Práctica 3:
Funciones Recursivas Primitivas
Parte II- CONJUNTOS

Cátedra: Lenguajes Formales y Computabilidad
Aulas Virtuales - Pandemia Covid19

Docentes en Práctica

- Alejandro Hernandez
- Natalia Colussi
- Valeria Perez Moguetta

¿Qué vamos a ver en esta parte?

Un conjunto es Conjunto Recursivos Primitivo (CRP) sii su función característica es FRP.

Sabemos que la función característica de un conjunto, es aquella que devuelve 1 para todos los elementos que pertenecen, y devuelve 0 para todos los elementos que NO pertenecen al conjunto.

Ejercicio 7:

7. Mostrar que todo subconjunto unitario de $\mathbb{N}$ es un CRP.

Básicamente, tenemos que mostrar que la función característica de un conjunto unitario arbitrario es FRP.

Supongamos que estamos hablando del conjunto {n}, que contiene un único elemento $n \in N$. Su función característica es una función que tiene que devolver 1 para n, y 0 para cualquier otro $x \in N$.

Debemos escribir una FRP f_n: N -> N, $f_n(n) = 1$, y $f_n(x) = 0$ para todo x != n.

Dicha función, puede simplemente comparar el argumento con n, el cual lo obtiene luego de n aplicaciones de la FRP sucesor.

Ejercicio 8:

8. Probar que si $A, B \subseteq \mathbb{N}$ son CRP, entonces $\neg A$, $A \cup B$ y $A \cap B$ son CRP.

Sabemos que A y B son CRP. Entonces, sus funciones características f_A y f_B son FRP.

Ahora bien, tenemos que mostrar que los otros conjuntos son CRP, con lo cual basta con mostrar que sus funciones características son FRP. Pero ya sabemos que f_A y f_B son FRP, con lo cual tenemos que escribir las funciones características de los nuevos conjuntos, como combinación de f_A, f_B, las funciones base, y operadores de recursión (R) y composición (Φ).

Así, por ejemplo, $f_{\neg A}$ podría escribirse como la distinguidora del 0 de f_A

Es decir: $f_{\neg A} = \Phi(D_0^{(1)}, f_A^{(1)})$

Ejercicio 9:

9. Mostrar que todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ son CRP.

Usando los resultados de los ejercicios 7 y 8, podemos lograr esto. En efecto, todo subconjunto finito de N, es la unión finita de conjuntos unitarios sobre N.

Ejercicio 10:

10. Repetir los tres ejercicios anteriores considerando ahora subconjuntos de $\mathbb{N}^k$ con $k \in \mathbb{N}$.

Esto simplemente modifica la aridad de nuestras funciones, es decir la cantidad de argumentos, que ahora pasan a ser k en lugar de 1.

La complejidad de los ejercicios es similar, pero tener en cuenta las aridades sobre todo cuando se habla de operadores de recursión (R) y de composición (Φ), ya que la construcción de los mismos, depende fuertemente de las aridades de sus componentes.

Ejercicio 11:

11. Mostrar que el conjunto de los números pares es un CRP.

Ahora estamos ante un conjunto infinito (por supuesto numerable, aunque esto no es el tema específico de esta unidad, es importante ya aprovechar dichos conceptos aprendidos para saber distinguir). Es decir, no podemos hacer unión finita. Necesitamos construir una función característica específica para el conjunto.

Nuestra función f_P, debe devolver 1 para los números pares, y 0 para los impares. Si empezamos probando, tenemos que $f_P(0) = 1$, $f_P(1) = 0$, $f_P(2) = 1$, $f_P(3) = 0$, $f_P(4) = 1$, etc.

Así, nos podemos dar cuenta que, conociendo $f_P(n-1)$, podemos obtener $f_P(n)$, simplemente cambiando 0 por 1 (o viceversa), que es lo mismo que hacer la resta $1 - f_P(n-1)$.

Osea, $f_P(n) = 1 - f_P(n-1)$. Ahora el ejercicio es tratar de escribir dicha función como FRP. No olvidemos que podemos usar justamente los operadores de recursión (R) y composición (Φ). Cúal creen que es útil en este caso?

Ejercicio 12:

12. Mostrar que el conjunto de los múltiplos de 3 es un CRP.

    Sugerencia: Probar que la función $r_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que toma un natural y devuelve el resto de la división entera por 3 es una FRP, y usarla para escribir la función característica de los múltiplos de 3.

Tratemos de valernos de la sugerencia, y para eso primero pensar en cómo se comporta la función r3. Probemos: r3(0) = 0, r3(1) = 1, r3(2) = 2, r3(3) = 0, r3(4) = 1, r3(5) = 2, r3(6) = 0, r3(7) = 1, etc.

Es decir, tiene un patrón similar a la de los pares, pero con ciclos de 3 valores.

El conjunto de los múltiplos de 3 (llamémoslo M3), es el conjunto para el cual la función r3 devuelve 0. Por ende, debería ser trivial cómo escribir la función característica f_{M3} como FRP en función de r3.

Ahora, nos queda el paso previo de mostrar que la función r3 es FRP. Esto no es simplemente mirar el valor anterior (como hicimos con la función f_P del ejercicio anterior), ya que el valor anterior pueden ser 3 posibles valores en lugar de 2. Entonces tenemos que distinguirlos, y para lograr eso, con alguna operación de comparación, debemos asegurarnos que estamos ante un valor 0, 1 o 2, y hacer las cuentas necesarias para, en el siguiente valor, obtener 1, 2 o 0 resp.