

---

# Funciones

## Comisiones 1 y 3 – Versión del 16/05/2013

### Definiciones y algunos comentarios

#### Definición de función

Repasamos la definición de función, que ya está en la guía de relaciones.

Una función  $f : A \rightarrow B$  es una relación en  $A \times B$  que cumple con estas dos condiciones.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall x : x \in A \rightarrow (\exists y \in B : \underbrace{(x, y) \in R}_{f(x)=y}) & \text{existencia} \\ \forall x : \forall y_1 : \forall y_2 : (\underbrace{((x, y_1) \in R \wedge (x, y_2) \in R)}_{f(x)=y_1=y_2}) \rightarrow y_1 = y_2 & \text{unicidad} \end{array} \right.$$

Pensando una relación  $f$  en  $A \times B$  como un conjunto de pares  $(x, y)$  donde  $x \in A$  e  $y \in B$ , entonces

- *existencia* es que para todo  $x \in A$ , haya un  $(x, y)$  en  $f$ .
- *unicidad* es que no puede haber dos  $y$ , digamos  $y_1$  e  $y_2$ , tales que  $(x, y_1)$  y  $(x, y_2)$ , los dos, estén en  $f$ .

#### Dominio, codominio, imagen

Si  $f : A \rightarrow B$  es una función, entonces:

el **dominio** de  $f$        $Dom(f)$       es  $A$

el **codominio** de  $f$        $Cod(f)$       es  $B$

la **imagen** de  $f$        $Im(f)$       es  $\{y/y \in B \wedge (\exists x.x \in A \wedge f(x) = y)\}$

Un poco más en criollo, la imagen de  $f$  son los  $B$  a los que les corresponde un  $A$ .

#### Inyectiva, suryectiva, biyectiva, inversa

Si pensamos en una función  $f : A \rightarrow B$  como un conjunto de pares, entonces la inyectividad es la “unicidad al revés”, y la suryectividad es la “existencia al revés”, o sea

- $f$  es **suryectiva** si para todo  $y \in B$  hay un  $(x, y)$  en  $f$ .
- $f$  es **inyectiva** si para ningún  $y$  puedo encontrar dos  $x$ , digamos  $x_1$  e  $x_2$ , tales que  $(x_1, y)$  y  $(x_2, y)$ , los dos, estén en  $f$ .

(comparar con lo que se dijo de existencia y unicidad más arriba).

En fórmulas queda (escribiendo directamente  $f(x) = y$  en lugar de  $(x, y) \in f$ , podemos hacer eso porque ya sabemos que  $f$  es función)

$f$  es *inyectiva* ssi  $\forall x_1 : \forall x_2 : (f(x_1) = f(x_2)) \rightarrow x_1 = x_2$ .

$f$  es *suryectiva* ssi  $\forall y : y \in B \rightarrow (\exists x.x \in A \wedge f(x) = y)$ .

“Sobreyectiva” y “suryectiva” son sinónimos.

Si  $f$  es inyectiva y también suryectiva, entonces decimos que es **biyectiva**.

La relación inversa de una función  $f$  (recordamos,  $\{(y, x) / (x, y) \in f\}$ ), es una función si y sólo si  $f$  es biyectiva.

En tal caso notamos la inversa de  $f$  como  $f^{-1}$  y la podemos definir así: si  $f : A \rightarrow B$  es biyectiva, entonces  $f^{-1} : B \rightarrow A$  es la función que se define por  $f^{-1}(y) = x$  si  $f(x) = y$ .

### Composición

Si tenemos  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : C \rightarrow D$  y  $Im(f) \subseteq C$ , entonces se define la función “ $f$  compuesta con  $g$ ”, notación  $g \circ f$ , así:  $g \circ f : A \rightarrow D$  donde  $g \circ f(x) = g(f(x))$ .

### Extra extra - graficadores de funciones

Hay programas que le ponés la función y te muestra el gráfico en pantalla. También hay sitios Web que lo hacen online.

Les paso uno que está en castellano: <http://fooplot.com/?lang=es>.

### Ejercicios

1. Para cada una de las siguientes definiciones, indicar si corresponde a una función o no. De las que sí son funciones, indicar dominio y codominio. De las que no son funciones, indicar si lo que no se cumple es unicidad, existencia o ambas, y justificar.
  - a) Cada alumno del curso con su altura en centímetros.
  - b) Cada alumno del curso con su fecha de nacimiento.
  - c) Cada alumno del curso con cada materia que aprobó.
  - d) Cada alumno del curso con el barrio en donde vive.
  - e) Cada alumno del curso con el color de su bicicleta.
  - f) Cada alumno del curso con cada uno de sus hermanos.
  - g) Cada auto con cada taller donde se hizo un service.
  - h) Cada auto con el primer taller en donde se hizo un service.
  - i) Cada auto con la cantidad de kilómetros que hizo.
  - j) Cada curso con el aula en que se dicta.
  - k) Cada paloma con la cantidad de plumas que tiene.
  - l) Cada ciudad de la Argentina con la provincia donde está.
  - m) Cada ciudad de la Argentina con la provincia de la que es capital.
  - n) Cada provincia de la Argentina con su capital.
  - ñ) Relación desde alumno hacia examen, pensando en todos los parciales de un curso en el que se toman dos parciales.
  - o) Relación desde examen hacia alumno, pensando en todos los parciales de un curso en el que se toman dos parciales.
  - p) Cada alumno inscripto en un curso con la clase a la que asistió.
  - q) Cada alumno inscripto en un curso con la primer clase a la que asistió.
  - r) Cada alumno inscripto en un curso con la cantidad de clases a las que asistió.
  - s) En un club en el que cada socio tiene un locker en los vestuarios, cada socio con su locker.
  - t) Cada persona con el club del que es socio/a.
2. En un país X, la relación entre las personas que quieren trabajar y los puestos de trabajo es una función, mirada desde personas hacia puestos de trabajo. ¿Qué nos dice esto del país X (pensar en existencia y unicidad)?

3. Un mayorista ofrece la siguiente oferta sobre un tipo de galletitas: hasta 10 paquetes se venden a 6 pesos el paquete; pasando los 10 paquetes hasta los 40, 5 pesos por kilo adicional; pasando los 40 paquetes, 3 pesos por paquete adicional. P.ej. si una persona compra 42 paquetes, paga  $(10 * 6) + (30 * 5) + (2 * 3) = 216$  pesos. Los 30 paquetes vendidos a 5 pesos son los que pasan los 10, hasta los 40 inclusive.

Definir la función que describa esta situación, donde la variable independiente sea la cantidad de paquetes que compra el cliente.

4. Se definen las siguientes relaciones en  $A = \{a, b, c, d, e\}$ :

$$R_1 = \{(a, b), (b, c), (c, d)\}$$

$$R_2 = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, a)\}$$

$$R_3 = \{(a, b), (b, c), (b, d), (d, e), (e, a)\}$$

$$R_4 = \{(a, a), (b, a), (c, d), (d, a), (e, a)\}$$

$$R_5 = \{(a, c), (b, e), (c, a), (d, b), (e, d)\}$$

Indicar de estas cuáles son funciones. Para las que sí sean funciones, indicar si son inyectivas y/o suryectivas, y si se puede, definir por extensión la función inversa.

5. De cada una de estas funciones, indicar si es inyectiva y/o suryectiva, justificando. Para las que sean biyectivas, decir cuál es la función inversa, indicando dominio y codominio.

- a) La función que va de los alumnos de la Universidad a la fecha de nacimiento de cada uno. Tomar como codominio el conjunto de todos los días desde el 1ro de enero de 1800.
- b) La función que va de los pasajeros de un tren que no tiene vagones vacíos, al vagón en el que está cada uno.
- c) La función que va de los pasajeros de un vuelo, al asiento que ocupa cada uno. Pensar en dos casos: avión lleno, y avión no lleno.
- d) La función que va de los lápices de una caja de lápices de 12 colores al color de cada lápiz, tomando como codominio el conjunto de los 12 colores incluidos en la caja.
- e) La función que va de los residentes en Argentina al número de DNI de cada uno, tomando como codominio los naturales.
- f) La función que va de las personas que comieron un combo en un negocio de comidas rápidas, al combo que comió cada uno, suponiendo que nadie comió más de un combo. El negocio de comidas rápidas vende 30 combos distintos.
- g) La función que va de las personas que viven en un edificio, al departamento en que vive cada una.
- h) La función que va de los perros que se presentan en un concurso de belleza, al dueño de cada perro.
- i) La función que va de cada provincia de Argentina a su capital, tomando como codominio el conjunto de las ciudades capitales de provincia.

6. Teniendo en cuenta la función  $f$  que va de las biromes que hay en una cartuchera, al color de cada una, donde el codominio es  $\{\text{azul}, \text{negro}, \text{rojo}, \text{verde}\}$  y sólo puede haber biromes de esos colores, dar: la condición que tiene que cumplir el contenido de la cartuchera para que  $f$  sea inyectiva, idem para que  $f$  sea suryectiva.

7. Para cada una de las funciones que sigue, graficarla, e indicar si es inyectiva y/o suryectiva, si la función se define por partes mediante el gráfico, si no por demostración. Para las funciones que resulten biyectivas y que no estén definidas por partes, definir la inversa. En todos los casos se define  $f(x)$ , donde  $Dom(f) = Cod(f) = \mathbb{R}$ .

a)  $3(x - [x])$ .

b)  $2x - 1$ .

c)  $-2x + 1$ .

d)  $\begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

e)  $\begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 2 \\ x/2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

f)  $\begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ -x & \text{si } x > 3 \end{cases}$

g)  $\begin{cases} -(x^2) & \text{si } x \leq -2 \\ -x & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

h)  $\begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } 2 < x \leq 3 \\ \frac{x+6}{9} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

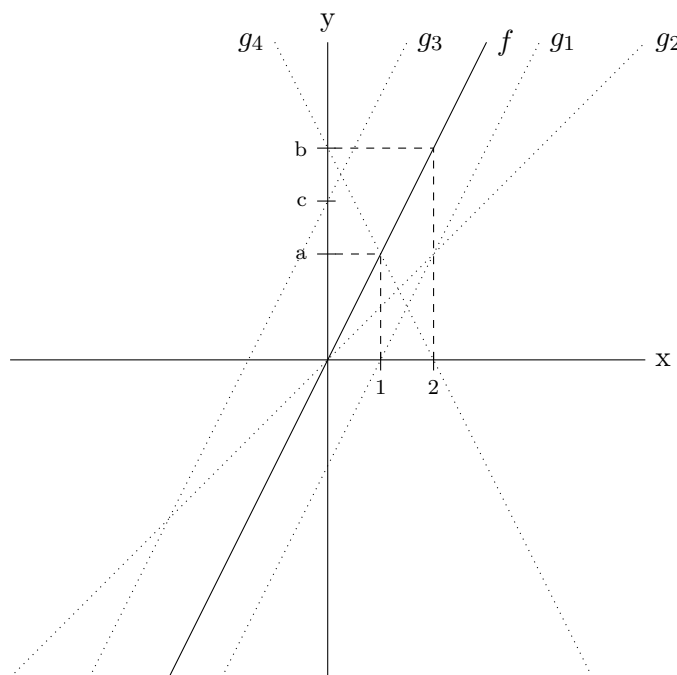
i)  $\begin{cases} x^2 + 7 & \text{si } x \leq 2 \\ x + 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

j)  $\begin{cases} 2 * |x + 2| & \text{si } x \leq 0 \\ -(x^2) + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

k)  $7 - 3x$ .

l)  $x^2 + 4x - 3$ .

8. Miremos este gráfico.

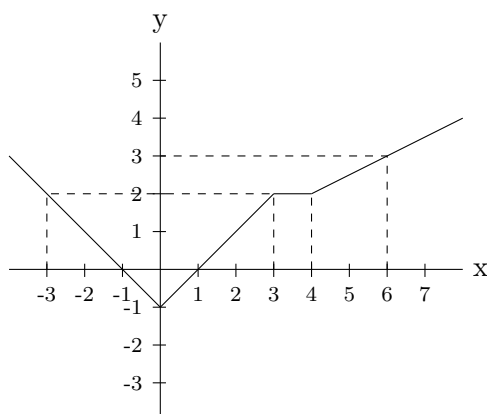


donde  $f$ ,  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$  y  $g_4$  son funciones que van de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ , y  $f(x) = 2x$ .

Se pide:

- decir qué valores corresponde poner en lugar de  $a$ ,  $b$  y  $c$ , donde  $c$  está en el punto medio entre  $a$  y  $b$ .
- Las definiciones de  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$ ,  $g_3(x)$  y  $g_4(x)$  están, todas, entre las siguientes:  $x$ ,  $2x + 3$ ,  $-2x$ ,  $-2x + 4$ ,  $-2x - 4$ ,  $4x$ ,  $2(x - 1)$ . Indicar a cuál de estas definiciones corresponde cada función graficada, y graficar las que no están graficadas.

9. Indicar a qué función corresponde este gráfico.



Tener en cuenta que es una función partida.  
Observando el gráfico, indicar si la función es o no inyectiva, y si es o no suryectiva.

10. Para cada una de las siguientes funciones, indicar si es inyectiva y/o suryectiva.

a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = 3x^2 - 30x + 24.$   
b)  $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty) \quad / \quad f(x) = \sqrt{x} + 1.$

11. Una persona se compra una moto, paga 2000 pesos de anticipo y 500 por mes, hasta completar 10000 pesos que es el precio de la moto. En este precio ya están incluidos los intereses.

Definir la función que indica, para cada mes a partir del primero, el total pagado para pagar la moto hasta ese mes. Incluir el “mes cero”, cuyo valor correspondiente es el anticipo.

12. Un programador está programando un juego sobre tortugas ninja. Una tortuga tiene que tener energía para estar viva, cuando la energía llega a cero, la tortuga se muere. Una tortuga tiene dos valores de energía, la principal y la de reserva. Vamos a representar esto mediante un par en  $\mathbb{N}^2$ .

Cuando la tortuga se clava una pizza, gana energía según las siguientes reglas:

- si tiene 97 o menos de energía principal, gana 3 de energía principal.
- si tiene 98 de energía principal, gana 2 de principal y 1 de reserva.
- si tiene 99 de energía principal, gana 1 de principal y 2 de reserva.
- si tiene 100 o más de energía principal, gana 2 de reserva.

Cuando la tortuga camina 10 pasos, consume 1 de energía principal. Si llega a 0 se muere, no puede usar la de reserva.

Cuando la tortuga recibe un golpe, consume 5 de energía. Mientras puede consume de la de reserva, si se queda sin reserva, entonces consume lo que necesite de la principal. P.ej. si una tortuga cuya energía es  $(34, 2)$  recibe un golpe, entonces se le van los 2 de energía de reserva, y los 3 que faltan, se consumen de la energía principal, quedando  $(31, 0)$ .

Definir las funciones  $f_p, f_c, f_g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^2$  que permiten calcular con cuánta energía queda una tortuga después de comer pizza, caminar o recibir un golpe, respectivamente.

Calcular  $f_g \circ f_c \circ f_p((98, 1))$ , e interpretar qué representa esa transformación en el juego.

13. Un político obtiene 200 votos con su primer discurso, 300 más con el segundo, 1000 más con el tercero, y luego 200 votos más con cada discurso desde el cuarto hasta del 10mo. Desde el discurso 11 hasta el 20, no gana ni pierde votos, se mantiene la cantidad. Dedese el discurso 21, el político *pierde* 100 votos por cada discurso adicional, hasta el discurso 40 inclusive. A partir del discurso 41, la cantidad de votos es estable.

Se pide: definir la función que dada una cantidad de discursos calcula la cantidad de votos obtenidos, y decir si es o no inductiva, y si es o no suryectiva.

14. En cada caso, calcular las funciones  $g \circ f$  y  $f \circ g$ , de ser posible.

a)  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x$ ,  $g(x) = x - 1$ .

b)  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = [x]$ ,  $g(x) = x^2$ .

c)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ ,  $f(x) = 2x + 6$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$ .

d)  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \leq 6 \\ x + 5 & \text{si } x > 6 \end{cases}$ ,  $g(x) = 2x$ .

e)  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} |x| - 5 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ ,  $g(x) = x + 4$ .

15. Definir  $f \circ g \circ h$  y  $h \circ g \circ f$ , donde  $f(x) = x^2 + 2x$ ,  $g(x) = x/4$  y  $h(x) = x + 12$ . Las tres son de reales en reales.

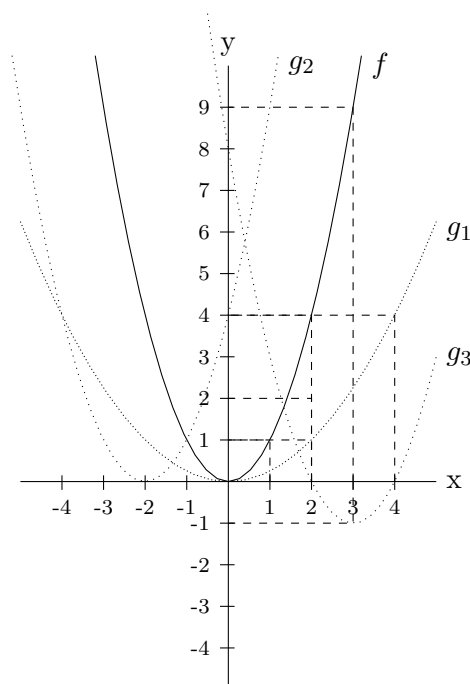
16. Considerando las funciones  $f(x) = x^2$  y

$$h_1(x) = x + 2 \quad h_2(x) = -x \quad h_3(x) = 2 * x$$

$$h_4(x) = x/2 \quad h_5(x) = x - 3 \quad h_6(x) = x - 1$$

definir cada una de las siguientes funciones componiendo  $f$  con una o dos de las  $h$ :  $(x + 2)^2$ ,  $-(x^2)$ ,  $x^2 + 2$ ,  $2 * x^2$ ,  $(x/2)^2$ ,  $x^2/2$ ,  $(x - 3)^2 - 1$ ,  $(x - 1)^2 - 3$ ,  $(x - 1)^2 - 1$ .

17. Considerando el gráfico que sigue

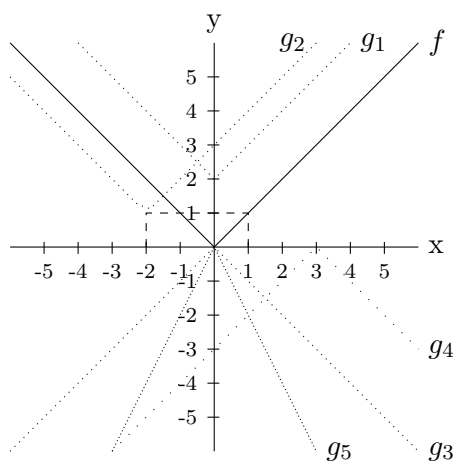


donde todas las funciones van de  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$ , y donde  $f(x) = x^2$ , indicar cuáles son las definiciones de  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$ , y  $g_3(x)$ , que están todas entre las descriptas en el ejercicio anterior.

18. Considerando las funciones  $f(x) = |x|$  y  
 $h_1(x) = x + 2$   $h_2(x) = -x$   $h_3(x) = 2 * x$   $h_4(x) = x/2$   
 $h_5(x) = x - 3$   $h_6(x) = x - 4$   $h_7(x) = x + 1$   $h_8(x) = x + 3$   
 definir cada una de las siguientes funciones componiendo  $f$  con una o dos de las  $h$ :

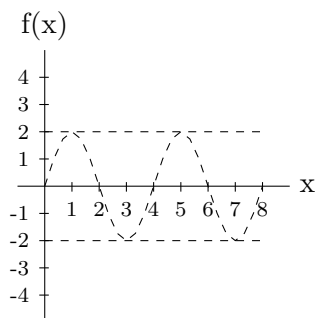
- |                 |              |                 |               |
|-----------------|--------------|-----------------|---------------|
| ■ $ x  + 2$     | ■ $- x $     | ■ $ x  - 2$     | ■ $- x/2 $    |
| ■ $ x + 1  + 2$ | ■ $- x + 1 $ | ■ $- x + 3 $    | ■ $1/2 *  x $ |
| ■ $- x - 3 $    | ■ $2 *  x $  | ■ $-2 *  x $    |               |
| ■ $-1/2 *  x $  | ■ $ x  - 4$  | ■ $ x + 2  + 1$ |               |

19. Considerando el gráfico que sigue, donde todas las funciones van de  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$ , y  $f(x) = |x|$

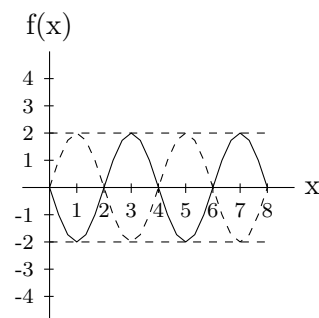
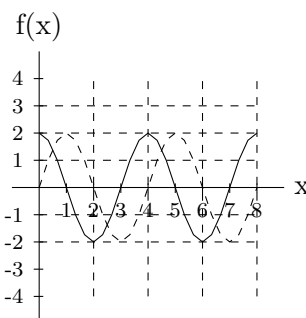
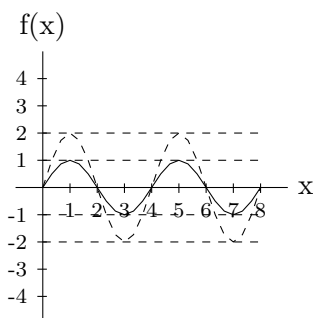


elegir las definiciones de  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$ ,  $g_3(x)$ ,  $g_4(x)$ ,  $g_5(x)$  que están todas entre las descriptas en el ejercicio anterior.

20. El siguiente es el gráfico de la función  $f$  que se muestra punteada



Para cada uno de los gráficos siguientes, definir qué función hay que componer con  $f$ , y cómo se debe componer, para obtener la función que se dibuja en línea llena en cuestión. En cada uno se repite  $f$  como referencia, en punteado.



21. Algunos más de composición de funciones.

- a) Si definimos  $A$  al conjunto de los jugadores de los clubes de un campeonato, definir la función  $f : A \rightarrow \mathbb{N}$  donde  $f(x)$  es el doble de la capacidad del estadio del club donde juega el jugador  $x$ , como una composición de 4 funciones. De cada una de estas cuatro, definir dominio y codominio.
- b) Una fábrica de camperas de cuero de vaca, usa para cada campera el cuero de una única vaca, o sea, no hay cuero de distintas vacas mezclado en una misma campera. La fábrica compra los cueros a distintas estancias. Si  $A$  es el conjunto de las camperas que produjo la fábrica en un determinado mes, y  $B$  es el conjunto de las provincias de Argentina, definir  $f : A \rightarrow B$  donde  $f(x)$  es la provincia de donde salió el cuero para fabricar la campera  $x$ , como composición de 3 funciones. De cada una de estas cuatro, definir dominio y codominio.
- c) Definir  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $f(x) = |3x^2 + 1| + 2$ , como composición de cinco funciones.
- d) Definir  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $f(x) = 3(|x + 1|^2) + 2$ , como composición de cinco funciones.

22. Para programar un juego de peleas, se quiere calcular cuántos puntos de daño hace un golpe que pega un personaje. Esta cantidad depende del nivel de energía del personaje, que puede estar entre 1 y 100. Las reglas son estas: todos los personajes, independientemente del nivel de energía, hacen tres puntos de daño; cada nivel de energía desde el 21 hasta el 50 aumenta dos puntos de daño; cada nivel de energía desde el 51 hasta el 80 aumenta un punto de daño; un personaje con nivel de energía 81 o más hace 100 puntos de daño fijo, en estos 100 están contados los tres que tiene cualquier personaje. P.ej. un personaje con nivel de energía 75 tiene:

- los 3 puntos de daño básicos, más
- 2 puntos por cada nivel entre el 21 y el 50, o sea 60 puntos, más
- 1 punto por cada nivel entre 51 y 75, o sea 25 puntos más.

Esto da un total de  $3 + 60 + 25 = 88$  puntos.

Hay varios factores que afectan al daño que puede hacer un personaje.

- Si el personaje está herido, entonces hace el daño que correspondería a 20 niveles menos de energía. P.ej. un personaje lastimado cuyo nivel de energía es 65 puntos de energía hace el mismo daño que un personaje no lastimado cuyo nivel de energía es 45.
- Si el personaje tiene un serrucho, entonces se agregan 8 puntos de daño.
- Si el personaje tiene kriptonita, entonces se duplican los puntos de daño.

Se pide

- a) Definir  $f_B$ , la función base que corresponde al daño que hace un personaje, que no está herido, y que no tiene ni martillo ni kriptonita. El dominio son los naturales entre 0 y 100, la imagen los naturales entre 3 y 100.
- b) Indicar si  $f_B$  es o no inyectiva, y si es o no suryectiva, justificando la respuesta.
- c) Indicar cómo calcular el daño que hace un personaje herido / con serrucho / con kriptonita, componiendo  $f_B$  con otra función. O sea, en cada caso, definir la función que hay que componer con  $f_B$ , y detallar cómo hay que hacer la composición.



- d) Si un personaje tiene serrucho y también kriptonita, el cálculo del daño depende del orden en que se compongan las funciones que modifican el valor base; no es lo mismo primero serrucho y después kriptonita que al revés.

Escribir la composición de 3 funciones que corresponde aplicar si se quiere que un personaje con nivel de energía 95 con serrucho y kriptonita haga 188 puntos de daño. Si las funciones de serrucho y kriptonita se compusieran “de la otra forma”, ¿qué valor de daño resultaría?

23. A partir de una relación  $R$  definida en  $A \times B$ , definir una función  $f_R : A \rightarrow P(B)$ .  
Ayuda: suponer que  $R$  no tiene unicidad.