Relaciones de equivalencia

1. Verificamos que una relación es de equivalencia

Consideremos esta relación binaria, definida en el conjunto A de los alumnos de la UNQ: $a\,R\,b$ ssi la inicial del nombre de a y la del nombre de b son la misma letra.

Veamos qué propiedades cumple esta relación:

- Es **reflexiva**.
  Verifiquémoslo: si tomamos una persona cualquiera a, tiene que ser verdadero que la inicial del nombre de a es la misma que ... la inicial del nombre de a.

- Es **simétrica**.
  Verifiquémoslo: si tomamos dos personas a y b que están relacionadas, lo que pasa es que las iniciales de los nombres de a y de b son la misma. P.ej. los nombres de a y de b podrían ser Florencia y Facundo, a y b están relacionados porque los dos nombres empiezan con F. Tenemos $a\,R\,b$.
  ¿Será cierto que $b\,R\,a$? Seguro que sí, porque ... Facundo y Florencia (los nombres de b y de a empiezan los dos con F.

- Es **transitiva**.
  Para verificar que R es transitiva, lo que tenemos que asegurar es que siempre se da este dibujo: $\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend right] \arrow[rr, bend left, dashed] & b \arrow[r, bend right] & c \end{tikzcd}$ o sea, si se dan las dos líneas llenas ($a\,R\,b$ y $b\,R\,c$) se tiene que dar la línea punteada ($a\,R\,c$).

  Para ver qué pasa con la relación R, tomemos tres personas a, b y c tales que $a\,R\,b$ y $b\,R\,c$. Supongamos otra vez que a se llama Florencia y b se llama Facundo, tienen que empezar con la misma letra para que sea verdadero $a\,R\,b$. El nombre de c no puede empezar con cualquier letra, para que sea verdadero $b\,R\,c$ tiene que pasar que el nombre de c también empiece con F.
  Entonces la inicial de los nombres de a y de c tiene que ser la misma, en el ejemplo F, para que las dos sean iguales a la de b.

Para las relaciones de equivalencia vamos a usar el símbolo $\sim$ en lugar de la letra R. Por lo tanto, dado que la relación que estudiamos sí es de equivalencia, la vamos a llamar $\sim$ de aquí en adelante.

2. Clases de equivalencia

Como $\sim$ es una relación de equivalencia, tiene sentido pensar en la **clase de equivalencia** de un elemento, ponele a que es una alumna llamada Florencia. La definición es

$$[a]_\sim = \{x \text{ t.q. } x\,R\,a\}$$

¿Cuáles son los elementos de $[a]_\sim$? Son los alumnos que están relacionados con Florencia, o sea, aquellos cuyo nombre empiece con F.
Si d es un alumno que se llama Horacio, ¿quiénes serán los elementos de $[d]_\sim$? Pues los alumnos cuyo nombre empiece con H.

Algunas cosas a destacar acá.

1. $[a]_\sim \subseteq A$, o sea, $[a]_\sim$ es un subconjunto del conjunto en el que está definida la relación.

2. La afirmación $x \in [a]_\sim \wedge y \in [a]_\sim \;\Rightarrow\; x\,R\,y$ es válida. O sea, si agarro dos elementos cualesquiera en una misma clase de equivalencia, entonces están relacionados.

3. También es válido $x\,R\,y \;\Rightarrow\; [x]_\sim = [y]_\sim$. Para darse cuenta, piensen en un a y un b que verifiquen $a\,R\,b$ (o sea, la premisa), y piensen quiénes son $[a]_\sim$ y $[b]_\sim$. Miren la definición de igualdad de conjuntos en el resumen de definiciones que les dimos.

4. Por el otro lado, $x \not R\, y \;\Rightarrow\; [x]_\sim \cap [y]_\sim = \emptyset$. Para darse cuenta, piensen en un a y un b que verifiquen $a \not R\, b$ (o sea, la premisa), partan de $x \in [a]_\sim \cap [b]_\sim$, y lleguen a **F**.

3. Partición de un conjunto

Hay otra cosa importante a destacar: cada clase de equivalencia para la relación del ejemplo **está relacionada con una letra**, que es la inicial de todas las personas que están en la clase.

Entonces puedo pensar, para cada letra, en el **bloque** de A que está formado por todos los alumnos cuyo nombre empieza por esa letra: los que empiezan con A, los que empiezan con B, con C, etc.. Vamos a llamar a estos bloques B_A, B_B, B_C, etc.. Podemos decir que la inicial es el **nombre, o etiqueta, que le ponemos a cada bloque**. ¿Cuántos bloques hay? Uno por cada letra.

Otra cosa en la que vamos a pensar es en el **conjunto de índices**, que es el conjunto de los nombres de cada bloque. En este caso es fácil: el conjunto de índices es el conjunto de las letras del abecedario, porque por cada letra va a haber un bloque.

> **OJO OJO**:
> Hay una diferencia importante entre bloques e índices.
> Para cualquier letra x, $B_x \subseteq A$. O sea, los elementos de un bloque son elementos del conjunto que estamos partiendo; en este caso el conjunto de alumnos.
> En cambio, $I \not\subseteq A$. O sea, los índices **no** son necesariamente elementos de A, o sea, puede que sean, puede que no. En este caso se da que no: los elementos de I son *letras*, y una letra no es un alumno.

Con los bloques y los índices armamos una **partición** del conjunto A. Una partición es un conjunto de bloques B_i, uno para cada índice $i \in I$, de forma tal que:

1. $i \neq j \;\Rightarrow\; B_i \cap B_j = \emptyset$ o sea, no puede haber ningún elemento en dos bloques.
2. A es la unión de todos los B_i.
3. ningún bloque B_i es vacío.

4. Conjunto cociente - juntamos relaciones de equivalencia con particiones

Una relación de equivalencia **define** una partición. O sea, dada una relación de equivalencia $\sim$, se puede encontrar un conjunto de índices I y un bloque B_i para cada índice, de forma tal que para cualquier elemento $a \in A$, existe algún $i \in I$ tal que $[a]_\sim = B_i$.

A la partición que queda definida por una relación de equivalencia $\sim$ definida en un conjunto A se la llama **conjunto cociente** de A por $\sim$, notación $A/\sim$.

En el ejemplo, el conjunto cociente para la relación $\sim$ de "el nombre empieza con la misma letra" es la partición cuyo conjunto de índices es el abecedario, y donde si l es una letra, entonces B_l es el conjunto de alumnos cuyo nombre empieza con la letra l. Si tomamos como a a nuestra amiga la alumna llamada Florencia, resulta que $[a]_\sim = B_F$, la clase de equivalencia de Florencia es el bloque de los alumnos cuyo nombre empieza con F. Si d es un alumno llamado Horacio, resulta $[d]_\sim = B_H$. En general, dado un alumno x, su clase de equivalencia $[x]_\sim$ es el bloque formado por los alumnos cuyo nombre empieza con la misma letra que el nombre de x.

Al revés, también podemos decir que una partición de A define una relación de equivalencia en A. Es la relación en la que dos elementos están relacionados si y sólo si están en el mismo bloque de la partición. Si a la partición la llamamos P, a la relación de equivalencia que define la llamamos $\sim_P$, y la definición con fórmulas queda $\forall x : \forall y : x \sim_P y \leftrightarrow (\exists B : B \in P \wedge x \in B \wedge y \in B)$. Fíjense que a la variable que va a representar un bloque de la partición P la estamos llamando B.

En el ejemplo que estamos viendo, si nos dan la partición P en la que los índices son las **letras** y B_i es el conjunto de alumnos cuyo **nombre empieza con la letra** i, va a pasar que $\sim_P$ es la relación de la que venimos hablando: dos alumnos están relacionados ssi su nombre **empieza con la misma letra**. En negrita está el criterio que estamos usando para clasificar a los alumnos, que se puede expresar con una partición o con una relación de equivalencia.

5. Conclusión: ¿qué es una partición?

Es una forma de partir, o clasificar, un conjunto A. En el ejemplo, se clasifica a los alumnos de la UNQ según la inicial de su nombre. Los alumnos que tengan la misma inicial del nombre, van a ir a parar al mismo bloque. El conjunto de índices nos da una idea del criterio de clasificación. En el ejemplo, como estamos clasificando por la inicial del nombre, los índices son las letras, que son las posibles iniciales.

Si vemos la relación de equivalencia que define la partición, los elementos que van a ir a parar al mismo bloque son los que están relacionados. De ahí el nombre de clase de equivalencia: $[a]_\sim$ es el conjunto de los que caen en el mismo bloque que a en la clasificación que queda definida por la relación $\sim$.

6. Otra cosa más: representantes

Otro concepto relacionado con particiones (o con relaciones de equivalencia, que son otra forma de ver lo mismo), es el de **conjunto de representantes**. Un conjunto de representantes de una partición sobre un conjunto A es cualquier subconjunto de A que tenga exactamente un elemento de cada bloque B_i.

En el ejemplo, sería cualquier conjunto de alumnos en el que haya, para cada letra, exactamente un alumno cuyo nombre empiece con esa letra: un alumno cuyo nombre empiece con A, otro que empiece con B, otro con C, etc..

7. Qué hay que saber hacer sobre relaciones de equivalencia y particiones

Varias cosas.

1. Dada una relación de equivalencia $\sim$, definir conjunto de índices I y bloque B_i para cada índice $i \in I$, de la partición definida por $\sim$.

2. Al revés, dada una partición definida por un conjunto de índices I y un bloque B_i para cada $i \in I$, encontrar la relación de equivalencia que define a la partición.

3. También, dada una situación que se describe en palabras, encontrar el conjunto A sobre el que se está aplicando una partición, el conjunto de índices I, el bloque B_i para cada índice $i \in I$, y la relación de equivalencia que define la partición encontrarda.
   P.ej. una máquina separa un conjunto de naranjas en chicas, medianas y grandes. En este caso, el conjunto A es el conjunto de las naranjas que la máquina separa. El conjunto I puede tener tres elementos, $I = \{ch, me, gr\}$ o sea "chica", "mediana" y "grande". El bloque B_{ch} es el conjunto de naranjas chicas, idem para los otros dos índices. La relación $\sim$ puede definirse así: $a \, R \, b$ ssi las dos son chicas, las dos son medianas, o bien las dos son grandes.

OJO con el conjunto de índices, puede que no sea trivial encontrarlo. En algunos casos, conviene tomar como índices el **producto cartesiano** de dos conjuntos. P.ej. si además de por tamaño, la máquina separa las naranjas por color, que puede ser naranja, amarillo o rojo, entonces el conjunto de índices es $\{ch, me, gr\} \times \{am, na, ro\}$: dos naranjas van a estar en el mismo bloque si tienen el mismo tamaño **y** el mismo color.