Relaciones de equivalencia - comisiones 1 y 3
Versión del 08/05/2013

Resumen de definiciones

- Una relación R definida en A es

reflexiva	ssi $\forall x : xRx$.
simétrica	ssi $\forall x : \forall y : xRy \rightarrow yRx$.
transitiva	ssi $\forall x : \forall y : \forall z : (xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz$.
de equivalencia	ssi es reflexiva, simétrica y transitiva.
	vamos a escribir $\sim$ para relaciones de equivalencia.

- **Partición** de A: $\{B_i\}_{i \in I} = \{B_1, B_2, \ldots\}$ tales que:
  - $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$.
  - $A = \bigcup_{i \in I} B_i$.
  - $B_i \neq \emptyset$ para todo i.

  Cada B_i es un **bloque** de la partición $\{B_i\}_{i \in I}$ de A.
  I es el conjunto de **índices** de la partición.

  P.ej. en la partición de $\mathbb{N}$ entre pares e impares, nos queda $\mathbb{N} = \{B_1, B_2\}$ donde B_1 y B_2 son los conjuntos de números pares e impares respectivamente, y $I = \{1, 2\}$.

- Cada relación de equivalencia $\sim$ definida en A genera una partición de A.
  A la partición de A generada por $\sim$ se la llama $A/\sim$, el **conjunto cociente** de A por $\sim$.
  A los bloques de $A/\sim$ se los llama **clases de equivalencia** de $A/\sim$. Para indicar la clase de equivalencia a la que pertenece un elemento $a \in A$, notamos $[a]_\sim$.

- Al revés, a cada partición $P = \{B_i\}_{i \in I}$ del conjunto A le corresponde una relación de equivalencia $\sim_P$ definida así: dos elementos de A están relacionados por $\sim_P$ ssi están en el mismo bloque de P.
  Dicho con fórmulas, $x \sim_P y \;\Leftrightarrow\; \exists B : B \in P \wedge x \in B \wedge y \in B$.

- La correspondencia entre relaciones de equivalencia en A y particiones de A “se porta bien” en este sentido

  $$\begin{array}{lcl} \sim_{(A/\sim)} & = & \sim \\ A/\sim_P & = & P \end{array}$$

Ejercicios

1. Considerando el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9{,}10\}$, indicar cuáles de las siguientes son particiones de A.

   a) $B_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B_2 = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

   b) $B_1 = \{1, 3, 5\}$, $B_2 = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

   c) $B_1 = \{1, 3, 5\}$, $B_2 = \{2, 4, 6\}$, $B_3 = \{7, 8, 9\}$, $B_4 = \{10, 1\}$.

   d) $B_1 = \{1, 3, 5\}$, $B_2 = \{2, 4, 6\}$, $B_3 = \{7, 8, 9\}$, $B_4 = \{10\}$.

2. Considerando el conjunto A de los alumnos de la TPI, indicar cuáles de las siguientes son particiones de A.

   a) B_1 = alumnos que aprobaron Intro, B_2 = alumnos que aprobaron Orga, B_3 = alumnos que no aprobaron ni Intro ni Orga.

   b) B_1 = alumnos que aprobaron Intro, Orga y al menos una más, B_2 = alumnos que aprobaron Intro, Orga y ninguna más.

   c) B_1 = alumnos que no están cursando ninguna materia, B_2 = alumnos que están cursando una materia, B_3 = alumnos que están cursando dos materias, B_4 = alumnos que están cursando más de dos materias.

   d) B_1 = alumnos que cursan los lunes, B_2 = alumnos que cursan los martes, B_3 = alumnos que cursan los miércoles, B_4 = alumnos que cursan los jueves, B_5 = alumnos que cursan los viernes, B_6 = alumnos que cursan los sábados.

   e) B_1 = alumnos que aprobaron Intro y no Orga, B_2 = alumnos que aprobaron Orga y no Intro, B_3 = alumnos que no aprobaron ni Intro ni Orga, B_4 = alumnos que aprobaron Intro y Orga.

   f) B_1 = alumnos que no están cursando ninguna materia, B_2 = alumnos que están cursando una materia, B_3 = alumnos que están cursando dos materias.

   g) B_1 = alumnos que cursaron Intro al menos una vez en el 2011 o antes, B_2 = alumnos que cursaron Intro al menos una vez en el 2012 o después, B_3 = alumnos que nunca cursaron Intro.

3. Varias relaciones de equivalencia y particiones.

   a) En el supermercado “Don Manolo”[1] se puso el siguiente cartel en la góndola de la yerba

   Se limita la compra de yerba a 3 paquetes por persona por día.

   Como Don Manolo conoce a sus clientes, puede impedir que hagan trampa comprando más de 3 paquetes el mísmo día, yendo varias veces.

   En el conjunto A de las personas que hicieron compras en el supermercado en un día dado, se define la relación $\sim$ de esta forma: $x \sim y$ si y sólo si x e y compraron la misma cantidad de paquetes de yerba ese día.

   Definir el conjunto cociente $A/\sim$, teniendo en cuenta que pudo haber gente que no compró yerba.

   b) En un barrio, se quiere armar una asamblea vecinal con un representante por manzana.

[1] que, como todos sabemos, vende más barato . . . si no te suena a nada, preguntale a algún tío

Si definimos A como el conjunto de los habitantes del barrio, definir una relación $\sim$ de equivalencia en A tal que en la asamblea haya exactamente una persona por cada bloque de $A/\sim$.

c) Definir $A/\sim$ donde $A = P(\{a, b, c, d, e\})$ y $x \sim y$ si y sólo si $\{x \cap \{a, b, c\}\} = \{y \cap \{a, b, c\}\}$.

d) Un equipo de fútbol tiene un plantel formado por 35 jugadores, de los cuales 4 son arqueros, 14 son defensores, 10 son mediocampistas y 7 son atacantes[2]. Arquero, defensor, mediocampista y atacantes son las posibles posiciones de un jugador. Decimos que A es el conjunto de jugadores del equipo, y definimos la relación $\sim$ así: $x \sim y$ ssi[3] x e y juegan en la misma posición.

Se pide: definir $A/\sim$, e indicar cuántos elementos de cada bloque tengo que tomar para armar un equipo que se pare 4-4-2 (o sea, con 4 defensores, 4 mediocampistas y 2 atacantes; recordar que un equipo tiene exactamente un arquero).

e) Dentro del conjunto A de los alumnos de una escuela, se define la relación $\sim$ así: dos alumnos están relacionados ssi están en el mismo grado y además son, o bien los dos varones, o bien las dos mujeres.
Definir $A/\sim$ e indicar qué se obtiene tomando un representante de cada clase de equivalencia (clase de equivalencia = bloque) resultante.

f) Dentro del conjunto A de los seres humanos, se define la relación $\sim$ así: dos personas están relacionadas ssi cumplen años en el mismo día.
Suponiendo que todos los días nace al menos una persona, definir $A/\sim$, indicar cuántos bloques hay, y cuál de ellos en principio debería tener un cardinal menor al de los otros (ayuda: pensar en los años bisiestos).

4. Para cada una de estas relaciones, indicar si son o no de equivalencia. Para las que sí sean, definir la partición correspondiente, o sea, cual es el conjunto de índices I, y cómo se puede definir el bloque B_i para cada i. Para las que no sean, indicar al menos una de las propiedades que se rompa, y mostrarlo con un contrajemplo.

   a) $A = \mathbb{Z}$, $a \sim b$ ssi $a - b \leq 5$.

   b) $A = \mathbb{Z}$, $a \sim b$ ssi $|a - b| \leq 5$.

   c) $A = \mathbb{N}$, $a \sim b$ ssi el resto de $a/7$ coincide con el resto de $b/7$.

   d) $A = \mathbb{N}$, $a \sim b$ ssi las divisiones enteras $a/8$ y $b/8$ dan el mismo resultado.

   e) $A = \mathbb{N}$, $a \sim b$ ssi tanto a como b son múltiplos de 5, o bien ni a ni b son múltiplos de 5.

   f) $A = \mathbb{N}_{\geq 10}$ (o sea, los naturales de 10 en adelante: 10, 11, 12, ...), $a \sim b$ ssi a empieza con la misma cifra que b, y además a termina con la misma cifra que b.

   g) $A = \mathbb{N}_{\geq 10}$ (o sea, los naturales de 10 en adelante: 10, 11, 12, ...), $a \sim b$ ssi a empieza con la misma cifra que b, o a termina con la misma cifra que b.

   h) A es el conjunto de los números desde 0 a 9999, $a \sim b$ ssi el resultado de sumar las cifras de a coincide con el de b.

   i) A es el conjunto de los números desde 0 a 9999, $a \sim b$ ssi el resultado de sumar las cifras de a es menor o igual al de b.

[2] es un equipo conservador
[3] si y sólo si

j) $A = \mathbb{N}$, $a \sim b$ ssi: o bien los dos son pares o bien los dos son impares, y además, o bien ambos son menores a 100, o bien ambos están entre 101 y 1000, o bien los dos son mayores a 1000.

5. Lo mismo que en el ejercicio 4, para las siguientes relaciones definidas en el conjunto de las palabras de hasta 10 letras.

   a) $a \sim b$ ssi a y b tienen la misma cantidad de letras.

   b) $a \sim b$ ssi a y b empiezan con la misma letra y tienen la misma cantidad de letras.

   c) $a \sim b$ ssi, o bien la letra j no aparece ni en a ni en b, o bien aparece en ambas.

   d) $a \sim b$ ssi las vocales que aparecen en a son las mismas que aparecen en b. Por ejemplo, *albatros* $\sim$ *ocaso* porque en ambas las vocales que aparecen son $\{a, o\}$.

   e) $a \sim b$ ssi $a = b$ o a es la primera parte de b. P.ej. *oca* $\sim$ *oca*, *oca* $\sim$ *ocarina*, *oca* $\sim$ *ocaso*.

6. Lo mismo que en el ejercicio 4, para las siguientes relaciones definidas en el conjunto { Albos, Berrincheros, Cafones, Dinámicos, Efebos, Flaquitos, Garra F.C, Hacha y Tiza } de los 8 equipos que jugaron un campeonato todos-contra-todos ida y vuelta (o sea, cada par de equipos juega dos partidos, con lo cual cada equipo jugó 14 partidos en total).

   En todos los casos, $a \sim b$ ssi

   a) a y b ganaron la misma cantidad de partidos, y también hicieron la misma cantidad de goles en total.

   b) a y b ganaron la misma cantidad de partidos, o bien hicieron la misma cantidad de goles en total.

   c) a ganó más partidos que b, o bien b ganó más partidos que a.

   d) no hay ningún equipo que le haya ganado a a y a b.

   e) a y b empataron los dos partidos que jugaron entre ellos.

   f) a y b les ganaron exactamente a los mismos equipos.

   g) o bien ni a ni b llegaron a hacer 10 goles en total, o bien ambos hicieron entre 11 y 20 goles, o bien ambos hicieron más de 20 goles.

7. Lo mismo que en el ejercicio 4, para las siguientes relaciones definidas en el conjunto de los alumnos de la UNQ. Tener en cuenta a los siguientes boliches de Quilmes: El Bosque, Buró, Space, Diversión.

   En todos los casos, $a \sim b$ ssi

   a) a y b conocen la misma cantidad de boliches.

   b) a y b conocen exactamente los mismos boliches.

   c) hay al menos un boliche que conocen tanto a como b.

   d) no hay ningún boliche que conozcan tanto a como b.

   e) el primer boliche al que fue a es el mismo que el primer boliche al que fue b, y también el segundo boliche al que fue a es el mismo que el segundo boliche al que fue b.

f) tanto a como b conocen Buró.

g) tanto a como b conocen Buró, o bien ninguno de los dos conoce Buró.

8. Definir la relación de equivalencia, y la partición que queda del conjunto, que está haciendo en cada caso

   a) El correo central al clasificar las cartas que tiene que repartir por código postal.

   b) El encargado de un depósito al ordenar los paquetes de yerba por marca y por tamaño, considerando paquetes de medio y de kilo. Por ejemplo, todos los paquetes de Playadito de medio van juntos.

   c) Un verdulero al que se le mezclaron peras y manzanas, debe separarlas, entre las peras separar entre las que están buenas y las que están pasadas, las manzanas en rojas y verdes.

   d) Un chico cuando acomoda sus bolitas separándolas en lisas y manchadas, y dentro de las lisas por color, que puede ser verde, azul, negro o amarillo.

   e) Una máquina que clasifica naranjas en chicas, medianas y grandes.

   f) El empleado de una fábrica de jeans que acomoda los jeans producidos según el modelo y color, separando además en primera y segunda selección.

   g) Un presidente de mesa en una elección cuando separa los votos por categoría (presidente, diputados, etc.) y dentro de cada categoría, separa los votos de cada lista.

   h) El encargado de un salón de fiestas que al final de una fiesta separa las mesas de las sillas; entre las sillas separa en azules, blancas y negras; entre las mesas separa redondas de cuadradas.

   i) El empleado de una agencia de turismo que debe separar los folletos de los paquetes de turismo que ofrece la empresa, separándolos en verano e invierno. Dentro de verano separa en playa, lago y sierra; dentro de invierno separa en ciudades y esquí.

9. En una encuesta hecha a 100 personas sobre los medios de transporte que usan, se descubre que 40 usan el tren, 50 usan el colectivo, y 30 no usan ninguno de los dos.

   Se define A como el conjunto de las 100 personas encuestadas, y $\sim$ como la relación en la que $x \sim y$ ssi x e y usan, entre tren y colectivo, exactamente los mismos medios (si los dos usan ambos, si los dos no usan ninguno, etc.). Llamemos C al conjunto de las personas que usan el colectivo, y T al conjunto de las personas que usan el tren.

   Definir $A/\sim$, asociando una fórmula de conjuntos usando C y T a cada bloque; e indicar el cardinal de cada bloque resultante.

10. Se hace un estudio en 91 comercios, viendo en cuáles se venden las marcas de jabón "Lix", "Dubi" y/o "Verono". Se obtienen estos datos: en 10 comercios se venden las tres marcas, en 19 "Lix" y "Dubi", en 50 se vende "Lix", en 17 se vende "Lix" y ninguna de las otras dos, en 44 se vende "Dubi", en 15 "Dubi" y "Verono", en un negocio no se vende ninguna de las tres marcas.

    Se define A como el conjunto de los 91 comercios estudiados; llamemos L, D y V a los conjuntos de los negocios que venden "Lix", "Dubi" y "Verono" respectivamente.

a) Si $\sim$ es la relación en la que $x \sim y$ ssi x e y venden, entre “Lix”, “Dubi” y/o “Verono”, exactamente las mismas marcas (si los dos venden las tres marcas, si ninguno de los dos vende ninguna marca, si los dos venden “Lix” y ninguna de las otras dos, etc.), definir $A/\sim$, asociando una fórmula de conjuntos usando L, D y V a cada bloque; e indicar el cardinal de cada bloque resultante.

b) Si $\sim'$ es la relación en la que $x \sim' y$ ssi x e y venden exactamente las mismas marcas teniendo en cuenta solamente “Lix” y “Verono”, (si los dos venden ambas marcas, si los dos venden “Lix” y no “Verono”, etc.), definir $A/\sim$, asociando una fórmula de conjuntos usando L, D y V a cada bloque; e indicar el cardinal de cada bloque resultante.

11. Para cada una de las relaciones de equivalencia definidas en $P(C)$ donde $C = \{a, b, c, d, e\}$ que se describen, encontrar índices y bloques para la partición de $P(C)$ correspondiente, y describir $[\{b, c, d\}]_\sim$ por extensión. En todos los casos $A \sim B$ ssi

    a) $A \cap \{a, b\} = B \cap \{a, b\}$.
    b) $A - \{a, b, c\} = B - \{a, b, c\}$.
    c) $\{a, b, c\} - A = \{a, b, c\} = B$.
    d) $A \cup \{a, b\} = B \cup \{a, b\}$.
    e) $\{a, b, c\} \,\Delta\, A = \{a, b, c\} \,\Delta\, B$. Este es difícil.

12. Sean $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, y los predicados p y q cuyas extensiones son $p = \{a, b, c, d\}$ y $q = \{b, d, e\}$. Definimos las relaciones $\sim^1$ y $\sim^2$ donde $x \sim^1 y$ ssi $p(x) \leftrightarrow p(y)$ es verdadera, y $x \sim^2 y$ ssi $(p(x) \leftrightarrow p(y)) \wedge (q(x) \leftrightarrow q(y))$ es verdadera.

    Demostrar que $\sim^1$ y $\sim^2$ son de equivalencia, y hallar $A/\sim^1$ y $A/\sim^2$, defiiendo en ambos casos cada clase de equivalencia por extensión.

13. Sean $A = \{a, b, c, d, e\}$, y el predicado $p = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, a), (e, a)\}$. Definimos la relación $\sim$ en A así: $x\, R\, y$ ssi $\forall z : p(x, z) \leftrightarrow p(y, z)$ es verdadera.
    Hallar $A/\sim$, definiendo cada clase de equivalencia por extensión.

14. Para cada una de las siguientes relaciones: si es de equivalencia demostrarlo, dar 5 elementos de $[(3, 4)]_\sim$, y si te animás, definir $[(3, 4)]_\sim$ por comprensión; si la relación no es de equivalencia, dar un contraejemplo de alguna de las propiedades.

    a) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(a, b) \sim (c, d)$ ssi $a * d = b * c$.
    b) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(a, b) \sim (c, d)$ ssi $a + c = b + d$.
    c) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $(a, b) \sim (c, d)$ ssi $7a - d = 7b - c$.
    d) $A = \mathbb{Z}$, $a \sim b$ ssi $a - b$ es múltiplo de 8.
    e) $A = \mathbb{Z}$, $a \sim b$ ssi $a + b$ es múltiplo de 8.
    f) $A = \mathbb{Z}$, $a \sim b$ ssi $a * b$ es múltiplo de 8.
    g) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $a \sim b$ ssi $max(a, b) = max(c, d)$.