Conjuntos – material de clase

1. Cuentas con cardinales

Varios de los ejercicios de la guía salen pensando en *cardinales* de conjuntos, o sea, cuántos elementos tiene cada conjunto. Hay algunas reglas para calcular cardinales que nos van a servir. Veámoslas en un ejemplo en el que se usan.

1.1. Dos conjuntos

Supongamos que nos dan este ejercicio para resolver

> En una reunión de amigos se le pregunta a cada uno de qué quiere helado, hay de frutilla y de chocolate. Hay cuatro que no quieren helado, ocho quieren de frutilla y diez de chocolate. En particular, hay tres que quieren los dos gustos. ¿Cuántas personas hay en la reunión?

Una cuenta fácil es: 4 + 8 + 10 = 22, donde 4 son los que no quieren helado, 8 son los que quieren frutilla y 10 los que quieren chocolate. Es como hacer lo siguiente: pedir que levanten la mano primero a los que quieren frutilla, después los que quieren chcoolate, y después los que no quieren ninguno de los dos. El total de gente es la suma de las cantidades de las tres levantadas de mano.

Lamentablemente, este razonamiento tiene un error. Para darnos cuenta de cuál es este error, pensemos en una persona, p.ej. Roque, que quiere helado de los dos sabores. Al hacer las tres preguntas, Roque va a levantar la mano **dos** veces, una para frutilla y la otra para chocolate. Entonces estamos contando dos veces los que quieren los dos sabores. Para obtener la cantidad real de gente, podemos restar una vez lo que sumamos dos veces; en este caso sabemos que son dos personas.

La cuenta da entonces 4 + 8 + 10 - 3 = 19. Este es el resultado correcto.

Pensemos esta situación definiendo conjuntos. Nos conviene tomar como *conjunto universal*, **U**, al conjunto de todas las personas que están en la reunión. Dentro de este universal tenemos el conjunto F de las personas que quieren frutilla, y el conjunto C de las personas que quieren chocolate. Lo que hay que averiguar es el *cardinal* de **U**, o sea, cuántos elementos tiene. En ningún momento se identifica a una persona en particular. Recordemos que la notación $|A|$ se usa para indicar al cardinal de un conjunto A.

Los cuatro que no quieren helado son los que no están ni en F ni en C, o sea, $|\overline{F \cup C}| = 4$. Para llegar a $|\mathbf{U}|$, alcanza con sumar $|F \cup C|$. La cuenta fácil, pero errónea, nos dice que como $|F| = 8$ y $|C| = 10$, entonces $|F \cup C| = 18$. Pensemos ahora en un elemento de $F \cap C$; Roque sería un ejemplo. Este elemento está entre los 8 de C, y **también** entre los 10 de F. Entonces, al hacer la suma 8 + 10, a los elementos de $F \cap C$ los estamos sumando dos veces.

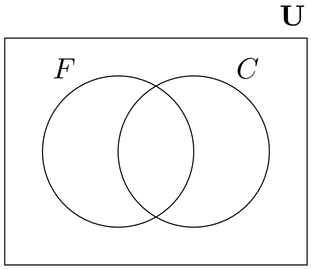
De este razonamiento sale la cuenta que tal vez viste en la secundaria o polimodal, o en el ingreso

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

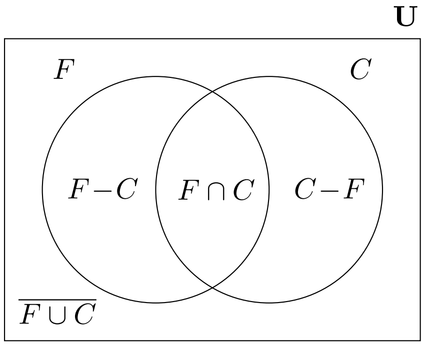
Como hacer la suma $|A| + |B|$ suma dos veces los que están en $A \cap B$, después los resto para considerarlos una sola vez.

En este caso obtenemos $|F \cup C| = 8 + 10 - 3 = 15$. Por lo tanto en la reunión hay 15 + 4 = 19 personas.

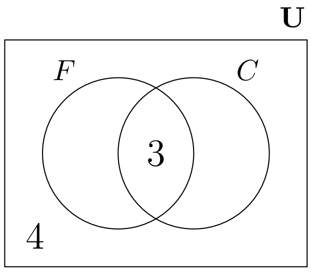
Otra forma de ver este problema, y en general problemas de cálculo de cardinales, es hacer el diagrama de Venn



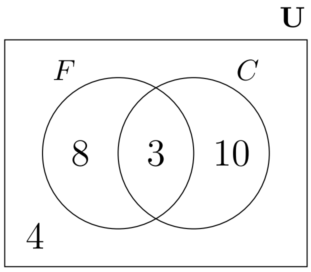
y poner **números** en cada sección, indicando cada cardinal. Antes de seguir, veamos que podemos asociar una expresión de conjuntos a cada sección del diagrama.



Rápidamente podemos ubicar los cuatro que no quieren helado, y los dos que quieren ambos gustos. Nos queda

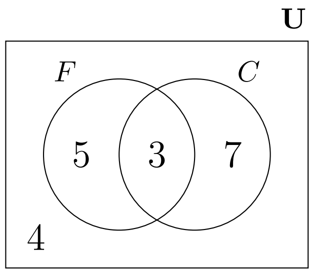


Si pusiéramos el 8 y el 10 en los sectores que quedaron vacíos, o sea



estaríamos cometiendo un error. En este dibujo $|F|$ resulta 8+3=11, y $|C|$ resulta 3+10 = 13, que no es lo que nos dijeron.

Los 8 de $|F|$ tienen que estar **repartidos** entre la sección $F-C$ y la sección $F \cap C$. Si en $F \cap C$ hay 3, entonces en la otra quedan 5, para que la suma dé 8. Para completar la sección de $C-F$ se hace la cuenta análoga. Nos queda el diagrama correcto



Una vez obtenido el diagrama correcto, responder la pregunta es sencillo: se suman los números de cada sección. En este caso: 5+3+7+4 = 19.

Una observación antes de pasar a otro tema: mirando el diagrama de Venn se pueden responder otras preguntas. En el ejemplo, nos podrían preguntar: cuántos quieren chocolate y no frutilla, cuántos quieren frutilla y no chocolate, cuántos quieren exactamente un gusto, cuántos quieren *a lo sumo* un gusto. Las respuestas en este caso son 7, 5, 12 y 16 (pensar por qué 16) respectivamente.

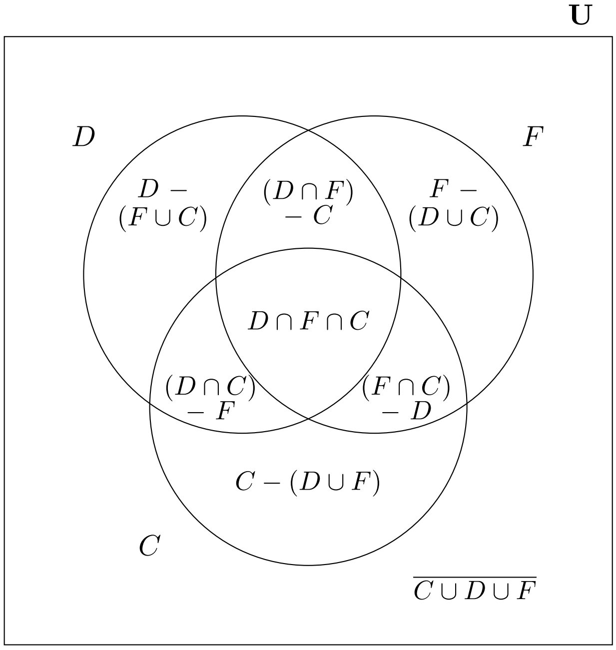
Cada pregunta también tiene asociada una expresión de conjuntos. Para las preguntas de recién, las expresiones son $C - F$, $F - C$, $F \Delta C$ y $\overline{F \cap C}$ respectivamente. También tenemos que aprender a darnos cuenta cuál es la expresión de conjuntos que corresponde a cada frase en castellano, similar a lo que hicimos en lógica.

1.2. Tres conjuntos

Consideremos este problema, que agrega un nuevo sabor.

> En una reunión se juntan 40 amigos, piden helado de dulce de leche, frutilla y chocolate. Sabemos que en total 15 personas pidieron comer dulce de leche. De estos 15, 7 pidieron frutilla, y 6 pidieron chocolate; en ambos casos, además del dulce de leche. También nos dicen que en total 13 personas pidieron frutilla, de los cuales 9 también pidieron chocolate. Finalmente, nos enteramos que la cantidad total de personas que pidieron chocolate es 20, y que hay 10 personas que no pidieron helado de ninguno de estos tres sabores. Se quiere saber: ¿Cuántas personas pidieron helado de los tres sabores? ¿Cuántas personas pidieron exactamente un sabor?

En este caso, dentro del conjunto universal de las personas que fueron a la reunión, podemos reconocer los conjuntos D, F y C, respectivamente de las personas que pidieron dulce de leche, frutilla y chocolate. El diagrama de Venn correspondiente queda con **ocho** secciones



En cada sector del diagrama vamos a poner un número. La suma de los ocho números que pongamos tiene que dar 40, que es la cantidad total de gente; dicho "en conjuntos", 40 es $|\,\mathbf{U}\,|$.

Como también nos están diciendo que la cantidad de gente que no quiere helado de ninguno de los tres sabores, o sea $|\,\overline{C \cup D \cup F}\,|$, es 10, nos queda que en los otros 7 sectores, correspondientes a $C \cup D \cup F$, hay que repartir 30 personas.

En este caso, si para obtener $|\,D \cup F \cup C\,|$ simplemente hacemos la suma 15+13+20 = 48, entonces estamos contando mucha gente más de una vez. Por eso el resultado nos da más de lo que debería dar, que es 30.

Pensemos otra vez que hubo levantada de manos, ahora cuatro veces, una por cada gusto, y una más para los que no quieren ninguno de los tres gustos. Una persona que quiere dos gustos va a levantar la mano dos veces, por lo tanto, en la cuenta 15+13+20 está sumando dos veces. Pensemos ahora en una persona que quiere de los tres gustos. Esta persona va a levantar la mano tres veces. Por lo tanto, en la cuenta sencilla la estamos contando tres veces. Para confirmar lo que decimos, observamos que esta persona está entre los 15 que quieren dulce de leche, **también** está entre los 13 que quieren frutilla, y **también** está entre los 20 que quieren chocolate.

En el diagrama, las personas que estamos contando dos veces corresponden a los sectores $(D \cap F) - C$, $(D \cap C) - F$, y $(F \cap C) - D$. Las personas que estamos contando tres veces son las que están en $D \cap F \cap C$.

Al igual que en el ejercicio con dos conjuntos, para ajustar la suma, vamos a restar cosas. Los datos que nos dan en estos casos son los de $D \cap F$, $D \cap C$ y $F \cap C$; son 7, 6 y 9 personas respectivamente. ¡OJO! Cada uno de estos números también debe repartirse entre varios sectores, en este caso entre dos sectores. Por ejemplo, las 7 personas de $D \cap F$ están repartidas entre los sectores $(D \cap F) - C$ y $D \cap F \cap C$.

¿Qué pasa si a la suma que hicimos antes le restamos estos tres números? Ahora el resultado que obtenemos es 15+13+10-7-6-9 = 26. Epa, ahora me da menos del resultado esperado, que es 30. Parece que restamos de más. ¿Qué pasó?

Mirando en el diagrama qué es lo que restamos, vemos que al restar 7 estoy restando los de $(D \cap F) - C$ y los de $D \cap F \cap C$, al restar 6 estoy restando los de $(D \cap C) - F$

y otra vez los de $D \cap F \cap C$, y al restar los 9 estoy restando los de $(F \cap C) - D$ y (por tercera vez) los de la $D \cap F \cap C$.

Para cada una de las "intersecciones de dos", $(D \cap F) - C$, $(D \cap C) - F$ y $(F \cap C) - D$, habíamos sumado dos veces al sumar 15+13+20, y después restando una, está perfecto. Los de la intersección de tres, los sumamos tres veces en 15+13+20, y ahora los restamos tres veces. O sea, **los restamos una vez de más**, para llegar al número correcto para $|\, D \cup F \cup C \,|$ tenemos que volver a sumarlos.

Tooooodo este discurso justifica la fórmula

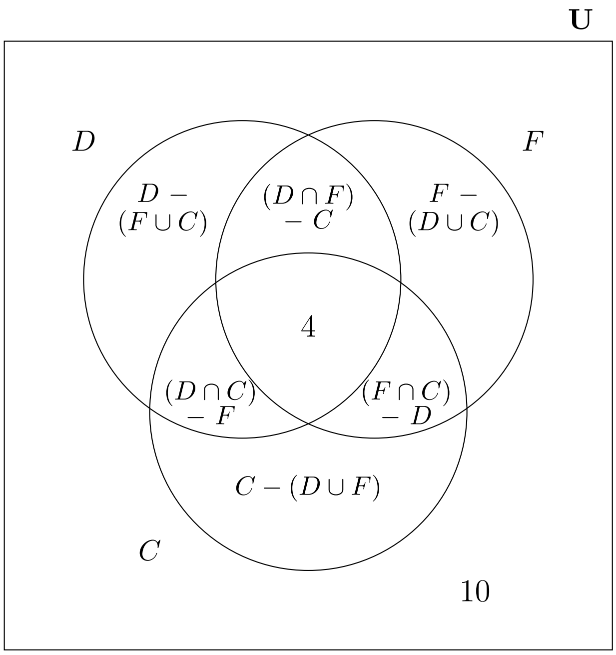
$$|\, A \cup B \cup C \,| = |\, A \,| + |\, B \,| + |\, C \,| - |\, A \cap B \,| - |\, A \cap C \,| - |\, B \cap C \,| + |\, A \cap B \cap C \,|$$

En este caso tenemos todos los datos, excepto $|\, A \cap B \cap C \,|$. Nos queda

$30 = 15 + 13 + 20 - 7 - 6 - 9 + |\, A \cap B \cap C \,|$,

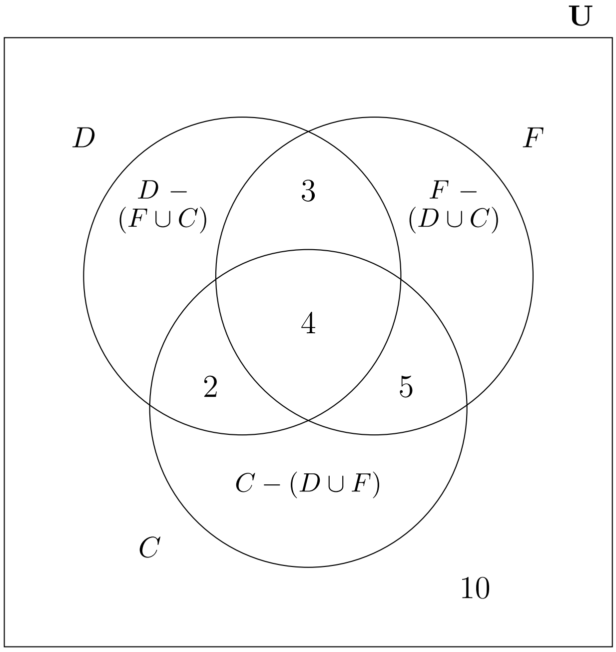
o sea, $30 = 26 + |\, A \cap B \cap C \,|$, por lo tanto $|\, A \cap B \cap C \,| = 30 - 26 = 4$.

Volviendo al diagrama, podemos poner este 4, y además el 10 de los que no pidieron ningún sabor. Nos queda

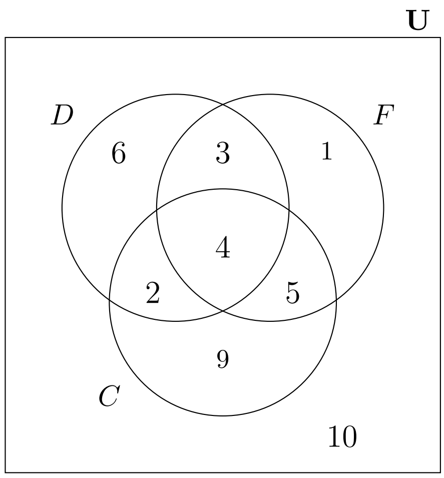


Haciendo algunas cuentas, podemos obtener los números que corresponden a los otros sectores.

Sabemos p.ej. que $|\, D \cap F \,| = 7$, y que estos 7 se reparten entre los cuatro de $D \cap F \cap C$ y los de $(D \cap F) - C$, entonces, en este último quedan 3 personas para poner. Haciendo la misma cuenta para las otras "intersecciones de dos", llegamos a



Obtengamos ahora el número que corresponde a $D-(F\cup C)$. Sabemos que el total de D, que es 15, se reparte entre cuatro sectores. Pero de tres de estos cuatro ya calculamos los cardinales, que son 3, 4 y 2. Entonces nos queda $|\,D-(F\cup C)\,| = 15-(3+4+2) = 6$. Haciendo lo mismo con $F-(D\cup C)$ y con $C-(D\cup F)$, completamos el diagrama



Con los números puestos, es fácil responder las preguntas. Hay 4 personas que pidieron helado de los tres sabores, son los del sector $D\cap F\cap C$. Para obtener los que pidieron exactamente un sabor, hay que sumar las cantidades de los "sectores de uno", o sea $D-(F\cup C)$, $F-(D\cup C)$ y $C-(D\cup F)$. O sea, 6+1+9 = 16 personas en total.

Para resolver los ejercicios de la guía en los que hay que calcular cardinales, hay que hacer distintos tipos de cuentas, para calcular los valores que corresponden a cada sector a partir de algunos datos que se dan.

Para eso hay que usar las técnicas que contamos en esta sección ... y a veces un poco de ingenio.

2. Demostraciones sobre conjuntos

Una de las cosas que aprendemos sobre conjuntos es demostrar que se cumplen algunas propiedades. En algunos casos lo vamos a poder hacer usando las propiedades básicas que están en el resumen de definiciones. En otros, vamos a tener que hacer una demostración usando lo que aprendimos sobre lógica.

Nos van a pedir que demostremos afirmaciones de dos tipos

- o bien que un conjunto está incluido en otro, p.ej. $A \cap B \subseteq A \cap (B \cup C)$,
- o bien que dos conjuntos son iguales, p.ej. $A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A - C)$.

Para hacer estas demostraciones nos vamos a basar en la *pertenencia* de un elemento a un conjunto. Si tenemos dos conjuntos W y Z, afirmar $W \subseteq Z$ es lo mismo que decir que para cualquier elemento a, si sé que $a \in W$, entonces puedo afirmar que $a \in Z$.

Entonces, si nos piden demostrar la afirmación $W \subseteq Z$, vamos a considerar un elemento a cualquiera, vamos a suponer que $a \in W$, y vamos a llegar usando leyes lógicas para consecuencia[1] a que $a \in Z$. Dicho de otra forma, estamos probando que el esquema de consecuencia

$$a \in W \;\Rightarrow\; a \in Z$$

es válido.

Si en cambio nos piden demostrar que $W = Z$, algunas veces vamos a usar la siguiente forma de definir la igualdad:

$$A = B \quad \text{ssi} \quad (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

entonces, para demostrar $W = Z$ vamos a hacer **dos** demostraciones:

1. "la ida": partimos de $a \in W$ y llegamos a $a \in Z$, o sea, demostramos $W \subseteq Z$.
2. "la vuelta": partimos de $a \in Z$ y llegamos a $a \in W$, o sea, demostramos $Z \subseteq W$.

A esta forma de demostrar una igualdad se la llama **demostración por doble inclusión**.

Otra forma de demostrar que los conjuntos W y Z son iguales es demostrar que el esquema de *equivalencia* $a \in W \;\Leftrightarrow\; a \in Z$ es válido, usando únicamente leyes lógicas "doble mano". En particular, si encaramos una demostración de igualdad de conjuntos pensándola como doble inclusión, y al terminar "la ida" nos damos cuenta que usamos en todos los pasos leyes de "doble mano", ya está, lo que hicimos sirve como demostración por equivalencia, y no es necesario hacer una "vuelta".

En resumen, para demostrar propiedades sobre conjuntos, vamos a hacer demostraciones usando leyes lógicas como las que hicimos cuando vimos lógica proposicional.

Vamos a ver que estas demostraciones se parecen, al menos un poco, a lo que uno haría para convencerse de que las propiedades se cumplen. Escribirlo "en lógica" nos da una forma que nos ayuda a no cometer errores.

En estas demostraciones vamos a considerar a la definición de cada operación de conjuntos como una ley de equivalencia. O sea, a las leyes lógicas que están en el resumen de definiciones de lógica, se agregan estas:

[1] o sea, vale usar tanto "mano única" como "doble mano"

$x \in A \cup B$	$\Leftrightarrow$	$x \in A \vee x \in B$	Definición de $\cup$
$x \in A \cap B$	$\Leftrightarrow$	$x \in A \wedge x \in B$	Definición de $\cap$
$x \in \overline{A}$	$\Leftrightarrow$	$\neg(x \in A)$	Definición de la negación
$x \in A - B$	$\Leftrightarrow$	$x \in A \wedge \neg(x \in B)$	Definición de la diferencia
$x \in A \,\Delta\, B$	$\Leftrightarrow$	$(x \in A \wedge \neg(x \in B)) \vee (x \in B \wedge \neg(x \in A))$	
			Definición de la diferencia simétrica

2.1. Primeras demostraciones

Nos piden demostrar lo siguiente:

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

Vamos a encarar la "ida" de una demostración por doble inclusión; haremos después la "vuelta" si es que necesitamos usar leyes "mano única" en la ida.
Entonces, hagamos una demostración que partiendo de $a \in A - (B \cap C)$, llegue a $a \in (A - B) \cup (A - C)$. Allá vamos

$a \in A - (B \cap C)$

(1)	$\Rightarrow$	$a \in A \wedge \neg a \in (B \cap C)$	Def. diferencia
(2)	$\Rightarrow$	$a \in A \wedge \neg(a \in B \wedge a \in C)$	Def. $\cap$
(3)	$\Rightarrow$	$a \in A \wedge (\neg a \in B \vee \neg a \in C)$	De Morgan
(4)	$\Rightarrow$	$(a \in A \wedge \neg a \in B) \vee (a \in A \wedge \neg a \in C)$	Distrib.
(5)	$\Rightarrow$	$(a \in A - B) \vee (a \in A - C)$	Def. diferencia x 2
(6)	$\Rightarrow$	$a \in (A - B) \cup (A - C)$	Def. $\cup$

Miremos esta demostración, a ver si le vemos un sentido más allá de las leyes que aplicamos, que están todas bien.

- Después de aplicar las definiciones (pasos 1 y 2), nos queda lo que uno diría: si $a \in A - (B \cap C)$, entonces a está en A, y además, no es verdad que está a la vez en B y en C (eso es lo que quiere decir que no está en la intersección).
- El uso de De Morgan en el paso 3 también se puede contar en castellano: si no está en la intersección, entonces o no está en uno, o no está en el otro.
- El paso que sigue es la distributiva, que representa que nos quedan dos casos para pensar: caso uno a está en A y no en B, caso dos a está en A y no en C.
- Una vez que aplicamos distributiva, alcanza con darnos cuenta que ya tenemos el resultado que queremos, es aplicar las definiciones de las operaciones "al revés".

También observamos que todas las leyes que usamos son "doble mano". Por lo tanto, nos quedó una demostración de equivalencia, que alcanza para justificar la afirmación $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$. O sea que terminamos, no hace falta hacer una "'vuelta".

Pasemos a otro caso: nos piden demostrar $A \cap B) \cup C \subseteq A \cup B \cup C$.

En este caso nos piden demostrar una inclusión. Por lo que haablamos en la sección anterior, alcanza con hacer una demostración de consecuencia arrancando de $a \in (A \cap B) \cup C$, que llegue a $a \in A \cup B \cup C$. Allá vamos.

$$
\begin{array}{lll}
a \in (A \cap B) \cup C & & \\
\Rightarrow & a \in (A \cap B) \vee a \in C & \text{Def. } \cup \\
\Rightarrow & (a \in A \wedge a \in \cap B) \vee a \in C & \text{Def. } \cap \\
\Rightarrow & a \in A \vee a \in C & \text{Simplif.} \\
\Rightarrow & a \in A \vee a \in B \vee a \in C & \text{Adición} \\
\Rightarrow & a \in A \cup B \cup C & \text{Def. } \cup
\end{array}
$$

2.2. Vacío y universal

En varias demostraciones van a aparecer el conjunto vacío, y en alguna nos puede aparecer el conjunto universal. Vamos a traducir estos conjuntos a condiciones relacionadas con la pertenencia.

¿Cuándo es cierto que $a \in \emptyset$? Nunca, el vacío justamente es el conjunto que **no tiene** elementos. ¿Cuándo es cierto que $a \in \mathbf{U}$? Siempre. Esto nos hace acordar a nuestros amigos **F** y **V**, o sea, el "señor falso" y el "señor verdadero".

Se agregan estas nuevas leyes de definición

$$
\begin{array}{rcll}
a \in \emptyset & \Leftrightarrow & \mathbf{F} & \text{Definición de } \emptyset \\
a \in \mathbf{U} & \Leftrightarrow & \mathbf{V} & \text{Definición de } \mathbf{U}
\end{array}
$$

Sabiendo esto, supongamos que nos piden demostrar $Z = \emptyset$ para algún conjunto Z.

Usando el método de la doble inclusión, tenemos que demostrar dos cosas: $Z \subseteq \emptyset$ y $\emptyset \subseteq Z$. Pero ... lo segundo es obvio, el vacío está incluido en cualquier cosa. Entonces, en este caso, alcanza con demostrar solamente "la ida".

Vamos con un ejemplo: demostremos que $((A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})) \cap \overline{A} = \emptyset$. Por lo que dijimos recién, alcanza con hacer "la ida".

$$
\begin{array}{llll}
\multicolumn{4}{l}{a \in (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap \overline{A}} \\
(1) & \Rightarrow & (a \in A \vee a \in B) \wedge (a \in A \vee \neg a \in B) \wedge (\neg a \in A) & \text{Def. } \cup, \cap, \text{ compl.} \\
(2) & \Rightarrow & (a \in A \vee (a \in B \wedge \neg a \in B)) \wedge (\neg a \in A) & \text{Distrib.} \\
(3) & \Rightarrow & (a \in A \vee \mathbf{F}) \wedge (\neg a \in A) & \text{Complem.} \\
(4) & \Rightarrow & a \in A \wedge \neg a \in A & \text{Ident.} \\
(5) & \Rightarrow & \mathbf{F} & \text{Complem} \\
(6) & \Rightarrow & a \in \emptyset & \text{Def. } \emptyset
\end{array}
$$

Un comentario: después del primer paso, una alternativa a usar distributividad "al revés", es hacerlo más parecido a lo que hicimos en "la vuelta" de la demostración anterior, agregando $\neg a \in B$ en el primer paréntesis y $a \in B$ en el segundo usando adición, con lo que quedan iguales, después nos quedamos con una sola "copia" usando idempotencia, con lo que llegamos exactamente al punto (2).

2.3. Demostración con condiciones

Ahora nos piden demostrar lo siguiente

$$B \subseteq C \quad \Rightarrow \quad A \cap B \subseteq A \cap C$$

Cuando nos toca algo así, lo consideramos como una propiedad que tiene una condición. La propiedad que tenemos que demostrar es lo que está a la derecha, en este caso, $A \cap B \subseteq A \cap C$. Pero OJO, *no se afirma que esta propiedad se da en todos los casos*, solamente se garantiza si se cumple la condición que está a la izquierda, en este caso, $B \subseteq C$.

Vamos a considerar que las condiciones son datos adicionales que nos dan, que podemos usar durante la demostración. En este ejemplo el dato que nos dan es una inclusión. Esto equivale a que podemos usar
$a \in B \;\Rightarrow\; a \in C$
como dato: si en mi demostración aparece $a \in B$, puedo reemplazarlo por $a \in C$. Vamos a llamar **hipótesis** a estas condiciones, cuando las usemos en la demostración.

Usando la hipótesis, lo que nos piden demostrar sale fácil.

$a \in A \cap B$

(1)	$\Rightarrow$	$a \in A \wedge a \in B$	Def. $\cap$
(2)	$\Rightarrow$	$a \in A \wedge a \in C$	Hipótesis
(3)	$\Rightarrow$	$a \in A \cap C$	Def. $\cap$

Antes de seguir, un par de variantes.

- Si la hipótesis tiene un $=$ en lugar de un $\subseteq$, quiere decir que es una hipótesis "doble mano".
- Supongamos que nos piden demostrar $A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; A - B = \emptyset$.
  En este caso ¿cuál es la hipótesis, qué es lo que hay que demostrar?
  Vamos a usar una idea parecida a la doble inclusión: vamos a hacer dos demostraciones, una en el sentido $\Rightarrow$ y otra en el sentido $\Leftarrow$.
  En el ejemplo vamos a demostrar primero $A \subseteq B \;\Rightarrow\; A - B = \emptyset$, y después $A - B = \emptyset \;\Rightarrow\; A \subseteq B$. A estas dos partes de la demostración grande también las llamamos "ida" y "vuelta".

2.4. Agregando cosas más potentes – identidad y complementación

Hagamos una más: nos piden demostrar que

$$A \cap B = \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad A - B = A$$

En este caso, la hipótesis parecería doble mano, o sea, $a \in A \cap B \;\Leftrightarrow\; a \in \emptyset$, pero recién vimos que la dirección $a \in \emptyset \;\Rightarrow\; a \in A \cap B$ es obvia. Por lo tanto, la información realmente interesante en la hipótesis es $a \in A \cap B \;\Rightarrow\; a \in \emptyset \;\Leftrightarrow\; \mathbf{F}$ por definición del conjunto vacío.

Ahora que entendimos bien la hipótesis, pasemos a lo que tenemos que demostrar. Vamos a hacer una demostración por doble inclusión. La ida es fácil

$a \in A - B$	$\Rightarrow$	$a \in A \wedge \neg a \in B$	Def. $-$
	$\Rightarrow$	$a \in A$	Simplif.

Como en esta demostración usamos simplificación, que es una ley doble mano, entonces tenemos que hacer la vuelta. O sea, tenemos que hacer una demostración que, partiendo de $a \in A$, llegue a $a \in A \wedge \neg a \in B$ (por cómo es la definición de la diferencia).

Tratemos de pensarlo un poco intuitivamente. Para un a cualquiera, tenemos solamente dos opciones, o está en B o no está en B, o sea $a \in B \vee \neg a \in B$. Es interesante ver que la ley de **complementación** dice exactamente esto: $a \in B \vee \neg a \in B$ es equivalente a $\mathbf{V}$. A cualquiera de estas dos opciones le podemos agregar el punto de partida, que es $a \in A$.

Para llegar al resultado deseado, alcanza con descartar la posibilidad $a \in B$. Ahí nos va a ayudar la hipótesis: $a \in A \wedge a \in B$ (o sea, $a \in A \cap B$) no puede ser, es equivalente a $\mathbf{F}$. Por lo tanto, la única opción posible es $a \in A \wedge \neg a \in B$, exactamente lo que queremos.

Visto desde las fórmulas, lo que debemos lograr es agregar $\wedge\neg a \in B$ a nuestro punto de partida $a \in A$.

Para eso, usamos la ley de ley de **identidad** (mirada "al revés", o sea $A \Leftrightarrow A \wedge \mathbf{V}$) para transformar $a \in A$ en $a \in A \wedge \mathbf{V}$ (o sea, agregamos "$\wedge$ algo"), y luego la de **complementación** que ya mencionamos, que nos dice que $\mathbf{V} \Leftrightarrow a \in B \vee \neg a \in B$. Observar que hicimos en fórmulas lo mismo que dijimos del lado más intuitivo, o sea, agregar a nuestro punto de partida que o bien $a \in B$, o bien $\neg A \in B$. Armemos la demostración.

$$\begin{array}{rcll}
a \in A & \Rightarrow & a \in A \wedge \mathbf{V} & \text{Ident.} \\
& \Rightarrow & a \in A \wedge (a \in B \vee \neg a \in B) & \text{Complem.} \\
& \Rightarrow & (a \in A \wedge a \in B) \vee (a \in A \wedge \neg a \in B) & \text{Distrib.} \\
& \Rightarrow & (a \in A \cap B) \vee (a \in A - B) & \text{Def. } \cap\text{, Def. } - \\
& \Rightarrow & \mathbf{F} \vee (a \in A - B) & \text{Hipótesis} \\
& \Rightarrow & a \in A - B & \text{Ident.}
\end{array}$$

Este "pase mágico" de usar identidad más complementación, no tiene en realidad nada de magia, es poner en fórmulas la posibilidad de agregar la frase "o pasa X o pasa 'no X' " al dato del cual parto.

Nos va a servir en varias demostraciones: transformamos una premisa A en $A \wedge (B \vee \neg B)$ y luego en $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$, y a partir de esta forma, descartamos una de las dos opciones $A \wedge B$ o $A \wedge \neg B$, muchas veces usando una hipótesis que nos dan.