Combinatoria

Comisiones 1 y 3

Versión del 21/05/2013

Resumen de definiciones y teoremas con ejemplos

- Una **permutación** de un conjunto de objetos cualesquiera es una ordenación o disposición de dichos objetos (ya sea en una lista o fila o columna o ...)

  Ejemplo: Todas las permutaciones del conjunto $\{A, B, C\}$ son:

  $$ABC,\ ACB,\ BAC,\ BCA,\ CAB,\ CBA$$

  Teorema: La cantidad de permutaciones de n objetos distintos es:

  $$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots\ \cdot 2 \cdot 1 \qquad \text{(n factorial)}$$

- Dados n objetos y un natural k tal que $0 \leq k \leq n$, una **permutación tomada de a** k de dichos objetos es cualquier ordenación o disposición de k objetos tomados de los n dados.

  Ejemplo: Algunas de las permutaciones del conjunto $\{A, B, C, D, E\}$ tomadas de a 3 (además de todas las del ejemplo anterior) son (en total hay 60):

  $$ABD,\ ADB,\ BAD,\ BDA,\ DAB,\ DBA,\ ACD,\ ADC,\ ADE, ...$$

  Teorema: La cantidad de permutaciones de n objetos distintos tomados de a k está dada por:

  $$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots\ \cdot (n-k+1) \qquad \text{(hay k factores)}$$

- Decimos que un **alfabeto** es un conjunto de objetos arbitrarios a los que llamamos **letras**. Y llamamos **palabra de longitud** k a cualquier sucesión de k letras.

  Atención!!! En las palabras las letras pueden repetirse, mientras que en las permutaciones los objetos no se repiten.

  Ejemplo: Si tomamos como alfabeto el conjunto $\{4, 8, a, f, z, *\}$ nuestras "letras" son $4, 8, a, f, z, *$ y algunas "palabras" de longitud 5 podrían ser (en total hay 7776):

  $$4aa * f,\ 48afz,\ 44 * **,\ afafa,\ 48848,\ * * * * *,\ 4 * 8fa$$

  Teorema: La cantidad de palabras posibles de longitud k con un alfabeto de n letras es n^k.

- **Problema:** ¿Cuántas palabras se pueden formar permutando las letras de la palabra CASACA?

  Atención!! Ahora hay 6 objetos a permutar que están particionados en 3 **tipos**: tipo **A**, tipo **C** y tipo **S**. En efecto, hay 3 objetos de tipo **A** (las 3 A's), 2 objetos de tipo **C** (las 2 C's) y un objeto de tipo **S** (la única S).

  Teorema: Sean n objetos particionados en h tipos de modo tal que objetos del mismo tipo se consideran indistinguibles. Supongamos que hay n_1 objetos de tipo T_1, n_2 de tipo T_2, . . . , n_h de tipo T_h con $n_1 + n_2 + \cdots + n_h = n$, entonces la cantidad de permutaciones de esos objetos está dada por:

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2!\, \cdots\, n_h!}$$

- Hasta aquí el orden de los objetos de las permutaciones o de las letras de las palabras era relevante (ABC y BAC, por ejemplo eran consideradas distintas). Ahora no nos interesa el orden, sino qué elementos aparecen en nuestra lista. Las disposiciones ABC y BCA serán consideradas "iguales", mientras que ABC y ABD serán consideradas distintas. A tales diposiciones se las llama **combinaciones**.

  Ejemplo: Todas las combinaciones del conjunto $\{A, B, C, D, E\}$ tomadas de a 3 están dadas por:

$$ABC,\ ABD,\ ABE,\ ACD,\ ACE,\ ADE,\ BCD,\ BCE,\ BDE,\ CDE$$

  Observación: Las combinaciones de un conjunto de n elementos tomadas de a k, se corresponden exactamente con los subconjuntos de k elementos del conjunto dado.

  Teorema: La cantidad de subconjuntos de k elementos de un conjunto de n elementos está dada por el **número combinatorio**:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Algunas (de las muchas) propiedades de los números combinatorios son:

  a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ b) $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

  c) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ d) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

  e) $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i}\, y^i$ f) $2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$

- Un **multiconjunto** es un conjunto que admite elementos repetidos. De modo que dos multiconjuntos son iguales cuando, además de tener los mismos elementos, cada uno de ellos aparece la misma cantidad de veces. Para diferenciarlos de los conjuntos, notaremos los multiconjuntos con llaves dobles.

  Ejemplo: Vale que $\{\{a, a, b, b, b, c\}\} = \{\{a, b, a, b, a, b, c\}\} = \{\{c, b, b, b, a, a\}\}$.

  Y decimos que $\{\{a, a, b, b, b, c\}\}$ es un multiconjunto de 6 (SEIS!!) elementos.

  Por otra parte, $\{\{a, a, b, b, b, c\}\} \neq \{\{b, a, b, a, b, a, b, c\}\}$.

  Y, obviamente $\{\{c, b, b, b, a, a\}\} \neq \{\{a, b, c, d\}\}$.

  Teorema: La cantidad de multiconjuntos de k elementos que se pueden construir a partir de un conjunto de n elementos (distintos) es:

  $$\binom{n+k-1}{k}$$

  Además este número coincide con las distintas maneras de ubicar k objetos indistinguibles en n cajas distintas.

Resumimos todo lo anterior en las siguientes tablas:

Permutaciones	n objetos distintos	$n!$
	n objetos distintos tomados de a k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Palabras	n_i letras de tipo T_i, con $\sum_{i=1}^{h} n_i = n$	$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_h!}$
	Palabras de longitud k con un alfabeto de n letras	n^k
Conjuntos	Subconjuntos de k elementos de un conjunto de n elementos	$\binom{n}{k}$
	Multiconjuntos de k elementos tomados de un conjunto de n elementos	$\binom{n+k-1}{k}$

En cuanto a los distintos tipos de elecciones dependiendo de

1. si se consideran repeticiones o no
2. si se tiene en cuenta el orden o no

la tabla siguiente resume las distintas situaciones.

Elegir k de n	importa el orden	no importa el orden
Sin repeticiones	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
Con repeticiones	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

Ejercicios

1. Un turista debe trasladarse de una ciudad a otra y para ello puede optar por viajar en avión, ómnibus o tren y en cada uno de esos medios puede elegir viajar en primera clase o en clase turista:

   a) ¿De cuántas maneras distintas puede realizar el viaje?

   b) Si el turista decide visitar 5 ciudades en un orden ya establecido y para el traslado de una ciudad a otra, a partir de la primera ciudad, tiene en todos los casos las mismas opciones que en a. ¿de cuántas maneras puede realizar el itinerario?

   c) Como el ítem anterior, pero suponiendo que en ómnibus hay sólo una clase.

2. ¿Cuántos números de tres cifras distintas puede formarse con los dígitos impares?

3. ¿Cuántos números capicúas de cinco cifras y que no comienzan con cero hay?

4. La cerradura de una caja de caudales se compone de tres anillos, cada uno de los cuales está marcado con 20 letras distintas. ¿Cuántos intentos para abrirla resultan infructuosos?

5. Para confeccionar un examen, se dispone de 3 problemas de geometría, 4 de combinatoria y 2 de álgebra. De cuántas maneras pueden ordenarse los problemas si los que corresponden a un mismo tema deben aparecer en forma consecutiva?

6. ¿De cuántas maneras pueden sentarse 6 niños y 4 niñas en el cine en 10 asientos consecutivos, si:

   a) Todas las niñas desean sentarse juntas y lo mismo sucede con los niños.

   b) Las niñas desean estar juntas y a los varones les da igual.

   c) Daniela y Pedro no quieren estar juntos

7. Dadas las cifras; 0, 1, 2, 3, 4 y 5 y descartando los números que comiencen con cero:

   a) ¿cuántos números hay de 4 cifras distintas?

   b) ¿cuántos de 4 cifras distintas son divisibles por 5?

   c) ¿cuántos de 4 cifras distintas son menores que 3000?

8. Si se consideran todos los números de 5 cifras que se obtienen permutando los dígitos de 17283:

   a) ¿cuántos de ellos son impares ?

   b) de menor a mayor, ¿qué lugar ocupa el 23178?

   c) de mayor a menor, ¿qué lugar ocupa el 83712?

9. Tres parejas interpretan una danza que consiste en formar una ronda tomados de la mano. Calcular de cuántas maneras distintas podrían hacerlo si:

   a) no se fijan condiciones

   b) los integrantes de cada pareja desean estar juntos

   c) dos mujeres determinadas no deben estar juntas *d*) las personas de uno y otro sexo se colocan en forma alternada

10. ¿Cuántas banderas diferentes de 3 bandas horizontales de distinto color puede formarse con verde, rosa, azul, blanco, amarillo y negro?

11. ¿Cuántos números de 5 cifras distintas pueden formarse con los dígitos 1 a 9 si:

    a) los números deben ser impares?

    b) deben tener las dos primeras cifras pares?

12. Con los dígitos 1, 2, 3, 4, ... ,9, ¿cuántos números de tres cifras distintas se puede formar con la condición de que la suma de sus cifras sea par?

13. En una fiesta se encuentran 10 hombres y 8 mujeres. ¿De cuantas formas pueden integrarse en parejas para bailar una determinada pieza?

14. Para integrar una comisión, se deben elegir 4 personas entre un grupo formado por 8 hombres y 5 mujeres.

    a) ¿De cuántas maneras puede hacerse la elección?

    b) ¿De cuántas si se impone la condición de que por lo menos 2 de los miembros deben ser mujeres?

15. ¿Cuántos grupos de 6 hombres pueden formarse con 4 oficiales y 8 soldados de modo que:

    a) en cada grupo haya exactamente un oficial.

    b) en cada grupo haya por lo menos un oficial.

16. ¿Cuántos números de 5 dígitos se pueden formar reordenando las cifras del número 73.531?

17. ¿Cuántas palabras de 9 letras se pueden formar con las letras de la palabra lavarropa?

18. ¿Cuántos números distintos de 5 cifras y mayores que 10^4 se pueden formar con las cifras 2, 7, y 0, si el 2 y el 7 se repiten 2 veces

19. ¿Cuántos números distintos de 3 cifras pueden formarse con los dígitos del 1 al 8, si estos pueden repetirse?

20. Si se consideran las distintas distribuciones de 15 bolillas en 8 casilleros numerados del 1 al 8,

    a) en cuántas de dichas distribuciones el casillero 4 contiene exactamente 5 bolillas, si las bolillas son distintas?

    b) Misma pregunta del item anterior, pero con bolillas indistinguibles

21. ¿Cuántas n-uplas formadas con las cifras 1, 2, 3 y 4 contienen exactamente k veces el número 1?

22. En una estación de subte hay 7 molinetes numerados del 1 al 7. Sabemos que 28 personas deben entrar al subte, y no nos importa el orden en que lo hagan.

    a) Si nos interesa quién pasa por cada molinete,

1) ¿De cuántas formas pueden hacerlo?
2) ¿De cuántas si por el molinete N^o 1 deben pasar exactamente 3 personas?

b) Si sólo nos interesa cuántas personas pasan por cada molinete, cuáles serían las respuestas a las preguntas planteadas en *a*)?

23. El ascensor de un edificio lleva 10 pasajeros y puede detenerse en cualquiera de los 12 pisos del mismo.

a) Si se hace distinción de personas:

1) ¿En cuántas formas pueden descender los 10 pasajeros?
2) ¿En cuántas si en el piso 10 descienden exactamente 3 personas?
3) ¿En cuántas si en cada piso desciende a lo sumo un pasajero?

b) Si no se hiciera distinción de personas ¿cuáles serían las respuestas a las preguntas planteadas en *a*)?

24. Repaso de variantes

a) Si tiro un dado tres veces, ¿cuántos resultados distintos se pueden obtener?

b) Si cambio el dado por un bolillero con números del 1 al 6, y hago tres extracciones sin devolver los números extraidos al bolillero, ¿cuántos resultados distintos se pueden obtener?

c) Volviendo a las tres tiradas de dado, ¿cuántos resultados distintos se pueden obtener si interesa saber solamente cuántas veces apareció qué número, y no el orden de aparición?

d) Volviendo al bolillero, ¿cuántos resultados distintos se pueden obtener si interesa saber solamente qué números salieron, y no nos interesa en qué orden?

25. Calcular la cantidad de números distintos de 5 cifras que

a) empiezan y terminan con 1.

b) empiezan con 1, terminan con 1, 2 ó 3.

c) empiezan o terminan con 1.

d) empiezan con 1 y tienen exactamente un 2.

e) empiezan con 1 y tienen al menos un 2.

26. *a*) A un local donde se alquilan bicicletas en el que hay 8 bicicletas disponibles, llega una persona que quiere alquilar tres bicicletas. ¿Cuántas formas distintas tiene el encargado de armar un grupo de 3 bicicletas para darle al nuevo cliente?

b) Si al mismo local, con 8 bicicletas disponibles, entran tres personas para alquilar bicicletas, ¿Cuántas formas distintas tiene el encargado de asignarle las bicicletas a las tres personas? Observar que no es lo mismo darle, p.ej., la bicicleta nro. 1 a una persona que a otra.

27. Se arma un grupo de 12 personas que incluye argentinos, brasileños y uruguayos.

a) Si tengo en cuenta solamente cuántas personas hay en el grupo de cada nacionalidad, y tiene que haber al menos dos argentinos, ¿cuántas formas posibles de armar el grupo hay?

b) Idem si tiene que haber exactamente 5 argentinos.

c) Dado un grupo ya armado de 12 personas de los cuales 5 son argentinos, hay que elegir 6 de estos 12 para una performance artística, en la cual una persona tiene que cantar, una tiene que bailar, y las otras cuatro tienen que hacer malabares. Si cualquiera de los 12 puede hacer cualquier cosa, y sólo me interesa quiénes de los 12 van a participar, ¿cuántas formas distintas hay de armar el grupo hay?

d) Idem anterior, distinguiendo quién canta, quién baila y quiénes hacen malabares.

e) Idem anterior, o sea distinguiendo según qué va a hacer cada uno, tomando solamente los grupos en los que el cantante es argentino.

f) Idem anterior, tomando solamente los grupos en los que al menos uno entre cantante y bailarín es argentino.

28. El plantel de un club de fútbol cuenta con 4 arqueros, 7 defensores, 8 mediocampistas y 6 atacantes. Se quiere saber

    a) si se pueden armar más equipos distintos en formación 4-3-3 o en formación 4-4-2, donde una formación indica la cantidad de defensores, mediocampistas y atacantes respectivamente, las posiciones dentro de cada grupo no se tienen en cuenta (p.ej. es indistinto si un defensor es central o va por una punta), y toda formación se completa con un arquero.

    b) cuántos equipos distintos en formación 4-3-3 pueden formarse de forma tal que Juan y Roque no jueguen juntos. Juan es un defensor y Roque es un mediocampista.

    c) si el club puede incorporar, o bien un defensor o bien un atacante pero no ambos, cuál de las dos incorporaciones genera un aumento mayor en la cantidad de equipos distintos en formación 4-3-3 que se pueden armar.

29. ¿Cuántas ternas, en las que no importa el orden dentro de la terna, se pueden armar a partir de un grupo de 10 personas? Si las personas son 7 mujeres y 3 varones, ¿pueden armarse más ternas de todas mujeres, o con dos mujeres y un varón?

30. Si tengo 8 remeras rojas, 7 amarillas y 6 verdes, quiero saber cuántas muestras puedo armar que tengan

    a) una remera de cada color.

    b) tres remeras de cada color.

    c) cuatro remeras, de las cuales a lo sumo tiene que haber una roja.

    d) 5 remeras, de las que tiene que haber al menos una de cada color.

31. Diez nadadores corren una competencia, de la que sale el podio, que incluye un primer, un segundo y un tercer puesto. Se quiere saber

    a) En cuántos podios aparece Roque en alguna posición.

    b) En cuántos podios aparece Roque primero o Juan tercero.

    c) En cuántos podios aparece Roque primero, Lucas segundo o Juan tercero.

32. En un hipódromo se juega una carrera en la que participan 14 caballos, 7 del stud A, 4 del stud B y 3 del stud C (un stud es un establecimiento de cría y mantenimiento de caballos de carrera). Se quiere saber

    a) Cuántos resultados posibles puede tener la carrera si consideramos solamente el stud de cada caballo, o sea, qué stud salió primero (no importa con qué caballo), qué stud salió segundo, etc..

    b) Lo mismo, mirando solamente los tres primeros lugares.

    c) ¿Cómo cambian los resultados anteriores si se agrega a la carrera un caballo del stud D?.

    d) ¿Cómo cambian los resultados de los dos primeros ítems si se agrega a la carrera un caballo del stud C?.

Respuestas : 1.a. 6 **1.b.** 1296 **1.c.** 625 **2.** 60 **3.** 900 **4.** 7999 **5.** 1728 **6.a.** 34.560 **6.b.** 120.960 **6.c.** 2.903.040 **7.a.** 300 **7.b.** 108 **7.c.** 120 **8.a.** 72 **8.b.** posición 31 **8.c.** posición 8 **9.a.** 120 **9.b.** 16 **9.c.** 72 **9.d.** 12 **10.** 120 **11.a.** 8400 **11.b.** 2520 **12.** 264 **13.** 1.814.400 **14.a.** 715 **14.b.** 365 **15.a.** 224 **15.b.** 896 **16.** 60 **17.** 30.240 **18.** 24 **19.** 512 **20.a.** $\binom{15}{5}7^{10}$ **20.b.** $\binom{16}{10}$ **21.** $\binom{n}{k}3^{n-k}$ **22.a.1.** 7^{28} **22.a.2.** $\binom{28}{3}6^{25}$ **22.b.1** $\binom{34}{28}$ **22.b.2** $\binom{30}{25}$ **23.a.1.** 12^{10} **23.a.2.** $\binom{10}{3}11^{7}$ **23.a.3** $\frac{12!}{2!}$ **23.b.1** $\binom{21}{10}$ **23.b.2** $\binom{17}{7}$ **23.b.3** $\binom{12}{2}$