Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Álgebra Lineal (R211 - CE9)
2023

5. Subespacio generado - VERSIÓN BORRADOR

OBJETIVO: caracterizar un ev V completo con *poquitos vectores.*

Recordar lo que sabemos de $\mathbb{F}^n$! Queremos mudar estas ideas a V.

Definición 1. *V F-ev. $v_1, \dots, v_n \in V$.*

*Una **combinación lineal** (cl) de los vectores $v_1, \dots, v_n$ es un vector de la forma*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n,$$

donde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$.

Observación 1. *Las cl de vectores de un ev SIEMPRE constan de una cantidad **finita** de términos. No trabajamos con cl infinitas (no tenemos aún noción de convergencia).*

Definición 2. *V F-ev. $S \subset V$.*

*La **cápsula lineal** o **span** de S es el conjunto de todas las cl posibles de elementos de S. Se denota por $< S >$ o $lin(S)$ o $span(S)$:*

$$< S >= \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n : v_1, \dots, v_n \in V, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F, n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Si $S = \emptyset$ tenemos $< S >= \{\overline{0}\}$.

Observación 2. *Las cl que forman la cápsula lineal son FINITAS, como dijimos antes.*

Proposición 1. *V F-ev. $S \subset V$. Entonces $< S >\subset V$.*

Definición 3. *$< S >$: **subespacio generado por S**.*

Demostración. Usamos caracterización de subespacios.

$\alpha, \beta \in F$, $u, v \in< S >$. Veamos que $\alpha u + \beta v \in< S >$. En efecto:

- $u \in< S >\Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ such that $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ with $v_i \in S$.

- $v \in< S >\Rightarrow \exists \beta_1, \dots, \beta_m \in F$ such that $v = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_m$ with $w_i \in S$.

Luego

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta v &= \alpha(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) + \beta(\beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_m) \\ &= \alpha\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha\alpha_n v_n + \beta\beta_1 w_1 + \cdots + \beta\beta_n w_m \in< S >, \end{aligned}$$

pues es una cl de elementos de S. □

Observación 3. *$S \subset< S >$. En efecto, cada $u \in S$ puede ser escrito como $u = 1 \cdot u$, que es una cl de elementos de S, luego está en $< S >$.*

Observación 4. *Si $S \subset T$ entonces $< S >\subset< T >$. EJERCICIO.*

Proposición 2. *V F-ev. $S \subset V$.*

Entonces $< S >= \bigcap\{U \subset V : U \text{ sev y } S \subset U\}$.

O sea, el sev generado por un conjunto es la intersección de todos los sev que lo contienen.

Demostración. Llamemos $\mathcal{F} = \{U \subset V : U \text{ sev y } S \subset U\}$ a la familia de sev que contienen a S. Queremos ver que $< S >= \bigcap_{U \in \mathcal{F}} U$.

$\subset$) Veamos que $< S > \subset U$ para todo $U \in \mathcal{F}$.

Sea $U \in \mathcal{F}$. Entonces $U \supset S$. Sea $u \in < S > \Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ tq $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ con $v_i \in S$, luego $v_i \in U$, y como $U \subset V$ sev, sigue que $u \in U$.

$\supset$) $< S > \in \mathcal{F}$ (porqué???) Luego la intersección de $< S >$ con el resto de los sev de la familia $\mathcal{F}$ está contenida en $< S >$.

□

Corolario 1. *$< S >$ es el menor sev de V que contiene a S.*

El menor significa que si $U \subset V$ sev tal que $U \supset S$ entonces $< S > \subset U$.

Demostración. Es el $\subset$) de la prueba.

□

Corolario 2. *$S \subset V$ sev ents. $S =< S >$.*

Es un sii, la vuelta es trivial.

Demostración. EJERCICIO: completar.

□

Definición 4. *V F-ev. $S \subset V$.*

*Si $< S >= V$ decimos que S **genera a** V, o que V **es generado por** S o que S **es un subconjunto generador de** V o que S **es un sistema generador de** V.*

*Si existe un conjunto generador de V que es finito, decimos que V es **finitamente generado**. Si no existe tal S decimos que es V **es infinito dimensional**.*

Ejemplos 1. *TODO QUEDA COMO EJERCICIO.*

1. *Base canónica de $\mathbb{R}^3$: ijk.*
2. *$\{1, x, x^2\}$ base de $\mathbb{C}_2[x]$ como $\mathbb{C}$-ev.*
3. *$\mathbb{C}[x]$ es infinito dimensional.*
4. *Sol del sistema $AX = 0$ con*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   está generado por $\{(-2, 1, 0, 0, 0), (-3, 0, -1, 1, 0)\}$.

6. Independencia lineal - VERSIÓN BORRADOR

Recordar la def de li que vimos en $\mathbb{F}^n$! Queremos mudar estas ideas a V.

Definición 5. *V F-ev. $S \subset V$.*

*Si $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ decimos que S es **linealmente independiente** (li) si la única cl de elementos de S que resulta en el vector nulo es la trivial.*

En símbolos: si $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \overline{0}$ p.a. $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ entonces $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Si $S=\emptyset$ DECRETAMOS que S sea li.

Si S es un conjunto infinito, decimos que es li si todo subconjunto finito de S es li.

Si S no es li decimos que S es ***linealmente dependiente*** *(ld).*

Observaciones 1. *TODO TAMBIÉN SE DEBE JUSTIFICAR COMO EJERCICIO*

1. *S es ld sii $\exists v_1,\dots,v_m \in S$ y $\alpha_1,\dots,\alpha_m \in F$ no todos nulos tq $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = \overline{0}$.*
2. *$\overline{0} \in S \Rightarrow S$ ld.*
3. *S ld entonces todo $T \supset S$ es ld.*
4. *S li entonces todo $T \subset S$ es li.*
5. *$v \in V$, $\{v\}$ ld sii $v=\overline{0}$.*
6. *$u,v \in V$, $\{u,v\}$ ld sii $\exists \lambda \in F$ st $u=\lambda v$.*
7. *S ld sii $\exists$ un vector en S que es cl de los demás.*

Ejemplos 2. *JUSTIFICAR TODOS LOS EJEMPLOS*

1. *ijk son li en $\mathbb{R}^3$.*
2. *$\{x^2,x^4,x^6,x^8\}$ li en $\mathbb{R}[x]$.*
3. *$\{\sin x, \cos x\}$ son li en $\mathbb{R}^{[-\pi,\pi]}$.*