Relaciones de orden - comisiones 1 y 3
Versión del 22/04/2013

Resumen de definiciones

- Relación binaria entre A y B: subconjunto de $A \times B$.
- Relación inversa: si $R \subseteq A \times B$, entonces $R^{-1} \subseteq B \times A$, y
  $R^{-1} = \{(b,a) \,/\, (a,b) \in R\}$.
- Relación definida en A: subconjunto de $A \times A$.
- Matriz de una relación R definida en A: es la matriz compuesta por elementos m_{ij} definidos así:
  $m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (a_i, a_j) \in R \\ 0 & \text{si} \quad (a_i, a_j) \notin R \end{cases}$
- Una relación R definida en A es

reflexiva	ssi $\forall x : xRx$.
irreflexiva	ssi $\forall x : \neg(xRx)$.
simétrica	ssi $\forall x : \forall y : xRy \to yRx$.
antisimétrica	ssi $\forall x : \forall y : (xRy \wedge yRx) \to x = y$.
transitiva	ssi $\forall x : \forall y : \forall z : (xRy \wedge yRz) \to xRz$.
de orden amplio	ssi es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
de orden estricto	ssi es irreflexiva y transitiva.

- Una relación de orden es **total** si (además de ser de orden, claro), se cumple esta condición: $\forall x : \forall y : xRy \vee yRx$.
- Conjunto ordenado: $(A, \prec)$ es un conjunto ordenado ssi $\prec$ es una relación de orden definida en A.
  Se puede decir que $(A, \prec)$ es ampliamente ordenado o estrictamente ordenado, según cómo sea el orden. Si decimos solamente "conjunto ordenado", es estrictamente ordenado.
  Si $\prec$ es un orden total, entonces $(A, \prec)$ es un conjunto totalmente ordenado.
- A cualquier orden estricto $\prec$ se le asocia un orden amplio $\preceq$ definido así:
  $x \preceq y \quad \text{ssi} \quad x \prec y \vee x = y.$

- Cotas, mínimo, ínfimo, etc.: si $(A, \prec)$ es un conjunto estrictamente ordenado y $B \subseteq A$, entonces

cota superior	z es cota superior de B ssi $z \in A$ y $\forall x : x \in B \rightarrow x \preceq z$. notación: $csup(B)$.
cota inferior	z es cota inferior de B ssi $z \in A$ y $\forall x : x \in B \rightarrow z \preceq x$. notación: $cinf(B)$.
máximo	z es el máximo de B ssi $z \in B$ y $\forall x : x \in B \rightarrow x \preceq z$. notación: $max(B)$.
mínimo	z es el mínimo de B ssi $z \in B$ y $\forall x : x \in B \rightarrow z \preceq x$. notación: $min(B)$.
maximal	z es maximal de B ssi $z \in B$ y $\neg \exists x : x \in B \wedge z \prec x$. notación: $maxl(B)$.
minimal	z es minimal de B ssi $z \in B$ y $\neg \exists x : x \in B \wedge x \prec z$. notación: $minl(B)$.
supremo	z es el supremo de B ssi es la cota superior más chica de B, o sea, ssi z es cota superior de B y $\forall x : x$ es cota superior de $B \rightarrow z \preceq x$. notación: $sup(B)$.
ínfimo	z es el ínfimo de B ssi es la cota inferior más grande de B, o sea, ssi z es cota inferior de B y $\forall x : x$ es cota inferior de $B \rightarrow x \preceq z$. notación: $inf(B)$.

Recordamos que:

- supremo, ínfimo, máximo y mínimo son únicos, si existen.
- maximales y minimales pueden no ser únicos.
- el supremo es el mínimo de las cotas superiores.
- el ínfimo es el máximo de las cotas inferiores.

Ejercicios

1. Consideremos los siguientes conjuntos

   A equipos que participaron en un campeonato
   B partidos de ese campeonato
   $\mathbb{N}_0$ nuestros amigos los números naturales, incluyendo el 0.

   Para cada una de las siguientes relaciones, indicar en dónde está definida cada una, y en los casos en que tenga sentido la pregunta, si son necesariamente reflexivas, irreflexivas, simétricas, antisimétricas, y/o transitivas.
   Nota: un contrajemplo de un campeonato inventado alcanza para mostrar que una relación no tiene, necesariamente, una propiedad.

   a) aRb ssi a y b son dos partidos que se jugaron el mismo día.
   b) aRb ssi en el partido a se hicieron más goles que en b.
   c) aRb ssi el equipo a jugó el partido b.
   d) aRb ssi los partidos a y b tienen, al menos, un equipo en común.
   e) aRb ssi b es la cantidad total de goles que hizo el equipo a en el campeonato.
   f) aRb ssi "a a b" fue el resultado de al menos un partido, o sea, ssi en algún partido el local hizo a goles y el visitante hizo b goles.
   g) aRb ssi los equipos a y b ganaron la misma cantidad de partidos.
   h) aRb ssi b es la cantidad de goles que se hizo en el partido a.
   i) aRb ssi a es la cantidad de goles que se hizo en el partido b.

2. Consideremos los siguientes conjuntos

   A personas que hicieron compras en un negocio.
   B artículos que se venden en el negocio.
   $\mathbb{R}$ nuestros amigos los números reales.

   Para cada una de las siguientes relaciones, indicar en dónde está definida cada una, y en los casos en que tenga sentido la pregunta, si son reflexivas, irreflexivas, simétricas, antisimétricas, y/o transitivas.

   a) la que relaciona cada persona con el importe total de las compras que hizo (0 si no hizo ninguna compra).
   b) aRb ssi hay algún artículo que compraron tanto a como b.
   c) aRb ssi b es el artículo más caro que compró a.
   d) aRb ssi a fue una cantidad mayor o igual de veces al mercado de las que fue b.
   e) aRb ssi todos los artículos que compró a, también los compró b.
   f) aRb ssi b es la madre de a.
   g) aRb ssi a y b son familiares directos en primer grado, o sea, a es padre/madre, hermano ó hijo de b, o bien a y b son la misma persona.
   h) aRb ssi a y b son artículos y el precio de los dos es un número par.
   i) aRb ssi b es el precio del artículo a.

3. Si $A = \{a, b, c, d\}$, indicar para cada una de las siguientes relaciones si son reflexivas, irreflexivas, simétricas, antisimétricas, y/o transitivas. En cada caso que una relación no sea como se pide, indicar un conjunto lo más chico posible de pares a agregar y/o quitar para que la relación sea como se pide.

   a) $\{(a, a), (a, b), (b, c)\}$.
   b) $\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (d, d)\}$.
   c) $\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (d, d)\}$.
   d) $\{(a, a), (b, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$.
   e) $\{(a, a), (a, d), (b, b), (c, c), (d, a), (d, d)\}$.
   f) $A \times A$.

4. Para cada una de las siguientes relaciones: dar tres pares que pertencen y tres pares que no; indicar si son reflexivas, irreflexivas, simétricas, antisimétricas, y/o transitivas; y definir la relación inversa. Considerar $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

   a) en $\mathbb{N}$, aRb ssi $a + b = 11$.
   b) en $\mathbb{N}$, aRb ssi las dos últimas cifras de a y b coinciden (p.ej. $1438\,R\,738$ porque ambos terminan en 38).
   c) en $\mathbb{N}$, aRb ssi $b = 2a$.
   d) en $\mathbb{Z}$, aRb ssi $a = b^2$ (p.ej. $9\,R\,3$ porque $9 = 3^2$).
   e) en $\mathbb{Z}$, aRb ssi $|\,a - b\,| \leq 5$.

   f) en $\mathbb{Z}$, aRb ssi $a - b \geq 5$.
   g) en $\mathbb{R}$, xRy ssi $x \geq 4 \vee y \geq 4$.
   h) en $\mathbb{R}$, xRy ssi $x \geq 4 \vee y \geq 5$.
   i) en $\mathbb{R}$, xRy ssi $x \geq 4 \wedge y \geq 4$.
   j) en $\mathbb{R}$, xRy ssi $x \geq 4 \wedge y \geq 5$.
   k) en $\mathbb{R}$, xRy ssi $|\,x\,| \geq y$.
   l) en $\mathbb{R}$, xRy ssi $y \leq x \leq y + 2$.
   m) en A, xRy ssi $x = y \vee x + y = 5$.

   n) en $\mathcal{P}(A)$, xRy ssi $x \cup y = A$.
   ñ) en $\mathcal{P}(A)$, xRy ssi $y = A - x$.
   o) en $\mathcal{P}(A)$, xRy ssi $x \cup \{2, 3\} = y \cup \{2, 3\}$.
   p) en $\mathcal{P}(A)$, xRy ssi $x \cap y = \emptyset$.
   q) en $\mathcal{P}(A)$, xRy ssi $x \subseteq y$.

5. Para las relaciones definidas en $\{a, b, c, d, e\}$ en cada una de las matrices que siguen, indicar si es: reflexiva, irreflexiva, simétrica, antisimétrica, igual a su inversa.

$$R_1 = \begin{matrix} 1&0&1&0&1\\ 0&1&0&1&0\\ 1&0&1&0&1\\ 0&1&0&1&0\\ 1&0&1&0&1 \end{matrix} \quad R_2 = \begin{matrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&1 \end{matrix} \quad R_3 = \begin{matrix} 0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{matrix} \quad R_4 = \begin{matrix} 0&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0 \end{matrix} \quad R_5 = \begin{matrix} 1&1&1&0&0\\ 1&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&1&1&1 \end{matrix}$$

$$R_6 = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad R_7 = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

6. Para evitar que haya corazones rotos por amores no correspondidos, ¿cómo debería ser la relación

$$aRb \text{ ssi } a \text{ ama a } b$$

definida en el conjunto de las personas?

7. Para cada una de las siguientes relaciones, definidas sobre el conjunto de las palabras que aparecen en el diccionario, indicar si es: reflexiva, irreflexiva, simétrica, y/o antisimétrica.

   a) $p\,R\,q$ ssi la primer letra de p es anterior a la primer letra de q.
   b) $p\,R\,q$ ssi las dos palabras empiezan con la misma letra.
   c) $p\,R\,q$ ssi p empieza con vocal y q empieza con consonante.
   d) $p\,R\,q$ ssi p empieza con vocal.
   e) $p\,R\,q$ ssi p empieza con vocal y q empieza con consonante, o al revés (o sea, p empieza con consonante y q con vocal).
   f) $p\,R\,q$ ssi o bien las dos empiezan con vocal, o bien las dos empiezan con consonante y la primer letra de p es anterior a la primer letra de q.
   g) $p\,R\,q$ ssi la letra 'a' aparece más veces en p que en q. P.ej. abracadabra R aplacada, porque "abracadabra" tiene 5 'a' mientras que 'aplacada' tiene 4.
   h) $p\,R\,q$ ssi la letra 'a' aparece la misma cantidad de veces en p y en q.
   i) $p\,R\,q$ ssi la cantidad de veces que la letra 'a' aparece en p es mayor a la cantidad de veces que aparece la letra 'e' en q. P.ej. altanera R perfecta, porque la 'a' aparece 3 veces en "altanera", la 'e' aparece dos veces en "perfecta", y $3 > 2$.

8. En una oficina juegan al amigo invisible. Esta actividad consiste en que cada persona que trabaja en la oficina le hace un regalo a alguien, sin que se sepa quién le compró el regalo a quién. Se define esta relación: $a\,R\,b$ ssi a le compró el regalo a b. ¿Qué tendría de inconveniente que R no fuera irreflexiva?

9. Si Juan es hermano de Ana y Ana es hermana de Lucas, ¿de quiénes más sé que son hermanos? Esto tiene que ver con que la relación de "ser hermanos" es ¿cómo?

10. Consideremos la relación $R = \{(a,a),(a,b),(b,a),(a,c)\}$ definida en $A = \{a,b,c,d\}$. Construir

    a) una relación irreflexiva quitándole un par a R.
    b) una relación simétrica agregandole un par a R.
    c) una relación reflexiva agregándole a R la menor cantidad de pares que se pueda.

d) una relación antisimétrica quitándole un par a R.

e) una relación transitiva agregándole un par a R.

11. Considerando el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$, construir

    a) Dos relaciones R y S, tales que ninguna de las dos sean simétricas ni reflexivas, pero $R - S$ sí sea simétrica y reflexiva.

    b) Dos relaciones R y S, tales que ninguna de las dos sean simétricas, pero $R \cap S$ sí sea simétrica, y se verifique $R \cap S \neq \emptyset$.

12. En un depósito hay muchas remeras, algunas son verdes y otras son rojas. Llamemos A al conjunto de todas las remeras. Se define la relación R en A así: aRb ssi a es roja y b es verde.

    a) Mostrar que esta relación es antisimétrica y no es transitiva.

    b) Definir una relación antisimétrica S tal que $R \cup S$ sea simétrica.

    c) Definir una relación S tal que $R \cup S$ sea transitiva, pero no simétrica.

13. Consideremos $A = \{a, b, c, d\}$.

    a) La relación vacía definida en A, ¿es de orden? Justificar.

    b) Dar una relación de orden de cardinal mínimo, o sea, que no existe una relación de orden con menos elementos.

    c) Dar una relación de orden de cardinal máximo, o sea, que no existe una relación de orden con más elementos.

14. Se dice que una persona a es descendiente de una persona b si es hijo, nieto, bisnieto, etc.. En el conjunto de personas de la humanidad Se definen las relaciones aHb si a es hijo de b y aNb si a es nieto de B. Demostrar que $H \cup N$ no es una relación de orden estricto, y responder a esta pregunta ¿cómo ayuda la idea de descendiente para definir un orden estricto que incluya a $H \cup N$?

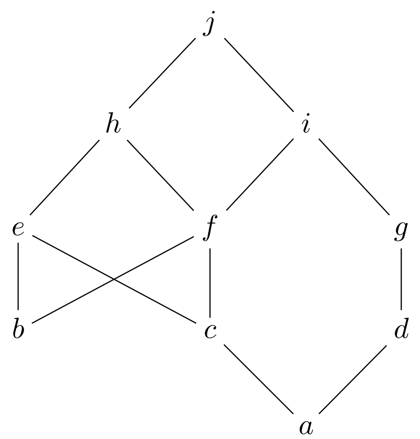
15. Demostrar que si R es simétrica y transitiva y aRb para ciertos a y b, entonces aRa y bRb.

16. Demostrar que si R es simétrica y transitiva y aRb para ciertos a y b, entonces aRa y bRb.

17. Demostrar que si $\prec$ es una relación de orden estricto, entonces es antisimétrica. Ayuda: alcanza con probar que no puede ser, para cualesquiera a y b que considere, que $a \prec b$ y $b \prec a$. Relacionar con el ejercicio anterior.

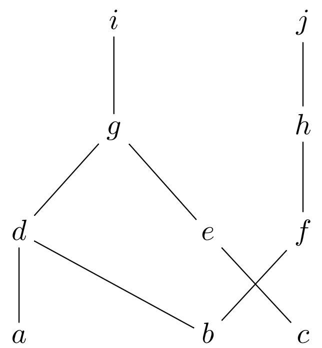
18. Dados los siguientes conjuntos ordenados a través de diagramas de Hasse, hallar cotas, mínimo, máximo, minimales, maximales, supremo e ínfimo para cada subconjunto indicado.

a)



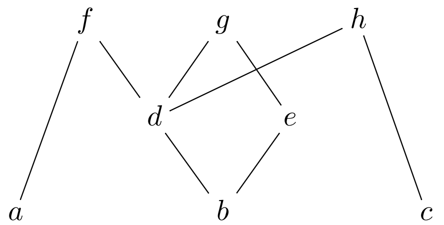
$B_1 = \{f, g\}$
$B_2 = \{i, f, c\}$
$B_3 = \{e, f, h\}$
$B_4 = \{a, g, j\}$

b)



$B_1 = \{g, h, i, j\}$
$B_2 = \{j, h, f, c\}$
$B_3 = \{i, d, b\}$
$B_4 = \{e, b\}$

19. En la relación de orden cuyo diagrama de Hasse es



hallar:

a) Un subconjunto de 6 elementos con mínimo.

b) Un subconjunto de 3 elementos sin máximo y con mínimo.

c) Un subconjunto de 4 elementos con mínimo y 3 maximales.

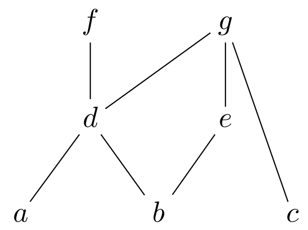
d) Un subconjunto de 3 elementos sin máximo y con supremo.

e) Un subconjunto de 5 elementos con 4 maximales y 3 minimales.

f) $csup(\{b\})$.

g) Una forma de agregar un elemento i tal que $sup(\{c, d, e\}) = sup(\{c, d, e, g\}) = sup(\{c, d, e, g, h\}) = i$.

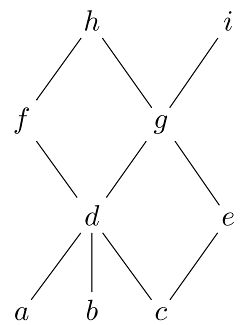
20. En la relación de orden cuyo diagrama de Hasse es



hallar:

   a) Un subconjunto de 6 elementos con máximo.
   b) Un subconjunto de 4 elementos sin máximo y con supremo.
   c) $cinf(\{g\})$.

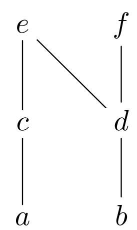
21. En la relación de orden cuyo diagrama de Hasse es



hallar:

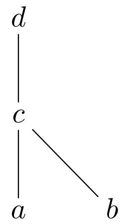
   a) Un subconjunto de 5 elementos sin máximo y con supremo.
   b) Un subconjunto de 4 elementos sin mínimo y con ínfimo.
   c) Un subconjunto de 3 elementos con 3 maximales y 3 minimales.
   d) Un elemento x tal que $\{x\}$ tiene 4 cotas superiores.
   e) Una forma de agregar un elemento j tal que el conjunto $\{f, g, h\}$ no tenga ínfimo.
   f) Una forma de agregar un elemento j tal que $inf(\{f, g, h\}) = a$.

22. Respecto del diagrama que se muestra al costado, se pide



   a) Encontrar un subconjunto de 5 elementos que tenga máximo, uno de 3 elementos que no tenga máximo pero sí supremo, uno de 2 elementos que no tenga supremo.
   b) Agregar un elemento g y relacionarlo con el resto, de modo tal que en el diagrama modificado, el ínfimo de $\{e, f\}$ sea g, en lugar de d.

23. Se parte de la relación $\prec$ definida en $A = \{a, b, c, d, e\}$ cuyo diagrama de Hasse es



obsérvese que e está relacionado solamente con él mismo

Se pide

a. Definir $\prec'$ agregando a $\prec$ pares que relacionen e con otros elementos, de forma tal que $\{a, b\}$ no tenga supremo pero $\{a, b, c, e\}$ sí.

b. Definir $\prec''$ que sea un orden total en A y que verifique que $x \prec y \Rightarrow x \prec'' y$.

24. En cada caso, encontrar una relación de orden que cumpla lo pedido

a) En $A = \{a, b, c, d, e\}$, un orden total $\prec$ en el que: a sea el máximo de $\{a, b, d, e\}$, c sea el máximo de $\{a, b, c\}$, $d \prec b$, y e sea cota inferior de $\{c, d, e\}$.

b) En $A = \{a, b, c, d, e\}$, un orden no total $\prec$ en el que el supremo de $\{b, c, d\}$ sea a, que las cotas superiores de $\{b, c, d\}$ sean $\{a, e\}$, y que el mínimo de $\{b, c, d\}$ sea c.

c) En $A = \{a, b, c, d, e\}$, un orden no total $\prec$ en el que c sea tanto el supremo de $\{d, e\}$ como el ínfimo de $\{a, b\}$, y en el que $\{a, b, d, e\}$ no tenga ni máximo ni mínimo.

d) En $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, un orden no total $\prec$ en el que: la única cota superior de $\{b, c, d, e, f\}$ sea a, los maximales de $\{b, c, d, e\}$ sean $\{b, c\}$, el máximo de $\{b, d, f\}$ sea b, el mínimo de $\{b, d, f\}$ sea f, se verifique que $f \prec e$, y finalmente que el supremo de $\{d, e, f\}$ sea c.

e) En $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, una relación de orden $\prec$ en la que: las cotas superiores de $\{e, f\}$ sean $\{a, b, c, d, e\}$, el supremo de $\{b, c\}$ sea a, el ínfimo de $\{b, d\}$ sea e, el subconjunto $\{c, d\}$ no tenga supremo, $\neg(d \prec a)$.

f) En $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, una relación de orden $\prec$ en la que: el supremo de $\{e, f\}$ sea d, el supremo de $\{b, c, d\}$ sea a, el ínfimo de $\{b, c, d\}$ sea c y el subconjunto $\{c, e, f\}$ tenga tres maximales.

g) En $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, una relación de orden $\prec$ que cumpla con todas las condiciones que siguen:
- $sup(\{d, e, f\}) = g$
- $inf(\{d, e, f\}) = d$
- $sup(\{a, b, c\}) = sup(\{a, c\}) = d$
- $sup(\{a, b\}) = b$

25. Graficar el diagrama de Hasse y la matriz de una relación de orden $\prec$ en el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ que cumpla las siguientes condiciones: $\{a, b, c\}$ tiene como ínfimo a c y no tiene supremo, $\{d, e, f\}$ tiene como supremo a d y no tiene ínfimo, $c \prec d$.

26. Algunos de relaciones que sí son de orden

a) Se define esta relación de orden en $\mathbb{R}^2$: $(a, b) \prec (c, d)$ ssi $(a < c) \vee (a = c \wedge b < d)$. Mostrar que es un orden total, y encontrar cotas, mínimo, máximo, maximales, minimales, supremo e ínfimo de $\{(2, 3), (3, 4), (2, 4), (3, 2)\}$.

b) Se define esta relación de orden en $\mathbb{R}^2$: $(a, b) \prec (c, d)$ ssi $(a = c \land b = d) \lor (a+b < c+d)$. Encontrar cotas, mínimo, máximo, maximales, minimales, supremo e ínfimo de $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (2, 5)\}$. La relación, ¿es un orden total?

c) Se escribe $a//b$ como la parte entera de a/b; por ejemplo, $328//3 = 109$ porque $328/3 = 109{,}33\ldots$ y del resultado $109{,}33\ldots$ se toma lo que está a la izquierda de la coma. Más ejemplos: $5//3 = 1$, $6//3 = 7//3 = 8//3 = 2$, $9//3 = 3$.
Se define esta relación de orden en $\mathbb{N}$: $a \prec b$ ssi $(a - 1)//3 < (b - 1)//3$. Encontrar cotas, mínimo, máximo, maximales, minimales, supremo e ínfimo de $\{2, 6, 13, 14\}$.
Si te animás, demostrá que la relación es de orden.

d) Se define la relación de orden $\prec$ en $\mathbb{N}$ de esta forma: $x \prec y$ ssi x tiene menos cifras que y. P.ej. $248 \prec 248$, $248 \prec 1304$, $248 \not\prec 77$, $248 \not\prec 304$. Se pide

- Demostrar que $\prec$ no es un orden total.
- Indicar cuáles de estos conjuntos tienen máximo.
  $\{20, 30, 200, 300\}$ $\{20, 30, 200, 300, 1000\}$ $\{8, 20, 30, 200, 300\}$

27. Consideremos la relación de orden $\prec$ definida en $\mathbb{N}$: $x \prec y$ si y sólo si la última cifra de x es menor estricto a la última cifra de y. P.ej. los siguientes pares están en la relación: $(13\underline{\mathbf{4}}, 2\underline{\mathbf{7}}), (13\underline{\mathbf{4}}, 13\underline{\mathbf{4}}), (13\underline{\mathbf{4}}, \underline{\mathbf{9}}), (13\underline{\mathbf{4}}, 30\underline{\mathbf{5}})$, mientras que ni $(13\underline{\mathbf{4}}, 2\underline{\mathbf{2}})$ ni $(13\underline{\mathbf{4}}, 48\underline{\mathbf{1}})$ ni $(13\underline{\mathbf{4}}, 7\underline{\mathbf{4}})$ están en la relación (se destaca la última cifra de cada número, que es la que hay que mirar para determinar si un par está o no en la relación).

    Se pide resolver **justificando en cada caso** (ítem sin justificación **no cuenta**):

    a) mostrar que el orden no es total.

    b) indicar cuáles de los siguientes números

    $$1000,\ 103,\ 65,\ 27,\ 12,\ 9$$

    son cotas inferiores del subconjunto $\{47, 104, 33, 17\}$.

    c) indicar cuáles de los siguientes subconjuntos

    $$\{16, 25, 34\},\ \{16, 25, 36\},\ \{16, 24, 34\}$$

    tienen máximo.

    d) obtener un subconjunto de cinco elementos que tenga mínimo y tenga exactamente dos maximales.

    e) indicar cuáles son los elementos internos del subconjunto $\{26, 35, 128, 348, 507\}$ respecto de $\prec$. Decimos que $z \in B$ es interno si cumple esta condición:

    $$(\exists x : x \in B \land x \neq z \land x \prec z) \land (\exists x : x \in B \land x \neq z \land z \prec x)$$

28. Consideremos la relación de orden $\prec$ definida en $\mathbb{N}$: $x \prec y$ si y sólo si la suma de las cifras de x es menor estricto a la suma de las cifras de y. P.ej. los pares $(321, 38)$ y $(321, 9)$ están en la relación, porque $3+2+1 = 6 < 11 = 3+8$ y $3+2+1 = 6 < 9$; mientras que ni $(321, 1000)$ $(6 \not< 1 = 1+0+0+0)$, ni $(321, 4)$ $(6 \not< 4)$, ni $(321, 42)$ $(6 \not< 6 = 4 + 2)$ están en la relación.

    Se pide resolver **justificando en cada caso** (ítem sin justificación **no cuenta**):

a) mostrar que el orden no es total.

b) dar máximo, mínimo, 3 cotas superiores y 2 cotas inferiores del subconjunto $\{412, 339, 78, 704, 125\}$.

c) indicar cuáles de los siguientes subconjuntos

$$\{385, 59, 761\},\ \{385, 59, 762\},\ \{385, 59, 763\}$$

tienen máximo.

d) obtener un subconjunto de seis elementos que tenga exactamente tres minimales y tenga máximo.

e) indicar cuáles son los elementos internos del subconjunto $\{126, 34, 981, 425, 2122\}$ respecto de $\prec$. Decimos que $z \in B$ es interno si cumple esta condición:

$$(\exists x : x \in B \wedge x \neq z \wedge x \prec z) \wedge (\exists x : x \in B \wedge x \neq z \wedge z \prec x)$$

29. Algunos de relaciones que no son de orden.

a) Se define esta relación en $\mathbb{R}^2$: $(a, b)R(c, d)$ ssi $a < b$ o $c < d$. Mostrar que esta relación no es de orden.

b) Se define esta relación en $\mathbb{R}^2$: $(a, b)R(c, d)$ ssi $a + b \leq c + d$. Mostrar que esta relación no es de orden. Ayuda: comparar con ejercicio 26*b*.

30. Algunos más sobre cotas, mínimo, máximo, etc..

a) En una relación de orden definida en $\{a, b, c, d, e, f\}$, sabemos que el supremo de $\{c, d, e\}$ es b. Demostrar que: $\{c, d, e\}$ no tiene máximo, $\{b, c, d, e\}$ sí tiene máximo, el orden no es total.

b) En una relación de orden $\prec$ definida en $\{g, h, i, j, k\}$, sabemos que los maximales de $\{i, j, k\}$ son $\{i, k\}$. Demostrar que: $\{i, j, k\}$ no tiene máximo, i y k no son comparables según $\prec$ (o sea ni $i \prec k$ ni $k \prec i$), el orden no es total.

31. Completar la siguiente matriz de relación, sabiendo que es de orden. ¿Se trata de una relación de orden total?

$_2\backslash^1$	a	b	c	d
a				1
b			0	
c		0		
d		1	1	

32. Considerando dos relaciones R y S definidas en un conjunto $A \neq \emptyset$, demostrar que

a) si R es reflexiva, entonces $R \cup R^{-1} \neq \emptyset$.

b) si R y S son reflexivas, entonces tanto $R \cap S$ como $R \cup S$ son reflexivas, y $R - S$ es irreflexiva.

c) si R y S son irreflexivas, entonces $R \cap S$, $R \cup S$, $R - S$ y $R \,\Delta\, S$ son todas irreflexivas, y $\overline{R}$ es reflexiva.

d) si R y S son simetricas, ¿qué podemos decir de $R \cap S$ y $R \cup S$?

e) si R y S son transitivas, $R - S$ puede no ser transitiva.

33. Considerando dos relaciones R y S definidas en un conjunto $A \neq \emptyset$, responder lo siguiente: ¿qué condiciones deben verificarse para que $R - S$ sea reflexiva?