

Funciones Recursivas Primitivas

Pablo Verdes

LCC

9 de abril de 2020

Introducción

- Intentaremos construir modelos que nos permitan comprender los fundamentos del cálculo.
- ¿Qué significa **calcular**? Tomar ciertos datos, realizar una serie de pasos, y obtener un resultado. Es decir, **aplicar un algoritmo**.
- Estudiaremos una manera de descomponer cualquier cálculo matemático en procesos básicos.
- Trabajaremos sobre un modelo del cálculo en \mathbb{N}_0 . Para simplificar notación, de aquí en más usaremos la letra \mathbb{N} para indicar a \mathbb{N}_0 .
- Esquema:
 - 1 Funciones numéricas
 - 2 Funciones base: cero, proyección, sucesor
 - 3 Operadores: composición, recursión
 - 4 Definición inductiva del conjunto de Funciones Recursivas Primitivas

Funciones numéricas

Definición: Llamaremos **función numérica** a toda función

$$f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}, \text{ con } k \in \mathbb{N}.$$

- Convención: si $k = 0$, identificaremos a una función de cero variables con un número perteneciente a \mathbb{N} .
- Notación:
 - ▶ Elementos de \mathbb{N}^k : (x_1, x_2, \dots, x_k) , X , Y , Z .
 - ▶ Cuando necesitemos remarcar que una tupla X tiene k componentes, utilizaremos un supra-índice y escribiremos X^k .
 - ▶ Valor que toma una función: $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$, $f(X)$, $f(X^k)$
 - ▶ Si el dominio de una función es \mathbb{N}^k , diremos que dicha función es de orden k y escribiremos $f^{(k)}$.

Funciones base

- Funciones cero
- Funciones proyección
- Función sucesor

Funciones base: definiciones

- Llamaremos **funciones cero** a las funciones

$$c^{(n)} : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$$
$$X \mapsto c^{(n)}(X) = 0$$

- Llamaremos **funciones proyección** a las funciones

$$p_k^{(n)} : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$$
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto p_k^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_k$$

- Llamaremos **función sucesor** a la función

$$s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$
$$x \mapsto s(x) = x + 1$$

Funciones base

- **Definición:** Llamaremos **funciones base** a las funciones cero, proyección y sucesor.
- Ahora veremos los operadores de composición y recursión, que nos permitirán combinar funciones para obtener otras más complejas.

Operador composición Φ

Definición:

Dada una función numérica $f^{(n)}$ y n funciones numéricas de orden k , $\{g_i^{(k)}\}_{i=1}^n$, llamaremos operador **composición** al que construye la función numérica h dada por

$$h : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$$

$$X \mapsto h(X) = f(g_1(X), g_2(X), \dots, g_n(X))$$

Notación:

$$h = \Phi(f, g_1, g_2, \dots, g_n)$$

Operador composición Φ

Ejemplos:

- Funciones constantes:

① $uno^{(k)} = \Phi(s, c^{(k)})$

② $dos^{(k)} = \Phi(s, uno^{(k)}) = \Phi(s, \Phi(s, c^{(k)}))$

③ $tres^{(k)} = \Phi(s, dos^{(k)}) = \Phi(s, \Phi(s, \Phi(s, c^{(k)})))$

- Funciones que suman un número fijo:

① $Mas1^{(1)} = s$

② $Mas2^{(1)} = \Phi(s, Mas1^{(1)}) = \Phi(s, s)$

③ $Mas3^{(1)} = \Phi(s, Mas2^{(1)}) = \Phi(s, \Phi(s, s))$

- Función $doble(x) = x + x$?

Operador recursión R

Definición:

Dadas dos funciones numéricas $g^{(k)}$ y $h^{(k+2)}$, llamaremos operador **recursión** R al que construye una nueva función numérica $f^{(k+1)}$ definida de la siguiente manera:

$$f(y, X^k) = \begin{cases} g(X^k) & \text{si } y = 0 \\ h(y-1, X^k, f(y-1, X^k)) & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

Notación:

$$f = R(g, h)$$

Funciones Recursivas Primitivas (FRP)

Definimos inductivamente el conjunto de **Funciones Recursivas Primitivas (FRP)** como el menor conjunto tal que:

- Las funciones base pertenecen a FRP.
- Las funciones obtenidas aplicando un número finito de operaciones de composición (Φ) y recursión (R) sobre elementos de FRP también pertenecen a FRP.

Ejemplos

Son FRP las siguientes funciones:

① $\Sigma(y, x) := y + x$ (suma)

② $\Pi(y, x) := y \times x$ (producto)

③ $Fac(x) := x!$ (factorial)

④ $Exp(y, x) := x^y$ (exponencial, con la convención de que $0^0 = 1$)

⑤ (predecesor)

$$Pd(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ejemplos

① $\Sigma(y, x) := y + x \in FRP$

Veamos que Σ se puede escribir como recursión de FRP. Recordemos que

$$f(y, X^k) = \begin{cases} g(X^k) & \text{si } y = 0 \\ h(y-1, X^k, f(y-1, X^k)) & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

Obs. que $k = 1$. Buscamos entonces $g^{(1)}, h^{(3)} \in FRP$ tales que:

$$\Sigma(y, x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } y = 0 \\ h(y-1, x, \Sigma(y-1, x)) & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

- Caso $y = 0$: $\Sigma(0, x) = 0 + x = x = g(x) \Rightarrow g^{(1)}(x) = p_1^{(1)}(x)$
- Caso $y > 0$: $\Sigma(y, x) = y + x = (y-1 + x) + 1 = \Sigma(y-1, x) + 1 = s(\Sigma(y-1, x)) = s(p_3^{(3)}(y-1, x, \Sigma(y-1, x))) \Rightarrow h^{(3)} = \Phi(s, p_3^{(3)})$

Hemos probado que $\Sigma = R(p_1^{(1)}, \Phi(s, p_3^{(3)}))$, luego $\Sigma \in FRP$.

Ejemplos

5 $Pd \in FRP$

$$Pd(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Veamos que Pd se puede escribir como recursión de FRP. Recordemos que

$$f(y, X^k) = \begin{cases} g(X^k) & \text{si } y = 0 \\ h(y - 1, X^k, f(y - 1, X^k)) & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

Obs. que $k = 0$. Buscamos entonces $g^{(0)}, h^{(2)} \in FRP$ tales que:

$$Pd(y) = \begin{cases} g & \text{si } y = 0 \\ h(y - 1, Pd(y - 1)) & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

- Caso $y = 0$: $Pd(0) = 0 = c^{(0)} \Rightarrow g^{(0)} = c^{(0)}$
- Caso $y > 0$: $Pd(y) = y - 1 = p_1^{(2)}(y - 1, Pd(y - 1)) \Rightarrow h^{(2)} = p_1^{(2)}$

Hemos probado que $Pd = R(c^{(0)}, p_1^{(2)})$, luego $Pd \in FRP$.

Función potencia

- Veremos ahora ciertas propiedades que serán útiles para encontrar nuevos miembros de la familia *FRP*.
- **Definición:** Dada una función $f^{(1)}$ definimos $F^{(2)}$, llamada **potencia de f** , del siguiente modo:

$$F(y, x) = \begin{cases} x & \text{si } y = 0 \\ f(F(y-1, x)) & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

Notación: $F(y, x) = f^y(x)$.

- **Proposición:** $f \in FRP \Rightarrow F \in FRP$

D/ Veamos que se puede escribir a F como recursión de *FRP*:

$$(y = 0) \quad F(0, x) = x = p_1^{(1)}(x) \Rightarrow g^{(1)} = p_1^{(1)}$$

$$(y > 0) \quad F(y, x) = f(F(y-1, x)) = \\ f(p_3^{(3)}(y-1, x, F(y-1, x))) \Rightarrow h^{(3)} = \Phi(f, p_3^{(3)})$$

Hemos mostrado que $F = R(p_1^{(1)}, \Phi(f, p_3^{(3)}))$.

Dado que $f \in FRP$, concluimos que $F \in FRP$. □

Función potencia: ejemplos

- Obs. que en el caso particular de la potencia de la función sucesor obtenemos: $s^y(x) = R(p_1^{(1)}, \Phi(s, p_3^{(3)})) = \Sigma(y, x)$ (ver pág. 12).
- Función **diferencia** $\hat{d}^{(2)}$:

$$\hat{d}(y, x) = \begin{cases} x - y & \text{si } x \geq y \\ 0 & \text{si } x < y \end{cases}$$

Se trata de una resta entre números naturales que sólo se realiza cuando es posible. Notación alternativa: $x \dot{-} y$.

•

$$(\text{ejercicio}) \quad \left. \begin{array}{l} \hat{d}(y, x) = Pd^y(x) \\ Pd(x) \in FRP \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{d}(y, x) \in FRP$$

Conjuntos Recursivos Primitivos (CRP)

- **Definición:** Dado un conjunto X , para cada subconjunto $A \subseteq X$ definimos su **función característica** $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ como:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

- **Definición:** Diremos que $A \subseteq \mathbb{N}^k$ es un **conjunto recursivo primitivo (CRP)** si su función característica

$$\chi_A : \mathbb{N}^k \rightarrow \{0, 1\}$$

es una función recursiva primitiva.

- **Proposición:** Sean $k \in \mathbb{N}$ y $A, B \subseteq \mathbb{N}^k$. Si A y B son *CRP*, entonces el complemento $\neg A$, la intersección $A \cap B$ y la unión $A \cup B$ son *CRP*.

D/ Ejercicio.