

---

# Lógica – material de clase

## 1. Ubiquemos a la lógica

La típica es empezar el apunte de lógica diciendo algo como

La lógica es la ciencia (o “la disciplina”) que estudia los razonamientos.

Ah, qué lindo. ¿Qué quiere decir esta frase Para que se entienda esta frase, hablemos un poquito de “ciencia”, y después un poco más sobre “razonamiento”.

### 1.1. La lógica entre las ciencias

Las ganas de conocer (o sea de entender, comparar, poder predecir, evaluar, analizar) un montón de cosas diversas que tenemos las personas, van dando lugar a distintas ramas del conocimiento, que son las que llamamos “ciencias”. Cada una de estas ramas del conocimiento se ocupa de algunos conceptos básicos, generando las herramientas que permiten abordar distintos problemas.

Por ejemplo, hay una parte de la física que se encarga del movimiento, a la que le interesa (entre muchas otras cosas) la respuesta a esta pregunta.

Si tiro de una terraza dos bolas, una roja de 5 kg y otra verde de 20 kg, ¿cuál llega antes al piso?

Otras partes de la física se encargan de la luz, de la electricidad, etc.. A la química le interesa la estructura de la materia y sus transformaciones. A la biología, lo que está vivo: cómo se reproduce, cómo nace, qué tiene que hacer para mantenerse vivo, cómo se llevan los organismos vivos entre ellos. Y así otras ciencias<sup>1</sup>.

Veamos algunas preguntas que le interesan a distintas ramas de conocimiento

- ¿Qué forma conviene que tenga un plástico que pongo adelante de una lámpara (p.ej. una óptica de auto) para que la luz se distribuya como yo quiero?
- Si pongo un extremo de un cable de cobre de 100 kilómetros a un generador eléctrico, la potencia ¿llega a la otra punta? Eso ¿depende del grosor del cable, de la forma, del material?
- ¿Cómo es que la nafta explota y el agua no?
- Si pongo una pareja de gorriones en una selva, ¿se llegarán a reproducir, se convertirán en plaga, llegarán a una población estable, qué pasará?

Dentro de lo que llamamos “matemática” también hay varias ramas, que se encargan de estudiar conceptos distintos. La aritmética se ocupa de los números y las operaciones (sumar, restar, etc.) que se pueden hacer con ellos. La geometría estudia figuras, sus tamaños, su forma, cómo se combinan, etc..

---

<sup>1</sup>Esta es una idea aproximada. Un grupo de personas que está estudiando problemas que se asocian a una rama del conocimiento se puede encontrar que para entenderlos conviene pensar en conceptos con los que trabajan otras ramas del conocimiento. Un ejemplo: para entender algunos fenómenos de los organismos vivos, de los que se ocupa la biología, hay que entender la estructura de materia que forman las células, entonces conviene un poco “pensar como los químicos”.

En general creo que no paga pensar en cada “ciencia” como algo que tiene límites bien definidos. Más bien, cada rama de conocimiento maneja herramientas y formas de pensar que sirven para entender algunos fenómenos.

La lógica se puede describir como la rama del conocimiento que estudia los razonamientos. En vez de luz, movimiento, seres vivos, números o figuras, razonamientos. La palabra “razonamiento”, o el verbo “razonar”, son bastante populares, muchos los usamos, tal vez sin tener una idea muy precisa sobre qué es un razonamiento. Hablemos entonces de a qué vamos a llamar “razonamiento” en la materia.

## 1.2. Razonamientos

Un razonamiento es ... aunque no sepamos bien qué es, seguro que si nos dicen “Si Roque come carne, entonces toma vino” y también “Roque come carne” entonces vamos a estar convencidos de que Roque va a tomar vino.

Ahí hicimos un *razonamiento*: a partir de cierta información que sabemos, nos dijeron, suponemos o nos llegó de alguna forma, obtenemos una conclusión. Las *premisas* de un razonamiento son la información que usamos para llegar a la *conclusión*.

En el ejemplo tenemos dos premisas

Si Roque come carne, entonces toma vino.

Roque come carne.

y la conclusión es

Roque toma vino.

Es bastante común anotar los razonamientos como sigue

Si Roque come carne, entonces toma vino.

Roque come carne.

---

Roque toma vino.

Este es el tipo de razonamiento más común, que parte de una premisa del estilo “Si ... entonces ...”. Puede haber razonamientos que no tengan ninguna premisa así. Veamos dos ejemplos.

Ana y Mariel aprobaron el examen.

---

Mariel aprobó el examen.

No es cierto que Roque y Lucas son los dos rubios.

Lucas es rubio.

---

Roque no es rubio.

Supongamos ahora que nos proponen este razonamiento

Si Roque come carne, entonces toma vino.

Roque come carne.

---

Roque no es rubio.

¿qué opinás? Espero que te haya hecho un poco de ruido. Porque en este caso no es (justamente) lógico obtener la conclusión “Roque no es rubio” a partir de las premisas que se indican. Este es un ejemplo de razonamiento *inválido*. Todos los anteriores son casos de razonamientos *válidos*.

En un razonamiento válido, si todas las premisas son verdaderas, la conclusión también va a ser verdadera. Dicho de otra forma, un razonamiento válido “no puede fallar”. Por otro lado, un razonamiento inválido sí “puede fallar”, o sea, puede pasar que las premisas sean todas verdaderas y la conclusión no. Por eso se quieren evitar los razonamientos inválidos: pueden llevar a conclusiones equivocadas.

Tomando los ejemplos de razonamientos que describimos, supongamos que es verdad que si Roque come carne, entonces toma vino; y que también es verdad que Roque come

carne. El primer razonamiento es válido, y por lo tanto, podemos asegurar que Roque va a tomar vino. Como todas las premisas son verdaderas, y el razonamiento es válido, la conclusión tiene que ser también verdadera. El último razonamiento no es válido, y por lo tanto, no podemos asegurar que Roque no es rubio.

Uno de los objetivos centrales de la lógica es distinguir los razonamientos válidos de los inválidos. Como vemos, para esto hay que trabajar con los conceptos de *verdad* y *falsedad*.

## 2. Lógica proposicional

En el curso vamos a trabajar con dos “sabores” de lógica, uno es la *lógica proposicional*, el otro es la *lógica de predicados*, a la que también se llama *lógica de primer orden*. En esta sección vamos a introducir la lógica proposicional.

### 2.1. Proposiciones

La lógica proposicional trabaja con *proposiciones*. Una definición sencilla nos dice que una *proposición* es cualquier oración de la que tiene sentido decir “es verdadera” o “es falsa”.

Por ejemplo, las oraciones

p1: Viviana es la madre de Sol.

p2: Lisa tiene ojos marrones.

son proposiciones: para cada una se entiende qué quiere decir que sea verdadera, y qué quiere decir que sea falsa.

También es una proposición

p3: Viviana es la madre de Sol **y** Lisa tiene ojos marrones.

Hay una diferencia, que para nosotros va a ser importante, entre esta proposición y las dos anteriores. Para que esta proposición sea verdadera, tienen que pasar dos cosas: que Viviana sea efectivamente la madre de Sol, y además, que los ojos de Lisa sean marrones. Dicho de otra forma: si para cada una de las proposiciones p1 y p2 sabemos si es verdadera o falsa, ya nos alcanza para decidir si p3 es verdadera o falsa.

La proposición p3 es un ejemplo de proposición *compuesta*, que (justamente) se compone de proposiciones más “chiquitas”. En este ejemplo, p1 y p2 son los *componentes* de p3. A las proposiciones que no son el resultado de componer otras proposiciones, como p1 y p2, se las llama *simples*.

Para generar la proposición p3 a partir de p1 y p2, usamos la *conjunción*, o sea “el ‘y’”. No es la única forma de generar una proposición compuesta; consideremos

p4: Viviana es la madre de Sol **o** Lisa tiene ojos marrones.

Esta también es compuesta y sus componentes son p1 y p2; para componerlas, en lugar de la conjunción, estamos usando la *disyunción* (o sea, “el ‘o’”). La diferencia entre p3 y p4 es cómo se determina si son verdaderas o falsas, una vez que sabemos qué pasa con los componentes. Por ejemplo, si p1 es verdadera y p2 es falsa, entonces p3 es falsa, mientras que p4 es verdadera.

Mediante la *negación* generamos proposiciones compuestas con un solo componente, por ejemplo

p5: Lisa no tiene ojos marrones.

De las formas básicas de componer proposiciones, nos falta el *condicional*, o sea “el ‘entonces’”. El primer razonamiento que mostramos incluye una proposición de este estilo

p6: Si Roque come carne, entonces toma vino.

Pero atenti, dijimos que para cualquier proposición tiene que quedar claro qué quiere decir que sea verdadera y qué quiere decir que sea falsa. ¿Habrá algún caso en el que p6: sea falsa? La respuesta, un poco más adelante.

Una última aclaración antes de seguir: las oraciones de las cuales sabemos que son verdaderas, o que sabemos que son falsas, también son proposiciones. P.ej.

p7: El autor de ‘El Aleph’ es Borges.

p8: El autor de ‘El Aleph’ es Abelardo Castillo.

## 2.2. El lenguaje de la lógica proposicional

Para estudiar a las proposiciones, no las vamos a escribir en castellano, sino que vamos a usar **fórmulas**<sup>2</sup>.

Una *fórmula* se puede pensar como una especie de palabra: una secuencia de ciertas letras, donde las letras se pueden repetir (p.ej. “alma”) y donde el orden en que aparecen las letras es importante (p.ej. no es lo mismo “loma” que “malo”).

A las “letras” que se usan para armar fórmulas se las llama *símbolos*.  
En el alfabeto de la lógica proposicional hay cuatro tipos de símbolos.

- Las *letras proposicionales*, para las que usamos  $p, q$ , etc., y si necesitamos,  $p_1, p_2$ , etc., o también  $p'$ . Con las letras proposicionales vamos a representar las proposiciones simples.
- Los *conectivos* que permiten formar proposiciones compuestas. Vamos a usar: conjunción (“y”,  $\wedge$ ), disyunción (“o”,  $\vee$ ), disyunción excluyente (“o exclusivo”,  $\underline{\vee}$ ), negación (“no”,  $\neg$ ), condicional (“entonces”,  $\rightarrow$ ) y bicondicional (“si y sólo si”,  $\leftrightarrow$ ).
- Las *constantes lógicas* verdadero **V** y falso **F**.
- Los paréntesis, que son *símbolos auxiliares*.

La fórmula más corta es una letra proposicional sola, p.ej.  $p$ . Una fórmula un poco más compleja es  $p \wedge q$  que puede representar la frase “Viviana es la madre de Sol y Lisa tiene ojos marrones”, donde  $p$  representa la proposición simple “Viviana es la madre de Sol” y  $q$  representa “Lisa tiene ojos marrones”. Una fórmula bastante más complicada es  $(\neg p) \rightarrow (q \wedge (p \vee r))$ .

Al igual que en castellano, no todas las combinaciones de símbolos (letras) son *fórmulas bien formadas* (o sea, palabras correctas). En lógica no hay un diccionario en el que aparecen las fórmulas bien formadas, sino que se usan estas *reglas de formación*:

1. Una letra proposicional es una fórmula.
2. Si  $A$  y  $B$  son fórmulas, entonces  $(A \wedge B)$ ,  $(A \vee B)$ ,  $(A \underline{\vee} B)$ ,  $(A \rightarrow B)$  y  $(A \leftrightarrow B)$  son fórmulas.
3. Si  $A$  es una fórmula, entonces  $(\neg A)$  también es una fórmula.
4. No hay más fórmulas bien formadas, las únicas que hay son las que se pueden armar con las reglas anteriores.

Es importante darse cuenta que  $A$  y  $B$  pueden ser letras proposicionales, pero también pueden ser fórmulas más complejas. Para verlo con un ejemplo, justifiquemos que  $((\neg p) \rightarrow (q \wedge (p \vee r)))$  es una fórmula bien formada, mostrando las fórmulas  $A$  y  $B$  usadas en cada caso.

---

<sup>2</sup>El uso de fórmulas tiene varias razones. Una muy importante es que vamos a tener una forma clara de hablar, p.ej., sobre todas las conjunciones, por ejemplo para armar las tablas de verdad. Otra es que no dan lugar a discusión sobre qué se está diciendo, o sea, eliminan la posibilidad de *ambigüedad*. Otra más es que no hay problemas de lenguaje: un ruso, un iraní, un alemán y un argentino vamos a poder trabajar sobre la misma fórmula sin problemas.

$p$  y  $r$  son fórmulas (regla 1)

entonces,  $(p \vee r)$  es una fórmula (regla 2,  $A = p$ ,  $B = r$ )

$q$  es una fórmula (regla 1)

$(q \wedge (p \vee r))$  es una fórmula (regla 2,  $A = q$ ,  $B = (p \vee r)$ )

$p$  es una fórmula (regla 1)

$(\neg p)$  es una fórmula (regla 3,  $A = p$ )

$((\neg p) \rightarrow (q \wedge (p \vee r)))$  es una fórmula (regla 2,  $A = (\neg p)$ ,  $B = (q \wedge (p \vee r))$ ).

Por otro lado,  $(\neg \vee p)$  no es una fórmula bien formada. En este caso, aplicaría la regla 2 con  $A = \neg$  y  $B = p \dots$  si  $\neg$  (así solita) fuera una fórmula bien formada. Pero no lo es, y por lo tanto, no hay ninguna regla que aplique a  $\neg \vee B$ .

Tanto escribir como leer fórmulas largas con todos los paréntesis lleva a confusiones. Por lo tanto, vamos a permitirnos omitir algunos paréntesis según algunas reglas que vamos a ver en clase. En particular, no vamos a poner los paréntesis más externos, esto es, los que van “afuera de todo” en la fórmula. Un ejemplo de esto último: en lugar de  $(p \vee (q \wedge r))$  vamos a escribir  $p \vee (q \wedge r)$ .

### 2.3. Representando oraciones mediante fórmulas

En la sección anterior vimos un ejemplo de una oración y una fórmula que sirve para representar a la oración, o sea, una fórmula que “dice lo mismo” que la oración. Recordemos oración y fórmula.

“Viviana es la madre de Sol y Lisa tiene ojos marrones”  $p \wedge q$

Para relacionar oración y fórmula, asociamos una letra proposicional a cada proposición simple que se menciona en la oración. En este caso, las proposiciones simples son “Viviana es la madre de Sol” y “Lisa tiene ojos marrones”; les asignamos las letras  $p$  y  $q$  respectivamente.

Antes de seguir, pensemos que si asociamos otras proposiciones simples a las letras  $p$  y  $q$ , entonces la misma fórmula  $p \wedge q$  va a corresponder a otra oración. P.ej. si  $p$  es “Anahí come carne” y  $q$  es “Roque come carne”, entonces una posible oración correspondiente a  $p \wedge q$  es “Anahí y Roque comen carne”<sup>3</sup>.

Para armar la fórmula correspondiente a una oración, conviene pensar en dos cosas: qué proposiciones simples aparecen en la oración, y cómo conectarlas usando (justamente) conectores (recordemos,  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\underline{\vee}$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ) para armar una fórmula que se corresponda con la frase.

A veces es fácil por cómo viene la oración. Ya vimos este ejemplo.

$\underbrace{\text{Viviana es la madre de Sol}}_p \text{ y } \underbrace{\text{Lisa tiene ojos marrones}}_q$   
 $\wedge$

Otro ejemplo sencillo es

$\text{Si } \underbrace{\text{Roque come carne}}_p \text{ entonces } \underbrace{\text{toma vino}}_q$   
 $\rightarrow$

obteniendo la fórmula  $p \rightarrow q$ . En este caso, hay que darse cuenta que la proposición que corresponde a  $q$  es “Roque toma vino”, porque el que (la oración dice que) toma vino es Roque.

Antes de seguir, veamos un ejemplo también sencillo, pero que usa negación

<sup>3</sup>Puede pensarse en variantes de la oración que tienen el mismo significado, o sea que “dicen lo mismo”. P.ej. “Anahí come carne y Roque también”, o “Tanto Anahí como Roque comen carne”. Acá vemos una ventaja de trabajar con fórmulas: hay menos variantes que en castellano o cualquier otro lenguaje.

Si  $\underbrace{\text{Raúl come carne}}_p$  entonces  $\underbrace{\text{no toma vino}}_{\neg q}$

La fórmula que se obtiene es  $p \rightarrow (\neg q)$ , donde  $p$  es “Raúl come carne” y  $q$  es “Raúl toma vino”.

Otras oraciones vienen menos “listas para representar”, o sea, en la forma de la oración no viene dado tan directamente cómo conectar las proposiciones simples, y a veces también hay que pensar un poco cuáles son las proposiciones simples de las que se está hablando.

Tomemos esta oración

Ana aprobó Intro, pero Manuel no.

¿Cuáles son las proposiciones simples que aparecen? Una es “Ana aprobó Intro”, eso es lo que se dice sobre Ana.

Sobre Manuel, se dice que no aprobó Intro, o sea “Manuel no aprobó Intro”. Hay que darse cuenta que al decir “Manuel no” el “no” es “no aprobó Intro”. También ¡OJO!, hay que darse cuenta de otra cosa: “Manuel no aprobó Intro” **no** es una proposición simple, es la negación de otra más simple que es “Manuel aprobó Intro”.

Entonces, las proposiciones simples que aparecen en la oración son: “Ana aprobó Intro” y “Manuel aprobó Intro”, digamos  $p$  y  $q$  respectivamente. Falta ver qué conectores usar. Seguro que  $q$  va a aparecer con una negación, porque lo que se dice en la frase es “Manuel no aprobó Intro”, o sea,  $\neg q$ . ¿Cómo tomar el “pero”, qué se está diciendo con esta oración? Está afirmando que pasan dos cosas, que Ana aprobó Intro, **y también** que Manuel no aprobó Intro. Por lo tanto, la fórmula para representar esta oración es

$$p \wedge \neg q$$

Conclusión: para armar la frase que representa a una oración, hay que entender qué dice la oración. Hay algunas reglas que sirven para algunos casos, pero no para todos. En algunos casos hay que animarse a salir de las “recetas”, pensar, intentar con alternativas, jugarse por algo<sup>4</sup>.

Para tranquilizarnos un poco, veamos un par de ideas que nos pueden ayudar en varios casos.

Consideremos esta oración

Ni Rita ni Juan aprobaron Intro.

El “ni-ni” muchas veces tiene el efecto de negar dos cosas, o sea, una fórmula del estilo

$$(\neg p) \wedge (\neg q)$$

En este caso,  $p$  es “Rita aprobó Intro” y  $q$  es “Juan aprobó Intro”. La frase dice que Rita no aprobó Intro, y además, que Juan no aprobó Intro.

Veamos ahora esta oración

No es cierto que tanto Rita como Juan aprobaron Intro.

En este caso, el “no es cierto” es una negación ... pero, ¿qué se está negando? Para pensarlo, veamos cómo sería la fórmula para la frase sacándole la parte de “no es cierto”, o sea

Tanto Rita como Juan aprobaron Intro.

esta sale:  $p \wedge q$ , donde  $p$  es “Rita aprobó Intro” y  $q$  es “Juan aprobó Intro”.

¿Será que el “no es cierto” está negando a “Rita aprobó Intro”? De ser así, la fórmula sería  $(\neg p) \wedge q$ , o sea “Rita no aprobó Intro y Juan aprobó Intro”. La oración original **no**

---

<sup>4</sup>Así es la vida, terminó la secundaria o polimodal. Para aprender lo que se viene a aprender a la Universidad, de repente con la forma en que nos veníamos manejando **no** alcanza

dice eso. Lo que “no es cierto” no es que Ana aprueba Intro, sino **toda la conjunción**; lo que no es cierto es “Tanto Rita como Juan aprobaron Intro”. Entonces la fórmula es

$$\neg(p \wedge q)$$

Puede ser muy útil comparar esta fórmula con la anterior,  $(\neg p) \wedge (\neg q)$ . Se pueden hacer las dos tablas de verdad, y también aplicar De Morgan a alguna para dejarlas más parecidas.



### 3. Pequeños comentarios sobre valuaciones

Una de las preguntas importantes que se hace la lógica es

¿En qué casos una oración es verdadera, en qué casos es falsa?

Si usamos lógica proposicional o de predicados, para trabajar sobre esta cuestión partimos de una fórmula que representa la oración que nos interesa, y usamos la idea de valuaciones. Hablemos un poco de cómo manejarnos con lógica proposicional.

Las valuaciones parten del siguiente concepto: a la lógica proposicional **no** le interesa cómo determinar si cada proposición *simple* es verdadera o falsa. Esa información le tiene que llegar “desde afuera” a la lógica. Una vez que se asignaron valores de verdad a cada proposición simple que nos interesa (o sea, que nos dijeron para cada una si es verdadera o falsa), **a partir de esa información** se puede calcular el valor de verdad de proposiciones complejas.

Una valuación representa la información que tiene que venir desde afuera: a cada letra proposicional, que representa una proposición simple, se le asigna un valor de verdad. A partir de ahí, usando tablas de verdad se puede calcular el valor de una fórmula compleja.

Un resultado importante de la lógica es que no hace falta conocer el valor de verdad de todas las proposiciones simples del mundo para calcular el valor de verdad de una proposición compleja: alcanza con conocer el valor de verdad **de las proposiciones simples (letras proposicionales) que aparecen** en la proposición compleja (fórmula) que estamos estudiando.

Otro resultado importante es el descubrimiento de fórmulas que son verdaderas para todas las valuaciones, o falsas para todas las valuaciones. Por lo que dijimos recién, para cubrir todas las valuaciones posibles, alcanza con las combinaciones de valores de verdad de las letras que aparecen en la fórmula. Eso es lo que hacemos cuando armamos la tabla de verdad de la fórmula.

Por lo tanto, si se arma la tabla de verdad de una fórmula, y da **V** en todos los casos, entonces no hay ninguna valuación posible en el que la fórmula sea falsa. Esto es una tautología. Si da **F** en todas las valuaciones, entonces es una contradicción.

#### 3.1. En lógica de predicados

La idea es la misma:

- una valuación representa la información que debe llegar desde “fuera de la lógica”.
- a partir de esta información, podemos calcular el valor de verdad de una fórmula compleja.
- para estudiar todas las valuaciones posibles, alcanza con mirar lo que aparece en la fórmula. Acá hay una diferencia: lo que aparece no son letras, sino predicados.
- si una fórmula es verdadera en toda valuación posible, entonces es tautología. Si es falsa en toda valuación posible, entonces es contradicción.

Además de la diferencia entre letras y predicados, hay otra diferencia importante: las tablas de verdad se usan pero no alcanzan, hay que agregarle el análisis cuando aparece un  $\forall$  o un  $\exists$ .

## 4. Uso de leyes lógicas

Entre las leyes lógicas incluidas en la guía oficial de lógica, distinguimos entre

1. las que se refieren a esquemas de **consecuencia**, en las que aparece el símbolo  $\Rightarrow$ . Por ejemplo la ley de *simplificación*:  $A \wedge B \Rightarrow A$ .
2. las que se refieren a **equivalencia** entre fórmulas, en las que aparece el símbolo  $\Leftrightarrow$ . Por ejemplo la ley de *definición del condicional*:  $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$ .

Las leyes de **equivalencia** se pueden usar en cualquier demostración, de equivalencia o de consecuencia, en cualquiera de los dos sentidos, o sea, tanto de izquierda a derecha como de derecha a izquierda. Por ejemplo la ley de definición del condicional se puede usar para

a partir de  $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$ , obtener  $\neg(p \wedge q) \vee (r \vee s)$

y también en el otro sentido, o sea,

a partir de  $\neg(p \wedge q) \vee (r \vee s)$  obtener  $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$

Decimos que las leyes de equivalencia son “doble mano”.

En cambio, las leyes de **consecuencia** tienen varias restricciones.

1. Pueden usarse solamente en demostraciones de consecuencia, no en demostraciones de equivalencia.
2. Pueden usarse solamente de izquierda a derecha. Por ejemplo no es correcto obtener, a partir de la premisa  $p$ , la conclusión  $p \wedge q$  usando la ley de simplificación; la ley permite tomar como premisa  $p \wedge q$  y obtener  $p$  como conclusión, *pero no al revés*. Decimos que las leyes de consecuencia son “mano única”.

Además, las leyes de consecuencia no pueden usarse en cualquier lugar dentro de una fórmula. Hay que tener en cuenta estas pautas

- Si una fórmula tiene la forma  $A \wedge B$ ,  $A \vee B$ , o  $A \underline{\vee} B$ , entonces se pueden usar las leyes de consecuencia sobre  $A$  y también sobre  $B$ .
- Si una fórmula tiene la forma  $A \rightarrow B$ , entonces se pueden usar las leyes de consecuencia sobre  $B$ , pero **no** se pueden usar sobre  $A$ .
- Si una fórmula tiene la forma  $\neg A$ , entonces **no** se pueden usar las leyes de consecuencia sobre  $A$ .
- Si una fórmula tiene la forma  $A \leftrightarrow B$ , entonces **no** se pueden usar las leyes de consecuencia ni sobre  $A$  ni sobre  $B$ .

Por ejemplo, usando simplificación:

- Se puede justificar  $(p \wedge q) \vee r \Rightarrow p \vee r$ . En este caso la fórmula tiene la forma  $A \vee B$ , donde  $A$  es  $p \wedge q$  y  $B$  es  $r$ , y se está usando simplificación sobre  $A$ .
- Análogamente, se puede justificar  $(p \wedge q) \wedge r \Rightarrow p \wedge r$ , y también  $r \vee (p \wedge q) \Rightarrow r \vee p$ .
- Se puede justificar  $r \rightarrow (p \wedge q) \Rightarrow r \rightarrow p$ , pero **no** se puede justificar  $(p \wedge q) \rightarrow r \Rightarrow p \rightarrow r$ .
- Finalmente, **no** se puede justificar  $\neg(p \wedge q) \Rightarrow \neg p$ , ni tampoco  $(p \wedge q) \leftrightarrow r \Rightarrow p \leftrightarrow r$ .

**¡OJO!** la cosas no termina acá.

Uno puede tener ganas de usar una ley de consecuencia “más adentro” en una fórmula. Por ejemplo, usar simplificación para justificar que

$s \rightarrow \neg((\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \vee r) \Rightarrow s \rightarrow \neg(\mathbf{p} \vee r)$  es correcto (se resalta la parte de la fórmula en la que se aplicó simplificación).

Esto ¿vale o no vale?

Si quiero usar una ley de consecuencia adentro de una fórmula, **cada paso** en el que voy para adentro tiene que ser uno de los casos en los que se pueden usar las leyes de consecuencia. En el ejemplo:

- la fórmula tiene la forma  $A \rightarrow B$  (la flecha es el conectivo principal), y queremos usar simplificación dentro de  $B$ , hasta acá vamos bien, pero
- mirando adentro del  $B$  de la implicación, vemos que tiene la forma  $\neg A$  —donde  $A = (p \wedge q) \vee r$ —, es un caso en que no vale usar leyes de consecuencia. Por lo tanto, la aplicación de simplificación es incorrecta, no vale usar simplificación ahí.

Para evitarnos problemas, tratamos de evitar usar leyes de consecuencia muy adentro de una fórmula. Más bien tratamos de extraer la parte de la fórmula en cuestión, y recién después hacer el paso de consecuencia.

## Un poco de justificación

Empecemos con las leyes de equivalencia, ¿por qué se pueden usar en todos lados?

Una ley de equivalencia indica que dos fórmulas son equivalentes, o sea, que dicen lo mismo. Por lo tanto, es razonable que si saco una parte de una fórmula y la reemplazo por otra que dice lo mismo que la que saqué, el sentido general de la fórmula no cambie.

Por otro lado, si  $A \Leftrightarrow B$ , entonces son correctos tanto  $A \Rightarrow B$  como  $B \Rightarrow A$ . Repasemos:  $A \Leftrightarrow B$  quiere decir que en cualquier valuación tienen el mismo valor, o sea, o bien son verdaderas las dos o bien son falsas las dos. Entonces, si tengo una valuación  $v$  tal que  $v(A) = V$ , entonces seguro que  $v(B) = V$ , que es exactamente el caso en que  $A \Rightarrow B$  es correcto. Y lo mismo para  $B \Rightarrow A$ . Por eso las leyes de equivalencia se pueden usar en cualquier sentido en las demostraciones de consecuencia.

Por otro lado, puede ser que  $A \Rightarrow B$  sea correcto pero que no valga  $A \Leftrightarrow B$ : si hay una valuación  $v$  tal que  $v(A) = F$  y  $v(B) = V$ , entonces  $A$  y  $B$  no son equivalentes, aunque  $A \Rightarrow B$  sea correcto (o sea, aunque en todas las valuaciones en las que pasa que  $v(A) = V$ , también pasa que  $v(B) = V$ ). Por eso no se pueden usar las leyes de consecuencia en las demostraciones de equivalencia.

Para ver por qué en algunos lugares se pueden usar las leyes de equivalencia y en otros no, hay que ver en cada caso si los esquemas de consecuencia que se obtienen son correctos o no. Verlo en general escapa a lo que cubre la materia, aunque vale preguntar, claro. Sí lo podemos ver con un ejemplo. Supongamos que queremos demostrar que  $(p \wedge q) \vee A \Rightarrow B$ , o sea, que cualquier valuación que verifica  $v((p \wedge q) \vee A) = V$  también verifica  $v(B) = V$ .

Un paso de simplificación nos da  $(p \wedge q) \vee A \Rightarrow p \vee A$ . Supongamos que seguimos, y cerramos una demostración de  $p \vee A \Rightarrow B$ . ¿Puedo afirmar tranquilo que  $(p \wedge q) \vee A \Rightarrow B$ ? Tomemos una valuación en la que  $v((p \wedge q) \vee A) = V$ . Hay solamente dos posibilidades. Si  $v(p \wedge q) = V$ , entonces seguro  $v(p) = V$ , por lo tanto  $v(p \vee A) = V$ , y como llegamos a  $p \vee A \Rightarrow B$ , seguro  $v(B) = V$ . Si  $v(A) = V$ , entonces  $v(p \vee A) = V$ , y otra vez llegamos a  $v(B) = V$ . Listo, no hay más casos, seguro que  $(p \wedge q) \vee A \Rightarrow B$  es correcta, porque cualquier valuación que hace verdadera la premisa, también hace verdadera la conclusión.

## 5. Demostraciones de consecuencia

Detallamos una posible demostración de validez para dos esquemas lógicos. Para terminar de entenderlas, se recomienda anotar en cada paso, cuál es el  $A$ , el  $B$ , etc. respecto de la definición de la ley lógica.

Por ejemplo, en el paso

$$\neg((p \rightarrow q) \wedge r) \Rightarrow \neg(p \rightarrow q) \vee \neg r$$

en el que se usa De Morgan, si miro la definición de De Morgan de la guía, o sea

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

vemos que  $A$  es  $p \rightarrow q$  y  $B$  es  $r$ .

### Primera demostración

Nos piden demostrar que el siguiente esquema de consecuencia es correcto

$$(p \wedge q) \rightarrow r \Rightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

Hacemos así

$$\begin{aligned} (p \wedge q) \rightarrow r & \\ \Rightarrow (\neg(p \wedge q)) \vee r & \quad \text{Def. condicional} \\ \Rightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee r & \quad \text{De Morgan} \\ \Rightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r) & \quad \text{Asociatividad} \\ \Rightarrow \neg p \vee (q \rightarrow r) & \quad \text{Def. condicional} \\ \Rightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r) & \quad \text{Def. condicional} \end{aligned}$$

En los dos últimos casos, estamos usando la definición de condicional de derecha a izquierda.

Este esquema de consecuencia también es correcto al revés, o sea,

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$$

Para convencerse, alcanza con ver que todas las leyes que usamos se pueden usar en ambos sentidos. Por lo tanto, usando la misma demostración con los pasos en orden inverso, y usando cada regla en el sentido inverso que en la demostración que armamos, se llega. Hagámoslo

$$\begin{aligned} p \rightarrow (q \rightarrow r) & \\ \Rightarrow \neg p \vee (q \rightarrow r) & \quad \text{Def. condicional} \\ \Rightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r) & \quad \text{Def. condicional} \\ \Rightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee r & \quad \text{Asociatividad} \\ \Rightarrow \neg(p \wedge q) \vee r & \quad \text{De Morgan} \\ \Rightarrow (p \wedge q) \rightarrow r & \quad \text{Def. condicional} \end{aligned}$$

### Segunda demostración

Nos piden demostrar que el siguiente esquema de consecuencia es correcto

$$p \wedge ((p \vee q) \rightarrow \neg(r \vee s)) \Rightarrow \neg r$$

Allá vamos

$$\begin{aligned} p \wedge ((p \vee q) \rightarrow \neg(r \vee s)) & \Rightarrow \neg r \\ \Rightarrow (p \vee q) \wedge ((p \vee q) \rightarrow \neg(r \vee s)) & \quad \text{Adición} \\ \Rightarrow ((p \vee q) \rightarrow \neg(r \vee s)) \wedge (p \vee q) & \quad \text{Conmutatividad} \\ \Rightarrow \neg(r \vee s) & \quad \text{Deducción} \\ \Rightarrow \neg r \wedge \neg s & \quad \text{De Morgan} \\ \Rightarrow \neg r & \quad \text{Simplificación} \end{aligned}$$

## 6. Leyes para lógica de predicados

Aquí están, estas son.

<b>Universal</b>	$\forall x : A[x]$	$\Rightarrow$	$A[a]$
<b>Existencial</b>	$A[a]$	$\Rightarrow$	$\exists x : A[x]$
<b>Universal negado</b>	$\exists x : \neg A$	$\Leftrightarrow$	$\neg \forall x : A$
<b>Existencial negado</b>	$\forall x : \neg A$	$\Leftrightarrow$	$\neg \exists x : A$

¡¡OJO una cosa!!

$x$  puede ser **cualquier** variable, o sea, estas leyes valen para  $x$ , para  $y$ , para cualquier variable. Análogamente,  $a$  puede ser cualquier constante.

¿Qué es la notación  $A[x]$  /  $A[a]$ ? Quiere decir que  $A[x]$  es una fórmula en donde dice  $x$  adentro, una o varias veces, y  $A[a]$  es la fórmula que queda si se reemplazan todas las  $x$  por  $a$ . Acá  $x$  es una variable y  $a$  una constante.

Tomando la ley lógica **Universal**, la premisa puede ser cualquier fórmula cuyo conectivo principal es un  $\forall x$ , y la conclusión es la misma fórmula sin el  $\forall x$  y reemplazando las  $x$  por una constante  $a$ , la que yo quiera.

Entonces, usando esta ley podemos decir que

$$\forall x : p(x) \vee \neg(q(x) \rightarrow r(x)) \Rightarrow p(b) \vee \neg(q(b) \rightarrow r(b))$$

En este caso  $A[x]$  es  $p(x) \vee \neg(q(x) \rightarrow r(x))$ , la fórmula que está adentro del  $\forall$ . Estoy usando la ley con la constante  $b$ , entonces la conclusión es  $A[b]$ , que es  $p(b) \vee \neg(q(b) \rightarrow r(b))$ , el resultado de reemplazar las  $x$  por  $b$ .