Conjuntos inductivos.
Principio de Inducción Primitiva.

Pablo Verdes

LCC

17 de marzo de 2020

Conjuntos inductivos

- **Ejemplo clásico:** números naturales ($\mathbb{N}$)
  1. $1 \in \mathbb{N}$
  2. si $n \in \mathbb{N}$ entonces $n + 1 \in \mathbb{N}$

     (Listo? No, obs. que podría ser $\mathbb{N} = \{1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, \ldots\}$)
  3. los elementos obtenidos aplicando las reglas anteriores son los únicos elementos de $\mathbb{N}$

     (entonces ahora sí $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$)

- Números pares (P)
  1. $0 \in P$
  2. si $n \in P$ entonces $n + 2 \in P$
  3. los elementos obtenidos aplicando las reglas anteriores son los únicos elementos de P

Conjuntos inductivos

- En términos generales, una definición inductiva de un conjunto S comprende base, inducción y clausura:
  - Base: conjunto de uno o más elementos 'iniciales' de S.
  - Inducción: una o más reglas para construir 'nuevos' elementos de S a partir de 'viejos' elementos de S.
  - Clausura: idea de que S consiste *exactamente* de los elementos obtenidos a partir de los básicos, aplicando las reglas de inducción.
- Matemáticamente, la manera más elegante de clausurar es hacer que S sea el **mínimo** conjunto que satisface las condiciones de base e inducción: si T también las satisface, entonces $S \subseteq T$.
- Alternativamente: S es la intersección de todos los conjuntos que satisfacen las condiciones de base e inducción.

Conjuntos inductivos

En Ciencias de la Computación, los *conjuntos definidos inductivamente* (también conocidos como *definidos recursivamente*) se usan típicamente para definir:

- lenguajes de programación (via gramáticas),
- fórmulas lógicas bien formadas (o sintácticamente correctas),
- estructuras de datos dinámicas (árboles binarios, listas),
- fractales en computación gráfica,
- lenguajes en programación funcional.

Conjuntos inductivos: ejemplos

- Sea S el mínimo conjunto de números naturales tal que:
  - (Base) $3 \in S$
  - (Inducción) si $x, y \in S$ entonces $x + y \in S$

- Sea Σ^* el mínimo conjunto de cadenas sobre el alfabeto Σ tal que:
  - (Base) $\lambda \in \Sigma^*$ (λ es la cadena vacía)
  - (Inducción) si $w \in \Sigma^*$ y $x \in \Sigma$ entonces $wx \in \Sigma^*$

- Sea L_1 el mínimo conj. de cadenas sobre el alfabeto $\{0, 1\}$ tal que:
  - (Base) $\lambda \in L_1$
  - (Inducción) si $w \in L_1$ entonces $0w1 \in L_1$

- Sea L_2 el mínimo conj. de cadenas sobre el alfabeto $\{0, 1\}$ tal que:
  - (Base) si $x \in \{\lambda, 0, 1\}$ entonces $x \in L_2$
  - (Inducción) si $w \in L_2$ y $x \in \{0, 1\}$ entonces $xwx \in L_2$

Conjuntos inductivos: ejemplos

- Un conjunto de expresiones aritméticas bien formadas de 3 variables:

  Sea F el mínimo conjunto de cadenas sobre el alfabeto $\{x, y, z, 0, 1, 2, \ldots 9, +, -, \times, /, (,)\}$ tal que:

  - (Base) si $f \in \{x, y, z, 0, 1, 2, \ldots 9\}$ entonces $f \in F$
  - (Inducción) si $f, g \in F$ entonces $(f + g), (f - g), (f \times g), (f/g) \in F$

  Ejemplos: $2, x, (x + 2), (x/y), (3/0), (x \times (y + z)), ((x \times x) \times x)$

- Árboles binarios:

  Definimos al conjunto B de árboles binarios sobre un alfabeto Σ como el mínimo conjunto tal que:

  - (Base) $\langle\rangle \in B$
  - (Inducción) si $L, R \in B$ y $x \in \Sigma$ entonces $\langle L, x, R\rangle \in B$

  Ejemplos: $\langle\langle\rangle, 1, \langle\rangle\rangle$, $\langle\langle\langle\rangle, 1, \langle\rangle\rangle, r, \langle\langle\rangle, 2, \langle\rangle\rangle\rangle$

Conjuntos inductivos: definición

Sean:

- U un conjunto no vacío, que llamaremos **universo**,
- B un subconjunto no vacío de U, que llamaremos **base**, y
- K un conjunto no vacío de funciones, que llamaremos **constructor**. Cada función $f \in K$ tiene cierta aridad $ar(f) = n \in \mathbb{N}$. Es decir, $f : U^n \to U$.

Diremos que un conjunto A está **definido inductivamente** por B, K, U si es el mínimo conjunto que satisface:

- $B \subseteq A$
- si $a_1, \ldots a_n \in A$ y $f(a_1, \ldots a_n) = a$ entonces $a \in A$, donde $f \in K$ con $ar(f) = n$.

Diremos también que el conjunto A fue **generado** por la base B y las **reglas de inducción** $f \in K$.

Conjuntos inductivos

- **Definición:** Secuencia de Formación

  Sean U, B, K como en la definición anterior. Una secuencia $a_1, \ldots a_m$ de elementos de U es una **secuencia de formación** para a_m si $\forall i = 1, \ldots m$ se tiene que:

  - $a_i \in B$, o bien
  - $\exists f \in K, ar(f) = n$, y $0 < i_1, \ldots i_n < i$ tales que $f(a_{i_1}, \ldots a_{i_n}) = a_i$.

- El conjunto A definido inductivamente por B, K, U en la slide anterior contiene todos los elementos de U que poseen una secuencia de formación.

- Diremos que B y K definen una gramática para las cadenas sintácticamente correctas del lenguaje A.

Conjuntos inductivos: pertenencia

- Para probar que un elemento **pertenece** a un conjunto inductivo debemos dar su **secuencia de formación**.

- Ejemplo:

  Habíamos definido L_2 como el mínimo conjunto de cadenas sobre el alfabeto $\{0, 1\}$ tal que:

  - (Base) si $x \in \{\lambda, 0, 1\}$ entonces $x \in L_2$
  - (Inducción) si $w \in L_2$ y $x \in \{0, 1\}$ entonces $xwx \in L_2$

  $110111011 \in L_2$ pues posee la siguiente secuencia de formación:

  $$1 \Rightarrow 111 \Rightarrow 01110 \Rightarrow 1011101 \Rightarrow 110111011$$

  ¿$110111010 \in L_2$?

Conjuntos inductivos: pertenencia

- Para probar que un elemento **no pertenece** a un conjunto inductivo, podemos:
  - mostrar que no existe una secuencia de formación para el elemento en cuestión, o
  - mostrar que si se quita al elemento del conjunto se siguen cumpliendo las cláusulas, o
  - probar cierta propiedad del conjunto que sirva para excluir al elemento.
- Esta última será la estrategia preferida. Por ejemplo, para probar que $110111010 \notin L_2$, podríamos probar que todas las cadenas de L_2 comienzan y terminan con el mismo caracter.
- Para demostrar que los elementos de un conjunto inductivo satisfacen cierta propiedad, conviene usar el Principio de Inducción Primitiva que veremos a continuación.

Principio de Inducción Primitiva

- **Idea intuitiva:** sabemos exactamente cómo se construyen los elementos de un conjunto inductivo, entonces podemos usar esta información para demostrar propiedades sobre ellos.

- **Ejemplo:** Habíamos definido a S como el mínimo conjunto de números naturales tal que:
  - (Base) $3 \in S$
  - (Inducción) si $x, y \in S$ entonces $x + y \in S$

  Para probar que todos los elementos de S son múltiplos de 3, debemos probar que:
  - (Base) 3 es múltiplo de 3
  - (Inducción) si x, y son múltiplos de 3, entonces $x + y$ es múltiplo de 3

  Más generalmente, para probar que todos los elementos de S cumplen cierta propiedad P, debemos probar que:
  - (Base) $P(3)$ vale
  - (Inducción) si $P(x), P(y)$ entonces $P(x + y)$

Principio de Inducción Primitiva

- Podemos entonces enunciar el:

  Principio de Inducción Primitiva para S

  Sea P una propiedad que verifica:

  - $P(3)$ se cumple
  - si $P(x), P(y)$ se cumplen, entonces $P(x + y)$ se cumple

  Entonces $P(x)$ se cumple para todo $x \in S$.

- Principio de Inducción Primitiva para L_1

  Sea P una propiedad que verifica:

  - $P(\lambda)$ se cumple
  - si $P(w)$ se cumple, entonces $P(0w1)$ se cumple

  Entonces $P(x)$ se cumple para todo $x \in L_1$.

Principio de Inducción Primitiva

- Árboles binarios:

  Habíamos definido al conjunto B de árboles binarios sobre un alfabeto Σ como el mínimo conjunto tal que:

  - (Base) $\langle\rangle \in B$
  - (Inducción) si $L, R \in B$ y $x \in \Sigma$ entonces $\langle L, x, R\rangle \in B$

  <u>Principio de Inducción Primitiva para B</u>

  Sean $L, R \in B$ y $x \in \Sigma$. Sea P una propiedad que verifica:

  - $P(\langle\rangle)$ se cumple
  - si $P(L)$ y $P(R)$ valen, entonces $P(\langle L, x, R\rangle)$ vale

  Entonces $P(x)$ se cumple para todo $x \in B$.

Principio de Inducción Primitiva

- En la **inducción primitiva o estructural**, la estructura de la demostración de que cada elemento de un conjunto inductivo S cumple con cierta propiedad P es análoga a la estructura de la definición inductiva de S.
- Más precisamente, dicha demostración consta de dos partes:
  - Base: probar que cada elemento del conjunto B cumple la propiedad P.
  - Inducción: suponiendo que todos los argumentos de una función constructora cumplen la propiedad P, probar que el elemento construido también cumple la propiedad P.

Principio de Inducción Primitiva

Teorema: Principio de Inducción Primitiva (PIP)

Sea $A \subseteq U$ definido inductivamente por la base B y el constructor K. Sea P una propiedad que verifica:

1. (Base) Vale $P(x)$ $\forall x \in B$.
2. (Inducción) Para cada $f \in K$, si $f(a_1, a_2, \ldots, a_{ar(f)}) = a$ y vale P para $a_1, a_2, \ldots, a_{ar(f)} \in A$, entonces vale $P(a)$.

Entonces vale $P(x)$ $\forall x \in A$.

D/ En general, dado un elemento cualquiera $x \in A$, se tendrá que o bien vale $P(x)$ o no vale. Sea C el conjunto de todos los elementos de A que satisfacen la propiedad P:

$$C = \{a \in A \mid P(a)\}.$$

Queremos probar que $C = A$.

Principio de Inducción Primitiva

- $C \subseteq A$:

  Trivial por definición del conjunto $C = \{a \in A \mid P(a)\}$.

- $A \subseteq C$:

  Veamos que C satisface las cláusulas de la definición inductiva de A:

  - (B) Queremos probar que $B \subseteq C$. Sea $x \in B$. Por propiedad (1) de P, vale $P(x)$. Como $B \subseteq A$, tenemos que $x \in A$ y vale $P(x)$. Entonces, por definición de C, $x \in C$. Luego $B \subseteq C$.
  - (I) Sea $f \in K$ con $ar(f) = n$, $a_1, \ldots a_n \in C$ y $f(a_1, \ldots a_n) = a$.
    Queremos probar que $a \in C$.
    Por definición de C, valen $P(a_1), \ldots P(a_n)$.
    Por propiedad (2) de P, vale $P(a)$. Además, $a \in A$ (por qué?)
    Entonces, por definición de C, $a \in C$.

  Dado que A es el mínimo conjunto que cumple las cláusulas de su definición inductiva, $A \subseteq C$.

Por lo tanto $A = C$. $\square$

Principio de Inducción Primitiva

Elementos esenciales de una demostración por inducción estructural:

- Identificar claramente la propiedad P que se pretende demostrar por inducción estructural. Debe tratarse de una afirmación sobre todos los elementos de un conjunto inductivo.
- Etiquetar claramente los casos base e inductivo como tales.
- Al discutir el caso inductivo propiamente dicho, enunciar claramente la Hipótesis de Inducción (H.I.) y lo que se pretende demostrar.
- En la demostración, indicar explícitamente dónde se utiliza la H.I.. Si no la utiliza en ninguna parte, es probable que la demostración sea incorrecta.

Principio de Inducción Primitiva

Ejemplo:

- Habíamos definido a S como el mínimo conj. de núm. nat. tal que:
  - (Base) $3 \in S$
  - (Inducción) si $x \in S$ e $y \in S$ entonces $x + y \in S$

- Principio de Inducción Primitiva para S

  Sea P una propiedad que verifica:
  - $P(3)$ se cumple.
  - Si $P(x), P(y)$ se cumplen, entonces $P(x + y)$ se cumple.

  Entonces $P(x)$ se cumple para todo $x \in S$.

- Veamos que todos los elementos de S son múltiplos de 3 (pizarrón).