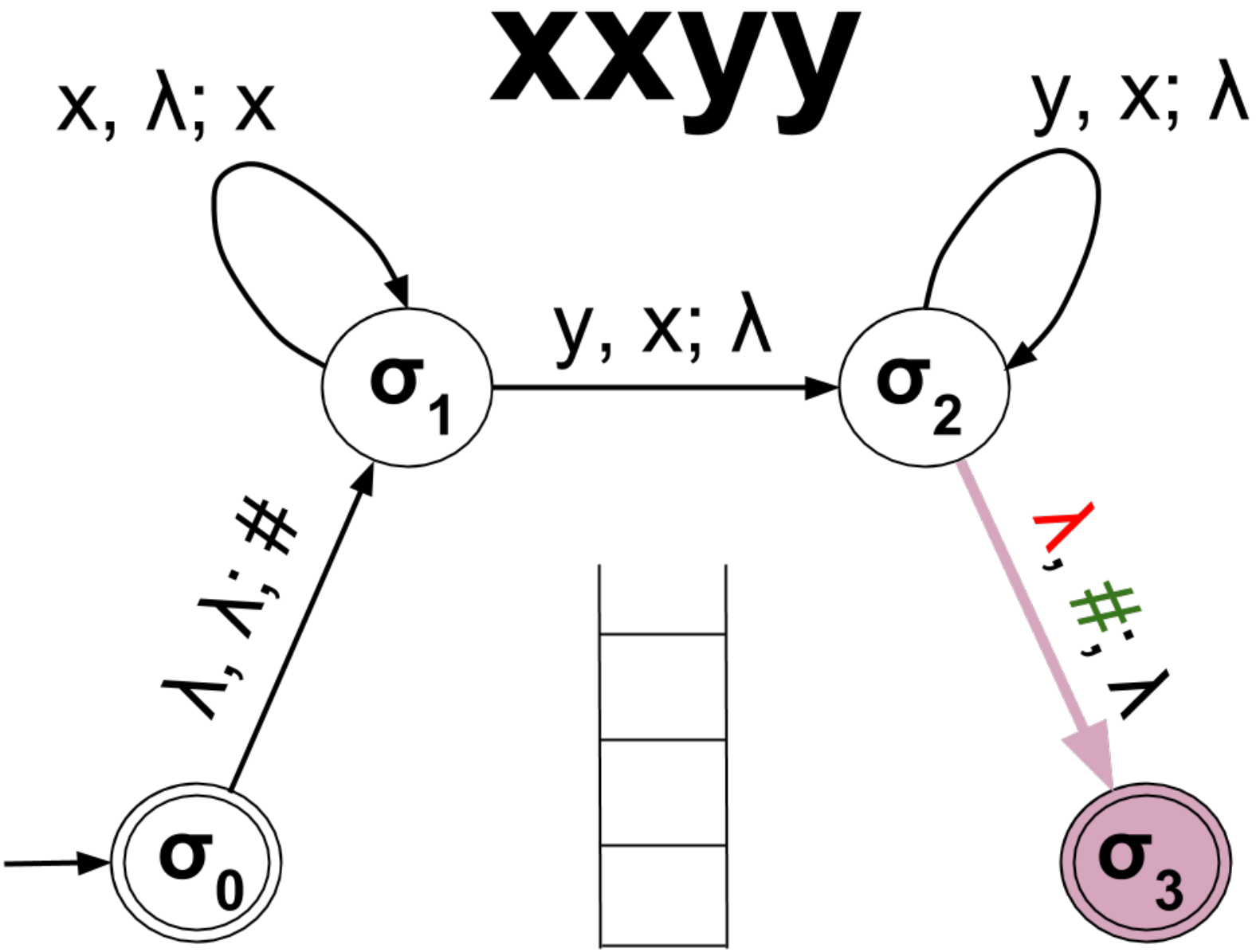
Ejemplo



Ejemplo



Ejemplo



AP como aceptadores de lenguajes

- **Definición:** Una configuración de un autómata de pila $A = (S, \Sigma, \Gamma, T, \sigma, Ac)$ es un elemento de $\mathcal{C}_A = S \times \Sigma^* \times \Gamma^*$.
- La idea es que una configuración (σ_k, w, ω) indica que el autómata A está en el estado σ_k, le falta leer la cadena w de la entrada, y el contenido completo de la pila (de arriba hacia abajo) es ω. Esta información es suficiente para predecir lo que ocurrirá en el futuro.
- **Definición:** Para un AP $A = (S, \Sigma, \Gamma, T, \sigma, Ac)$, la relación lleva en un paso $\Rightarrow_A \subseteq \mathcal{C}_A \times \mathcal{C}_A$ se define de la siguiente manera:

$$(\sigma_k, xw, \alpha\omega) \Rightarrow_A (\sigma_j, w, \beta\omega) \qquad \text{sii} \qquad (\sigma_k, x, \alpha; \beta, \sigma_j) \in T$$

- **Definición:** La relación lleva en uno o más pasos $\Rightarrow_A^*$ se define recursivamente a partir de la relación lleva en un paso $\Rightarrow_A$ de manera análoga a lo ya hecho para la función de transición f de los AEF.
- No usaremos el subíndice A cuando sea obvio del contexto.

AP como aceptadores de lenguajes

- **Definición:** Sea $A = (S, \Sigma, \Gamma, T, \sigma, Ac)$ un AP. El lenguaje aceptado por A es el conjunto

$$\mathcal{AC}(A) = \{w \in \Sigma^* \mid (\sigma, w, \lambda) \Rightarrow^* (\tau, \lambda, \omega),\ \omega \in \Gamma^*,\ \tau \in Ac\}$$

- Es decir, una cadena w será aceptada por un AP si, arrancando desde su estado inicial y con la pila vacía, es posible que el autómata llegue a un estado de aceptación después de leer toda la cadena.

- Nótese que esto no quiere decir que la máquina deba encontrarse en un estado de aceptación inmediatamente después de haber leido el último caracter de w. ¿Por qué?

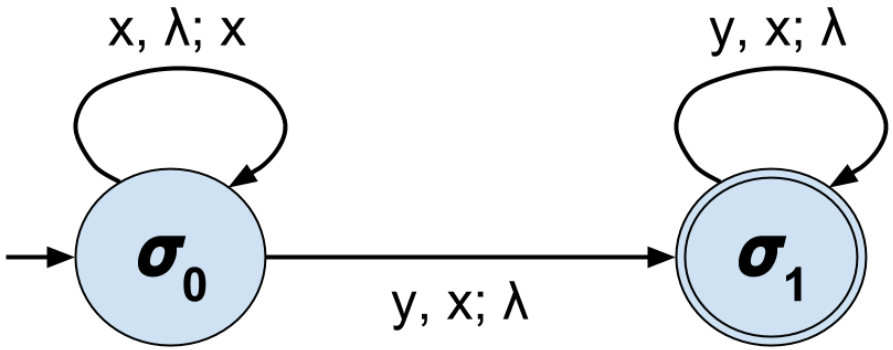
- Porque después de leer el último caracter de la entrada, el AP podría ejecutar varias transiciones de la forma $(\sigma_k, \lambda, \alpha; \beta, \sigma_j)$, cambiando de estado (y tal vez operando sobre la pila —por ejemplo, para vaciarla) pero sin leer ningún caracter de la entrada.

AP como aceptadores de lenguajes

- Consideremos un autómata de pila que sólo tiene transiciones del tipo $(\sigma_k, x, \lambda; \lambda, \sigma_j)$ con $x \neq \lambda$.
- Los pasos de este tipo ignoran que la máquina tiene una pila. Sólo dependen del estado y símbolo de entrada actuales.
- Vemos entonces que los AEFND son un caso particular de AP.
- Por lo tanto, los lenguajes regulares son un subconjunto de los lenguajes aceptados por los AP: $\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{AC}(AP)$.
- Más aún, acabamos de ver que el lenguaje $\{x^n y^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ es aceptado por un AP. Dado que por el Lema de Bombeo sabemos que no es regular, concluimos que $\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{AC}(AP)$.
- Veamos otro ejemplo.

AP como aceptadores de lenguajes

- **Ejemplo:**



$$\mathcal{AC}(A) = \{xy,\ x^n y,\ x^n y^k \text{ si } k \leq n\} = \{x^n y^k \mid n, k \in \mathbb{N}, k \leq n\}$$

- Obs. que si $k < n$ el autómata no vacía su pila.
- Si quisiéramos componer AP, por ej. para concatenar lenguajes, necesitaríamos que al llegar al estado de aceptación del primer AP la pila estuviera vacía.
- Veamos que siempre se puede retocar un AP de manera de aceptar el mismo lenguaje pero vaciando su pila.

AP como aceptadores de lenguajes

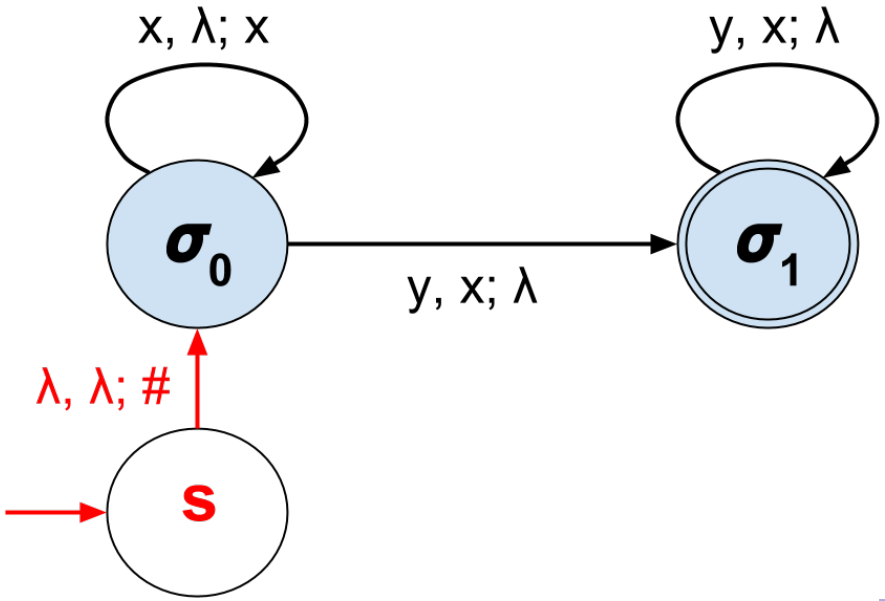
Teorema: Para cada $A \in AP$, existe $A' \in AP$ que vacía su pila y tal que

$$\mathcal{AC}(A') = \mathcal{AC}(A).$$

D/ Sea $A = (S, \Sigma, \Gamma, T, \sigma, Ac)$ un AP.

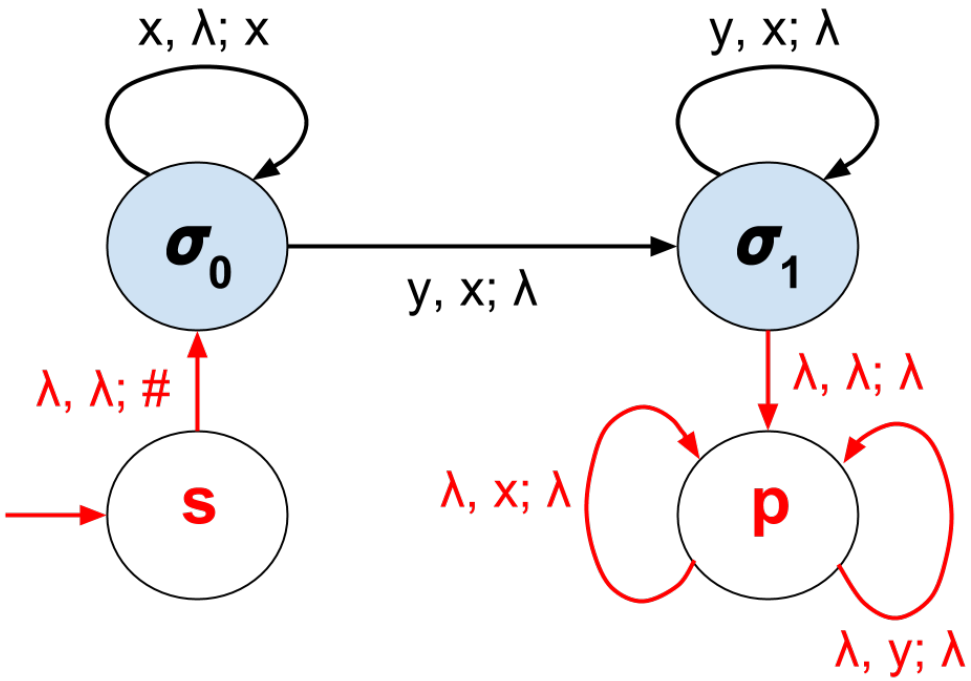
La idea para construir A' es la siguiente:

- El estado inicial de A deja de serlo. Introducimos un nuevo estado inicial y una transición del nuevo al anterior que lo único que hace es insertar en la pila un marcador $\#$ (sup. que $\# \notin \Gamma$).



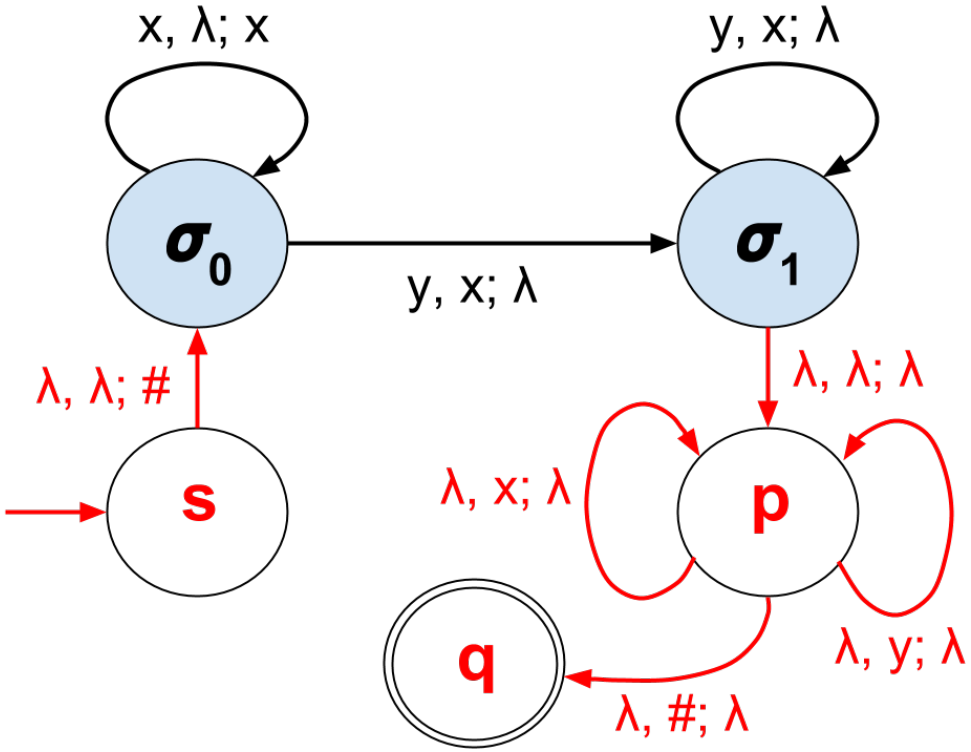
AP como aceptadores de lenguajes

- Los estados de aceptación de A dejan de serlo. Introducimos un nuevo estado, p, junto con las transiciones que permiten a la máquina pasar de cada uno de los antiguos estados de aceptación al nuevo estado p sin leer nada de la entrada, ni extraer o insertar símbolos en la pila.
- Vaciamos la pila sin salir del estado p introduciendo transiciones de la forma $p \xrightarrow{\lambda,x;\lambda} p$ para cada x en $\Gamma - \{\#\}$.



AP como aceptadores de lenguajes

- Agregamos un nuevo (y único) estado de aceptación q y la transición $p \xrightarrow{\lambda,\#;\lambda} q$ que borra el marcador $\#$, vaciando completamente la pila.



- A continuación, formalizamos estas ideas.

AP como aceptadores de lenguajes

Dado $A = (S, \Sigma, \Gamma, T, \sigma, Ac)$, definimos $A' = (S', \Sigma, \Gamma', T', \sigma', Ac')$ donde:

- $S' = S \cup \{s, p, q\}$, donde $s, p, q \notin S$
- $\Gamma' = \Gamma \cup \{\#\}$, donde $\# \notin \Gamma$
- $\sigma' = s$
- $Ac' = \{q\}$
-

$$
\begin{aligned}
T' = T \ &\cup \ \{(s, \lambda, \lambda; \#, \sigma)\} && (1)\\
&\cup \ \{(\tau, \lambda, \lambda; \lambda, p) \mid \tau \in Ac\} && (2)\\
&\cup \ \{(p, \lambda, \alpha; \lambda, p) \mid \alpha \in \Gamma - \{\#\}\} && (3)\\
&\cup \ \{(p, \lambda, \#; \lambda, q)\} && (4)
\end{aligned}
$$

AP como aceptadores de lenguajes

Ahora debemos mostrar que

$$\mathcal{AC}(A) = \mathcal{AC}(A').$$

1. Veamos que $\mathcal{AC}(A) \subseteq \mathcal{AC}(A')$:

   Sea $\alpha \in \mathcal{AC}(A)$. Sabemos que, partiendo del estado inicial σ con la pila vacía, α nos lleva en uno o más pasos a un estado de aceptación. En términos de configuraciones, podemos entonces escribir:

   $$(\sigma, \alpha, \lambda) \Rightarrow^* (\tau, \lambda, \gamma) \quad \text{donde} \quad \tau \in Ac,\ \gamma \in \Gamma^*$$

   Por lo tanto, en A' tenemos la derivación:

   $$(s, \alpha, \lambda) \Rightarrow^{(1)} (\sigma, \alpha, \#) \Rightarrow^* (\tau, \lambda, \gamma\#) \Rightarrow^{(2)} (p, \lambda, \gamma\#) \Rightarrow^{(3)*} (p, \lambda, \#) \Rightarrow^{(4)} (q, \lambda, \lambda)$$

   Como $q \in Ac'$, se tiene $\alpha \in \mathcal{AC}(A')$. Obs. que la pila queda vacía.

2. El caso $\mathcal{AC}(A) \supseteq \mathcal{AC}(A')$ se demuestra análogamente. $\square$

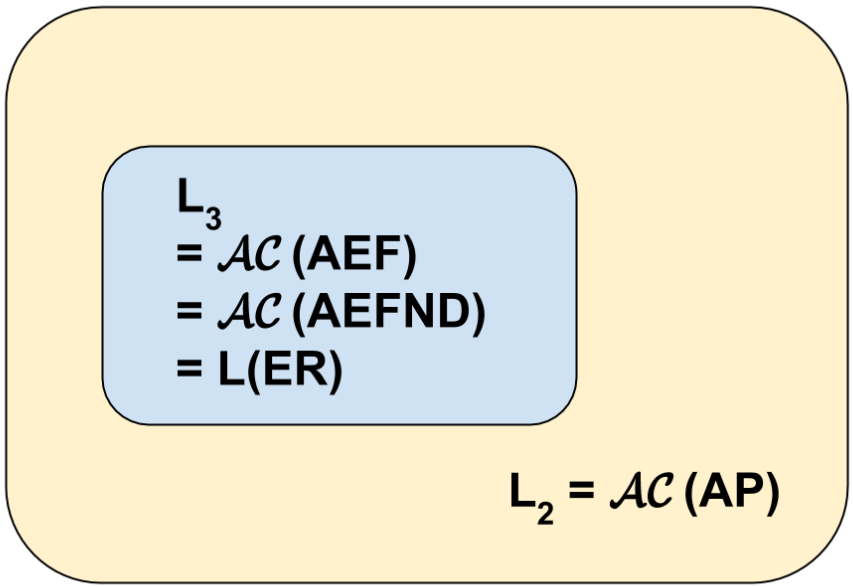
AP como aceptadores de lenguajes

- **Teorema 1:** Sea G una gramática independiente de contexto. Entonces existe un autómata de pila A tal que $\mathcal{AC}(A) = L(G)$.

  D/ ver Brookshear, pág. 85.

- **Teorema 2:** Sea A un autómata de pila. Entonces existe una gramática independiente de contexto G tal que $L(G) = \mathcal{AC}(A)$.

  D/ ver Brookshear, pág. 90.



Límites de los lenguajes independientes de contexto

- ¿Existen lenguajes fuera de $\mathcal{L}_2$? La respuesta es *sí*.
- Un ejemplo es $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Para demostrarlo usaremos el:
- **Lema de Bombeo:** Sea $L \in \mathcal{L}_2$. Si L es infinito existe $\alpha \in L$ de la forma $\alpha = xuyvz$, donde $uv \neq \lambda$, tal que $xu^n yv^n z \in L \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

  D/ Sea $L \in \mathcal{L}_2$ dado. Sabemos que existe una gramática independiente de contexto $G = (N, T, P, \sigma)$ tal que $L(G) = L$.

  Informalmente, la idea de la demostración es la siguiente:

  - L infinito $\Rightarrow$ L contiene palabras de longitud arbitrariamente grande
  - Palabras largas requieren derivaciones largas (de muchos pasos).
  - Si la palabra es suficientemente larga, en algún momento forzosamente tendremos que volver a aplicar alguna de las reglas de producción.
  - La aparición de dicho bucle permite 'bombear' caracteres.

Límites de los lenguajes independientes de contexto

Sea m el número máximo de símbolos de $N \cup T$ que aparecen en el lado derecho de las reglas de producción de G: $m = max\{|\delta|,\ A \to \delta \in P\}$.

Obs. que m es la mayor cantidad de símbolos por los que se puede reemplazar un no terminal. Por lo tanto, al aplicar i reglas de producción cualesquiera, la longitud de la cadena resultante es a lo sumo m^i.

Llamemos k a la cantidad de reglas de producción de G: $k = |P|$.

Sea $\alpha \in L$ una cadena tal que $|\alpha| > m^k$, que existe pues L es infinito.

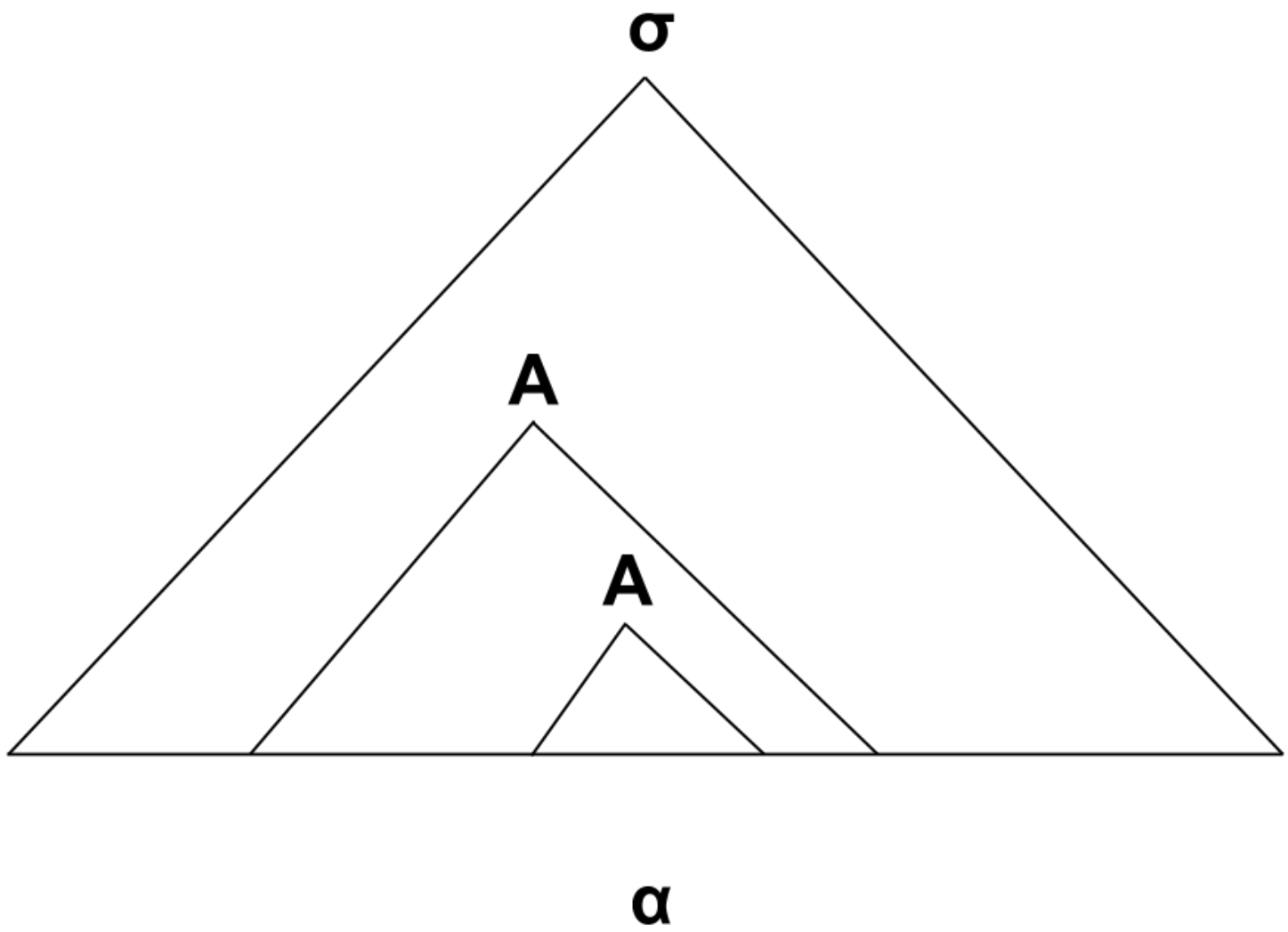
¿Cuántas veces se deben aplicar las reglas de producción para derivar α? Llamémoslo i.

$m^i \geq |\alpha| > m^k \ \Rightarrow \ i > k$, es decir, para formar α debieron aplicarse más de k reglas de producción.

Como existen sólo k reglas de producción, por lo menos una debió aplicarse 2 veces. Llamemos A al no terminal involucrado en dicha regla.

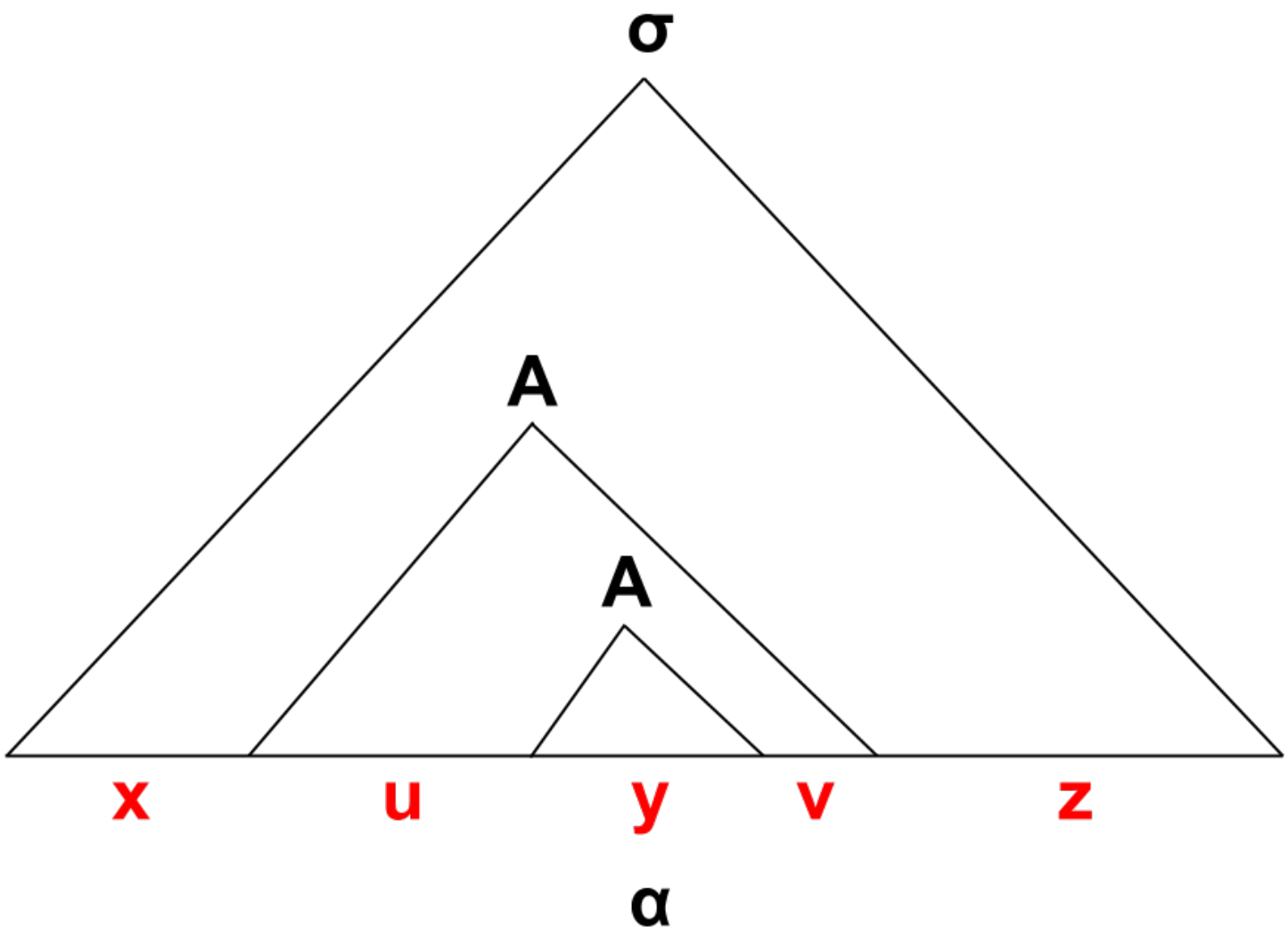
Límites de los lenguajes independientes de contexto

Representando esquemáticamente la derivación de α como un árbol:



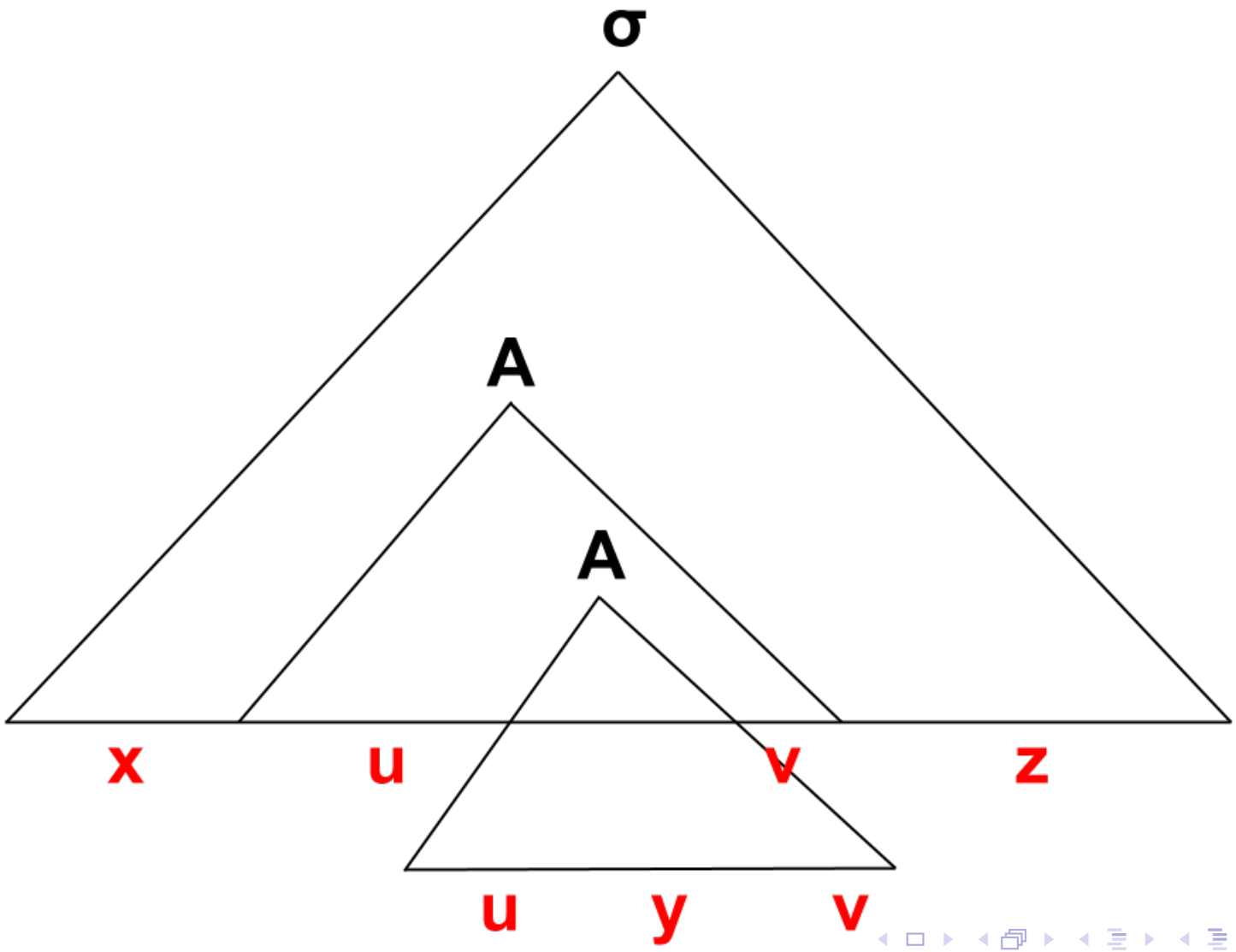
Límites de los lenguajes independientes de contexto

Representando esquemáticamente la derivación de α como un árbol:



Límites de los lenguajes independientes de contexto

Representando esquemáticamente la derivación de α como un árbol:



Límites de los lenguajes independientes de contexto

Corolario: $L = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\} \notin \mathcal{L}_2$

D/ Por el absurdo, supongamos que $L \in \mathcal{L}_2$.

- Como L es infinito, podemos aplicar el Lema de Bombeo y concluir que existe una cadena $xuyvz \in L$ tal que $xu^n yv^n z \in L \ \forall n \in \mathbb{N}$.
- Sabemos que $uv \neq \lambda$. Sin perder generalidad, supongamos que $u \neq \lambda$.
- Hay 2 posibilidades:
  1. u está formada por símbolos de un solo tipo (a, b ó c): al bombear u obtendremos una palabra que no mantiene la igualdad entre exponentes y por lo tanto $\notin L$
  2. u está formada por símbolos de más de un tipo (por ej., $u = aab$ ó $abbbbbcc$): al bombear u obtendremos una palabra que altera el orden de los símbolos y por lo tanto $\notin L$
- Absurdo, luego $L \notin \mathcal{L}_2$. $\square$