Inducción – Comisiones 1 y 3
Versión del 23/05/2013

1. Un preso, el día que llega a su celda, hace una marquita en una pared. Pero después, agrega dos marcas los días pares (el 2do, el 4to, etc.) y una los impares. Demostrar formalmente que para todo n, existe un día en el que en la pared hay exactamente $3n$ marcas.

2. Una canilla de mi casa empezó a perder hace unos días. El primer día perdió ocho litros. Después, cada día pierde o bien 8, o bien 12, o bien 32 litros. Justificar que al final de cada día, el total de lo que perdió la canilla desde el 1er día es una cantidad de litros múltiplo de cuatro.

3. Por una lluvia grande, se forma un estanque de agua. El mismo día que se genera, a medianoche, va un equipo de científicos a ver cuántas bacterias de cierto tipo hay en el estanque: cuenta 12 bacterias.

   Todos los días, entre las 8 y las 15 horas, hay un proceso de generación que hace que la población de bacterias crezca, o bien al doble, o bien al triple. Después, entre 18 y 22 horas, si hay más de 20 bacterias entonces se mueren 9, y si no, no se muere ninguna.

   El equipo vuelve a ir cada medianoche a contar la cantidad de bacterias. Demostrar por inducción que la cantidad que obtienen cada medianoche es, siempre, múltiplo de 3.

4. Sara y Lola entran a trabajar el mismo día a dos empresas distintas; Lola pudo arreglar un sueldo inicial mayor al de Sara. Todos los meses les aumentan a las dos, con una particularidad: siempre, a Lola le aumentan más que a Sara.

   a) Justificar que todos los meses el sueldo de Lola es mayor al de Sara, usando un argumento inductivo.

   b) Formalizar el razonamiento del punto anterior.

5. Demostrar las siguientes afirmaciones usando el principio de inducción.

   a) $n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; 2^{2n} = 4^n$.

   b) $n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; 5n + 1 > 4n$.

   c) $n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; 3 \mid 4^n - 1$.

   d) $n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; 3 \mid 2^{2n+1} + 1$.

   e) $n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; 8 \mid (2n + 1)^2 - 1$.

   f) $n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; 2n - 1 < 2^n$.

   g) $n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; 5 \mid 9^n - 4^n$.

   h) $n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 3 \;\Rightarrow\; 2n < n^2$.

   i) $n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; 6 \mid 3^n + 3$.

j) $n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; 6 \mid 4^n + 2$.

k) $n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; 5 \mid 3^n + 3^{n+2}$.

l) $n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; 5 \mid 2^{2n} + 2^{2(n+1)}$.

6. Ahora, algunos donde el conjunto no son todos los naturales. Demostrar las siguientes afirmaciones usando el principio de inducción.

   a) $n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 5 \;\Rightarrow\; n^2 > 3n + 8$.

   b) $n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 4 \;\Rightarrow\; 2^n > 3n + 2$.

   c) $n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 4 \;\Rightarrow\; 3^n > 2^n + 10n$.

   d) $n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 7 \;\Rightarrow\; 2^{n-2} > 3n + 5$.

   e) $n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 5 \;\Rightarrow\; 2^n > n^2 + 1$.

   f) $n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 7 \;\Rightarrow\; (n-2)^2 > 3n + 2$.

   g) $n \in \mathbb{N} \wedge n$ es par $\;\Rightarrow\; 3 \mid 2^n - 1$.

   h) $n \in \mathbb{N} \wedge n$ es par $\;\Rightarrow\; 3 \mid 5^n - 2^n$.

   i) $n \in \mathbb{N} \wedge n$ es par $\;\Rightarrow\; 5 \mid 3^n - 2^n + 10n$.

   j) $n \in \mathbb{N} \wedge n$ es impar $\;\Rightarrow\; 4 \mid 5^n - 3^n + 2$.

7. Consideremos la sucesión

   $$a_1 = 1 \qquad\qquad a_{h+1} = a_h + h + 1$$

   ($a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3 \quad a_3 = a_2 + 3 = 3 + 3 = 6$, etc.). Se pide

   a) Demostrar que $a_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n$.

   b) Demostrar que el valor del término a_n se puede obtener mediante la fórmula

   $$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

   c) Considerar la sucesión

   $$b_1 = 2 \qquad\qquad b_{h+1} = b_h + h + 1$$

   que sólo difiere de a en su valor inicial. Encontrar una fórmula que permita calcular b_n, comparando la secuencia b con la secuencia a.

   d) Considerar la sucesión

   $$c_1 = 2 \qquad\qquad c_{h+1} = c_h + 2h + 2.$$

   Encontrar una fórmula que permita calcular c_n, comparando la secuencia c con la secuencia a.

8. Para cada una de las siguientes sucesiones, definidas como a_i para cada $i \in \mathbb{N}$ desde el 1 (o sea a_1, a_2, a_3, etc.), dar una fórmula para a_n genérico que no dependa de los elementos anteriores de la sucesión; luego, demostrar que la fórmula encontrada es correcta usando inducción.

   a) $a_1 = 1 \qquad a_{h+1} = 3a_h - 2$.

b) $a_1 = 3 \qquad a_{h+1} = a_h + 10.$

c) $a_1 = 5 \qquad a_{h+1} = 2a_h$ (compararla con la sucesión $\langle 1, 2, 4, 8 \ldots \rangle$).

d) $a_1 = 4 \qquad a_{h+1} = 2a_h + 1$ (compararla con la anterior).

e) $a_1 = (1, 1) \qquad a_{h+1} = (x + y, y)$ donde $(x, y) = a_h$.

f) $a_1 = 3 \qquad a_{h+1} = 2a_h - (h + 1)$ p.ej. $a_2 = 2a_1 - 2$, $a_3 = 2a_2 - 3$, etc..

g) $a_1 = 1 \qquad a_{h+1} = 5a_h - 4h + 1.$

h) $a_1 = 1 \qquad a_{h+1} = a_h + 2\sqrt{a_h} + 1.$

i) $a_1 = 0 \qquad a_{h+1} = (\frac{a_h}{2}) + h + 1.$

j) $a_1 = 1 \qquad a_{h+1} = 3a_h - 2.$

k) $a_1 = 2 \qquad a_{h+1} = 2a_h - 1$ (comparar con las potencias de 2).

l) $a_1 = (1, 3) \qquad a_{h+1} = (x + y, y + 2)$ donde $(x, y) = a_h$.

m) $a_1 = (0, 1) \qquad a_{h+1} = (x + y, y + 1)$ donde $(x, y) = a_h$. (comparar con ejercicio 7).

n) $a_1 = 0 \qquad a_{h+1} = a_h + 3h$ (comparar con ejercicio 7).

ñ) $a_1 = 4 \qquad a_{h+1} = (\frac{a_h}{4}) + 3h + 4.$

o) $a_1 = 2 \qquad a_{h+1} = a_h + 4h + 2.$

9. En las primeras 10 fechas de un campeonato, Messi hace 7 goles, y Ronaldo hace 12 goles. Después, Messi hace 2 goles por partido, mientras que Ronaldo hace uno. Demostrar usando inducción que a partir de la fecha 18, el total de goles hechos por Messi supera al correspondiente de Ronaldo.

10. El primero de abril de cierto año, una persona toma un balde vacío, y le pone dos semillas de girasol. En cada día sucesivo la misma persona agrega al balde el doble de la cantidad de semillas que le había puesto el día anterior (el 2 de abril agrega 4 semillas, el 3 de abril 8 semillas, etc.) Se pide demostrar, usando inducción, que

    a) en el n-ésimo día a partir del primero de abril, la persona agrega 2^n semillas.

    b) en el n-ésimo día a partir del primero de abril, después de que la persona agrega las semillas, en el balde hay en total $2^{n+1} - 2$ semillas.

11. El primero de abril de cierto año, una persona toma dos baldes vacíos, uno rojo y el otro azul, y pone 3 granos de arroz en cada balde. En cada día sucesivo la misma persona agrega, en el balde rojo, el doble de los granos que tenía hasta ese momento (p.ej. el 2 de abril agrega 6 granos, quedan 9, el 3 de abril agrega 18 granos, etc.); en el balde azul agrega 10 granos. Se pide demostrar, usando inducción, que

    a) a partir del 3 de abril, en el balde rojo hay más granos que en el azul.

    b) en cada día empezando por el 1ro. de abril, el total de los granos que hay en los baldes (o sea, la suma de lo que hay en el rojo más lo que hay en el azul) es un número par.

12. Juan tiene dos hijos, Nora y Beto. Para año nuevo, Juan le regala 16 pesos a Beto, a Nora no le regala nada. El primer día le da 4 pesos a Beto y 1 peso a Nora. Después, le da a Beto 4 pesos por día, y a Nora, 2 pesos más de lo que le había dado a Después, en cada día siguiente, Juan le da a Beto 4 pesos, y a Nora, 2 pesos más de lo que le había dado el día anterior. Demostrar usando inducción que a partir del día 7, Nora tiene siempre más plata que Beto.

13. Al comenzar el 2010, un club tiene 200 socios. Cada día pasa una de las siguientes cosas:
    - o bien no se inscribe ni se borra nadie,
    - o bien se inscribe al menos una persona, y se borra el triple de la cantidad de personas que se inscribieron (p.ej. se inscriben 5 y se borran 15),
    - o bien se borra al menos una persona, y se inscribe el triple de la cantidad de personas que se borraron (p.ej. se borran 5 y se inscriben 15).

    Demostrar que al principio de cada día, contando desde el 1ro de enero de 2010, el club tiene una cantidad par de socios.

14. En la cabecera desde donde parte, se suben a un tren 60 pasajeros. En cada estación bajan n pasajeros y suben, o intentan subirse, al menos $n + 5$ pasajeros. La capacidad máxima del tren es de 110 pasajeros, los guardas no permiten que entren más. Se pide

    a) Demostrar, usando inducción, que en ningún momento hay en el tren menos de 60 pasajeros.

    b) Demostrar que si el recorrido del tren incluye 14 estaciones intermedias, entonces en al menos una estación va a haber pasajeros que van a intentar subir y no van a poder. Ayuda: pensar en el mínimo de pasajeros con el que el tren se va a ir de cada estación (p.ej. para la primer intermedia seguro se va a ir con más de 60), y demostrar ese mínimo por inducción.

15. En Votolandia hay elecciones para diputados todos los años: para obtener un diputado, un partido debe tener al menos 20.000 votos. El Partido Pirata hace su debut en las elecciones de 2004, obteniendo 30.000 votos. En cada elección siguiente, pasa una de estas cosas:

    - O bien el partido mantiene exactamente la misma cantidad de votos que el año anterior,
    - o bien un tercio de los votantes de la elección anterior no votan al partido, los dos tercios restantes sí, y además cada uno convence a dos personas más. En este caso, p.ej., si el año anterior el partido sacó 30000 votos, entonces 10000 de esos 30000 no votan al partido, los 20000 restantes sí lo votan, y cada uno de estos consigue dos votos nuevos para el partido.
    - o bien el partido obtiene exactamente 6000 votos más que el año anterior.

    Demostrar usando inducción que:

    a) En todas las elecciones, la cantidad de votos que obtiene el partido es múltiplo de 3000.

b) En cada elección, el partido obtiene al menos un diputado.

16. En un monasterio hay tres monjes. El primero de julio, van a la cima de una loma, y ponen un balde vacío. En cada día a partir del 2 de julio, pasa lo siguiente:
    - en algún momento entre las 6 y las 12, el monje más viejo va a la loma y agrega al balde una cantidad de granos de pimienta que es tres veces la hora, sin tener en cuenta los minutos. P.ej. si lo hace a las 9.40, agrega $9 * 3 = 27$ granos.
    - exactamente dos horas después, el monje del medio hace lo mismo que el anterior, pero mirando la hora actual. En el mismo ejemplo anterior, el 2do monje va a la loma 11.40, y agrega $11 * 3 = 33$ granos de pimienta.
    - a las 7 de la tarde, el monje más joven se lleva 12 granos de pimienta para usar en la cena.

    Se pide demostrar que al final de cada día, la cantidad de granos de pimienta en el balde es múltiplo de 6.

17. El primero de enero de 2010, un monje sube a la cima de un cerro con un balde azul, un balde rojo, y 12 granos de arroz. Deja los dos baldes en la cima del cerro, pone 9 granos en el balde rojo, y 3 en el azul. En cada día siguiente, a la mañana, el monje sube, cuenta la cantidad de granos en los dos baldes, y agrega el total (o sea, la suma de rojo más azul) en cada balde. P.ej. el 2 de enero de 2010 agrega 12 granos en cada balde, entonces quedan 21 y 15. El 3 de enero agrega 36 granos en cada balde, etc.. Demostrar que al final de cada día, la suma de los granos de los dos baldes es un número par.

18. Un monje deja en la puerta de su casa dos baldes, uno rojo y el otro blanco, con 50 granos de arroz en el rojo, y 61 en el violeta. Todas las mañanas, al levantarse, el monje sortea una bolilla de un bolillero que tiene los números 1 a 10, y cuenta cuántos granos de arroz hay en total, sumando los dos baldes.

    Si el total le da menos de 200 granos, entonces el monje hace lo siguiente:

    - A las 11 de la mañana, agrega al balde rojo el triple del número sorteado.
    - A las 2 de la tarde, agrega en cada balde el doble del número sorteado.
    - A las 6 de la tarde, agrega al balde rojo el número sorteado.

    Si el total le da 200 granos o más, entonces realiza las mismas acciones, pero *quitando* granos en lugar de agregándolos.

    Finalmente, a las 9 de la noche pasa una paloma y se lleva un grano de cada balde.

    Usando inducción, demostrar que

    a) Al final de cada día, hay una cantidad par de granos en uno de los baldes, e impar en el otro.

    b) Nunca hay, en total entre los dos baldes, ni menos de 100 granos ni más de 300.

19. En un instituto se ofrecen dos cursos, el curso A y el curso B. Ambos cursos son anuales. Las personas que van al instituto pueden inscribirse a uno de los dos cursos, o a los dos.

El primer año en que funciona el instituto, se inscriben 65 personas en el curso A y 60 en B, con un total de 100 inscriptos.

En cada año posterior pasa una de estas dos cosas:

- bien se inscriben 7 personas solamente en el curso B, 14 en ambos y 42 en total,
- o bien no se inscribe nadie en ambos cursos, y en A se inscribe el doble de personas que en B.

Demostrar por inducción que

a) Al final de cada inscripción, el total de personas inscriptas en los dos cursos sumando todos los años desde que empieza a funcionar el instituto es un número impar.

b) Al final de cada inscripción, y considerando totales de personas inscriptas sumando todos los años desde que empieza a funcionar el instituto, el total de personas inscriptas en el curso A es mayor al total de personas inscriptas en el curso B.

20. A principio de año, un chico pone 18 bolitas en un frasco y una piedra blanca en una cazuelita. Después, cada día antes de acostarse hace lo siguiente:

    - Si en la cazuelita hay una piedra blanca y en el frasco hay menos de 40 bolitas, entonces agrega 4 bolitas al frasco.
    - Si en la cazuelita hay una piedra blanca y en el frasco hay 40 o más bolitas, entonces reemplaza la piedra blanca por una negra.
    - Si en la cazuelita hay una piedra negra y en el frasco hay más de 20 bolitas, entonces quita 3 bolitas del frasco.
    - Si en la cazuelita hay una piedra negra y en el frasco hay 20 bolitas o menos, entonces reemplaza la piedra negra por una blanca.

    Demostrar usando inducción que en el frasco siempre hay, o bien exactamente 18 bolitas, o bien 21 bolitas o más. O sea, nunca hay menos de 18 bolitas, nunca hay exactamente 19, y nunca hay exactamente 20.