# Práctica 4:
# Funciones Recursivas

Cátedra: Lenguajes Formales y Computabilidad
Aulas Virtuales - Pandemia Covid19

Docentes en Práctica

- Alejandro Hernandez
- Natalia Colussi
- Valeria Perez Moguetta

# ¿Qué vamos a ver en esta parte?

- La idea de la práctica es ayudarlos a resolver y plantear los problemas de la práctica  sobre Funciones Recursiva (FR)

- En cada parte abordaremos cómo trabajar con los ejercicios de dicha sección.

# Ejercicio 1:

1. Demuestre que las funciones recursivas primitivas son totales.

- Para esta demostración es importante tener en cuenta que las FRP están definidas como un conjunto inductivo.
- Por lo tanto, para realizar una prueba debemos recorrer cada una de las reglas que definen a los elementos del conjunto y verificar la propiedad tal cual lo aprendimos como PIP , en este caso,  del conjunto de las FRP
- ¿Cuál es la propiedad?

$(\forall f \in FRP \cdot f$ es una función TOTAL$)$

# Ejercicio 1:

- La inducción sobre FRP te llevará a recorrer los constructores del conjunto:
  - Funciones Básicas
  - Operador de Composición
  - Operador de Recursión
- Recordemos las definición de una función total:

**Def**: Una función es <u>total</u> si está definida sobre todos los elementos de $\mathbb{N}^k$

$f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ , $f$ numérica

- La estrategia será: **Inducción sobre FRP**.

Inducción sobre la estructura de FRP.

- **CASO BASE**
  - Las funciones $C^{(n)}$ es TOTAL por def.

    $P^{(n)}$ es TOTAL por def.

    $S$ es TOTAL por def.

- **CASO CONSTRUCTIVO**:
  - COMPOSICIÓN $\Phi$
  - RECURSIÓN $R$

## — COMPOSICIÓN

Supongo que

$f^{(n)}$ es TOTAL. por (HI)

$g_1^{(k)}, g_2^{(k)}, \ldots, g_n^{(k)}$ son TOTALES por (HI)

Demostrar que

$g = \Phi(f, g_1, g_2, \ldots, g_n)$ es TOTAL.

Sea $X \in \mathbb{N}^k$, calculamos "imagen" en $g_i^{(k)}$

$$Y = (g_1^k(X), g_2^k(X), \ldots, g_n^k(X))$$

Lo construímos nosotros es para validar el cociente después

Sabemos que $Y$ existe porque por (HI) cada $g_i^k(X)$ es total, por lo tanto esta definido en $X$.

Sabemos que $f^{(n)}: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ es total en $\mathbb{N}^n$ por (HI)

entonces podemos calcular.

$$f^{(n)}(Y)$$

$$= \langle \text{def } Y \rangle$$

$$f^{(n)}(g_1^{(k)}(X), g_2^{(k)}(X), \ldots, g_n^{(k)}(X))$$

$$= \langle \text{def } \Phi \rangle$$

$$\Phi(f^{(n)}, g_1^{(k)}, \ldots, g_n^{(k)})(X)$$

Esto como lo construimos para un X cualquiera podemos afirmar que la composición $\Phi$ a partir de FT (funciones totales) construye FT.

- Ya hemos probado el primer caso constructivo, ahora vamos por el segundo, la recursión.

- Recursión:

Supongo que

- $g^{(k)}$ es TOTAL por (HI)
- $h^{(k+2)}$ es TOTAL por (HI)

Demuestro que:

$f^{(k+1)} = R[g^{(k)}, h^{(k+2)}]$ es TOTAL, es decir,

$f(y, X^{(k)})$ es TOTAL para $y \in \mathbb{N}$ y $X^k \in \mathbb{N}^k$.

Veamos la ley de f, esta separado por los dos casos $y=0$ y $y \neq 0$. Aplicamos inducción ahora sobre $y \in \mathbb{N}$

Atención aplicamos inducción sobre Naturales dentro de una inducción sobre FRP

• CASO $y=0$.

¿ $f^{(k+1)}(0,x)$ es TOTAL?

$$f^{(k+1)}(0,x) = g^{(k)}(x) \text{ es TOTAL por (HI)}$$

def recursión

• CASO $y>0$, $y = n+1$ con $n \geq 0$

Supongo que

$f(n, x^k)$ es TOTAL.

demuestro

$f(n+1, x^k)$ es TOTAL.

$$f(\underline{n+1}, x^k)$$

$$= \langle \text{Recursión, caso } \underline{y>0} \rangle$$

$$h^{(k+1)}(n, x^k, \underline{f(n, x^k)})$$

$$= \langle \text{Por HI, } f(n, x^k) = m \rangle$$

$$h^{(k+1)}(n, x^k, m).$$

Tengamos en cuenta que

$f(n, x^k)$ es total significa que

$(\exists m \cdot f(n, x^k) = m)$.

Ahora bajo el supuesto inductivo de la recursión tenemos que $h^{(k+1)}$ es TOTAL y teniendo todos sus argumentos definidos podemos garantizar que existe un valor $p$ tal que

$h^{(k+1)}(n, x^k, m) = p$.

**Acá cerramos la inducción sobre los naturales.**

Luego

$(\forall y \in \mathbb{N} \cdot f(y, \mathbb{N}^k))$ es TOTAL

∴ la recursión sobre funciones TOTALES genera funciones TOTALES.

∴ $(\forall f \in FRP \cdot f$ son totales$)$

Acá cerramos la inducción primitiva sobre FRP

# Ejercicio 2:

2. Sea $\{f_k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ el conjunto de funciones de Ackermann visto en teoría. Demuestre las siguientes propiedades:

   (a) $\forall k \in \mathbb{N} \quad f_k(x) \in FRP$

   (b) $\forall x, k \in \mathbb{N} \quad f_k(x) > x$

   (c) $\forall x_1, x_2, k \in \mathbb{N} \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f_k(x_1) < f_k(x_2)$

   (d) $\forall x, k \in \mathbb{N} \quad f_k(x) < f_{k+1}(x)$

- La estrategia a emplear acá es un teorema auxiliar para resolver estos ejercicios. Así nos lo explicó la profe  Pamela en la teoría.
- Seguramente, también aplicaremos inducción sobre los naturales para las serie  de Ackerman.

# Ejercicio 2:

- item (a) usamos inducción sobre k Natural para demostrar que cada $f_i$ es una FRP.
- item (c) y (d) en adelante les puede resultar útil el siguiente teorema, que enunció Pamela , para evitar usar puntos suspensivos en la prueba cuando queremos continuar con un razonamiento y formalizar dicha serie de pasos:

TEOREMA Sea $f$ una función tal que $f(x) > x$, $\forall x \in \mathbb{N}_0$

Resulta entonces que $f^b(f^2(x)) > f(x)$, $\forall x, \forall b \in \mathbb{N}_0$

# Ejercicio 2:

Teorema: Sea $f$ una función tal que $f(x) > x$, $\forall x \in \mathbb{N}_0$
Resulta entonces que $f^b(f^2(x)) > f(x)$, $\forall x, \forall b \in \mathbb{N}_0$

D/ Demuestro por inducción sobre $\mathbb{N}$ (sobre $b$):

* Caso $b=0$:

Dado un $x$ cualquiera:

$$f^0(f^2(x)) \underset{\text{<por definición de potencia 0>}}{=} f^2(x) \overset{\text{<por def de potencia>}}{=} f(\underbrace{f(x)}_{x'}) \overset{\text{<por supuesto>}}{>} \underbrace{f(x)}_{x'}$$

$\therefore f^0(f^2(x)) > f(x), \forall x \in \mathbb{N}_0$

* Caso inductivo:

HI: $f^b(f^2(x)) > f(x), \forall x \in \mathbb{N}_0$

TI: $f^{b+1}(f^2(x)) > f(x), \forall x \in \mathbb{N}_0$

$$f^{b+1}(f^2(x)) \underset{\text{<definición de potencia>}}{=} f(\underbrace{f^b(f^2(x))}_{x'}) \underset{\text{<por supuesto>}}{>} \overbrace{f^b(f^2(x))}^{x'} \underset{\text{<por (HI)>}}{>} f(x)$$

$\therefore f^{b+1}(f^2(x)) > f(x), \forall x \in \mathbb{N}_0$

$\therefore f^b(f^2(x)) > f(x), \forall x, \forall b \in \mathbb{N}_0$

# Ejercicio 2:

②d) $\boxed{\forall x, \forall k \in \mathbb{N}_0 \quad f_{k+1}(x) > f_k(x)}$

<u>D:</u> Dados $x$ y $k$ cualesquiera. Se tiene que:

$$f_{k+1}(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \langle \text{def de } f_{k+1} \rangle}}{=} f_k^{x+2}(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \langle \text{def de potencia} \rangle}}{=} f_k^{x}\left(f_k^{2}(x)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \langle \text{por teorema anterior, tomando } f = f_k,\ b = x, \\ \text{ya que por el ej ②b) sabemos que } f_k(x) > x \rangle}}{>} f_k(x)$$

$\therefore$ $f_{k+1}(x) > f_k(x), \forall x, \forall k \in \mathbb{N}_0$

# Ejercicio 3:

3. Defina las siguientes funciones como $FR$:

   (a) $f(x, y) = x - y$

   (b) $g(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$

   (c) $h(x) = \sqrt{x}$

Recordemos primero que el conjunto de las FR extiende al conjunto de las FRP, y para esto, se agrega un nuevo operador (además de los operadores de composición y recursión que ya teníamos): el nuevo operador de **minimización**.

# Ejercicio 3:

3. Defina las siguientes funciones como $FR$:

   (a) $f(x, y) = x - y$

   (b) $g(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$

   (c) $h(x) = \sqrt{x}$

Tenemos que encontrar una función h, tal que al aplicarle el operador, nos retorne un t. El operador tomar una función de aridad n+1, y retorna el mínimo t tal que la función aplicada a sus n+1 parámetros (incluyendo dicho t) da 0.

# Ejercicio 3:

3. Defina las siguientes funciones como $FR$:

   (a) $f(x, y) = x - y$

   (b) $g(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$

   (c) $h(x) = \sqrt{x}$

Pensemos el inciso a. La función f tiene aridad 2, tenemos que encontrar una h de aridad 3, y aplicando el operador de minimización, vamos a tener la menor t tal que h(x,y,t) sea 0. En notación: $M_t$[h(x,y,t)=0]. Dicha t es la aplicación de la función f a los parámetros x e y.

Podemos pensarlo como si el operador de minimización "probara iterativamente" con todos los valores desde 0 en adelante. Si en algún momento termina, el t con el cual terminó es el resultado. Si nunca termina, la función es parcial, y no está definida para los x e y que provocaron que no termine.

# Ejercicio 3:

3. Defina las siguientes funciones como $FR$:

(a) $f(x, y) = x - y$

(b) $g(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$

(c) $h(x) = \sqrt{x}$

Para obtener la función h, podemos justamente arrancar asumiendo lo siguiente:

h(x,y,t) = 0 ⇔ t = f(x,y)

Por ende, podemos operar "pseudo-algebraicamente" para obtener la expresión de la función h.

t = x - y $\Leftrightarrow^{\text{(por algebra)}}$ x = t + y $\Leftrightarrow^{\text{(re-escribiendo como FRP)}}$ E(x, SUM(t, y))

Pero la E cuando son iguales retorna 1, y cuando son distintos retorna 0. El operador de minimización me va a encontrar el menor t tal que la función retorna 0, así que le agrego un distinguidor de 0.

Así logramos encontrar nuestra función h.

# Ejercicio 3:

3. Defina las siguientes funciones como $FR$:

(a) $f(x, y) = x - y$

(b) $g(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$

(c) $h(x) = \sqrt{x}$

Podemos probar nuestra h(x,y,t) ~ $D_0$(E(x, SUM(t, y))) en un par de casos:

Sean x = 3 e y = 1. Sabemos que f(3,1) = 2, y el mínimo t tal que $D_0$(E(3, SUM(t, 1))) = 0 es también 2.

Sean x = 4 e y = 6. Sabemos que f(4,6) no está definida. Y si probamos con cualquier t >= 0, no vamos a encontrar ninguno tal que $D_0$(E(4, SUM(t, 6))) = 0.

# Ejercicio 3:

3. Defina las siguientes funciones como $FR$:

   (a) $f(x, y) = x - y$

   (b) $g(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$

   (c) $h(x) = \sqrt{x}$

Para los otros 2 incisos podemos proceder de la misma manera. Siempre recordando que estamos en el dominio de $N_0$. También recordando que las funciones pueden ser parciales o totales (por ejemplo, cuál de las funciones g y h es parcial, y cuál es total?).

# Ejercicio 4:

4. Sea la función $div\,(x, y) = \lfloor x/y \rfloor$. Se pide:

   (a) Exprese la función $div\,(x, y)$ como $FR$ suponiendo que $0/0$ no está definido.

   (b) Exprese la función $div\,(x, y)$ como $FR$ suponiendo que $0/0 = 0$.

   (c) Defina la función $mod\,(x, y)$ (que da el resto de la división entera entre $x$ e $y$) como $FR$ utilizando la definición de $div\,(x, y)$.

Acá tenemos que recordar que la división por 0 no está definida. Pero dependiendo desde dónde partimos 0/0 podría no estar definido (es “algo” dividido por 0), o podría ser 0 (es 0 dividido por “algo”). Por eso pedimos definir ambas funciones.

En definitiva, div es una función parcial, pero solamente no va a estar definida en todos los casos en que el parámetro y sea 0 (o casi todos si miramos inciso b). Si y != 0, div está definida, y devuelve el piso de la división, usualmente llamada *división entera*.

# Ejercicio 5:

5. Considere la función:

$$menos\,(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } \; y = 0 \\ pd(menos(x, pd\,(y))) & \text{si } \; y \geq 1 \end{cases}$$

(a) Calcule $f\,(4)$, donde $f$ se define como $f\,(x) = \mu_y(menos(x, pd\,(y)))$.

(b) ¿Es parcial o total la función definida en el ítem anterior?

Acá ya tenemos dada la función de aridad n+1 (que usualmente llamamos h, y acá es la función *menos*), y esa función se usa para calcular una función de aridad n que es la f. La podemos calcular (en lugar del mínimo t, buscamos el mínimo y, pero es indistinto). Y en base al cálculo que hacemos, intentamos detectar si es parcial o total.

# Ejercicio 6:

6. Si $g(x, y)$ es una $FRP$ y $m \in \mathbb{Z}$, defina una $FR$ que halle el menor valor de $y$ donde $g$ vale $m$.

Acá tenemos que ver cómo combinar los datos que nos dan, para construir una función que le podamos pasar al operador de minimización.

Recordemos que el operador M compara la función h con 0, no con m. Y recordemos que es indistinto usar m y usar t. Por ende, debemos encontrar una función h que retorne 0 en el mismo caso en que la función g retorna m.

# Ejercicio 7:

7. Escriba la siguiente función como $FR$: $g(y,x) = \sqrt[y]{x^2+x+6}$. ¿Podríamos definir esta función como $FRP$? Justifique.

La metodología para encontrar la función h(y,x,t) es similar a la utilizada en el ejercicio 3, empezar con una igualdad y operar "pseudo-algebraicamente".

Una vez que la encontramos, la podemos probar.

Por otra parte, para la justificación hay que revisar un poco los conceptos de teoría, y no debería presentar mayores inconvenientes.

# Ejercicio 8:

8. Muestre que la siguiente función es $FR$:

$$\begin{array}{rccc} r: & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \rightarrow & r(n) = \lfloor log_2((n+3)^3) \rfloor \end{array}$$

# Ejercicio 9:

9. Sea $f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ es par} \\ 3n+1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$. Defina una función recursiva $F(x)$ que devuelva la mínima cantidad de aplicaciones sucesivas de $f$ que son necesarias para llegar a 1. Por ejemplo:

- $f(f(f(8))) = 1$, por lo que $F(8) = 3$
- $f(f(f(f(f(f(f(f(f(13))))))))) = 1$, por lo que $F(13) = 9$

*Ayuda:* no intente resolver analíticamente cuál es el mínimo número de veces que se necesita aplicar $f$ para un argumento $n$ cualquiera con la intención de luego implementar dicha solución analítica. En cambio, proponga directamente una función que haga el trabajo de encontrar dicho número por usted.