Álgebra Lineal (R211 - CE9) 2023

4. Coordenadas y Cambio de base (BORRADOR)

En un ev V finito dimensional, digamos $dimV = n$, si tenemos una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ bastarán n escalares para determinar cualquier vector: si $v \in V$ existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ tq $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$. Si consideramos la base con un *orden* entre sus n vectores, cada vector de V queda unívocamente determinado por una n-upla, esto es, un elemento de F^n.

Definición 1. *V F-ev finito dimensional con $dimV = n$. Una* ***base ordenada*** *es un subconjunto B de n vectores de V que es base y en el cual hemos fijado un orden sucesivo entre sus elementos. Si $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $v \in V$ se escribe como $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, el vector $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in F^n$ se llama* ***vector de coordenadas de*** *v y lo denotamos $[v]_B$.*

Ejemplos 1.

1. *$V = \mathbb{R}_4[x]$, sea $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ la base canónica. Si $p(x) = x^3 + 3x^2 - 1$, ents $[p(x)]_B = (-1, 0, 3, 1)$. Si $B_1 = \{x^3, x^2, x, 1\}$ base (cuál es la diferencia con la base canónica??), ents $[p(x)]_{B_1} = (1, 3, 0, -1)$. Observemos que es importante el orden que definamos en nuestra base.*
2. *$V = R^3$, B base canónica. Si $v = (1, 2, 3)$ ents $[v]_B = (1, 2, 3)$.*

Vamos a definir ahora un concepto fundamental: los ev isomorfos, que desde el punto de vista de la estructura algebraica, serán indistinguibles. Para nosotrxs será una noción de *igualdad*, y nos permitirá trabajar de igual manera con distintos ev's, aunque la naturaleza de sus elementos sea diferente.

Definición 2. *V, W F-ev se dicen* ***isomorfos*** *si existe $T : V \to W$ isomorfismo. Se anota $V \overset{T}{\simeq} W$.*

Proposición 1. *En la clase de los F-ev, el isomorfismo es una relación de equivalencia.*

Demostración. EJERCICIO. $\square$

El siguiente teorema es fundamental, nos dice lo que venimos anunciando: todo es $\mathbb{R}^n$!!!

Teorema 1. *V F-ev finito dimensional con $dimV = n$. Ents. $V \simeq F^n$.*

Demostración. Fijamos $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V. Definimos $T : V \to F^n$ como la función que a $v \in V$ le asigna su vector de coordenadas: $T(v) = [v]_B$. T es un isomorfimo. EJERCICIO! $\square$

Dadas dos bases en un F-ev V, cada vector $v \in V$ tiene asociado dos vectores de coordenadas. Veamos que ambos vectores se relacionan a través de una matriz.

Ejemplo 1. *$V = \mathbb{R}^3$, $B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ base canónica, $B_2 = \{w_1 = (1, 1, 1,), w_2 = (1, 1, 0), w_3 = (1, 0, 0)\}$. Sea $v = (3, 4, 5) = 3e_1 + 4e_2 + 5e_3$. Además $e_1 = w_3$, $e_2 = w_2 - w_3$, $e_3 = w_1 - w_2$. Luego, $v = 3w_3 + 4(w_2 - w_3) + 5(w_1 - w_2) = 5w_1 - w_2 - w_3$. Así, $[v]_B = (3, 4, 5)$ y $[v]_{B_1} = (5, -1, 1)$. En general, si $v = (x, y, z)$, $[v]_B = (x, y, z)$ y $[v]_{B_1} = zw_1 + (y - z)w_2 + (x - y)w_3$.*

Pero veamos esto de otra forma: tenemos que $[e_1]_{B_1} = (0, 0, 1)$, $[e_2]_{B_1} = (0, 1, -1)$, $[e_3]_{B_1} = (1, -1, 0)$. Consideremos la matriz C cuyas columnas son los vectores de coordenadas de los vectores de la base B:

$$C = \left([e_1]^t_{B_1}, [e_2]^t_{B_1}, [e_2]^t_{B_1}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, si $v = (x, y, z)$,

$$C[v]_B^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ y-z \\ x-y \end{pmatrix} = [v]_{B_1}^t.$$

El ejemplo anterior es bien general: es una definición y un teorema.

Teorema 2. *V F-ev finito dimensional con $dimV = n$. Sean $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ bases de V. Sea $C = (c_{ij})$ la matriz cuyas entradas c_{ij} están definidas por: para cada $j = 1, \ldots, n$ sean $c_{1j}, \ldots, c_{nj} \in F$ tales que $v_j = c_{1j}w_1 + \cdots + c_{nj}w_n$. Ents. pc $v \in V$,*

$$C[v]_{B_1}^t = [v]_{B_2}^t. \tag{1}$$

*C se llama **matriz de cambio de base de** B_1 **a** B_2.*

Demostración. Sea $v \in V$ con $[v]_{B_1} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Veamos que $\beta_i := \left(C \cdot [v]_{B_1}^t\right)_i$, $i = 1, \ldots, n$ son los escalares tq $[v]_{B_2} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$. En efecto, $\beta_i = \left(C \cdot [v]_{B_1}^t\right)_i = \sum_{k=1}^n c_{ik}\alpha_k = c_{i1}\alpha_1 + \cdots + c_{in}\alpha_n$, luego

$$\begin{aligned}
\beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n =&(c_{11}\alpha_1 + \cdots + c_{1n}\alpha_n)w_1 + \cdots + (c_{n1}\alpha_1 + \cdots + c_{nn}\alpha_n)w_n \\
=&\alpha_1(c_{11}w_1 + \cdots + c_{n1}w_n) + \cdots + \alpha_n(c_{1n}w_1 + \cdots + c_{nn}w_n) \\
=&\alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_n v_n = v,
\end{aligned}$$

de donde por unicidad de escritura tenemos que $[v]_{B_2} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$. □

De la siguiente proposición un poco más general se deducirá la unicidad de la matriz de cambio de base:

Proposición 2. *$A, A' \in F^{n\times n}$ tq $Ax = A'x$ pt $x \in F^n$. Ents. $A = A'$.*

Demostración. Sea $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ base canónica de F^n. Ents.

$$(Ae_j)_i = \sum_{k=1}^n A_{ik}(e_j)_k = \sum_{k=1}^n A_{ik}\delta_{kj} = A_{ij},$$

y análogamente $(A'e_j)_i = A'_{ij}$, luego $A_{ij} = A'_{ij}$ pt i pt j. □

Corolario 1. *La matriz de cambio de base es la única matriz que verifica* (1).

Cuando sea necesario referenciar a las bases involucradas, anotaremos $C_{B_1B_2}$ o $C_{B_1\to B_2}$.

Corolario 2. *V F-ev. B_1, B_2, B_3 bases de V. Ents:*

1. $C_{B_1B_3} = C_{B_2B_3}C_{B_1B_2}$.
2. $C_{B_2B_1} = (C_{B_1B_2})^{-1}$.

Demostración. 1. EJERCICIO (sigue de la unicidad).

2. EJERCICIO: probar primero que $C_{B_1B_2}$ es inversible y luego ver la igualdad. Ayuda: la matriz $C_{B_1B_2}$ es inversible pues si no lo fuera el sistema $C_{B_1B_2}X = 0$ tendría soluciones no triviales (concluír de aquí).

□

Veamos dos proposiciones más.

Proposición 3. *Si $A \in F^{n\times n}$ invertible existen bases B_1 y B_2 de F^n tq $A = C_{B_1B_2}$.*

Demostración. Sean $A = (a_{ij})$, B_1 la base canónica de F^n y $B_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ con $w_j = a_{1j}e_1 + \cdots + a_{nj}e_n$. B_2 es base y $A = C_{B_1B_2}$ EJERCICIO. □

Proposición 4. *Si $A \in F^{n \times n}$ invertible y B base de F^n entonces:*

1. *$\exists B_1$ base de F^n tq $A = C_{B_1 B}$.*
2. *$\exists B_2$ base de F^n tq $A = C_{B B_2}$.*

Demostración.

1. EJERCICIO (Ayuda: idem proposición anterior poniendo B en lugar de la base canónica).
2. EJERCICIO (Ayuda: del item anterior, usar proposición para A^{-1} y B, existe B_2 tq $A^{-1} = C_{B_2 B_1}$ luego $A = (C_{B_2 B})^{-1} = C_{B B_2}$).

$\square$

Veremos mil ejemplos en el laboratorio y en el práctico!