Matemática I 2do parcial

Hoja 1/2

Inducción

1. Demostrar por inducción que para todo $n \in N$, $4 \mid 5^n - 1$

$5^n - 1$ se puede escribir como $4*k$, $k \in N$

Caso base n = 1

$5^1 - 1 = 4$

$4 = 4*1$ $k = 1$

Caso inductivo

Suponiendo que $5^n - 1 = 4*k$, $k \in \mathbb{N}$ es cierto, se debe demostrar $5^{n+1} - 1 = 4*k'$, $k' \in \mathbb{N}$

$5^{n+1} - 1$

$5^n * 5 - 1$

$5^n * (4+1) - 1$

$4*5^n + 5^n - 1$ Reemplazo por mi hipótesis inductiva en el siguiente paso

$4*5^n + 4*k$

$4*(5^n + k)$ $(5^n + k) = k'$ C.Q.D

2. Dar una fórmula general para a_n, donde

$a_1 := 2$

$a_{h+1} := ((a_h + 1) / 3) + 2*h + 2$

y demostrar usando inducción que la fórmula encontrada es correcta.

Primeros términos de la sucesión:

$a_1 = 2$

$a_2 = ((2 + 1) / 3) + 2*1 + 2 = 3/3 + 4 = 5$

$a_3 = ((5 + 1) / 3) + 2*2 + 2 = 6/3 + 6 = 8$

$a_4 = ((8 + 1) / 3) + 2*3 + 2 = 9/3 + 8 = 11$

$a_5 = ((11 + 1) / 3) + 2*4 + 2 = 12/3 + 10 = 14$

Termino genérico:

$a_n = 3*n - 1$

Demostración:

Caso base n = 1

Por definición $a_1 = 2$

Por formula $a_1 = 3*1 - 1 = 2$

Hoja 2/2

Caso inductivo

Suponiendo que $a_n = 3*n - 1$ es cierto, se debe demostrar $a_{(n+1)} = 3*(n+1) - 1$

$a_{n+1} = ((a_n + 1) / 3) + 2*n + 2$ Reemplazo por mi hipótesis inductiva en el siguiente paso

$a_{n+1} = ((3*n - 1 + 1) / 3) + 2*n + 2$

$a_{n+1} = (3*n / 3) + 2*n + 2$

$a_{n+1} = n + 2*n + 2$

$a_{n+1} = 3*n + 2$

$a_{n+1} = 3*n + 2 + 1 - 1$

$a_{n+1} = 3*n + 3 - 1$

$a_{n+1} = 3*(n+1) - 1$ C.Q.D

Combinatoria

1. Se está armando una lista en una elección para 5 diputados. Hay 9 personas que pueden ocupar lugares. ¿Cuántas listas se pueden armar, si bien Ana y Betina deben aparecer primera y segunda en la lista, o bien no aparecen?

7P3 = 210 (Permutaciones en las que Ana esta primera y Betina segunda)

7P5 = 2520 (Permutaciones en las que Ana y Betina no están en la lista)

210 + 2520 = 2730

2. Para armar un comité de control de las elecciones de 6 miembros, hay 8 mujeres y 8 varones que pueden elegirse. ¿Cuántos comités distintos pueden armarse, si debe haber al menos dos mujeres?

$\binom{14}{4} = 1001$

3. En el pizarrón de la escuela se van a poner 10 carteles. De los 10 carteles, 3 son instrucciones para el futuro votante, 5 son sobre los cursos del CIU y 2 son sobre el uso del barbijo. Los carteles del mismo tipo son todos iguales. ¿Cuántas formas distintas hay de distribuir los carteles en el pizarrón?

$$\frac{10!}{3!x\ 5!x\ 2!} = \frac{3628800}{6\ x\ 120\ x\ 2} = \frac{3628800}{1440} = 2520$$

Firma: