Simulacro del Parcial 1 - 10/04/2023

Nombre: Legajo: Carrera:

1. Sea $\mathcal{S}(2)$ el conjunto de matrices simétricas de tamaño 2×2 a coeficientes reales, esto es

$$\mathcal{S}(2) = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \; A^t = A \right\}.$$

   (a) Pruebe que $\mathcal{S}(2)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con la suma y el producto por escalar usuales de matrices.

   (b) Pruebe que el conjunto $\mathfrak{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathcal{S}(2)$. Determine las coordenadas de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

   en la base $\mathfrak{B}$.

   (c) Determine una base $\mathcal{C}$ de $\mathcal{S}(2)$ tal que $[A]_{\mathcal{C}} = (1, 1, 1)$. Justifique su respuesta.

2. Sea $T : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por

$$T(a + bx) = (a + 2b, 3a + 7b).$$

   (a) Pruebe que T es lineal y calcule $\ker(T)$ y $\operatorname{im}(T)$. Determine la dimensión de cada uno de estos subespacios.

   (b) Determine si T es un isomorfismo. Justifique su respuesta.

   (c) Calcule la matriz asociada a T con respecto a las bases $\mathfrak{B}_1 = \{1 + x, 3 - 2x\}$ y $\mathfrak{B}_2 = \{(2, 5), (1, 5)\}$.