

Examen final - 14/12/2022

⌚ Hora de entrega: 10h30.

Apellido y nombre:

Legajo:

DNI:

Comisión:

Carrera:

1. Calcule el valor de la integral

$$\int_1^e \frac{1}{x} \cos\left(\frac{\pi \ln x}{2}\right) dx.$$

2. Calcule los siguientes límites, justificando detalladamente.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1) \tan x}{x}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x^2+x-2}.$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2 \cos x}{x^2 + 1}.$

3. Pruebe que la ecuación polinómica

$$x^{101} + x^{51} + x + 1 = 0$$

tiene una única solución real.

4. Una lámina cuadrada se contrae de manera tal que su perímetro disminuye a razón de 2 cm/min. Determine la razón de cambio del área de la lámina cuando el perímetro es de 10 cm.

Complemento para alumnos libres

5. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{ax + b}, & \text{si } x > 0 \\ \arctan(x + \cos(x)), & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

a) Para $x \neq 0$, decidir si f es derivable y si lo es, halle la ley de f' .

b) Halle todos los $a, b \in \mathbb{R}$ tales que f es derivable en $x = 0$. Para los valores a, b hallados:

c) Halle la recta tangente en $x = 0$.

d) Determine las asíntotas de f .

6. Determine si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

a) Si $f(x) = -2x^2 \sin(x^2) e^{x^2}$, entonces $\int f(x) = \cos(x^2) e^{x^2} + c$.

b) Sea f una función continua en $[0, 1]$ y derivable en $(0, 1)$. Si $f(0) = 0$ y $f'(x) \leq 1$, para todo $x \in (0, 1)$, entonces $f(x) \leq x$, para todo $x \in [0, 1]$.

c) Si f y g son funciones discontinuas en a , entonces $f + g$ es discontinua en a .

d) Sea f una función derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = c \in \mathbb{R}$, entonces f es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = c$.