بسم الله الرحمن الرحیم

جزوه مدار الکتریکی و الکترونیکی

همکلاسی

۲۶ فروردین ۱۴۰۰

چکیده

فهرست مطالب

مقدمه

۱ تعاریف کلی

۱.۱ بارالکتریکی

بار الکتریکی یک خاصیت ماده است که باعث می‌شود هنگامی که جسمی باردار در مجاورت جسم باردار دیگری قرار می‌گیرد به آن نیرو وارد شود. بار الکتریکی می‌تواند مثبت یا منفی باشد؛ که این مثبت یا منفی بودن را میزان الکترون‌های موجود در هسته جسم در مقایسه با پروتون‌های آن تعیین می‌کند. در شرایط عادی تعداد الکترونها و پروتون‌ها با هم برابرند. اما اگر تعداد الکترون‌های جسم از تعداد پروتون‌های آن بیشتر باشد، جسم دارای بار الکتریکی منفی است و در صورتی که تعداد الکترون‌ها از تعداد پروتون‌ها کمتر باشد، بار الکتریکی جسم مثبت است. واحد بار الکتریکی کولن(C) است.

توجه:

- در این جزوه برای نمایش بار الکتریکی ثابت از حرف Q و برای نمایش بار الکتریکی متغیر با زمان از حرف q استفاده می‌شود.
- در بعضی ترجمه‌ها واحد بار الکتریکی کولمب ترجمه شده است.

۲.۱ جریان الکتریکی

از حرکت دسته جمعی الکترون‌ها جریان الکتریکی به وجود می‌آید. به توضیح علمی‌تر تعداد بارهایی که در واحد زمان از یک سطح مشخص عبور می‌کنند **جریان الکتریکی** گفته می‌شود. واحد جریان الکتریکی **آمپر** است و جریان الکتریکی از رابطه‌های زیر محاسبه می‌شود:

$$I = \frac{Q}{t} \Rightarrow \text{محاسبه جریان ثابت} \quad (۱)$$

$$i(t) = \frac{dq}{qt} \Rightarrow \text{محاسبه جریان متغیر با زمان} \quad (۲)$$

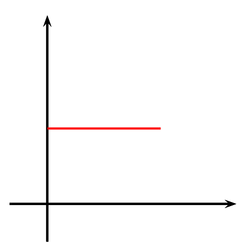
جهت جریان

بصورت قراردادی در هر المان الکتریکی از طرف قطب مثبت به طرف قطب منفی یعنی خلاف جهت حرکت الکترون‌ها. برای مثال در مقاومت زیر جهت جریان از سمت مثبت به منفی می‌باشد.

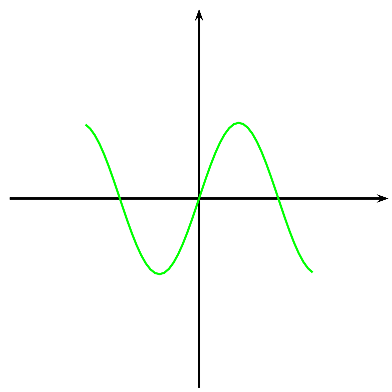
انواع جریان الکتریکی

جریان‌های الکتریکی دو نوع هستند:

مستقیم جهت و مقدار الکترون‌های عبوری نسبت به زمان ثابت می‌ماند. نمودار جریان الکتریکی مستقیم نسبت به زمان به صورت زیر است:



متناوب جهت حرکت و مقدار جریان در فواصل زمانی معین تغییر می‌کند. جریان متناوب خود نیز با توجه به نوع تغییرات به انواعی از سینوسی، دندان اره‌ای، مربعی(پالسی) و ... تقسیم می‌شود. برای درک شهودی نیز می‌توان به نمودار جریان متناوب سینوسی توجه کرد.



۳.۱ اختلاف پتانسیل(ولتاژ)

عاملی است برای حرکت الکترون‌ها از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر. واحد آن **ولت(v)** است و از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$V = \frac{W}{Q} \tag{۳}$$

۴.۱ توان

به زبان ساده به معنای سرعت انجام کار است یعنی مقدار کاری که یک دستگاه در واحد زمان انجام می‌دهد. واحد آن **وات(w)** است و برای محاسبه‌ی آن می‌توان از رابطه‌های زیر استفاده کرد:

$$W = P.t \Rightarrow V = \frac{P.t}{Q} \Rightarrow P = \frac{V.Q}{t} \Rightarrow \boxed{P = VI} \tag{۴}$$

مثال ۱.۱. یک منبع ۲۲۰ ولتی، یک لامپ رشته‌ای ۲۰۰ واتی را تغذیه می‌کند:

الف)جریان لامپ را بدست آورید.

ب)بار الکتریکی عبوری از مدار در زمان یک ساعت را بدست آورید.

حل. الف.

$$V = ۲۲۰v \qquad P = ۲۰۰w$$
$$P = VI \rightarrow I = \frac{P}{V} = \frac{۲۰۰}{۲۲۰} = \frac{۱۰}{۱۱}$$

ب.

$$I = \frac{Q}{t} \Rightarrow \frac{۱۰}{۱۱} = \frac{Q}{۳۶۰۰} \Rightarrow Q = \frac{۳۶۰۰ \times ۱۰}{۱۱}$$

مثال ۲.۱. در صورتی که بار الکتریکی عبوری از یک سیم بصورت $q(t) = ۵t^۲$ کولن باشد.جریان عبوری از این سیم در ثانیه $t = ۲$ چقدر است؟

حل.

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = ۱۰t = ۲۰$$

۲ عناصر مدار و قوانین تجربی

۱.۲ منبع

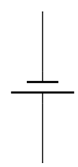
وسیله‌ای که بتواند انرژی غیرالکتریکی را به انرژی الکتریکی و بالعکس تبدیل کند. انواع منبع‌ها عبارتند از:

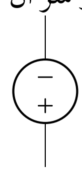
مستقل جریان یا ولتاژ به ساختار داخلی خود منبع مرتبط است.

وابسته جریان و ولتاژ برای خودشان نیست و وابسته به قسمت دیگری از مدار است. مانند منبع تغذیه مادربورد

ولتاژ مستقل

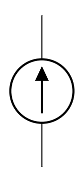
منبعی که ولتاژ دو سر آن کاملاً مستقل از جریان عبوری از آن باشد، به طوری که با افزایش یا کاهش جریان، ولتاژ دو سر آن همواره ثابت بماند.





جریان مستقل

منبعی است که جریان عبوری از آن، همواره مستقل از ولتاژ دو سر آن است.



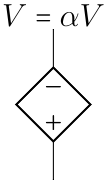
ولتاژ وابسته

منبعی که ولتاژ آن، به ولتاژ یا جریان قسمت دیگری از مدار وابسته است. دو نوع می‌باشد:

- وابسته به ولتاژ شاخه دیگر
- وابسته به جریان شاخه دیگر

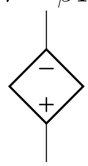
کنترل شده با ولتاژ

$V = \alpha V$



کنترل شده با جریان

$V = \beta I$



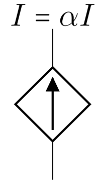
جریان وابسته

منبعی که جریان آن به جریان یا ولتاژ قسمت دیگری از مدار وابسته است. دو نوع می‌باشد:

- کنترل شده با ولتاژ
- کنترل شده با جریان

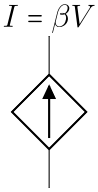
کنترل شده با جریان

$I = \alpha I$



کنترل شده با ولتاژ

$I = \beta V$



۲.۲ مقاومت

یک عنصر دوسر که با عبور جریان الکتریکی از آن یک اختلاف ولتاژ در دو سر آن اتفاق می‌افتد. واحد آن اهم (Ω) می‌باشد.

$$\Rightarrow V = RI \qquad (۵)$$

$$\Rightarrow V = -RI \qquad (۶)$$

رسانایی الکتریکی

$$G = \frac{۱}{R} = \frac{I}{V} \tag{۷}$$

توجه:

- در مدارهای الکتریکی داغ شدن به معنای وجود مقاومت است.
- مقاومت الکتریکی یک عنصر مصرف کننده است. یعنی جریان الکتریکی را به صورت گرما به محیط می‌دهد.
- منبع هم تولید کننده و هم مصرف کننده است. مصرف کنندگی به دلیل مقاومت درونی است.

توان تلف شده در مقاومت

$$P = RI^{۲} = (RI)I = VI = V(\frac{V}{R}) = \frac{V^{۲}}{R} \tag{۸}$$

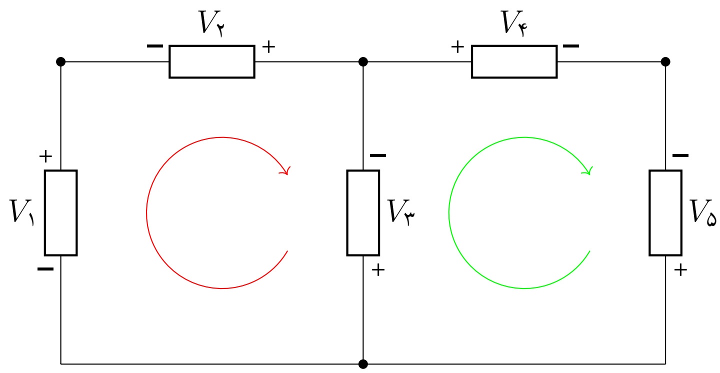
۳.۲ قوانین مداری ولتاژ و جریان

گره: به محل اتصال دو یا چند عنصر به یکدیگر در یک مدار گفته می‌شود.

توجه. *همیشه بین دو گره مدار حداقل یک المان وجود دارد.*

حلقه: مسیری از یک مدار را حلقه گویند، در صورتی که اگر از گره‌ای دلخواه از روی این مسیر شروع به حرکت کنیم از عناصر عبور کنیم بدون اینکه از هیچ یک از گره‌های میان راه، بیش از یک بار بگذریم و دوباره به گره آغازین برگردیم.

کنجکاوی: در مدار بالا سه حلقه داریم، دوتا از حلقه‌ها مشخص شده‌اند. حلقه سوم را پیدا کنید.



شکل ۱ گره و حلقه‌ها در مدار

۱.۳.۲ قانون مداری جریان(KCL)

جمع جبری همه جریان‌ها در گره برابر صفر است. به عبارت دیگر جمع جریان‌های وارد شده به هر گره با جمع جریان‌های خارج شده از آن گره برابرند.

۲.۳.۲ قانون مداری ولتاژ(KVL)

جمع جبری همه‌ی ولتاژها حول یک حلقه، برابر صفر است. برای به کاربر بردن قانون ولتاژها ابتدا جهتی قراردادی به صورت دلخواه در حلقه تعیین می کنیم. ولتاژ عناصری که جهت قراردادی آنها با جهت قراردادی حلقه یکی است را با علامت مثبت و بقیه را با علامت منفی در نظر می‌گیریم. برای مثال قانون ولتاژها برای حلقه‌های موجود در شکل ۱ عبارتند از:

$$\begin{cases} -V_۲ - V_۳ - V_۱ = ۰ \\ -V_۲ - V_۴ - V_۵ - V_۱ = ۰ \\ -V_۴ - V_۵ + V_۳ = ۰ \end{cases}$$

۴.۲ تحلیل مدار تک حلقه‌ای

اهداف:

۱. محاسبه جریان یا ولتاژ مقاومت

۲. محاسبه توان جذب شده یا تلف شده توسط هر عنصر

فرض اولیه: مقادیر مقاومت‌ها و منبع معلوم است.

مراحل انجام تحلیل عبارتند از:

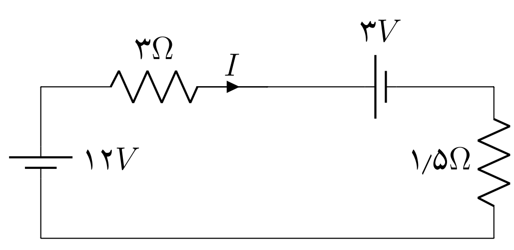
مرحله اول انتخاب یک جهت برای جریان مجهول

مرحله دوم گذاشتن علامت ولتاژ برای هر کدام از مقاومت‌ها.

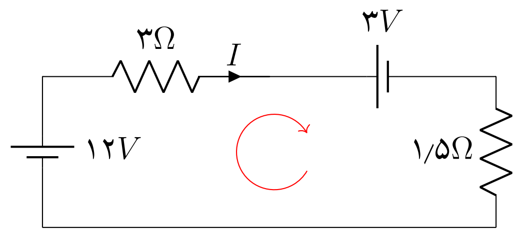
توجه. *برای سمتی که جریان وارد می‌شود علامت مثبت در نظر گرفته می‌شود.*

مرحله سوم استفاده از قانون KVL

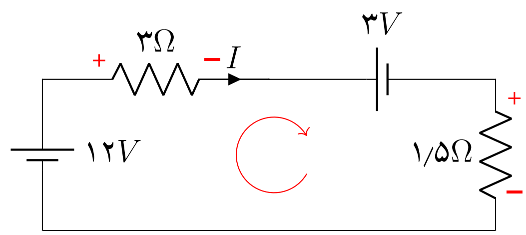
مثال ۱.۲. در مدار شکل زیر ولتاژ روی هر مقاومت و توان جذب شده توسط هر عنصر را بدست آورید.



حل. **گام اول** انتخاب جهت جریان مجهول



گام دوم تعیین علامت ولتاژ هر یک از مقاومت‌ها



گام سوم استفاده از قانون KVL

$$+۳I + ۳ + ۱/۵I - ۱۲ = ۰$$

$$۴/۵I - ۹ = ۰ \Rightarrow I = ۲A$$

$$V_{۳} = ۳ \times ۲ = ۶v$$

$$V_{۱/۵} = ۱/۵ \times ۲ = ۳v$$

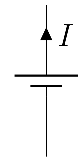
$$P_{۱۲v} = -VI = ۱۲ \times ۲ = -۲۴w$$

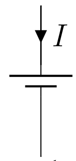
$$P_{۳\Omega} = VI = ۶ \times ۲ = ۱۲w$$

$$P_{۳v} = VI = ۳ \times ۲ = ۶w$$

$$P_{۱/۵\Omega} = VI = ۳ \times ۲ = ۶w$$

توجه. *هر المانی که جذب کننده(مصرف کننده) باشد، توان جذب شده علامت مثبت دارد و تولید کننده‌ها توان جذب شده علامت منفی دارد.*

منبع تولیدکننده 

منبع مصرف کننده 

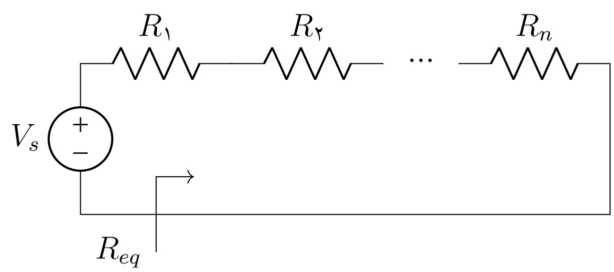
برای ساده کردن مدارها به مدارهای تک حلقه‌ای می‌توان مقاومت‌ها را با یکدیگر ترکیب کرد.
این ترکیب مقاومت‌ها به سه صورت انجام می‌شود:

۱. آرایش سری(متوالی)

۲. آرایش موازی

۳. آرایش ستاره_ مثلث

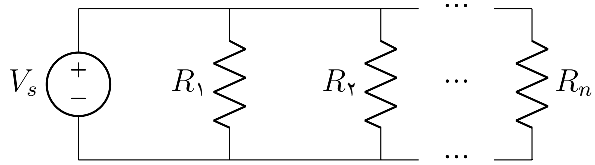
آرایش سری(متوالی)



$R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n \rightarrow$ مقاومتی که منبع می‌بیند.

آرایش موازی

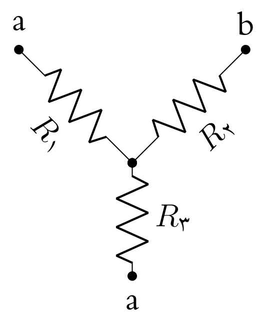
یعنی ولتاژ دو سر مقاومت یکسان است به عبارت دیگر دو سر آنها گره‌های یکسانی است.

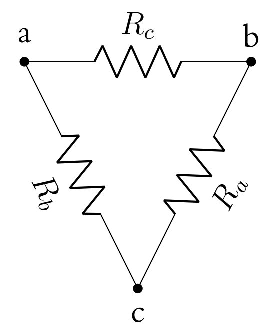


$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

آرایش ستاره‌ـ مثلث

این نوع مدار را با علامت $\Delta - Y$ نیز نشان می‌دهد. در این مدار به اسامی دقت کنید چرا که در تبدیل مهم است.

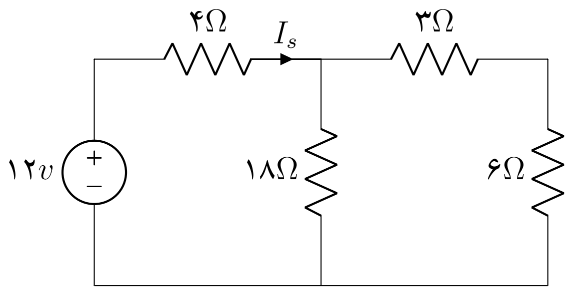




$$\text{تبدیل ستاره به مثلث} \rightarrow \begin{cases} R_a = \frac{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}{R_1} \\ R_b = \frac{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}{R_2} \\ R_c = \frac{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}{R_3} \end{cases}$$

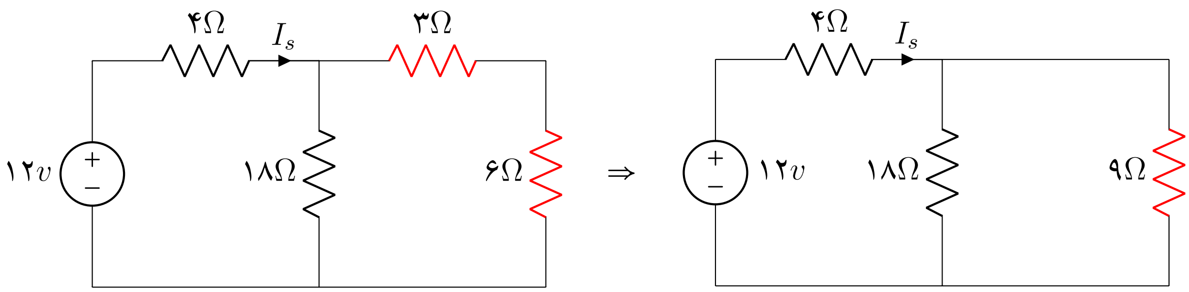
$$\text{تبدیل مثلث به ستاره} \rightarrow \begin{cases} R_1 = \frac{R_bR_c}{R_a+R_b+R_c} \\ R_2 = \frac{R_aR_c}{R_a+R_b+R_c} \\ R_3 = \frac{R_aR_b}{R_a+R_b+R_c} \end{cases}$$

مثال ۲.۲. در مدار شکل زیر جریان I_s را بدست آورید.

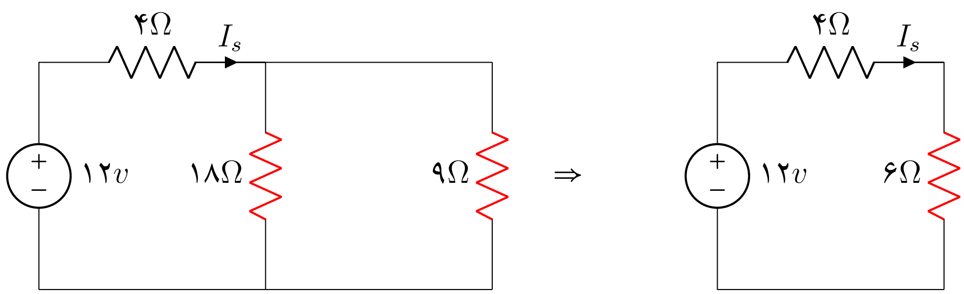


حل.

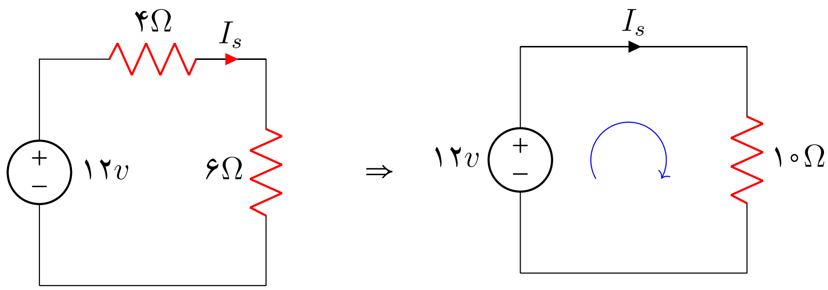
$$R_{۳,۶} = R_{۳} + R_{۶} = ۳ + ۶ = ۹\Omega$$



$$\frac{۱}{R_{eq}} = \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۱۸} \Rightarrow R_{eq} = ۶\Omega$$

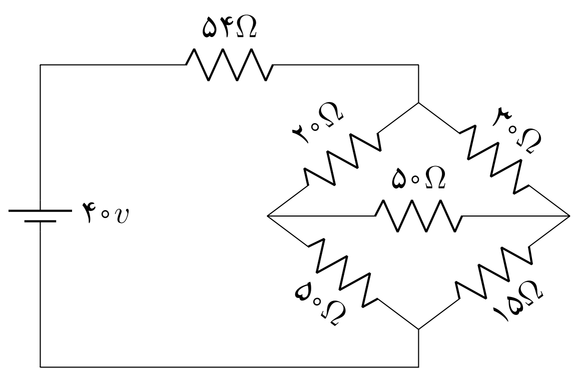


$$R_{eq} = ۴ + ۶ = ۱۰\Omega$$

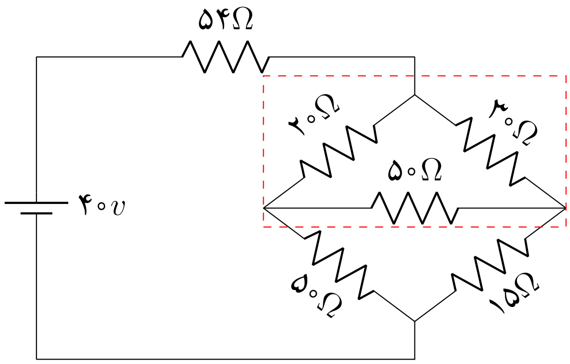


$$-۱۲ + ۱۰I_s = ۰ \rightarrow ۱۰I_s = ۱۲ \rightarrow I_s = \frac{۱۲}{۱۰} = ۱/۲A$$

مثال ۳.۲. در مدار شکل زیر جریان I را بدست آورید.

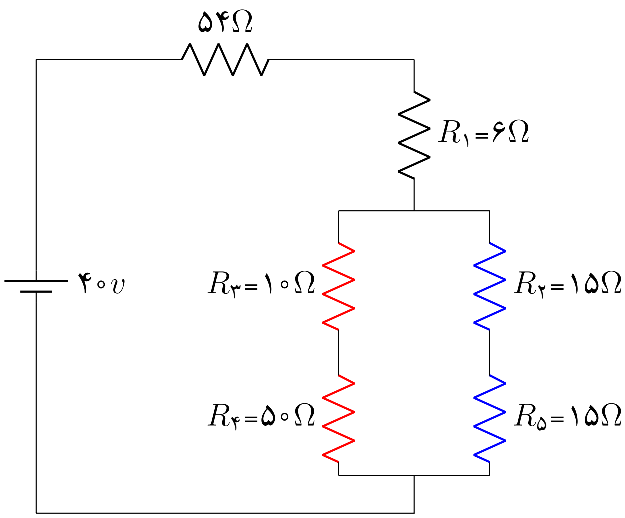


حل. قسمت مشخص شده در مدار زیر به فرم ستاره‌ای تبدیل می‌شود.

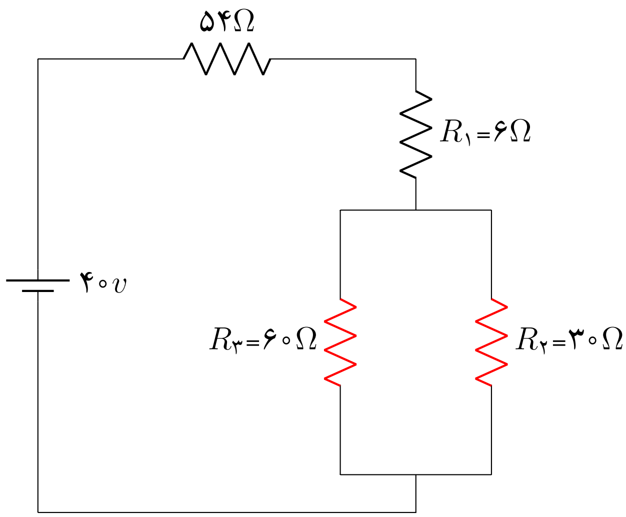


$$
\begin{cases}
R_{۱} = \frac{۲۰\times۳۰}{۲۰+۳۰+۵۰} = ۶\Omega \\
R_{۲} = \frac{۳۰\times۵۰}{۲۰+۳۰+۵۰} = ۱۵\Omega \\
R_{۳} = \frac{۵۰\times۲۰}{۲۰+۳۰+۵۰} = ۱۰\Omega
\end{cases}
$$

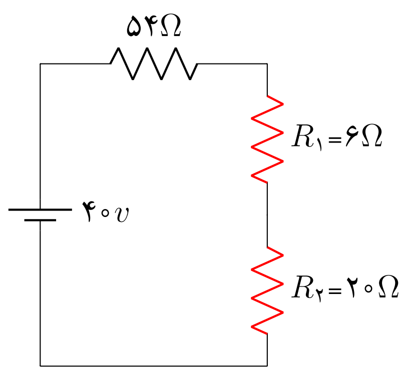
$$\Downarrow$$



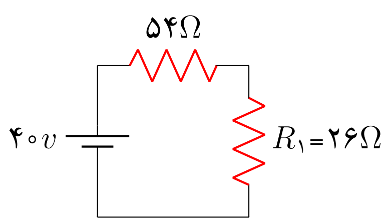
$$
\begin{cases}
R_{۳,۴} = ۱۰ + ۵۰ = ۶۰\Omega \\
R_{۲,۵} = ۱۵ + ۱۵ = ۳۰\Omega
\end{cases}
$$



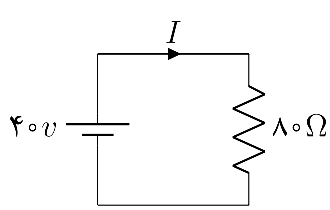
$$\frac{۱}{R_{۲,۳}} = \frac{۱}{۳۰} + \frac{۱}{۶۰} \Rightarrow R_{۲,۳} = ۲۰\Omega$$



$$R_{۱,۲} = ۶ + ۲۰ = ۲۶\Omega$$

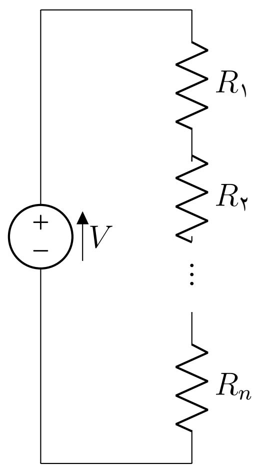


$$R_{eq} = ۵۴ + ۲۶ = ۸۰\Omega$$



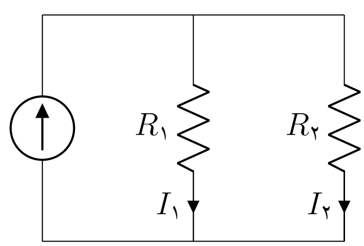
$$I = \frac{۴۰}{۸۰} = ۰/۵A$$

مدار تقسیم ولتاژ



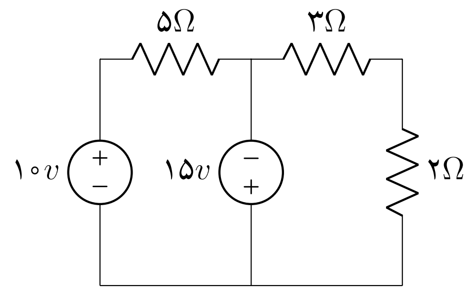
$$V_{۱} = \frac{R_{۱}}{R_{۱} + R_{۲} + \cdots + R_n} \times V$$
$$V_{۲} = \frac{R_{۲}}{R_{۱} + R_{۲} + \cdots + R_n} \times V$$
$$\vdots$$
$$V_n = \frac{R_n}{R_{۱} + R_{۲} + \cdots + R_n} \times V$$

مدار تقسیم جریان



$$I_{۱} = \frac{R_{۲}}{R_{۱} + R_{۲}} I \qquad I_{۲} = \frac{R_{۱}}{R_{۱} + R_{۲}} I$$

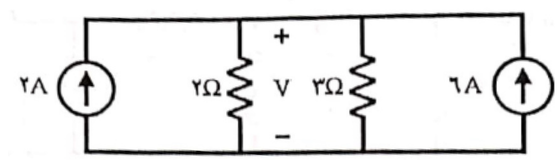
توجه. • *اگر مدار شما به صورت زیر بود می‌توان طرف راست و چپ آن را به صورت مدارهای جداگانه تحلیل کرد.*



- اگر خواسته‌ی سؤال محاسبه‌ی توان مصرفی باشد، تولیدکننده‌ها علامت منفی و مصرف‌کننده‌ها علامت مثبت می‌گیرند.
- اگر خواسته‌ی سؤال محاسبه توان تولیدی باشد، تولیدکننده‌ها علامت مثبت و مصرف کننده‌ها در مدار علامت منفی می‌گیرند.

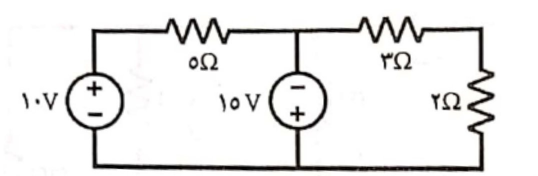
مسائل

۱. در شکل ۲ ولتاژ v را پیدا کنید.



شکل ۲

۲. در شکل ۳ ولتاژ دو سر مقاومت ۳Ω را پیدا کنید.



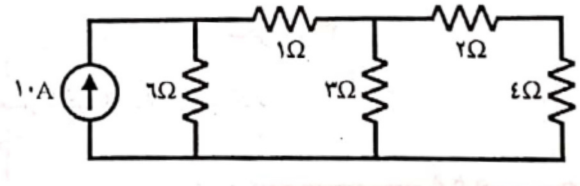
شکل ۳

۳. در شکل ۴ توانی که منبع جریان به مدار تحویل می‌دهد به دست آورید.

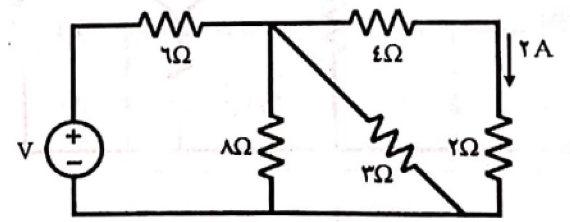
۴. در شکل ۵ مقدار v را پیدا کنید.

۵. در شکل ۶ مقاومت معادل R_{eq} را پیدا کنید.

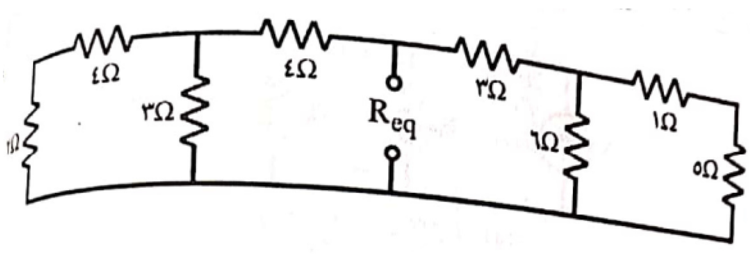
۶. در شکل ۷ مقاومت معادل R_{eq} را پیدا کنید.



شکل ۴



شکل ۵



شکل ۶

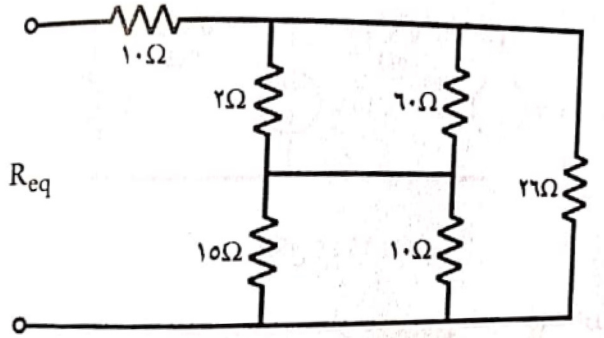
۷. مقاومت معادل شکل ۸ را پیدا کنید.

۸. با ترکیب مقاومت‌ها و تقسیم ولتاژ، V_{ab} مدار شکل ۹ را پیدا کنید.

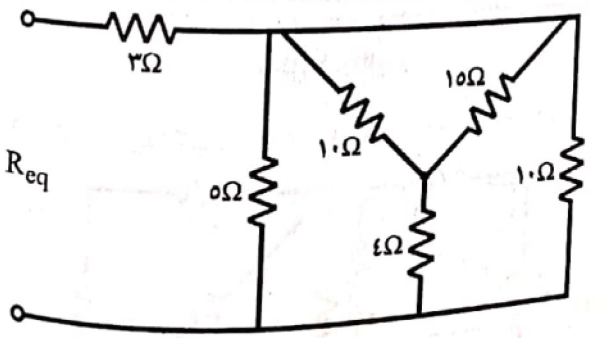
۹. با ترکیب مقاومت‌ها و تقسیم جریان، I_x مدار شکل ۱۰ را پیدا کنید.

۱۰. در مدار شکل ۱۱ $i = ۵A$ مقدار v را پیدا کنید.

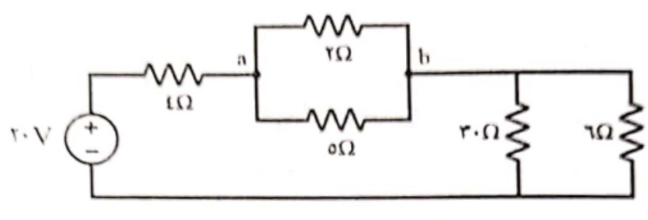
۱۱. با کاربرد مستقیم قوانین کیرشهف جریان i را در مدار شکل ۱۲ بدست آورید.



شکل ۷



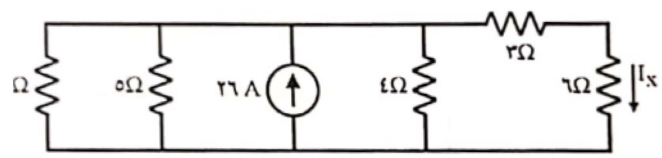
شکل ۸



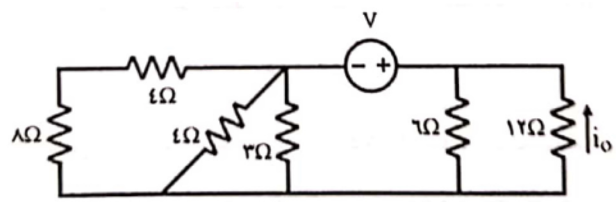
شکل ۹

۱۲. با کاربرد مستقیم قوانین کیرشهف جریان I_x را در مدار شکل ۱۳ بدست آورید.

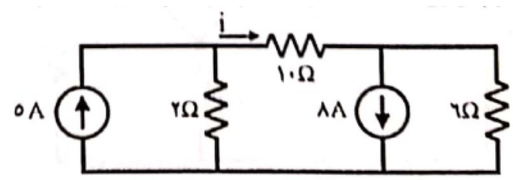
۱۳. در مدار شکل ۱۴ مقاومت معادل R_{eq} را پیدا کنید.



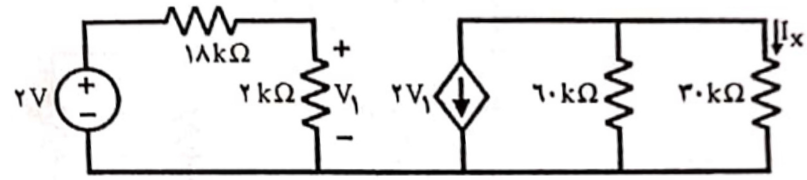
شکل ۱۰



شکل ۱۱



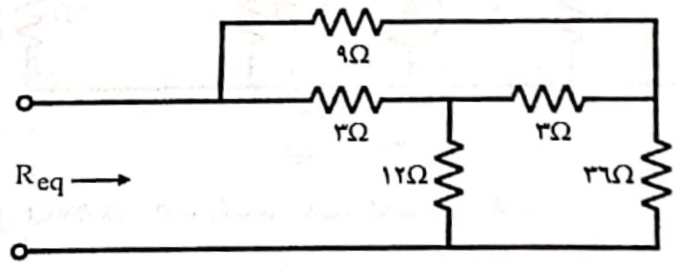
شکل ۱۲



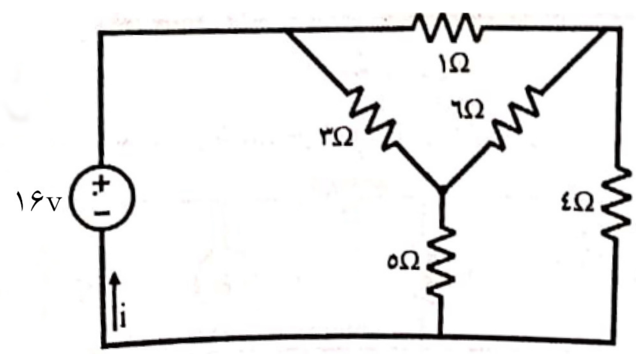
شکل ۱۳

۱۴. با استفاده از تبدیل مثلث به ستاره جریان i را در شکل ۱۵ بدست آورید.

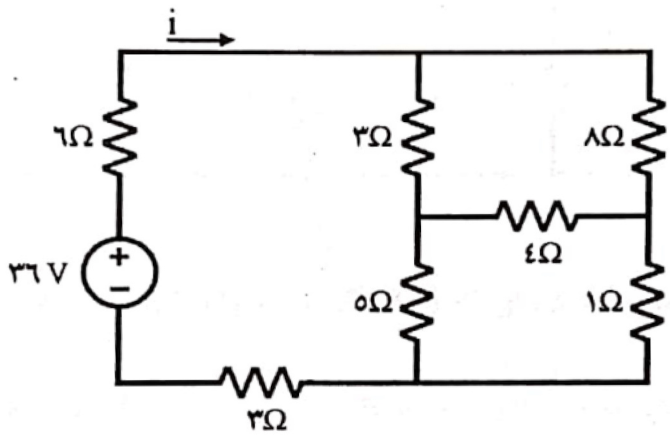
۱۵. با استفاده از تبدیل مثلث- ستاره جریان i را در شکل ۱۶ بدست آورید.



شکل ۱۴



شکل ۱۵



شکل ۱۶

۳ روش‌های تحلیل مدار

۱.۳ روش تحلیل گره

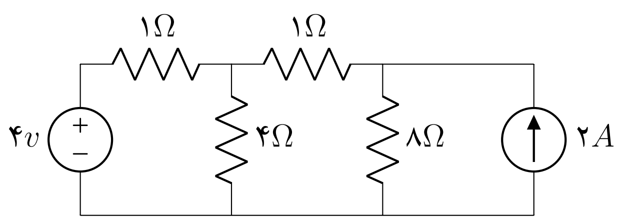
هدف: یافتن ولتاژ گره‌ها

گام اول مشخص کردن گره های مدار و نام گذاری آنها

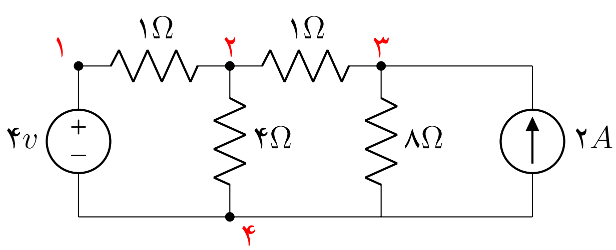
گام دوم مشخص کردن یک گره به عنوان گره مبنا(ولتاژ گره مبنا صفر فرض می‌شود.)

گام سوم نوشتن KCL برای هر گره(بجز گره مبنا)

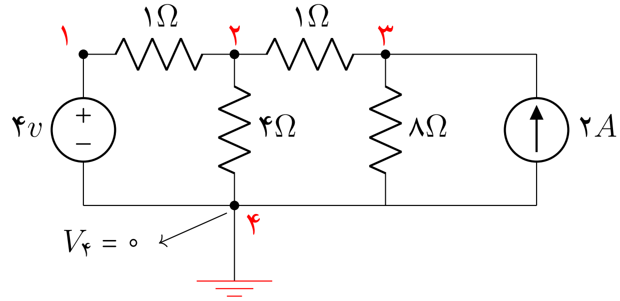
مثال ۱.۳. ولتاژ گره‌های مدار زیر را بیابید.



حل. **گام اول** مشخص کردن گره‌ها و نامگذاری



گام دوم مشخص کردن گره مبنا



گام سوم نوشتن KCL هر گره

$$
\begin{cases}
①\, V_۱ - ۰ = ۴ \rightarrow V_۱ = ۴v \\
②\, \frac{V_۲-V_۱}{۱} + \frac{V_۲-۰}{۴} + \frac{V_۲-V_۳}{۱} = ۰ \\
③\, \frac{V_۳-V_۲}{۱} + \frac{V_۳-۰}{۸} - ۲ = ۰
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
\frac{۹}{۴}V_۲ - V_۳ = ۴ \\
-V_۲ + \frac{۹}{۸}V_۳ = ۲
\end{cases}
$$

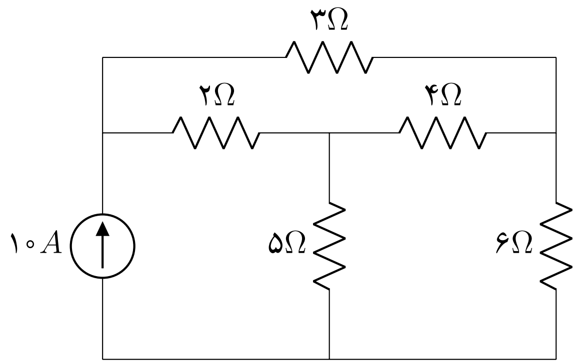
$$
V_۲ = \frac{\begin{vmatrix} ۴ & -۱ \\ ۲ & \frac{۹}{۸} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{۹}{۴} & -۱ \\ -۱ & \frac{۹}{۸} \end{vmatrix}} = ۴/۱۳v
\qquad
V_۳ = \frac{\begin{vmatrix} \frac{۹}{۴} & ۴ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{۹}{۴} & -۱ \\ -۱ & \frac{۹}{۸} \end{vmatrix}} = ۶/۵۱v
$$

توجه:

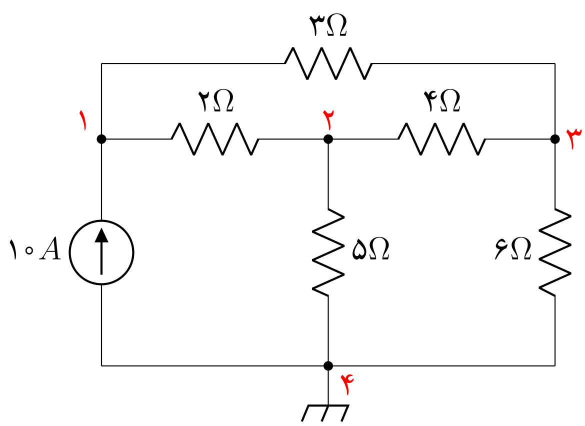
- همیشه بین دو گره حداقل یک المان وجود دارد.
- معمولاً پایین ترین گره به عنوان گره مبنا در نظر گرفته می‌شود و زمین می‌شود.(گره ۴)

- هنگام نوشتن KCL برای هر گره فرض می کنیم که جریان‌ها خارج شونده هستند مگر اینکه منبع جریان داشته باشیم.(گره ۳)

مثال ۲.۳. ولتاژ گره‌ها را بدست آورید.



حل.



$$① \Longrightarrow -۱۰ + \frac{V_۱ - V_۲}{۲} + \frac{V_۱ - V_۳}{۳} = ۰$$

$$② \Longrightarrow \frac{V_۲ - V_۱}{۲} + \frac{V_۲ - ۰}{۵} + \frac{V_۲ - V_۳}{۴} = ۰$$

$$③ \Longrightarrow \frac{V_۳ - V_۲}{۴} + \frac{V_۳}{۶} + \frac{V_۳ - V_۱}{۳} = ۰$$

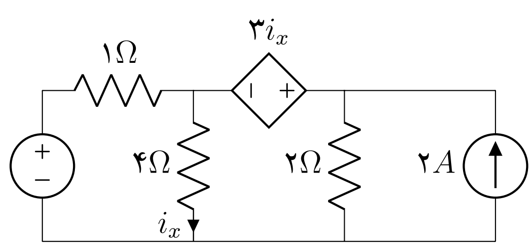
$$\begin{cases} \frac{۵}{۶}V_۱ - \frac{۱}{۲}V_۲ - \frac{۱}{۳}V_۳ = ۱۰ \\ -\frac{۱}{۲}V_۱ + \frac{۱۹}{۲۰}V_۲ - \frac{۱}{۴}V_۳ = ۰ \\ -\frac{۱}{۳}V_۱ - \frac{۱}{۴}V_۲ + \frac{۳}{۴}V_۳ = ۰ \end{cases}$$

در ادامه جواب را می‌توانید با استفاده از یکی از روش‌های حل دستگاه‌ها بدست آورید من از سایت محاسبه آنلاین برای بدست آوردن جواب استفاده کردم، راست و دروغ آن گردن خودشان.

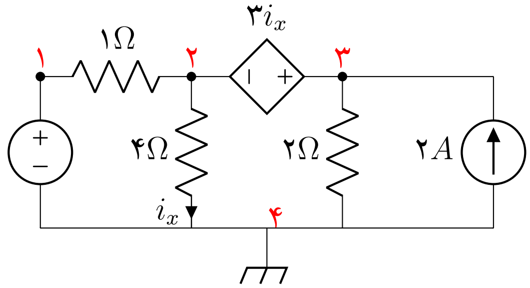
$$\begin{cases} V_۱ = ۳۹/۳۲۸ \\ V_۲ = ۲۷/۷۳۱ \\ V_۳ = ۲۶/۷۲۳ \end{cases}$$

توجه. *هرگاه میان دو گره اصلی یک منبع ولتاژ (مستقل یا وابسته) قرار داشته باشد ترکیب این دوگره و منبع به صورت یک گره در نظر گرفته می‌شود و به آن ابرگره می‌گوییم.*

مثال ۳.۳. ولتاژ گره‌ها را محاسبه کنید.



حل.

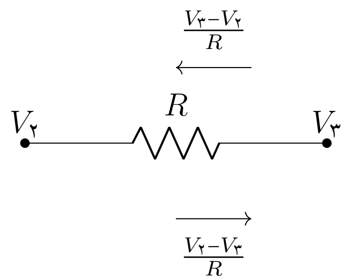


$$\begin{cases} V_۳ - V_۲ = ۳i_x = \frac{۳}{۴}V_۲ \\ i_x = \frac{V_۲}{۴} \\ \frac{V_۲ - V_۱}{۱} + \frac{V_۲}{۴} + \frac{V_۳}{۲} - ۲ = ۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{۷}{۴}V_۲ + V_۳ = ۰ \\ \frac{۵}{۴}V_۲ + \frac{۱}{۲}V_۳ = ۶ \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_۲ = ۲/۸۲ \\ V_۳ = ۴/۹۴ \end{cases}$$

توجه. علامت‌ها در تحلیل گره:



۲.۳ تحلیل حلقه(خانه‌ای)

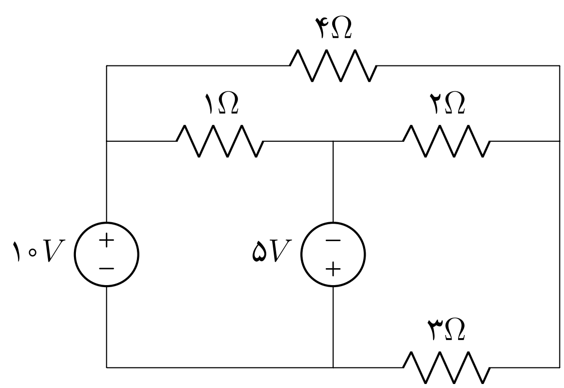
هدف: بدست آوردن جریان شاخه‌ها(حلقه‌ها)

گام اول برای هر حلقه‌ی ساده‌ی مدار یک جریان حلقه مشخص می‌کنیم.

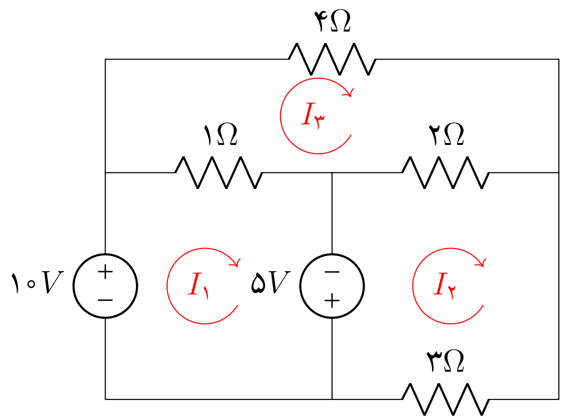
گام دوم با نوشتن KVL در حلقه‌های ساده یک دستگاه چندمعادله چند مجهول درست خواهد شد.

گام سوم حل این دستگاه، مجاسبه جریان حلقه‌ها یا شاخه‌ها خواهد بود.

مثال ۴.۳. جریان حلقه‌ها را بدست آورید.



حل. **گام اول** تعیین جریان برای حلقه‌های ساده مدار



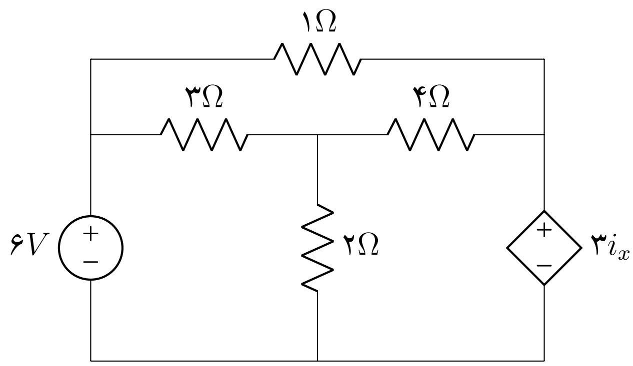
گام دوم نوشتن KVL در حلقه‌های ساده

$$\begin{cases} ① \Rightarrow ۱(I_۱ - I_۳) - ۵ - ۱۰ = ۰ \\ ② \Rightarrow ۲(I_۲ - I_۳) + ۳I_۲ + ۵ = ۰ \\ ③ \Rightarrow ۴(I_۳) + ۲(I_۳ - I_۲) + ۱(I_۳ - I_۱) = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_۱ - I_۳ = ۱۵ \\ ۵I_۲ - ۲I_۳ = -۵ \\ -I_۱ - ۲I_۲ + ۷I_۳ = ۰ \end{cases}$$

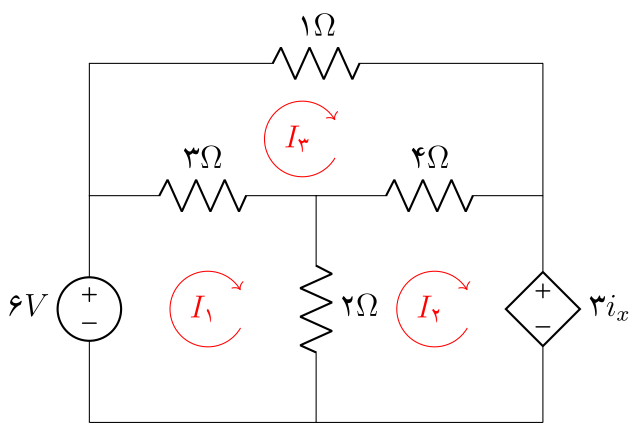
گام سوم حل این دستگاه، مجاسبه جریان حلقه‌ها یا شاخه‌ها خواهد بود.

$$\begin{cases} I_۱ = \frac{۳۵}{۲}A \\ I_۲ = ۰ \\ I_۳ = \frac{۵}{۲}A \end{cases}$$

مثال ۵.۳. جریان حلقه‌ها را بدست آورید.



حل. **گام اول** تعیین جریان برای حلقه‌های ساده مدار



گام دوم نوشتن KVL در حلقه‌های ساده

$$\begin{cases} ۱ \Rightarrow ۳(I_۱ - I_۳) + ۲(I_۱ - I_۲) - ۶ = ۰ \\ ۲ \Rightarrow ۴(I_۲ - I_۳) + ۳i_x + ۲(I_۲ - I_۱) = ۰ \\ ۳ \Rightarrow ۱(I_۳) + ۴(I_۳ - I_۲) + ۳(I_۳ - I_۱) = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۵I_۱ - ۲I_۲ - ۳I_۳ = ۶ \\ -۲I_۱ + ۶I_۲ - I_۳ = ۰ \\ -۳I_۱ + ۴I_۲ + ۸I_۳ = ۰ \end{cases}$$

گام سوم حل این دستگاه، مجاسبه جریان حلقه‌ها یا شاخه‌ها خواهد بود.

$$\begin{cases} I_۱ = ۱/۶۲۵A \\ I_۲ = ۰/۵۹۴A \\ I_۳ = ۰/۳۱۳A \end{cases}$$

۳.۳ اصل برهم نهی(جمع آثار)

هرگاه یک سیستم خطی با چند منبع مستقل(جریان یا ولتاژ) تعریف شود، پاسخ کامل را می‌توان مجموع تک تک منابع هنگامی که به تنهایی عمل می‌کنند دانست. برای بدست آوردن اثر یک منبع تنها، باید سایر منابع غیرفعال شوند.

توجه. *سیستم خطی: سیستمی که فقط مقاومت و منبع مستقل باشد.*

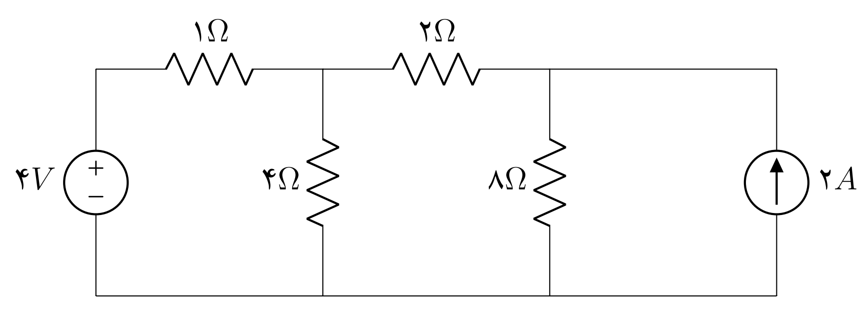
- **غیرفعال کردن منبع ولتاژ**

یعنی منبع ولتاژ را برمیداریم و به جای آن یک سیم می گذاریم.(اتصال کوتاه)

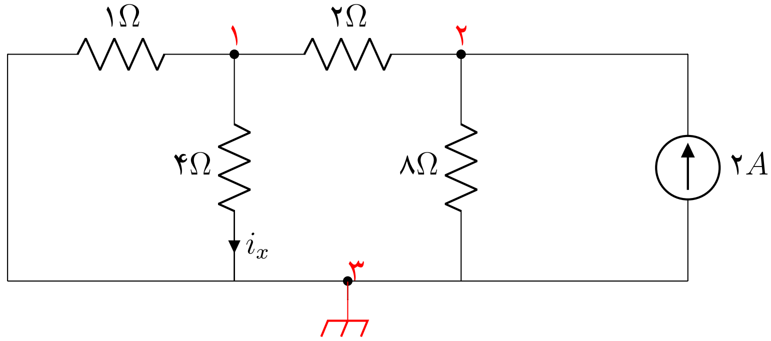
- **غیرفعال کردن منبع جریان**

یعنی منبع را از مدار برداشته و جای آن را خالی می‌گذاریم.(اصطلاحاً مدار باز)

مثال ۶.۳. مقدار i_x را با استفاده از قانون جمع آثار بدست آورید.



حل. **گام اول** حذف منبع ولتاژ مستقل

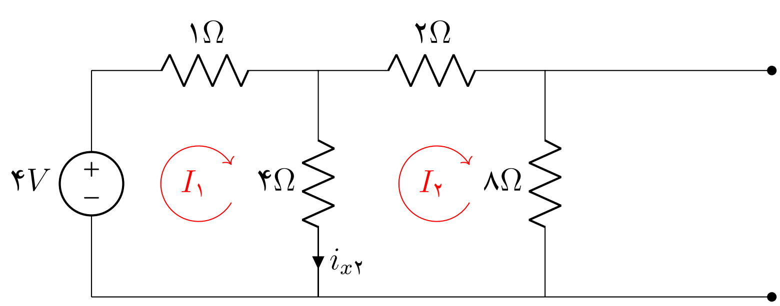


توجه. *اگر در مدار همه منابع ولتاژ بود بهتر است که از روش تحلیل* ***حلقه*** *استفاده کنید. اگر در مدار همه منابع جریان بود بهتر است که از روش تحلیل* ***گره*** *استفاده کنید. اما اگر هر دوی آنها بود از اصل برهم نهی استفاده می‌کنیم. (هم منبع جریان و هم منبع ولتاژ فقط وابسته)*

$$\begin{cases} ① \Rightarrow \frac{V_۱}{۱} + \frac{V_۱}{۴} + \frac{V_۱ - V_۲}{۲} = ۰ \\ ② \Rightarrow \frac{V_۲ - V_۱}{۲} + \frac{V_۲}{۸} - ۲ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ① \Rightarrow -\frac{۱}{۲}V_۲ + \frac{۷}{۴}V_۱ = ۰ \\ ② \Rightarrow \frac{۵}{۸}V_۲ - \frac{۱}{۲}V_۱ = ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_۱ = ۱/۱۸V \\ V_۲ = ۴/۱۵V \end{cases}$$

گام دوم حذف منبع جریان مستقل



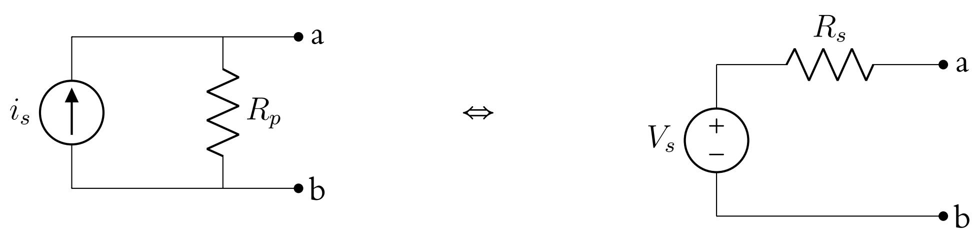
$$\begin{cases} ۱(I_۱) + ۴(I_۱ - I_۲) - ۴ = ۰ \\ ۲I_۲ + ۸I_۲ + ۴(I_۲ - I_۱) = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۵I_۱ - ۴I_۲ = ۴ \\ -۴I_۱ + ۱۴I_۲ = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_۱ = ۱/۰۳۷ \\ I_۲ = ۰/۲۹۶ \end{cases} \Rightarrow i_{x۲} = I_۱ - I_۲ = ۰/۷۴۱$$

$$i_x = i_{x۱} + i_{x۲} = ۰/۲۹ + ۰/۷۴۱ = ۱/۰۳A$$

۴.۳ تبدیل منابع

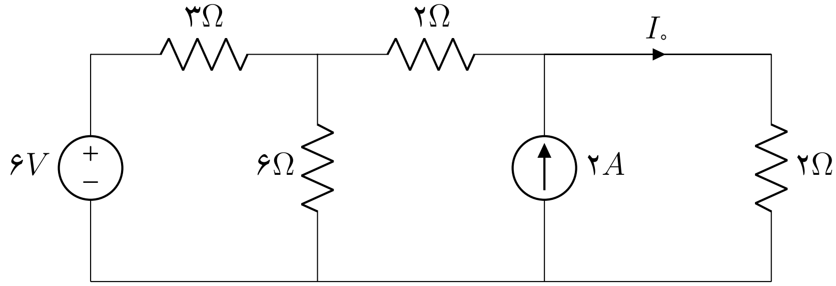
قابلیت تعویض منابع ولتاژ و جریان با همدیگر بدون اثرگذاری روی بقیه مدار.



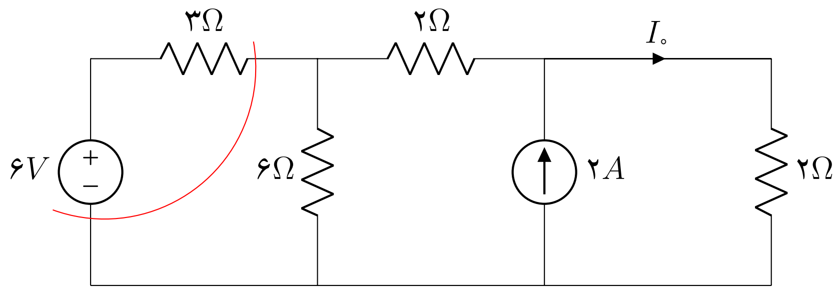
$$\begin{cases} R_s = R_p \\ V_s = R_p i_s \end{cases}$$

توجه. *تبدیل منابع را می‌توان هم برای منابع مستقل و هم منابع وابسته استفاده کرد.*

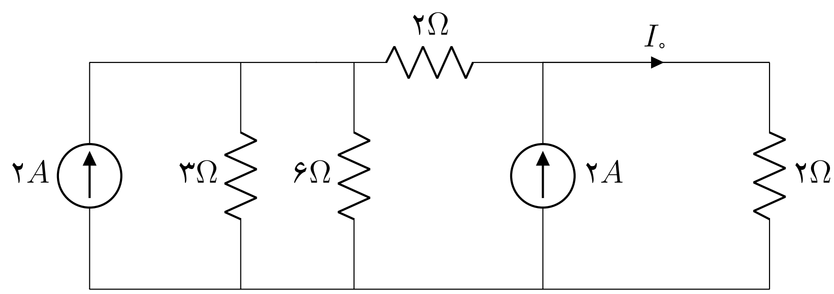
مثال ۷.۳. با استفاده از تبدیل منابع مقدار $I_۰$ را بدست آورید.



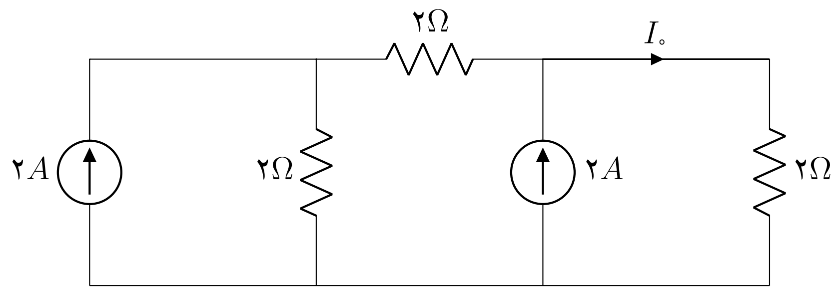
حل.



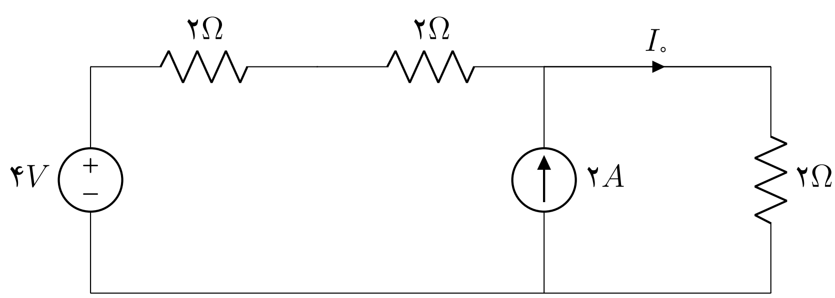
با استفاده از تبدیل منابع $\Downarrow$



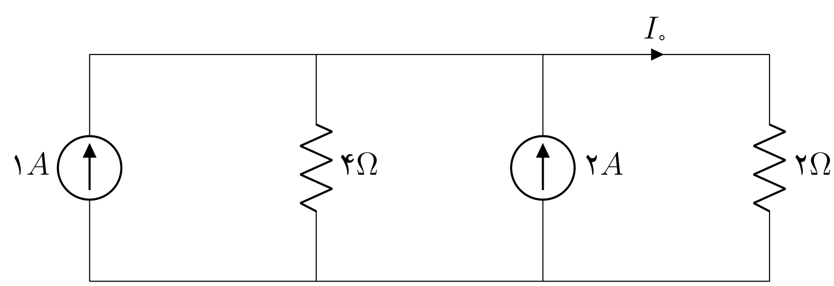
دو مقاومت ۳ و ۶ اهمی موازی هستند. $\Downarrow$



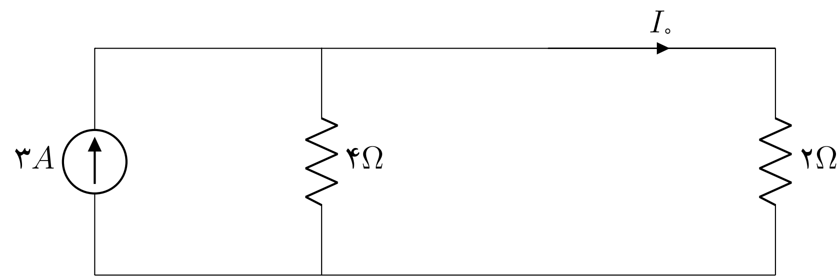
تبدیل منابع ⇓



دو مقاومت دو اهمی سری هستند. باهم جمع و سپس تبدیل منابع ⇓



توجه. *اگر منابع جریان هم جهت و موازی باشند(مانند این شکل) می‌توان آنها را با یکدیگر جمع کرد.*



حال با استفاده از فرمول تقسیم جریان می‌توان جریان مورد نظر را محاسبه کرد:

$$I_\circ = \frac{۴}{۲ + ۴} \times ۳ = ۲A$$

۵.۳ مدارهای هم ارز تونن و نورتن

هدف: قرار دادن یک مدار ساده به جای قسمت بزرگی از مدار

برای نقطه‌ای از مدار که می‌خواهیم معادل تونن یا نورتن را بگذاریم، ولتاژ مدار باز (V_{th})، جریان نورتن (I_{sc}) [جریان اتصال کوتاه] و مقاومت معادل تونن $(R_{th} = \frac{V_{th}}{I_{sc}})$ را محاسبه می‌کنیم.

توجه.

- *جریان همیشه در مسیر بسته برقرار است.*
- *وقتی در مسیر بسته‌ای منبع جریان باشد، تعیین کننده جریان آن منبع است.*

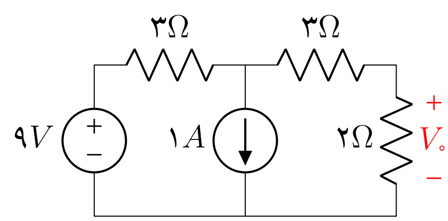
ولتاژ مدار باز(ولتاژ تونن)

المانی از مدار را که می‌خواهیم از دوسر آن مدار معادل را بدست آوریم، مدار باز می‌کنیم. مدار را با روش‌های تحلیلی که آموختیم، تحلیل کرده و ولتاژ دو سر مدار باز شده را بدست می‌آوریم.

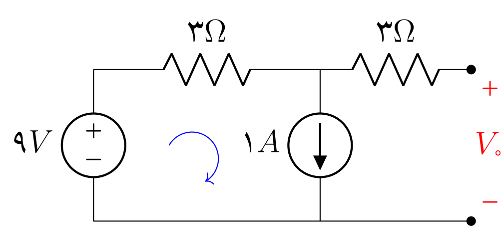
جریان اتصال کوتاه(جریان نورتن)

المانی از مدار را که می‌خواهیم از دو سر آن مدار معادل را بدست آوریم، اتصال کوتاه می‌کنیم. مدار را با روش‌های تحلیلی که پیش از این آموختیم، تحلیل کرده و جریان گذرنده از این اتصال کوتاه را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۸.۳. با استفاده از روش معادل سازی تونن و نورتن، ولتاژ $V_\circ$ را بدست آورید.

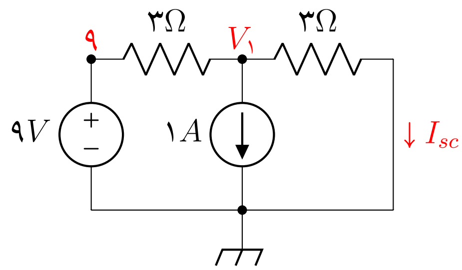


حل. **گام اول** محاسبه ولتاژ تونن:



$$۳ \times ۱ + V_{th} - ۹ = \circ \Rightarrow V_{th} = ۶v$$

گام دوم: محاسبه جریان نورتن

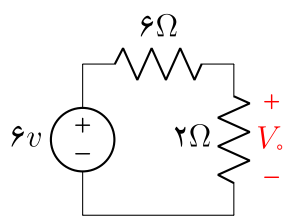


$$\frac{V_۱ - ۹}{۳} + \frac{V_۱}{۳} + ۱ = ۰ \Rightarrow V_۱ = ۳v$$

$$I_{sc} = \frac{V_۱}{۳} = \frac{۳}{۳} = ۱A$$

گام سوم:

$$R_{th} = \frac{V_{th}}{I_{sc}} = \frac{۶}{۱} = ۶\Omega$$



حال از فرمول تقسیم ولتاژ استفاده می‌کنیم:

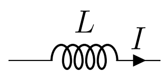
$$V_۰ = \frac{۲}{۲ + ۶} \times ۶ = ۱/۵v$$

۴ القاگر(سلف) و خازن

القاگر و خازن از عناصر ذخیره‌ای مدار هستند؛ یعنی می‌توانند انرژی محدودی را ذخیره کنند و در موقع لزوم به مدار برگردانند. جرقه سر شمع موتور خودرو نمونه‌ای از ذخیره‌ی انرژی در القاگر و جرقه لازم برای روشن شدن لامپ‌های مهتابی قدیمی‌تر نمونه‌ای از ذخیره انرژی توسط خازن است.

۱.۴ القاگر

القاگر یا سلف انرژی را در میدان مغناطیسی ذخیره می‌کند. القاگر در مدار به صورت زیر نشان داده می‌شود:



واحد وبر(wb) ← شار مغناطیسی القا شده در القاگر

$L = \frac{Q}{I}$

ضریب خودالقایی(القاکنایی) ← واحد هانری(H)

جریان الکتریکی عبوری از سلف ← واحد آمپر(A)

فرمول‌های مربوط به القاگر

$$V = L\frac{dI}{dt} \Rightarrow \quad I = \frac{1}{L}\int_{0}^{t} V\,dt + I(0) \qquad \text{رابطه ولتاژ و جریان}$$

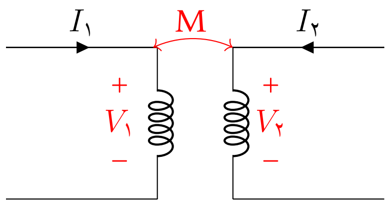
توجه. *از آنجایی که القاگر وابسته به ارتباط جریان با گذر زمان است بنابراین هم می‌تواند خطی باشد و هم غیرخطی.*

$$P = VI = LI\frac{dI}{dt} \qquad \text{توان}$$

$$W = \int pdt = \frac{۱}{۲}LI^{۲}$$ انرژی ذخیره شده

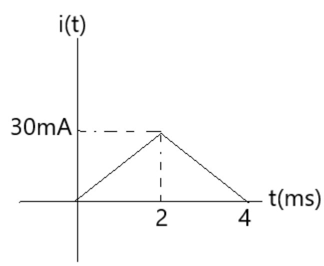
القاگر متقابل(M)

القاگر متقابل پارامتری است برای مرتبط ساختن ولتاژ القایی در یک مدار.



$$\begin{cases} V_۱ = L_۱\frac{dI_۱}{dt} + M\frac{dI_۲}{dt} \\ V_۲ = L_۲\frac{dI_۲}{dt} + M\frac{dI_۱}{dt} \end{cases}$$

مثال ۱.۴. شکل موج جریان یک القاگر $۵mH$ در شکل زیر داده شده است. شکل موج ولتاژ را رسم کنید.



حل.

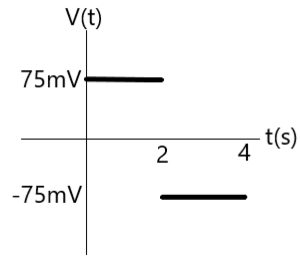
$$V_L = L\frac{di}{dt}$$

$$۰ \leq t \leq ۲ \rightarrow i(t) = ۱۵t$$

$$V_L(t) = ۱۵ \times ۵ \times ۱۰^{-۳} = ۷۵mV$$

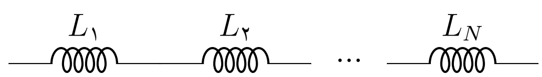
$$۲ \leq t \leq ۴ \rightarrow i(t) = -۱۵t + ۳۰ + ۳۰$$

$$V_L(t) = -۱۵ \times ۵ \times ۱۰^{-۳} = -۷۵mV$$



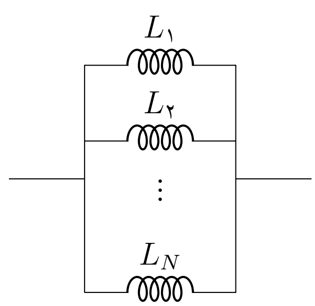
ترکیب سلف‌ها

سلف‌های سری:



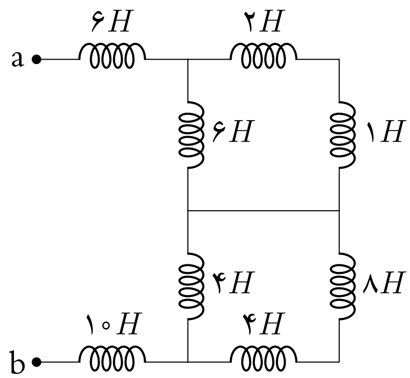
$$L_{eq} = L_{۱} + L_{۲} + \cdots + L_N$$

سلف‌های موازی:



$$\frac{۱}{L_{eq}} = \frac{۱}{L_{۱}} + \frac{۱}{L_{۲}} + \cdots + \frac{۱}{L_N}$$

مثال ۲.۴. القاگر معادل شکل زیر را از دید a-b بدست آورید.



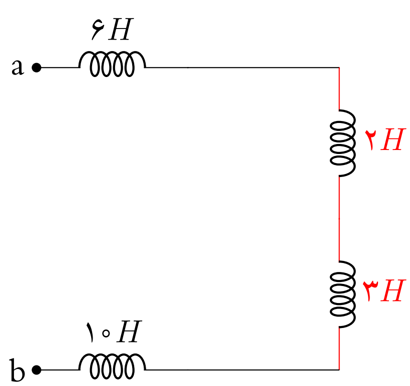
حل.

$$L_{۲,۱} = ۲ + ۱ = ۳H$$

$$L_{۳,۶} = \frac{۳ \times ۶}{۹} = ۲H$$

$$L_{۴,۸} = ۴ + ۸ = ۱۲H$$

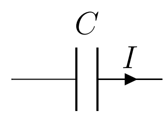
$$L_{۱۲,۴} = \frac{۴ \times ۱۲}{۱۶} = ۳H$$



$$L_{eq} = ۶ + ۲ + ۳ + ۱۰ = ۲۱H$$

۲.۴ خازن

عنصری است که برای ذخیره‌ی انرژی در میدان الکتریکی استفاده می‌شود. خازن در مدار با نماد زیر نشان داده می‌شود.



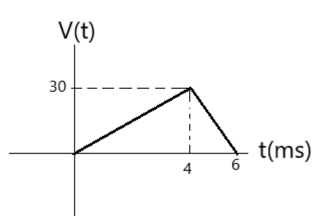
فرمول‌های مربوط به خازن

$$I = C\frac{dv}{dt} \rightarrow V = \frac{۱}{C}\int_{۰}^{t} I dt + V(۰)$$

$$P = VI = CV\frac{dV}{dt}$$

$$W = \int P dt = \frac{۱}{۲}CV^{۲}$$

مثال ۳.۴. شکل موج ولتاژ اعمال شده به خازن $۶\mu F$ به صورت زیر است. شکل موج جریان را بدست آورید.



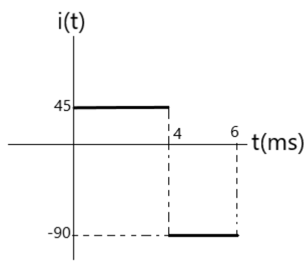
حل.

$$۰ \le t \le ۴ \Rightarrow V(t) = ۷/۵t \times ۱۰^{-۳}$$

$$i(t) = C\frac{dV}{dt} = ۶\mu F \times ۷/۵ \times ۱۰^{۳} = ۴۵mA$$

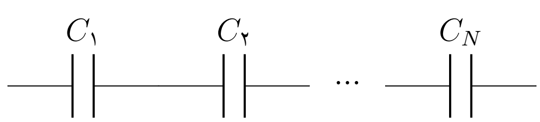
$$۴ \le t \le ۶ \Rightarrow V(t) = -۱۵t \times ۱۰^{۳} + ۶۰ + ۳۰$$

$$i(t) = C\frac{dV}{dt} = ۶\mu F \times -۱۵ \times ۱۰^{۳} = -۹۰mA$$



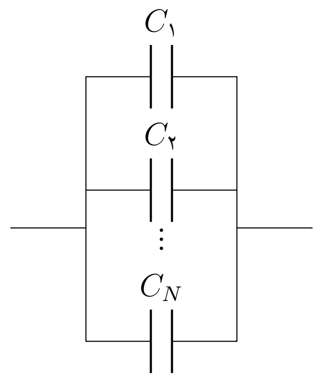
ترکیب خازن‌ها

خازن‌های سری:



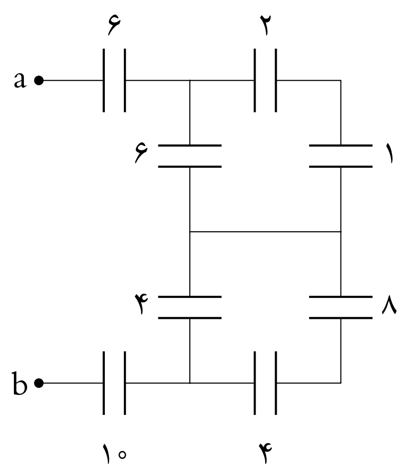
$$\frac{۱}{C_{eq}} = \frac{۱}{C_۱} + \frac{۱}{C_۲} + \cdots + \frac{۱}{C_N}$$

خازن‌های موازی:



$$C_{eq} = C_۱ + C_۲ + \cdots + C_N$$

مثال ۴.۴. خازن معادل شکل زیر را از دید a–b بدست آورید.



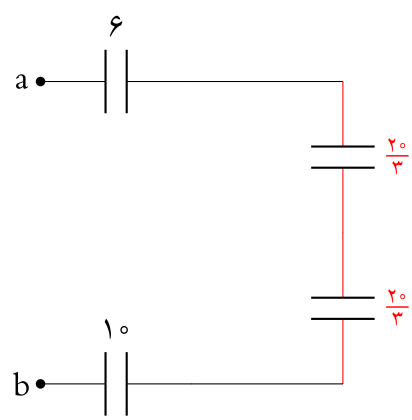
حل.

$$C_{۲,۱} = \frac{۱ \times ۲}{۱ + ۲} = \frac{۲}{۳}$$

$$C_{\frac{۲}{۳},۶} = \frac{۲}{۳} + ۶ = \frac{۲۰}{۳}$$

$$C_{۴,۸} = \frac{۴ \times ۸}{۱۲} = \frac{۸}{۳}$$

$$C_{\frac{۸}{۳},۴} = \frac{۸}{۳} + ۴ = \frac{۲۰}{۳}$$



$$\frac{۱}{C_{eq}} = \frac{۱}{۶} + \frac{۳}{۲۰} + \frac{۳}{۲۰} + \frac{۱}{۱۰} = \frac{۱۷}{۳۰}$$

$$\Rightarrow C_{eq} = ۱/۷$$

۵ پاسخ طبیعی پله واحد

تابع تحریک پله واحد:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

تابع پله واحد تأخیردار:

$$u(t-t_0) = \begin{cases} 1 & t > t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$$

تابع تحریک ضربه:

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} 1 & t = t_0 \\ 0 & O.W \end{cases}$$

توجه. *برای بدست آوردن پاسخ ضربه(یعنی پاسخ مدار به ورودی ضربه) کافی است ابتدا پاسخ پله(یعنی پاسخ مدار به ورودی پله) را بدست آوریم سپس از این پاسخ مشتق بگیریم.*

تعریف ۱.۵. پاسخ مدار یعنی به دست آوردن جریان یا ولتاژ در یک نقطه از مدار.

توجه.

- *اگر مدار **مقاومتی** باشد و منبع نیز **متغیر** باشد، پاسخ مدار **متغیر**(وابسته به زمان) است.*
- *اگر مدار **مقاومتی** باشد و منبع **ثابت** باشد، پاسخ **ثابت** است.*
- *اگر مدار شامل **سلف یا خازن** و یا هردو باشد، پاسخ **همیشه متغیر**(وابسته به زمان) است.*

تعریف ۲.۵. **درجه** به معنای بزرگترین توان متغیر و **مرتبه** به معنای تعداد دفعاتی است که می‌توان مشتق گرفت.

تعریف ۳.۵. **مدارهای مرتبه اول**، مدارهایی هستند که برای بدست آوردن رابطه‌ی ولتاژ یا جریان در آن به یک معادله مرتبه اول می‌رسیم.

مدارهای مرتبه اول دو نوع هستند:

- **مدارهای RL:** این نوع مدارها شامل مقاومت و سلف هستند.
- **مدارهای RC:** این نوع مدارها شامل مقاومت و خازن هستند.

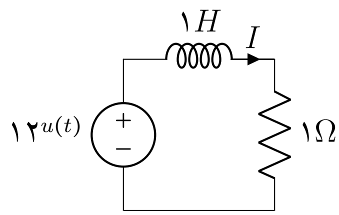
در مدارهای مرتبه اول، به جای حل معادله‌ی مرتبه اول دیفرانسیل با روش‌های تشریحی می‌توان از فرمول زیر استفاده کرد:

$$y(t) = y(\infty) + \Big(y(\circ) - y(\infty)\Big).e^{-\frac{t}{\tau}}$$

حال برای انواع مدارها داریم:

$$RC \to \begin{cases} y = V \\ \tau = R_{eq}.C \end{cases} \qquad RL \to \begin{cases} y = I \\ \tau = \frac{L}{R_{eq}} \end{cases}$$

مثال ۴.۵. رابطه‌ی جریان را برای مدار زیر به دست آورید.



حل.

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{۱}{۱} = ۱$$

$$I(\infty) = ۱۲A$$

$$I(۰) = ۰$$

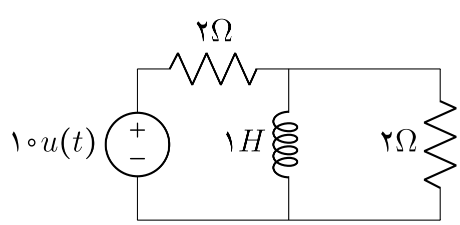
$$I(t) = ۱۲ + (۰ - ۱۲)e^{\frac{-t}{۱}}$$

$$\rightarrow I(t) = ۱۲(۱ - e^{-t})$$

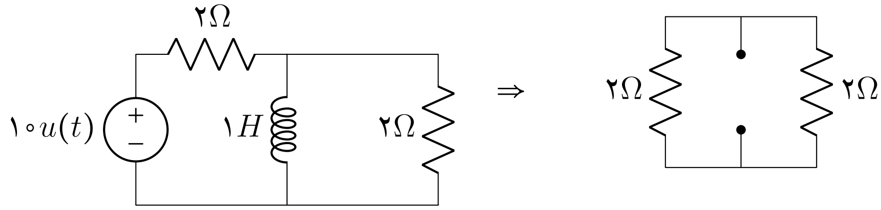
توجه.

- *سلف وقتی پر می‌شود به صورت اتصال کوتاه عمل می‌کند.*
- *خازن وقتی پر می‌شود، جریانی از خود عبور نمی‌دهد و آن را به صورت مدار باز در نظر بگیرید.*
- *سلف را در ابتدای مدار به صورت مدار باز در نظر بگیرید.*
- *خازن را در ابتدای مدار به صورت اتصال کوتاه در نظر بگیرید.*

مثال ۵.۵. جریان گذرنده از سلف را به دست آورید.



حل.



$$R_{eq} = ۲\|۲ = ۱\Omega$$

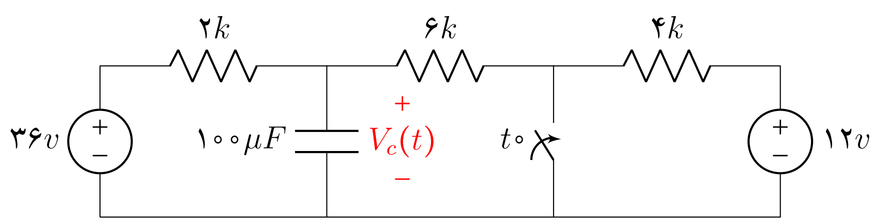
$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{۱}{۱} = ۱$$

$$I(\infty) = \frac{۱۰}{۲} = ۵A$$

$$I(۰) = ۰$$

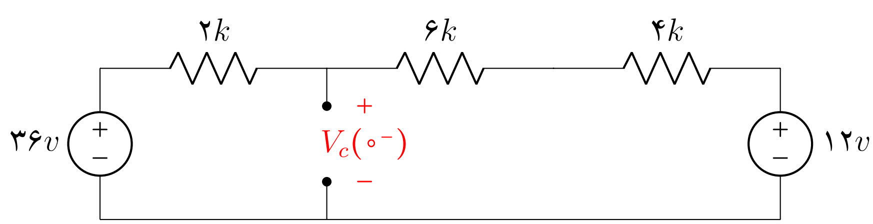
$$\rightarrow I(t) = ۵ + (۰ - ۵)e^{-t} = ۵(۱ - e^{-t})$$

مثال ۶.۵. در مدار شکل زیر $V_c(t)$ را برای $t > ۰$ بیابید.



توجه. *اگر در مداری کلید داشتیم یک مرحله به مراحل قبل اضافه می‌شود.*

حل. مدار برای زمان $t = ۰^-$ به صورت زیر است.



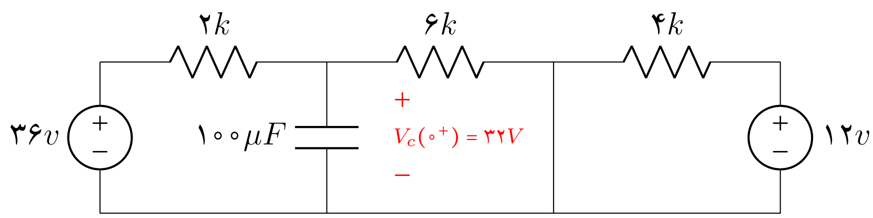
طبق قانون KVL داریم:

$$۲^k I + ۶^k I = ۴^k I + ۱۲ - ۳۶ = ۰ \rightarrow I = \frac{۲۴}{۱۲^k} = ۲mA$$

$$-۳۶ + ۲^k \times ۲mA + V_c(۰^-) = ۰ \rightarrow V_c(۰^-) = ۳۲V$$

توجه. *ولتاژ خازن مقداری پیوسته است یعنی ولتاژ خازن در $t = ۰^-$ و $t = ۰^+$ با هم برابر است.*

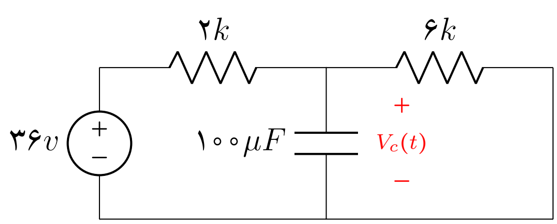
مدار برای زمان $t = ۰^+$ به صورت زیر است.



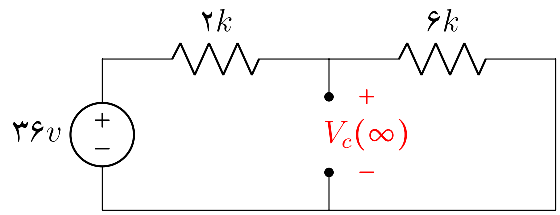
توجه.

- *در زمان $t = ۰^+$ خازن نقش یک منبع را دارد.*
- *در زمان $t = ۰^+$ کلید وصل است.*

مدار برای زمان $t > ۰$ به صورت زیر خواهد بود:



مدار برای زمان $t = +\infty$ به صورت زیر خواهد بود:



حال داریم:

$$V_c = \frac{۶}{۲+۶} \times ۳۶ = ۲۷v$$

$$\tau = R_{eq}.C \to R_{eq} = ۲||۶ = \frac{۲\times ۶}{۸} = ۱/۵\Omega$$

$$\tau = ۱/۵ \times ۱۰^{۳} \times ۱۰۰ \times ۱۰^{-۶} = ۱۵۰ \times ۱۰^{-۳} = ۰/۱۵$$

$$V_c(t) = V_c(\infty) + (V_t(۰) - V_t(\infty))e^{\frac{-t}{\tau}}$$

$$= ۲۷ + (۳۲ - ۲۷)e^{\frac{-t}{۰/۱۵}}$$

$$V_c(t) = ۲۷ + ۵e^{\frac{-t}{۰/۱۵}}$$

۱.۵ پاسخ‌های طبیعی و پله مدارهای RLC

تعریف ۷.۵. مدارهای RLC: مدارهایی که هم خازن دارند، هم سلف و هم مقاومت. این مدارها از نوع مرتبه دوم هستند(یعنی توصیف آن با معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم انجام می‌شود.)

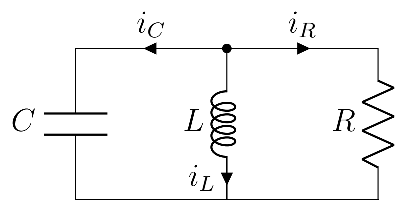
روال حل مسائل این قسمت:

ابتدا مدارهای RLC بدون منبع را در نظر می‌گیریم و پاسخ طبیعی را بدست می‌آوریم. سپس منابع DC کلیدها یا منابع پله را به مدار می‌افزاییم و پاسخ کامل را به صورت مجموع پاسخ ویژه(واداشته) و طبیعی می‌نویسیم و مقدار ثابت‌ها را با اعمال شرایط اولیه پیدا می‌کنیم.

پاسخ طبیعی مدار RLC موازی:

پاسخ طبیعی یعنی فرض می کنیم که مدار بدون منبع است و در سلف و خازن انرژی ذخیره شده است. انرژی ذخیره شده اولیه سلف را $I_۰$ (جریان) و انرژی ذخیره شده اولیه خازن را $V_۰$ (ولتاژ) در

نظر می‌گیریم.



$$i_R + i_C + i_L = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i_R = \frac{V}{R} \\ i_L = \frac{۱}{L}\int_{۰}^{t} V dt + I_{۰} \\ i_c = C\frac{dv}{dt} \end{cases}$$

$$i_R + i_C + i_L = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{V}{R} + C\frac{dV}{dt} + \frac{۱}{L}\int_{۰}^{t} V dt + I_{۰} = ۰$$

معادلاتی که هم مشتق دارند و هم انتگرال، باید یا مشتق را حذف کنیم و یا انتگرال. برای حذف انتگرال از کل معادله مشتق می‌گیریم.

$$\frac{۱}{R}\frac{dV}{dt} + C\frac{d^{۲}V}{dt^{۲}} + \frac{۱}{L}V = ۰$$

$$\frac{d^{۲}V}{dt^{۲}} + \frac{۱}{RC}\frac{dV}{dt} + \frac{V}{LC} = ۰ \quad \rightarrow \quad \text{معادله دیفرانسیل مرتبه دوم} \qquad (۹)$$

فرض می‌کنیم که $V = ke^{st}$ در این صورت خواهیم داشت:

$$V = ke^{st} \rightarrow \quad \frac{d'V}{dt} = kse^{st} \rightarrow \quad \frac{d^{۲}V}{dt} = ks^{۲}e^{st}$$

حال مقدار V را در معادله دیفرانسیل (۹) جایگذاری می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$ks^{2}e^{st} + \frac{1}{RC}kse^{st} + \frac{ke^{st}}{LC} = 0$$

$$\overbrace{ke^{st}}^{1}\left(s^{2} + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}\right) = 0$$

قسمت یک که هیچ‌گاه صفر نمی‌شود بنابراین:

$$s^{2} + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} = 0$$

که به آن معادله مشخصه مدار گفته می‌شود زیر ریشه‌های این معادله رابطه ریاضی $V(t)$ را تعیین خواهد کرد. به کمک روش دلتا نیز می‌توان ریشه‌های آن را بدست آورد که ریشه‌های به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{cases} s_1 = \frac{-1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^{2} - \frac{1}{LC}} \\ \\ s_2 = \frac{-1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^{2} - \frac{1}{LC}} \end{cases} \quad V = V_1 + V_2 = k_1e^{s_1t} + k_2e^{s_2t}$$

حال برای ساده‌تر کردن ریشه‌ها می‌توان عبارت‌های زیر را در نظر گرفت:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2RC} & \rightarrow \quad \text{ضریب میرایی پاسخ طبیعی} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} & \rightarrow \quad \text{فرکانش تشدید پاسخ طبیعی(مدار)} \end{cases}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} s_1 = \frac{-1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^{2} - \frac{1}{LC}} = -\alpha + \sqrt{\alpha^{2} - \omega_0^{2}} \\ \\ s_2 = \frac{-1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^{2} - \frac{1}{LC}} = -\alpha - \sqrt{\alpha^{2} - \omega_0^{2}} \end{cases}$$

حال براساس α و ω_0 سه نوع جواب داریم:

$\alpha > \omega_0$: در این حالت دو ریشه حقیقی و متمایز داریم و به آن پاسخ طبیعی فوق میرا گفته می‌شود.

$$V(t) = k_1e^{s_1t} + k_2e^{s_2t}$$

$\alpha < \omega_0$**:** در این حالت دو ریشه مختلط و مزدوج داریم و به آن پاسخ طبیعی زیرمیرا گفته می‌شود.

$$V(t) = e^{-\alpha t}\Big(k_۱ cos\omega_n t + k_۲ sin\omega_n t\Big)$$

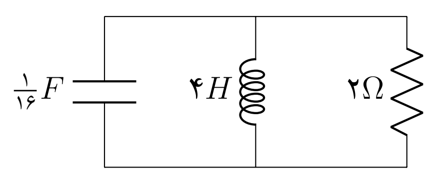
توجه. *به ω_n فرکانس تشدید طبیعی گفته می‌شود که از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:*

$$\omega_n = \sqrt{\omega_0^۲ - \alpha^۲}$$

$\alpha = \omega_0$**:** در این حالت هر دو ریشه حقیقی و مساوی است و به آن پاسخ طبیعی میرای بحرانی گفته می‌شود.

$$V(t) = k_۱ te^{-\alpha t} + k_۲ e^{-\alpha t}$$

مثال ۸.۵. پاسخ طبیعی مدار زیر را بدست آورید.



حل.

$$\alpha = \frac{۱۶}{۲ \times ۲} = ۴$$
$$\omega_0 = \frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۴}}} = ۲$$

با توجه به حالات بالا پاسخ طبیعی فوق میراست. لذا:

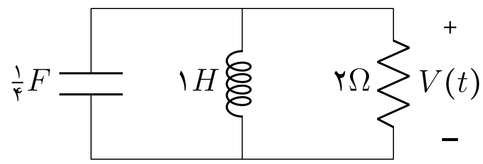
$$V(t) = k_۱ e^{s_۱ t} + k_۲ e^{s_۲ t}$$

$$s_۱ = -۴ + \sqrt{۱۶ - ۴} = -۰/۵۴$$

$$s_۲ = -۴ - \sqrt{۱۶ - ۴} = -۷/۴۶$$

$$V(t) = k_۱ e^{-۰/۵۴t} + k_۲ e^{-۷/۴۶t}$$

مثال ۹.۵. در مدار شکل زیر اگر $V_c(\circ) = ۲V$ و $i_L(\circ) = -۲A$ باشد، مطلوب است مقدار $V(t)$ برای $t > \circ$.



حل. اولین کار برای حل این تیپ سوالات بدست آوردن α, ω است. بنابراین:

$$\alpha = \frac{۱}{۲RC} = \frac{۱}{۲ \times ۲ \times \frac{۱}{۴}} = ۱$$
$$\omega_\circ = \frac{۱}{\sqrt{۱ \times \frac{۱}{۴}}} = ۲$$

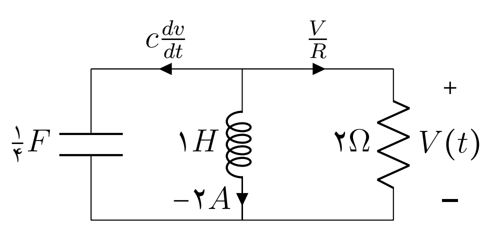
از آنجایی که $\alpha < \omega_\circ$ است پاسخ زیرمیراست. پس:

$$V(t) = e^{-\alpha t}\Big(k_۱ cos\omega_n t + k_۲ sin\omega_n t\Big)$$
$$\omega_n = \sqrt{\omega_\circ^۲ - \alpha^۲} = \sqrt{۴ - ۱} = \sqrt{۳}$$
$$\Rightarrow V(t) = e^{-\alpha t}\Big(k_۱ cos\sqrt{۳}t + k_۲ sin\sqrt{۳}t\Big)$$

حال باید مقادیر $k_۱, k_۲$ را محاسبه کنیم:

$$V(\circ) = ۱\Big(k_۱ cos\circ + k_۲ sin\circ\Big) = k_۱ = ۲$$

و برای بدست آوردن $k_۲$ مدار را در زمان صفر در نظر می‌گیریم یعنی به صورت زیر:



$$\frac{dv}{dt} = -e^{-t}\Big(k_۱ cos\sqrt{۳}t + k_۲ sin\sqrt{۳}t\Big) + e^{-t}\Big(- \sqrt{۳}k_۱ sin\sqrt{۳}t + \sqrt{۳}k_۲ cos\sqrt{۳}t\Big)$$

$$i_c = C\frac{dv}{dt} = \frac{۱}{۴}\Big[- ۱(۲ + ۰) + ۱(۰ + \sqrt{۳}k_۲)\Big] = -\frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۴}k_۲$$

با توجه به قانون KCL داریم:

$$i_R + i_L + i_C = ۰$$

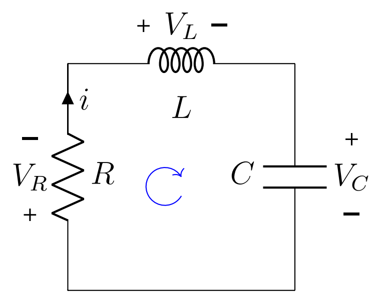
$$i_R = \frac{V}{R} = \frac{۲}{۲} = ۱$$

$$۱ - ۲ - \frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۴}k_۲ = ۰ \to k_۲ = ۳/۴۷$$

$$\Rightarrow V(t) = e^{-t}\Big(۲cos\sqrt{۳}t + ۳/۴۷sin\sqrt{۳}t\Big)$$

پاسخ طبیعی مدار RLC سری:

همانطور که در شکل زیر هم مشاهده می‌کنید در این مدارها در هر سه المان یک جریان برقرار است. بنابراین در این مدارها به دنبال به دست آوردن *جریان* هستیم.



فرض می‌کنیم که انرژی اولیه ذخیره شده در سلف I_0 و انرژی اولیه ذخیره شده در خازن هم V_0 باشد. از طرفی با توجه به جریان مشخص شده و قانون KVL داریم:

$$V_L + V_C + V_R = 0 \Rightarrow L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\ dt + V_0 + Ri = 0$$
$$L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C}i + R\frac{di}{dt} = 0$$
$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0$$
$$\Rightarrow s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\begin{cases} s_1 = \frac{-R}{2L} + \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}} \\ s_2 = \frac{-R}{2L} - \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{R}{2L} \rightarrow \text{ضریب میرایی پاسخ طبیعی} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow \text{فرکانس تشدید} \end{cases}$$

به مانند قبل با توجه به α, ω_0 سه جواب متمایز خواهیم داشت.

$\alpha > \omega_0$: در این حالت دو ریشه حقیقی و متمایز داریم و به آن پاسخ طبیعی فوق میرا گفته می‌شود.

$$i(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

$\alpha < \omega_0$: در این حالت دو ریشه مختلط و مزدوج داریم و به آن پاسخ طبیعی زیرمیرا گفته می‌شود.

$$i(t) = e^{-\alpha t}\Big(k_1 cos\omega_n t + k_2 sin\omega_n t\Big)$$

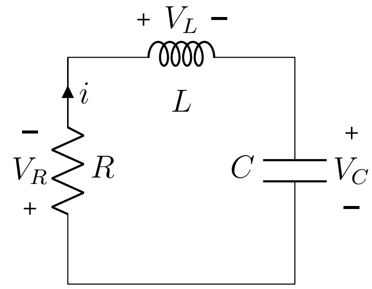
توجه. *به ω_n فرکانس تشدید طبیعی گفته می‌شود که از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:*

$$\omega_n = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

$\alpha = \omega_0$: در این حالت هر دو ریشه حقیقی و مساوی است و به آن پاسخ طبیعی میرای بحرانی گفته می‌شود.

$$i(t) = k_1 t e^{-\alpha t} + k_2 e^{-\alpha t}$$

مثال ۱۰.۵. در شکل زیر اگر $R = ۱\Omega, L = ۱H, C = \frac{۱}{۲۵}F, i_L(۰) = ۲A, V_C(۰) = ۲V$ مقدار $i(t)$ را برای $t > ۰$ بیابید.



حل. اولین گام برای حل مسائل RLC بدست آوردن مقادیر $\alpha, \omega_\circ$ است. پس:

$$\alpha = \frac{R}{۲L} = \frac{۶}{۲ \times ۱} = ۳$$

$$\omega_\circ = \frac{۱}{\sqrt{LC}} = \frac{۱}{\sqrt{۱ \times \frac{۱}{۲۵}}} = ۵$$

با توجه به اینکه $\alpha < \omega_\circ$ است نوع پاسخ زیرمیراست بنابراین داریم:

$$i(t) = e^{-\alpha t}\Big(k_۱ cos\omega_n t + k_۲ sin\omega_n t\Big)$$

$$\omega_n = \sqrt{\omega_\circ^۲ - \alpha^۲} = \sqrt{۲۵ - ۹} = ۴$$

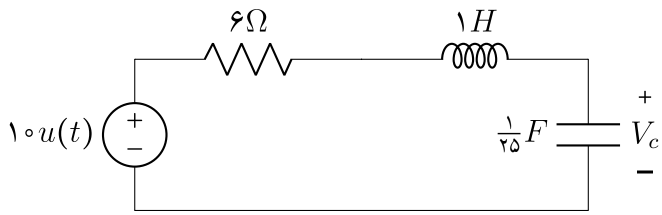
$$i(۰) = ۲A \rightarrow ۲ = k_۱$$

$$KVL \rightarrow V_R + V_L + V_C = ۰ \rightarrow R \times i(۰) + L\frac{di}{dt} + V_c(۰) = ۰$$

$$\rightarrow k_۲ = -۲$$

$$\Rightarrow i(t) = e^{-۲t}\Big(۲cos۴t - ۲sin۴t\Big)$$

مثال ۱۱.۵. در مدار شکل زیر اگر $V_c(۰) = -۶V, i_L(۰) = ۴A$ باشد، $V_c(t)$ را در $t > ۰$ محاسبه نمایید.



حل. ابتدا مقادیر $\alpha, \omega_{\circ}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{R}{۲L} = \frac{۶}{۲} = ۳ \\ \omega_{\circ} = \frac{۱}{\sqrt{LC}} = \frac{۱}{۱\times\frac{۱}{۲۵}} = ۵ \end{cases}$$

با توجه به اینکه $\alpha < \omega_{\circ}$ است نوع پاسخ زیرمیراست. از طرفی وقتی مدار منبع داشته باشد و مقدار آن تابع پله‌ای باشد، داریم:

$$V_c(t) = ۱۰ + e^{-۳t}\Big(k_۱ cos۴t + k_۲ sin۴t\Big)$$

$$\omega_n = \sqrt{\omega_{\circ}^۲ - \alpha^۲} = \sqrt{۲۵ - ۹} = ۴$$

$$V_c(\circ) = -۶ = ۱۰ + k_۱ \rightarrow k_۱ = -۱۶$$

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} = \frac{۱}{۲۵}\Big(\circ + (-۳e^{-۳t})(k_۱ cos۴t + k_۲ sin۴t) + (e^{-۳t})(-۴k_۱ sin۴t + ۴k_۲ cos۴t)\Big)$$

جریان سلف = جریان خازن = جریان مقاومت

$$i_L(\circ) = ۴A = \frac{۱}{۲۵}\Big(-۳(-۱۶) + ۴k_۲\Big) \rightarrow k_۲ = ۱۳$$

۶ تجزیه و تحلیل حالت ماندگاری سینوسی

مقدمات

$$V(t) = V_m\ Sin(\omega t)$$

$$t \rightarrow \text{زمان بر حسب ثانیه}$$

$$V_m \rightarrow \text{دامنه ولتاژ}$$

$$\omega \rightarrow \text{فرکانس زاویه‌ای} \begin{cases} \omega = ۲\pi f = \frac{۲\pi}{T} \\ f \rightarrow \text{واحد آن هرتز – فرکانس یا بسامد} \\ T \rightarrow \text{واحد آن ثانیه – دوره‌ی تناوب} \end{cases}$$

توصیف اعداد مختلط

$$\begin{cases} z = x + jy \rightarrow \text{نمایش معمول} \\ z = |z|e^{j\theta} \rightarrow \text{نمایش قطبی} \\ z = |z| \measuredangle \theta \rightarrow \text{نمایش برداری} \end{cases}$$

$$z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$$

$$\theta = tan^{-۱}(\frac{y}{x})$$

جمع و تفریق اعداد مختلط

$$\begin{cases} z_۱ = x_۱ + jy_۱ \\ z_۲ = x_۲ + jy_۲ \end{cases}$$

$$z_۱ \pm z_۲ = (x_۱ \pm x_۲) + j(y_۱ \pm y_۲)$$

ضرب اعداد مختلط

$$z_1.z_2 = (x_1 + jy_1).(x_2 + jy_2)$$
$$= x_1x_2 - y_1y_2 + j(x_1y_2 + x_2y_1)$$
$$= r_1r_2 \measuredangle (\theta_1 + \theta_2) \rightarrow \begin{cases} r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \\ r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \\ \theta_1 = tan^{-1}(\frac{y_1}{x_1}) \\ \theta_2 = tan^{-1}(\frac{y_2}{x_2}) \end{cases}$$

تقسیم اعداد مختلط

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \frac{r_1 \measuredangle \theta_1}{r_2 \measuredangle \theta_2}$$
$$= \frac{r_1}{r_2} \measuredangle (\theta_1 - \theta_2) \rightarrow \begin{cases} r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \\ r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \\ \theta_1 = tan^{-1}(\frac{y_1}{x_1}) \\ \theta_2 = tan^{-1}(\frac{y_2}{x_2}) \end{cases}$$

نمایش در فرم فاز برداری

جریان‌ها و ولتاژهای cos را برای ساده‌تر کردن تحلیل می‌توان به صورت زیر نوشت. دقت شود چنین نحوه‌ی نمایشی فقط در مورد توابع cos است و اگر تابع sin باشد باید ابتدا آن را به یک تابع cos تبدیل کنید.

$$V(t) = I_m\ cos(\omega t + \phi) = I_m \measuredangle \phi$$

مثال ۱.۶. جریان و ولتاژ زیر را به فرم فاز برداری نمایش دهید.

الف) $i(t) = ۱۰\ cos(۳۷۷t + ۲۰°)$

ب) $V(t) = ۲۰\ cos(۳۷۷t + ۱۵°)$

حل. الف:

$$i(t) = ۱۰\ cos(۳۷۷t + ۲۰°) = ۱۰ \measuredangle ۲۰°$$

ب:

$$V(t) = ۲۰\ cos(۳۷۷t + ۱۵°) = ۲۰ \measuredangle ۱۵°$$

مثال ۲.۶. اگر $f = ۶۰\ Hz$ و نمایش فاز برداری ولتاژ به صورت $V = ۲۵ \measuredangle ۴۵°$ باشد. معادله ولتاژ را در حوزه زمانی بدست آورید.

حل.

$$\begin{cases} V_m = ۲۵ \\ \omega = ۲ \times ۳/۱۴ \times ۶۰ = ۳۷۷ \\ \phi = ۴۵° \end{cases} \qquad V(t) = ۲۵\ cos(۳۷۷t + ۴۵°)$$