Conjuntos
Ejercicios adicionales - comisiones 1 y 3
Versión del 22/03/2013

Resumen de definiciones

Conjuntos especiales

$\mathbf{U}$ universal $\quad\quad$ $\emptyset$ conjunto vacío

Operaciones

Complemento
$\overline{A} = \{x/x \in \mathbf{U} \wedge x \notin A\}$

Unión
$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$

Intersección
$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$

Diferencia
$A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$

Diferencia simétrica
$A \,\Delta\, B = \{x/(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$

Comparaciones

$A \subseteq B$

ley lógica agregada: $x \in A \;\Rightarrow\; x \in B$
como fórmula $\forall x : x \in A \rightarrow x \in B$

$A = B$

doble inclusión: $A = B$ ssi $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$
ley lógica agregada: $x \in A \;\Leftrightarrow\; x \in B$
como fórmula $\forall x : x \in A \leftrightarrow x \in B$

Para demostraciones con conjuntos

Para inclusión ($A \subseteq B$), usamos ley lógica.
Para igualdad ($A = B$), usamos doble inclusión.

Leyes de definición

Definición de $\cup$
$x \in A \cup B \;\Leftrightarrow\; x \in A \vee x \in B$

Definición de $\cap$
$x \in A \cap B \;\Leftrightarrow\; x \in A \wedge x \in B$

Definición de $\overline{A}$
$x \in \overline{A} \;\Leftrightarrow\; \neg x \in A$

Definición de $-$
$x \in A - B \;\Leftrightarrow\; x \in A \wedge \neg x \in B$

Definición de Δ
$x \in A \,\Delta\, B \;\Leftrightarrow\; (x \in A \wedge \neg x \in B) \vee (x \in B \wedge \neg x \in A)$

Definición de $\emptyset$
$x \in \emptyset \;\Leftrightarrow\; \mathbf{F}$

Definición de $\mathbf{U}$
$x \in \mathbf{U} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{V}$

Cálculo de cardinales

Usamos estas reglas

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

Propiedades básicas

A, B, C representan conjuntos cualesquiera.

Asociativa $\left\{ \begin{array}{rcl} (A \cap B) \cap C & = & A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cup C & = & A \cup (B \cup C) \end{array} \right.$

Conmutativa $\left\{ \begin{array}{rcl} (A \cap B) & = & (B \cap A) \\ (A \cup B) & = & (B \cup A) \end{array} \right.$

Distributiva $\left\{ \begin{array}{rcl} A \cap (B \cup C) & = & (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) & = & (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{array} \right.$

Complementación $\left\{ \begin{array}{rcl} (A \cap \overline{A}) & = & \emptyset \\ (A \cup \overline{A}) & = & \mathbf{U} \end{array} \right.$

Identidad $\left\{ \begin{array}{rcl} (A \cap \mathbf{U}) & = & A \\ (A \cup \emptyset) & = & A \end{array} \right.$

Idempotencia $\left\{ \begin{array}{rcl} (A \cap A) & = & A \\ (A \cup A) & = & A \end{array} \right.$

Involución
$\overline{\overline{A}} \; = \; A$

Absorción $\left\{ \begin{array}{rcl} A \cap (A \cup B) & = & A \\ A \cup (A \cap B) & = & A \end{array} \right.$

Dominación $\left\{ \begin{array}{rcl} (A \cap \emptyset) & = & \emptyset \\ (A \cup \mathbf{U}) & = & \mathbf{U} \end{array} \right.$

De Morgan $\left\{ \begin{array}{rcl} \overline{A \cap B} & = & \overline{A} \cup \overline{B} \\ \overline{A \cup B} & = & \overline{A} \cap \overline{B} \end{array} \right.$

Inclusión
$A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; A \cap B = A \;\Leftrightarrow\; A \cup B = B$

Inclusiones a destacar $\left\{ \begin{array}{llll} (A \cap B) \subseteq A & A \subseteq (A \cup B) & \emptyset \subseteq A & A \subseteq \mathbf{U} \\ (A \cap B) \subseteq B & B \subseteq (A \cup B) & A \subseteq A & \end{array} \right.$

Vacío y universal $\left\{ \begin{array}{rcl} \overline{\emptyset} & = & \mathbf{U} \\ \overline{\mathbf{U}} & = & \emptyset \end{array} \right.$

Complementos $\left\{ \begin{array}{lcl} A = B & \Leftrightarrow & \overline{A} = \overline{B} \\ A \subseteq B & \Leftrightarrow & \overline{B} \subseteq \overline{A} \end{array} \right.$

Definición de diferencia
$A - B \; = \; A \cap \overline{B}$

Definición diferencia simétrica
$A \,\Delta\, B \; = \; (A - B) \cup (B - A)$
$A \,\Delta\, B \; = \; (A \cup B) - (A \cap B$

Producto cartesiano

$A \times B = \{(x, y)/x \in A \wedge y \in B\}$

Partes

$P(A) = \{X/X \subseteq A\}$

Ejercicios

1. Dados los conjuntos

$$\begin{array}{lllllllll} A & = & \{a,b,c,d,e\} & B & = & \{\{a,b\},\{c,d\},\{e\}\} & C & = & \{\{a,b\},\{c,d\},e\} \\ D & = & \{a,c,e\} & E & = & \{\{c,d\},\{a,b\},\{e\}\} & F & = & \{\{c,d\},\{e\}\} \\ G & = & \{b,f,h\} & H & = & \{c,d\} & & & \end{array}$$

Indicar, para cada una de las afirmaciones siguientes, si es verdadera o falsa

1) $A = B$	13) $B \subseteq F$	25) $a \subseteq A$
2) $A = D$	14) $B \subset F$	26) $a \subseteq B$
3) $A \subseteq D$	15) $F \subseteq B$	27) $\{a\} \subseteq A$
4) $A \subset D$	16) $F \subset B$	28) $\{a\} \subseteq B$
5) $D \subseteq A$	17) $a \in A$	29) $\{a,b\} \subseteq A$
6) $D \subset A$	18) $a \in B$	30) $\{a,b\} \subseteq B$
7) $B = C$	19) $\{a\} \in A$	31) $\{\{a,b\}\} \subseteq A$
8) $B = E$	20) $\{a\} \in B$	32) $\{\{a,b\}\} \subseteq B$
9) $B \subseteq E$	21) $\{a,b\} \in A$	33) $H \in B$
10) $B \subset E$	22) $\{a,b\} \in B$	34) $H \subseteq B$
11) $E \subseteq B$	23) $\{\{a,b\}\} \in A$	35) $\emptyset \subseteq A$
12) $E \subset B$	24) $\{\{a,b\}\} \in B$	36) $\emptyset \in A$

2. Para los mismos conjuntos del ejercicio anterior, calcular

a) $A - C$	*d*) $(A - G) \cup C$	*g*) $B \,\Delta\, D$
b) $A - (D - H)$	*e*) $(A \cap G) \cup \{c,e,g\}$	
c) $A - (G \cup H)$	*f*) $A \,\Delta\, G$	

3. En cada caso, para el universal y los conjuntos iniciales indicados, dar una descripción verbal de los conjuntos que se especifican mediante expresiones de conjuntos.

a)
U = alumnos de la UNQ
A = personas que tienen hermanos varones
B = personas que tienen hermanas mujeres

1) $A - B$	3) $A \cap B$	5) $A \,\Delta\, B$
2) $\overline{A \cup B}$	4) $\overline{A} \cap B$	

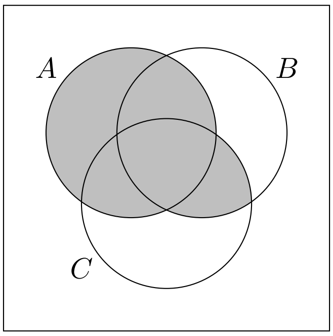
b)
U = días del año   A = días pares
B = días de semana (lunes a viernes)   C = días de verano

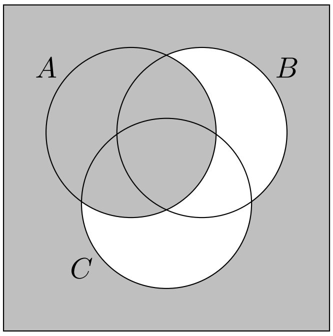
1) $A \cap B$	4) $\overline{B} \cap C$	7) $A \cup (B \cap C)$
2) $C \cap (\overline{A \cup B})$	5) $\overline{B} \cup C$	8) $\overline{C} \cap A \cap B$
3) $\overline{A}$	6) $C \,\Delta\, A$	

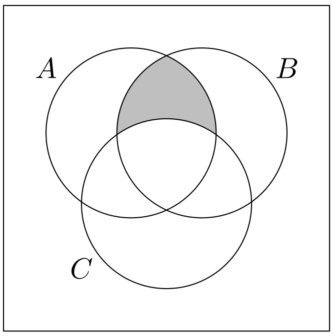
c)
U = academias de baile de Buenos Aires.
A = academias en las que se enseña tango.
B = academias en las que se enseña salsa.
C = academias en las que se enseña rock.
D = academias que abren los domingos.
E = academias que incluyen actividades para principiantes.

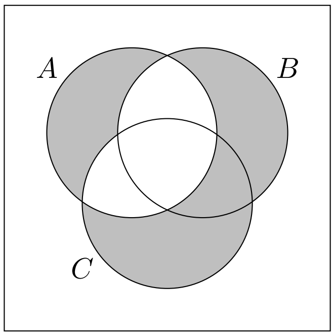
1) $\overline{A \cup B \cup C}$
2) $B - (A \cup C)$
3) $(A \cup B) \cap \overline{D}$
4) $A \,\Delta\, B$
5) $(A \cup B) \cap (D \cap E)$
6) $A \,\Delta\, (B \cap C)$
7) $A \cap (D - E)$

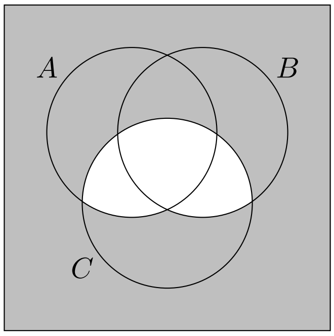
4. Determinar una fórmula que se corresponda con la parte sombreada en los siguientes diagramas:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

5. Representar, mediante diagramas de Venn, los conjuntos correspondientes a estas fórmulas.

   a) $\overline{(C \cup B) - A}$
   b) $(B - (A \cup B)) \cup (A \cap B \cap C)$
   c) $(B \cap (A \cup C)) \cup (A - B)$
   d) $(A \cap B) \,\Delta\, C$

6. Representar las siguientes situaciones mediante diagramas de Venn.

   a) $A \subseteq B$.
   b) $A \cap B = \emptyset$.
   c) $A - B = \{1\}$.
   d) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A - B = \{1, 2\}$, $A \cap B = \{3, 4\}$.
   e) $A = (B \cup \{3, 4\}) - \{1\}$, $1 \in B$, $B \cap \{3, 4\} = \{3\}$.

f) $A \cap B = \{2, 3, 4\}$, $A \cap C = \{1, 3\}$, $B \cap C = \{3, 5\}$.

g) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{2, 4\}$, $A \cap C = \{3, 4\}$.

7. Mostrar a través de diagramas de Venn las siguientes afirmaciones.

   a) $\overline{A \cup B \cup C} \subseteq \overline{A \cup B}$.
   b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
   c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
   d) $A \cup (B \cap C) = (B \cap (A \cup C)) \cup (A - B)$.
   e) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.
   f) $(C - (A \cup B)) \cup (A \cap B \cap C) = C - (A \,\Delta\, B)$.
   g) $A - (B \,\Delta\, C) = (A \cap B \cap C) \cup (A - (B \cup C))$.
   h) $(A \,\Delta\, B) - C = (A - (B \cup C)) \cup (B - (A \cup C))$.

8. Tomando siempre como conjunto universal al de los números naturales, indicar en cada caso si la situación que se indica es posible o imposible. Si es posible, completar definiciones de cada uno de los conjuntos involucrados que sean coherentes con lo que se indica. Si es imposible, indicar por qué.

   a) $A \,\Delta\, B = \{2, 4, 6\}$, $A \cap B = \{4, 7\}$.
   b) $A \,\Delta\, B = \{2, 4, 6\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$.
   c) $A \cap B = \{2, 3\}$, $A \cup B = \{1, 3, 5\}$.
   d) $A \cap B = \{1, 2\}$, $A \cap C = \{2, 3\}$, $B \cap C = \{3, 5\}$.
   e) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{3, 4, 5\}$, $1 \notin B$, $2 \notin B$.
   f) $A \cap B \cap C = \{3, 4\}$, $A \cap C = \{2, 3, 4\}$, $B \cap C = \{3, 4, 5\}$, $A = (A - B) \cup \{3, 4\}$.

9. Si $A \cap B = \{1, 2\}$, $A \cap C = \{3, 4\}$ y $B \cap C = \{5, 6\}$, ¿quién es $A \cap B \cap C$?.

10. Para cada una de las siguientes afirmaciones, refutarla, o sea, demostrar que no es válida mediante un contraejemplo.

    a) $A \subseteq B \cup C \;\Rightarrow\; A \subseteq B \vee A \subseteq C$.
    b) $A \cup C \subseteq B \cup C \;\Rightarrow\; A \subseteq B$.
    c) $A \cap C \subseteq B \cap C \;\Rightarrow\; A \subseteq B$.
    d) $A - B \subseteq C \;\Rightarrow\; A \subseteq C$.
    e) $A \,\Delta\, C = B \,\Delta\, C \;\Rightarrow\; A - C = \emptyset$.

11. En cada ítem, partimos de dos conjuntos A y B.

    a) Si sabemos que $|A \cup B| = 100$, $|A \cap B| = 40$, y $|A - B| = 3 * |B - A|$, ¿cuántos elementos tiene A, cuántos elementos tiene B?
    b) Si sabemos que $|A \cup B| = 13$, $|A \cap B| = 5$, y $|A| = 2 * |B|$, ¿cuántos elementos tiene A, cuántos elementos tiene B?
    c) Si $|A| = |A \cup B|/2$, $|B| = 100$ y $|A - B| = 40$, ¿cuántos elementos tiene A?
    d) Si $|A - B| = 60$, $|B - A| = 80$ y $|A \cup B| = 300$, ¿cuántos elementos tiene A, cuántos elementos tiene B?
    e) Si $|A \cup B| - 24$, $|B| = 14$ y $|A \cap B| = |A - B|$, ¿cuántos elementos tiene A?

12. Ahora algunos con enunciados en castellano.

    a) La semana pasada se estrenaron dos películas, "La era del cubito" y "Supercoco". De una muestra de 200 personas que vieron al menos una de estas películas, se encuentra que 80 vieron ambas, y que la cantidad que vio "La era del cubito" pero no "Supercoco" es 5 veces la cantidad que vio "Supercoco" y no vio "La era del cubito". ¿Cuántas personas vieron cada película?

    b) Un colegio de traductores tiene 40 miembros, de los cuales 8 hablan chino y ruso, 12 hablan chino y 9 hablan ruso. ¿Cuántos miembros del colegio no hablan ninguno de estos dos idiomas?

13. (transcriptos de Tapia-De Martino, Conjuntos 1, Editorial Cuarta Dimensión, Buenos Aires, 1968)

    a) Un comerciante compra 95 trajes de hombre. De estos, 72 son cruzados y 58 son grises; 25 trajes cruzados no son grises.

    ¿Cuántos trajes grises no son cruzados? ¿Cuántos son cruzados y grises? ¿Cuántos trajes no son cruzados ni grises? Escribir una expresión de conjuntos que describa cada uno de estos subconjuntos.
    Consejo: tomar los 95 trajes como conjunto universal.

    b) En un programa de televisión se han sorteado 80 personas que deben contestar tres preguntas (se pueden tomar estas 80 personas como universal).
    11 contestaron bien las tres preguntas; 7 contestaron bien solamente las primeras dos; 4 contestaron bien solamente la 2da y la 3ra; 5 contestaron bien sólo 1ra y 3ra; 38 contestaron bien la 1ra, 31 la 2da y 26 la 3ra.

    ¿Cuántos contestaron bien solamente la 1ra? ¿Cuántos contestaron solamente la 2da? ¿Cuántos solamente la 3ra? ¿Cuántos no contestaron ninguna? ¿Cuántos contestaron exactamente una pregunta bien, cuántos exactamente dos? Escribir una expresión de conjuntos que describa cada uno de estos subconjuntos.

    c) De los 120 empleados de una empresa, 43 hablan inglés y 37 son universitarios. 18 hablan inglés y además son universitarios.

    ¿Cuántos hablan inglés y no son universitarios? ¿Cuántos son universitarios y no hablan inglés? ¿Cuántos no son universitarios ni hablan inglés? Escribir una expresión de conjuntos que describa cada uno de estos subconjuntos.

    d) Una modista tiene tela de tres colores: amarillo, rosa y celeste, para hacer vestidos. En cada vestido se usa al menos uno de los tres colores. Usa el amarillo en 20 vestidos, el celeste en 24 y el rosa en 18, combinados como sigue: en dos vestidos se usa solamente rosa, en 6 solamente amarillo, en 5 celeste y rosa pero no amarillo, en 4 los tres colores.

    ¿En cuántos vestidos se usó amarillo y rosa solamente? ¿En cuántos amarillo y celeste solamente? ¿En cuántos únicamente rosa? ¿En cuántos no se usó rosa pero sí amarillo? ¿En cuántos se usaron a lo sumo dos colores? ¿Cuántos vestidos hizo en total la modista? Para cada pregunta excepto la última, escribir una expresión de conjuntos que represente a la respuesta.

14. Un canal de televisión hace una encuesta a una muestra de 100 de sus televidentes, acerca de las series "Last", "Hombrecitos" y "Sanful". Se obtienen estos datos: 48 personas ven "Last", 44 ven "Hombrecitos", 40 ven "Sanful", 10 ven las tres series,

26 ven dos de las series pero no las tres, 24 personas ven "Last" y "Hombrecitos", 18 ven "Hombrecitos" y "Sanful".

Si llamamos L, H y S a los conjuntos de las personas que ven "Last", "Hombrecitos" y "Sanful" respectivamente, se pregunta:

a) cuántas personas ven exactamente una serie.

b) cuántas personas no ven ni "Last" ni "Hombrecitos". Escribir una expresión usando operaciones de conjuntos que represente este subconjunto.

c) cuántas personas ven "Sanful" y una serie más, pero no las tres. Escribir una expresión usando operaciones de conjuntos que represente este subconjunto.

d) cuántas personas están en el subconjunto $L - S$. Describir este subconjunto en lenguaje natural.

15. Se hace un estudio en 91 comercios, viendo en cuáles se venden las marcas de jabón "Lix", "Dubi" y/o "Verono". Se obtienen estos datos: en 10 comercios se venden las tres marcas, en 19 "Lix" y "Dubi", en 50 se vende "Lix", en 17 se vende "Lix" y ninguna de las otras dos, en 44 se vende "Dubi", en 15 "Dubi" y "Verono", en un negocio no se vende ninguna de las tres marcas.

    Si llamamos L, D y V a los conjuntos de los negocios que venden "Lix", "Dubi" y "Verono" respectivamente, se pregunta:

    a) en cuántos negocios se venden exactamente dos de estas tres marcas.

    b) en cuántos se vende "Dubi" y ninguna de las otras dos. Escribir una expreción usando operaciones de conjuntos que represente este subconjunto.

    c) en cuántos se vende a lo sumo una (puede ser ninguna) entre "Lix" y "Verono". Escribir una expreción usando operaciones de conjuntos que represente este subconjunto.

    d) cuántas personas están en el subconjunto $L \Delta D$. Describir este subconjunto en lenguaje natural.

16. En cada caso, partimos de tres conjuntos a los que llamamos A, B y C.

    a) Si $|A \cup B \cup C| = 56$, $|A| = 26$, $|B| = 24$, $|C| = 28$, $|A \cap B| = 8$, $|B \cap C| = 6$ y $|A \cap C| = 10$, ¿cuántos eleemntos tiene $A \cap B \cap C$?

    b) Si $|A| = 24$, $|B| = 25$, $|C| = 26$, $|A \cup B \cup C| = 40$, $|A \cap B \cap C| = 13$, y $|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C|$, ¿cuántos elementos tiene cada uno de estos tres conjuntos?

    c) Si $|A \cup B \cup C| = 39$, $|A \cup B| = 29$, $|A| = 13$, $|B| = 5 * |A \cap B|$, $|A \cap B \cap C| = 1$, $|C| = 21$, y $|B \cap C| = 2 * |A \cap C|$, ¿cuántos elementos tiene B, cuántos tiene $A - (B \cup C)$, cuántos tiene $(C \cup A) - B$?
    Ayuda: calcular $|B|$ mirando solamente A y B, y recién después meterse con C.

17. A 100 ratones se les ofrecen para comer tres cajitas, una con granos de lino, una con granos de sésamo, y una con granos de cebada. De los 100, 47 no comen ninguno de los tres, 30 comen lino, 30 comen sésamo, 22 comen cebada, 13 comen lino y sésamo, 11 comen lino y cebada, 9 comen sésamo y cebada. ¿Cuántos ratones han comido de las tres cajitas?

18. Se hace una encuesta a 100 personas que salieron con el auto, para ver por qué ruta anduvieron. De los 100, 60 fueron por la ruta 9, 50 por la ruta 3, y 10 por ninguna de las dos. Se pide saber:

    a) ¿cuántos fueron por las dos rutas, la 9 y la 3?

    b) Si el peaje en la ruta 9 está entre 10 y 30 pesos (según la cantidad de cabinas por las que pasaste), el peaje en la ruta 3 está entre 5 y 20 pesos, y en el resto de las rutas no se cobra peaje, ¿cuáles son los importes mínimo y máximo que las 100 personas pagaron en total en peaje?

19. Respecto de los gustos por las marcas de yerba Amanda y Playadito, de un grupo de 11 profesores se sabe que: a 7 les gusta una de las marcas pero no las dos, la cantidad de profesores a la que les gustan ambas marcas coincide con la de aquellos a los que no les gusta ninguna, y a 3 les gusta Amanda pero no Playadito. Se pide saber: ¿a cuántos le gusta Amanda?, ¿a cuántos le gusta solamente Playadito?, ¿a cuántos le gustan las dos marcas?.

20. En un taller de carpintería en el que trabajan 80 carpinteros, se mide la habilidad de cada uno en el uso de punzón, lija y sierra. Se encuentra que: 30 manejan el punzón, 20 no maneja ninguna de las tres herramientas, 10 manejan las tres, 34 manejan la lija y, al menos, una más, 7 manejan solamente la sierra, 19 manejan punzón y lija, 38 en total manejan la sierra. Se pide saber:

    a) ¿cuántos hay que manejan una herramienta, y no más de una?

    b) Si queremos entrenar en el uso del punzón a los que manejan una de las otras dos herramientas pero no las dos, ¿a cuántos carpinteros tendremos que entrenar? ¿cómo se expresa este conjunto usando operaciones (tomar P, L y S como nombres de los conjuntos de los que saben usar punzón, lija y sierra respectivamente)?

    c) Si en una obra nos piden llevar a los que saben usar, o bien la lija o bien las otras dos herramientas, ¿a cuántos carpinteros podremos llevar como máximo? ¿cómo se expresa este subconjunto usando operaciones?

    d) ¿cuántos carpinteros hay que no saben usar el punzón ni la sierra? ¿cómo se expresa este subconjunto usando operaciones?

21. En el instituto Lenguota, se enseñan rusa, inglés, alemán y otras lenguas. De un total de 60 alumnos del instituto, 15 estudian solamente ruso, 11 ruso e inglés, 12 sólo alemán, 8 ruso y alemán, 10 sólo inglés, 5 inglés y alemán, 3 los tres idiomas. Se quiere saber:

    a) ¿cuántos alumnos hay que no estudian ninguna de las tres lenguas?

    b) ¿cuántos estudian alemán?

    c) ¿cuántos estudian solamente alemán e inglés?

    d) ¿cuántos estudion ruso?

22. Se le preguntó a un grupo de 12 estudiantes sus preferencias respecto de manzanas y peras. A todos menos dos les gusta al menos una de las dos, a 3 les gustan las manzanas pero no las peras, 8 dijeron que no les gustan las peras. Se quiere saber:

    a) ¿qué fruta es más popular, pera o manzana?

    b) ¿a cuántos le gusta una de las dos frutas pero no las dos?

23. En una oficina que tiene 20 empleados, 7 saben computación, 8 inglés y 8 ninguna de las dos cosas. Se pregunta

    a) ¿Cuántos grupos de al menos dos personas pueden formarse con gente que sepa las dos cosas?

    b) ¿Cuántas parejas se pueden armar en las cuales uno de los integrantes sabe computación pero no inglés, y el otro inglés pero no computación?.

24. Se sigue la trayectoria de Deportivo Hacha y Tiza durante un campeonato de 36 fechas. En 22 fechas hizo goles en el primer tiempo, en 10 partidos hizo goles en el segundo tiempo, en 10 partidos no hizo goles. Se quiere saber:

    a) ¿en cuántos partidos hizo goles en los dos tiempos?

    b) ¿en cuántos partidos hizo goles en un tiempo pero no en el otro?

    c) ¿cuál es el mínimo de goles que hizo el equipo durante el campeonato?

    d) Si se sabe que en ningún partido el equipo hizo más de 4 goles, ¿cuál es el máximo de goles que hizo el equipo durante el campeonato?

25. Se hace una encuesta a videojugadores, para saber cuánto se usan el Mario, el Sonic y el Fifa. De los que contestaron, a 10 le gustan los 3 juegos, a 20 le gustan 2 de los 3, a 30 le gusta 1 de los 3, y a 5 ninguno de los 3. De los que les gusta Mario, a 12 no les gusta ningún otro, y a 18 les gusta Sonic. Hay 17 personas a las que les gusta Sonic y Fifa. La cantidad de gente a la que le gusta Mario es el resultado de sumar 4 a la cantidad de gente a la que le gusta Fifa. Representar la situación planteada en un diagrama de Venn y responder:

    a) ¿a cuántas personas les gusta el Sonic?

    b) De estos, ¿a cuántos les gusta también el Mario?

    c) El subconjunto $(F \cup S) - M$ (F por Fifa, S por Sonic, M por Mario) ¿a quiénes representa? ¿Cuántas personas hay en este subconjunto?

26. Reducir las siguientes expresiones

    a) $(A \cup \overline{A \cap B}) \cup \overline{\overline{B}}$.

    b) $B \cap (\overline{A} \cup (A \cap B)) \cap (\overline{\overline{B} \cap A})$.

    c) $(\overline{B \cup \overline{A}}) \cup (\overline{\overline{A} \cup \overline{B}})$.

    d) $(A \cap \overline{A \cup B \cup C}) \cap B$.

    e) $(A \cap \overline{A \cup B \cup C}) \cup B$.

    f) $A \cap (\overline{A \cup B \cup C} \cup B)$.

    g) $((B - A) \cup (B - \overline{A})) \cap ((A \cap B) \cup \overline{B} \cup (B - A))$.

    h) $(A - (B \cup C)) \cup (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

    i) $(\overline{C - (A \cup B)} \cap (A - C)) \cup (A \cap (B \cup C))$.

    j) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap \overline{B - A}$.

    k) $(A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (\overline{C} \cup B) \cap (\overline{C} \cup A)$.

    l) $\overline{A} \cup (A - C) \cup (A \cap B)$.

27. Demostrar las siguientes afirmaciones usando leyes de conjuntos.

    a) $(A \cap B) - (A \cap C) = A \cap (B - C)$.
    b) $(B \cap (A \cup C)) \cup (A - B) = A \cup (B \cap C)$.
    c) $A - (B \,\Delta\, C) = (A \cap B \cap C) \cup (A - (B \cup C))$. OJO este es bastante largo; hay que darse cuenta hasta dónde aplicar distributiva.
    d) $(A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C = A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C)$. OJO este es difícil y también es larguísimo, conviene tomarse un rato para hacerlo.

28. Demostrar a partir de definiciones. En los que conviene usar el truco de identidad más complementación, se indica con qué conjunto, y en qué parte de la fórmula (después de pasar la premisa a lógica).

    a) $A \subseteq B \;\Rightarrow\; A \cup B \subseteq B$.
    b) $B \subseteq A \cup B$.
    c) $\overline{A \cup B \cup C} \subseteq \overline{A \cup B}$.
    d) $A \cup (B - A) = A \cup B$.
    e) $(A \cap B) - (A \cap C) = A \cap (B - C)$.
    f) $A \subseteq B \;\Rightarrow\; C \cap (A \cup B) = C \cap B$.
    g) $A \subseteq \overline{B} \;\Rightarrow\; B \subseteq \overline{A}$ con $x \in A$.
    h) $B \subseteq A \cup C \;\Rightarrow\; A \cup B \cup C \subseteq A \cup C$.
    i) $A \cap B \cap C = \emptyset \;\Rightarrow\; A = (A - B) \cup (A - C)$ con $x \in B \cap C$.
    j) $A \cap B \subseteq C \;\Rightarrow\; A - C \subseteq \overline{B}$. Conviene agregar $x \in B$.
    k) $A \cap B \cap C = A \cap (B \cup C) \;\Rightarrow\; (A - (B \cup C)) \cup (A \cap B \cap C) = A$.
    l) $B \subseteq A \;\Rightarrow\; A \,\Delta\, B \subseteq A - B$.
    m) $A \cap (B \cup C) = A \cap B \cap C \;\Rightarrow\; A - B \subseteq \overline{C}$ con $x \in B \cup C$ al lado de $x \in A$.
    n) $A \subseteq B \;\Rightarrow\; A - B = \emptyset$.
    ñ) $B \subseteq A \cup C \;\Rightarrow\; (A \cup B) - C \subseteq A - C$
    o) $A - C \subseteq (A \cup B) - C$
    p) $A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; A = A - B$ ... acá te dejamos que descubras qué conviene introducir mediante identidad más complementación.
    q) $A - B = \emptyset \;\Rightarrow\; C \cap (A \cup B) = C \cap B$. Conviene agregar $x \in B$ al lado de $x \in A$.
    r) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$.
    s) $A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; A \cup B = A \,\Delta\, B$ con $x \in B$ al lado de $x \in A$, y también $x \in A$ al lado de $x \in B$.

29. Demostrar a partir de definiciones (A, B, C conjuntos cualesquiera).

    a) $\emptyset \subseteq A$.
    b) $A \subseteq \mathbf{U}$.
    c) $A \subseteq A$.
    d) $\overline{\emptyset} = \mathbf{U}$.
    e) $\overline{\mathbf{U}} = \emptyset$.
    f) $A - \overline{A} = A$.
    g) $A = B \;\Leftrightarrow\; \overline{A} = \overline{B}$.
    h) $A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; \overline{B} \subseteq \overline{A}$.
    i) $(A \cap B) - (A \cap C) = A \cap (B - C)$.
    j) $A \cap B = \emptyset \;\Leftrightarrow\; A = A - B$.

k) $A \,\Delta\, B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

l) $A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; A \,\Delta\, B = A \cup B$.

m) $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \;\Leftrightarrow\; (A \cup B) \subseteq C$.

n) $A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; A - B = \emptyset$.

30. Demostrar a partir de definiciones que para cualesquiera conjuntos A y B,
$A \subseteq B \;\Rightarrow\; B - A = A \,\Delta\, B$.
Consejo: para la hipótesis usar $A \cup B = B$, que es equivalente a $A \subseteq B$.
¡OJO! es difícil.

31. Demostrar a partir de definiciones (A, B, C conjuntos cualesquiera).

    a) $\emptyset \times A = A \times \emptyset = \emptyset$.

    b) $A \times B = \emptyset \;\Leftrightarrow\; A = \emptyset \vee B = \emptyset$.

    c) $(A \times B = B \times A) \wedge A \neq \emptyset \;\Rightarrow\; A = B$.

32. Si tengo 7 lamparitas, numeradas del 1 al 7, ¿cuántas combinaciones distintas tengo en las que algunas están prendidas y otras apagadas? De estas, ¿en cuántas hay al menos una lamparita prendida?, ¿en cuántas hay al menos dos lamparitas prendidas?
OJO "lamparita 1 prendida, el resto apagadas" y "lamparita 2 prendida, el resto apagadas" son dos combinaciones distintas.

33. En una oficina trabajan 5 inspectores. Con ellos, ¿cuántos equipos de entre 2 y 4 inspectores se pueden armar?

34. La banda de música experimental "Los Virtuales" tiene entre sus integrantes a siete tecladistas: Alberto, Betina, César, Dalila, Emma, Facundo y Gabriel. En cada actividad que hace la banda, la sección de teclados se compone con algunos de estos integrantes. Esta banda quiere grabar una serie de temas con una particularidad: no se puede repetir la composición de la sección de teclados en dos temas distintos. Por ejemplo, si en un tema tocan Dalila, Emma y Gabriel, y ninguno de los otros cuatro, entonces en ningún otro tema de la serie se puede repetir exactamente la misma formación. Sí pueden estar ellos tres y alguno más, o solamente algunos de ellos, pero ellos tres y ninguno más no.
Vale que en un tema no toque ninguno de los siete tecladistas (sería la sección de teclados vacía), pero no en más de uno, porque se estaría repitiendo la misma composición (vacía) de la sección de teclados.

    Se quiere saber

    a) Cuál es la cantidad máxim de temas que se pueden grabar respetando esta regla.

    b) Cuál es esta cantidad si se establece además que en un tema no pueden tocar menos de dos tecladistas (excluyendo p.ej. la posibilidad de sección vacía de teclados) ni más de seis.

35. Un cantante sale de gira. Para cada fecha de la gira lo acompaña una pequeña banda, formada por un guitarrista, un bajista y un tecladista. El tecladista es el mismo para toda la gira. El problema son los guitarristas y bajistas. Como no se llevan bien entre ellos, no se puede repetir la misma pareja guitarrista / bajista en más de dos fechas de la gira. La empresa que organiza la gira tiene contrato con cinco guitarristas y cuatro bajistas.

    Se quiere saber

a) Con el plantel actual de la empresa, ¿cuántas fechas puede tener la gira como máximo respetando la regla sobre guitarristas y bajistas?

b) Para aumentar la duración máxima de la gira lo más que se pueda, ¿qué le conviene a la empresa, fichar un guitarrista más, o fichar un bajista más?

36. Para un festival en el que tocaron Porotos Pasaditos y 6 bandas más, se pregunta lo siguiente.

    a) En una muestra de 100 asistentes, ¿puede ser que no haya habido dos que hayan visto exactamente las mismas bandas?

    b) En una muestra de 50 asistentes de los cuales ninguno vio a Porotos Pasaditos, ¿puede ser que no haya habido dos que hayan visto exactamente las mismas bandas?

37. Un tipo que vende bolitas en la calle le muestra a Jaimito bolitas de diferentes colores. Cada día le muestra una cantidad distinta de bolitas (puede ser una), y nunca repite el mismo conjunto de colores. P.ej. si un día le muestra dos bolitas, una roja y una verde, después nunca le vuelve a mostrar dos bolitas, una roja y una verde; sí va a pasar otro día que le muestre tres bolitas, roja verde y azul, o que le muestre solamente la roja. El vendedor sigue así hasta que no le quedan combinaciones de colores sin usar, en ese momento arranca de nuevo.

    Esto pasa todos los días, incluyendo feriados, una vez por día. A los 14 días el vendedor le muestra a Jaimito una sola bolita azul; Jaimito se acuerda que las veces que vio una sola bolita, no fue la azul, por lo tanto esta combinación es nueva. A los 25 días el vendedor le vuelve a mostrar a Jaimito una sola bolita azul

    El vendedor tiene bolitas ¿de cuántos colores distintos?

38. Una dieta incluye un conjunto de alimentos permitidos. Se quiere armar un menú mensual, pensando en un mes de 30 días, en este menú se indica cuáles de los alimentos comer (que puede ser ninguno). Si llamamos A al conjunto de los alimentos permitidos, y B al conjunto { día 1, … , día 30 }, se pregunta

    a) Se quiere describir qué alimentos se recomiendan cada día, p.ej. (día 4, lechuga), (día 5, tomate), (día 5, lechuga), (día 5, pollo), etc.. Cada uno de estos pares, es elemento ¿de qué conjunto?

    b) ¿Cuántos alimentos permitidos tiene que haber como mínimo para que no haya dos días en los que el conjunto de aliimentos recomendados coincida?

39. Se quiere estudiar el comportamiento de dos grupos de asistentes a un gimnasio. Llamemos A y B a los conjuntos de integrantes de cada grupo, y C al conjunto de los tipos de aparatos que hay en el gimnasio. OJO puede haber personas que estén en A y también en B. Se pregunta

    a) ¿Cuál es el conjunto cuyos elementos son los equipos (no importa de cuántos integrantes) cuyos integrantes salen de A y/o B (o sea, pueden ser algunos de A y otros de B, todos de A o todos de B)?

    b) Idem si queremos que los integrantes del equipo estén en A y no estén en B.

    c) Queremos registrar los aparatos que usan los integrantes de estos grupos, p.ej. Juan/anillas, Beto/pesas, Lucía/bicicleta, donde Lucía y Juan son del grupo A y Beto del grupo B. Estos pares, ¿elementos de qué conjunto son?

40. Una empresa quiere tomar 22 ingenieros, que sean ingenieros químicos, ingenieros mecánicos y/o ingenieros eléctricos. De estos 22 ingenieros, 11 tienen que ser mecánicos, 12 eléctricos y 10 químicos. En particular, 5 tienen que ser mecánicos y también eléctricos, 4 mecánicos y también químicos, 4 eléctricos y también químicos. Se quiere saber:

    a) ¿cuántos ingenieros tienen que tener los tres títulos (mecánico, químico y eléctrico)?

    b) ¿cuántos puestos hay para personas que tengan solamente el título de ingeniero eléctrico?

    c) ¿cuántos puestos hay para personas que sean ingenieros eléctricos y también quimicos, pero no mecánicos?

41. (difícil)
    El club Ciencia y Sudor tiene 78 socios, de los cuales 50 juegan al fútbol, 32 al básquet y 23 al vóley. Seis juegan a los 3 deportes, 10 no practican ninguno, 2 juegan fútbol y vóley pero no básquet, 1 juega básquet y vóley pero no fútbol. Se quiere saber:

    a) ¿cuántos socios practican sólo un deporte?

    b) ¿cuántos socios practican sólo dos deportes?

    c) ¿cuántos socios practican al menos dos deportes?

    d) ¿cuántos socios practican a lo sumo dos deportes?

    e) La Secretaría de Deporte le pone un puntaje a cada club, de acuerdo a la cantidad de socios que practican deporte. Por cada socio que juega básquet se suman dos puntos, por cada socio que juega fútbol un punto, por cada socio que juega vóley un punto. Obsérvese que si un mismo socio juega varios deportes, suma por todos ellos. ¿Cuántos puntos tiene el club Ciencia y Sudor?