**Lógica de predicados**

La lógica proposicional presenta limitaciones para formalizar razonamientos. La lógica de predicados permite formalizar razonamientos que estaban fuera de la lógica proposicional, mediante su lenguaje: *“lenguaje de fórmulas”*; dicho lenguaje es más expresivo, pero el objetivo es el mismo, formalizar y validar razonamientos.

La **lógica de predicados** es una **ampliación** de la **lógica proposicional** que cuenta con un lenguaje formal más rico (más expresivo) y con un conjunto de reglas que permiten validar razonamientos expresados utilizando este lenguaje. La **lógica proposicional** se debe entender, a partir de este momento, como un **subconjunto** de la **lógica de predicados**.

**Lenguaje**

Un predicado es una aplicación definida en un dominio que adquiere valores en el conjunto de enunciados. Formalmente se expresa de la manera siguiente: *P(x).*

Representaremos un predicado utilizando una letra mayúscula del alfabeto latino, con los parámetros (variables), preferentemente representados por letras minúsculas del mismo alfabeto a partir de x, entre paréntesis y separados por comas, por ejemplo:

el predicado *P(x)* podría ser la formalización de: *“x es un estudiante”*. Notar que el predicado *P(x)* no es un enunciado. *P(x)* se puede convertir en un enunciado sustituyendo la variable x (el parámetro) por algún elemento de su dominio. Si el dominio de x es el conjunto de las personas, entonces *P(Juan)* sí es un enunciado (y se corresponde con “Juan es un estudiante”).

Por regla general, no se habla de parámetros, sino de variables. Un predicado puede tener cualquier número de variables, veremos con solo una.

El **dominio de una variable** es todo el conjunto de objetos que la pueden sustituir.

Una **constante** es la representación de un elemento de un dominio. Las constantes se representan mediante letras minúsculas del alfabeto latino. Se eligen, preferentemente, a partir de la letra a, para evitar confusiones con las letras que representan las variables.

P(x,y,z) es un predicado, pero no un enunciado.

P(a,b,c) y P(a,a,d) son enunciados.

Las variables y las constantes se denominan términos cuando la distinción no es importante.

**Cuantificadores**

Los cuantificadores son los dos operadores que el lenguaje de la lógica de predicados añade a las conectivas, ya conocidas, del lenguaje de enunciados. Los dos operadores específicos del lenguaje de la lógica de predicados se corresponden, aproximadamente, con aquellas construcciones del lenguaje natural que tienen un significado de ‘todos los.../todas las...’y de ‘algún o algunos/alguna o algunas...’. Se representan con los símbolos (símbolo para todo) y (símbolo existe algún), respectivamente.

Ejemplos con cuantificadores:

Si P(x) quiere decir “x es un estudiante”, entonces:

∃x P(x) significa ‘hay estudiantes’, ‘existen estudiantes’, ‘algunos son estudiantes’, ‘alguno es un estudiante’, etc.

∀x P(x) significa ‘todos son estudiantes’, ‘todo el mundo es estudiante’, etc.

**Fórmulas**

El lenguaje de la lógica de predicados se denomina lenguaje de fórmulas. Este lenguaje utiliza como alfabeto las conectivas del lenguaje de lógica proposicional, los dos cuantificadores, los símbolos de predicados, los símbolos de constantes, los símbolos de variables y los paréntesis de apertura y de cierre.

Las reglas siguientes definen cómo hay que construir fórmulas correctamente a partir de los elementos básicos:

1) Si P es un símbolo de predicado y t 1 , ..., t n (n 0) son símbolos de términos, entonces P(t 1 ,...,t n ) es una fórmula. Estas fórmulas también se denominan átomos o fórmulas atómicas.

2) Si B y A son fórmulas, entonces (¬A), (A ⋀ B), y demás conectores también son fórmulas.

3) Si A es una fórmula y x es una variable, entonces (∀x A) y (∃x A) también son fórmulas.

4) A excepción de los casos expuestos anteriormente, no hay ninguna otra fórmula.

**El significado de los cuantificadores**

Cuando todas las variables que aparecen en una fórmula están cuantificadas, la fórmula es un enunciado. Los cuantificadores representan la sustitución de las variables cuantificadas por elementos del dominio.

Cuando el dominio de las variables es finito, se puede entender la cuantificación universal como una forma abreviada de la conjunción, y la cuantificación existencial como una forma abreviada de la disyunción.

Ejemplo de sustitución de cuantificadores por conectivas

Si el dominio de la variable x es el conjunto {1, 2, 3, 4 } , entonces:

• La fórmula ∀x P(x) se puede entender como P(1) ⋀ P(2) ⋀ P(3) ⋀ P(4).

• La fórmula ∃x P(x) se puede entender como P(1) ⋁ P(2) ⋁ P(3) ⋁ P(4).

Si el dominio tiene cardinalidad infinita, estas sustituciones no se pueden hacer. Incluso en el caso de dominios de cardinalidad finita, las sustituciones de las variables por todas las constantes no se llevan nunca a la práctica. Se trata, más que nada, de una forma de entender el significado de los cuantificadores.

**Formalización**

1) Determinar el dominio. Se entenderá por dominio el conjunto de todos los objetos de los cuales se hablará. Los predicados serán unos u otros según cuál sea el dominio. Para determinar el dominio, habrá que responder a la pregunta “¿de qué se habla?”. Cuando no e

s fácil responder a esta pregunta o el dominio no admite una definición simple, puede decirse que el dominio es un conjunto cualquiera no vacío.

2) Determinar los predicados atómicos. En este caso, habrá que preguntarse:

• ¿Qué subconjuntos se consideran dentro del dominio (que no se quiera o no sea necesario definir en término de subconjuntos más simples)?

• ¿Qué se dice de los objetos del dominio? ¿Cuáles son sus propiedades? ¿Cómo se relacionan entre sí?

3) Determinar si hay elementos concretos del dominio que son identificables del resto. A cada uno le corresponderá una constante.

4) Formalizar cada frase simple en términos de los predicados atómicos y las constantes identificadas en los dos puntos anteriores. El resultado debe ser una fórmula sin variables libres para cada frase. Para decidir la cuantificación adecuada para cada fórmula se prestará atención al sentido general (cuantificación universal: ∀) o particular (cuantificador existencial: ∃) de la frase.

Ejemplo 1

*“Las setas son apreciadas por su sabor. Todo lo que es apreciado por su sabor o por sus propiedades curativas es caro. Los níscalos son setas. Así pues, los níscalos son caros.”*

Como dominio para formalizar este razonamiento se considerará un conjunto no vacío cualquiera, porque la pregunta “¿de qué se habla?” no puede responderse de manera precisa (se habla de setas, de níscalos, de cosas apreciadas por su sabor, de cosas apreciadas por sus propiedades curativas y de cosas caras. Lo máximo que podríamos precisar sería algo como por ejemplo “el conjunto de todas estas cosas”).

Se asignan los significados siguientes a predicados atómicos: B(x): “x es una seta”; S(x): “x es apreciado por su sabor”; P(x): “x es apreciado por sus propiedades curativas”; R(x): “x es un níscalo”; C(x): “x es caro”.

La formalización del razonamiento sería, pues:

∀x (B(x) → S(x)), ∀x (S(x) ⋁ P(x) → C(x)), ∀x (R(x) → B(x)) ∴ ∀x (R(x) → C(x))

**Formalización de frases con significado existencial o universal**

Las frases de la forma “hay ...”, “hay quien...”, “algunos...” tienen un sentido existencial. Esto, en el contexto de la lógica de predicados, quiere decir que se refieren a algunos elementos de un subconjunto del dominio.

Las frases de la forma “todos los...”, “los...”, “todo el mundo que...” tienen un sentido universal. En el contexto de la lógica de predicados, esto significa que se refieren a todos los elementos de un subconjunto del dominio.

Para formalizar frases con cualquiera de estos dos significados, es útil hacerse las preguntas siguientes:

1) ¿A qué subconjunto del dominio se hace referencia? Este subconjunto se denominará selección.

2) ¿Qué se dice de este subconjunto del dominio? ¿Qué propiedad o propiedades tienen sus elementos? Denominaremos a esto propiedades de la selección.

Las frases con sentido existencial se formalizan según el patrón siguiente:

x (Selección(x) ∧ Propiedades\_de\_la\_selección(x))

Asimismo, frases con sentido universal se formalizan según el patrón siguiente:

x (Selección(x) → Propiedades\_de\_la\_selección(x))

Si con P(x): “x es un programa”; A(x): “x es antiguo”; V(x): “x tiene un valor considerable”; C(x): “El mantenimiento de x es complicado”, formalizamos las frases “Algunos programas antiguos tienen un valor considerable pero su mantenimiento es complicado” y “Todos los programas antiguos tienen un valor considerable pero su mantenimiento es complicado” obtendremos, respectivamente:

