INTRODUCCIÓN

En 1854, el matemático inglés George Boole desarrolló una teoría matemática que permitió la representación de circuitos de conmutación.

El nombre de esta teoría es "**TEORÍA DE LOS CIRCUITOS LÓGICOS**".

Toda esta teoría se apoya, desde el punto de vista matemático, en el "**ÁLGEBRA DE BOOLE**".

El Álgebra de Boole se aplica a los razonamientos sobre proposiciones lógicas: una proposición lógica puede ser **verdadera** o **falsa** y esto puede ser representado un **1 (uno)** o por un **0 (cero)** respectivamente.

En este apunte nos limitaremos a ver en forma intuitiva los conceptos fundamentales del Álgebra de Boole con vistas a su aplicación a los circuitos lógicos.

ELEMENTOS DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

Variables Lógicas

Una variable lógica puede asumir un valor de entre dos distintos, que por convención tomaremos ***como 1 (uno) y 0 (cero)***.

Los nombres de las variables podrán ser ***a, b, c,...,z***.

Diremos que una variable es ***cierta*** o ***verdadera*** cuando su valor sea ***1 (uno)***, y ***falsa*** cuando su valor sea ***0 (cero)***.

Los términos **"*variable binaria*"** o **"*variable booleana*"** son sinónimos de **"*variable lógica*"**.

Funciones Lógicas

Una ***función lógica***, o ***booleana***, es una combinación de ***n*** variables lógicas que pueden tomar valores de entre dos posibles (***1*** y ***0***), y relaciones u operaciones lógicas sujetas a determinadas reglas de construcción.

El resultado de una función lógica ***es siempre un valor lógico***.

$$F = f(a, b, ...)$$

Funciones Lógicas Básicas

Son aquellas funciones en las que interviene ***un solo operador lógico*** o ***relación***.

Función Unión (V)

La ***función unión*** también se denomina ***suma lógica*** o simplemente **O (*OR en inglés*).** Puede ser representada por el signo ***"+", OR*** u ***O***.

Opera entre ***dos variables*** o ***valores lógicos*** y el resultado es ***1 (uno)*** o ***verdadero*** si alguno de los dos o los dos valores son ***verdaderos***.

F = a v b		
a	**b**	**F**
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Figura 1: Tabla de Verdad de la función OR.

Función Intersección (^)

También se la denomina ***Conjunción***, ***Producto Lógico*** o ***Y (AND en inglés).*** Puede ser representada por ***.(punto)***, ***AND*** o ***Y***.

Opera entre ***dos variables*** o ***valores lógicos*** y el resultado es ***1 (uno)*** o ***verdadero*** si los dos valores son ***verdaderos***.

F = a ^ b		
a	**b**	**F**
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Figura 2: Tabla de Verdad de la función AND.

Función Negación (‾)

También se la denomina ***complemento*** o simplemente ***NO (NOT en inglés).***

Puede ser representada por ‾ , ***NOT*** o ***NO***.

Opera con ***una sola variable*** y el resultado es el opuesto al valor de la variable.

F = $\bar{a}$	
$\bar{a}$	**F**
0	1
1	0

Figura 3: Tabla de Verdad de la función NOT.

Tablas De Verdad

La tabla de verdad de una función lógica es una ***representación del comportamiento*** de la misma dependiendo de los valores que tomen cada una de sus variables.

Deben figurar todas las combinaciones posibles. El número de combinaciones es igual a $\mathbf{2^{n}}$, donde $\mathbf{n}$ es el número de variables.

Postulados

En el análisis de las funciones lógicas es necesario el conocimiento de los postulados del Álgebra de Boole, fundamentalmente para los procesos de simplificación.

Supongamos dos variables lógicas **a** y **b**, los postulados más importantes son:

$a \lor 1 = 1$	$a \lor 0 = a$
$a \land 1 = a$	$a \land 0 = 0$
$a \lor a = a$	$a \land a = a$
$a \lor \overline{a} = 1$	$a \land \overline{a} = 0$
$\overline{\overline{a}} = a$	

Figura 4: Tabla de Postulados

Propiedades

CONMUTATIVA	**A+B=B+A**	**A.B=B.A**
DISTRIBUTIVA	**A(B+C)=AB+AC**	

Teoremas

Absorción:

$a \lor (a \land b) = a$ $a \land (a \lor b) = a$

Leyes De Morgan

- La negación de la unión de dos variables es igual a la intersección de la negación de cada una de ellas.

$$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$$

- La negación de la intersección de dos variables es igual a la unión de la negación de cada una de ellas.

$$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}$$

FORMAS CANÓNICAS

La función lógica puede representarse de distintas maneras, entre ellas pueden distinguirse dos, que se denominan ***Formas Canónicas***.

Primera Forma Canónica

Se representa como una ***suma de productos*** en los que aparecen todas las variables (en su estado normal o negadas).

$$\mathbf{F} = a.b.c + a.\overline{b}.\overline{c} + \overline{a}.b.c$$

Segunda Forma Canónica

Se representa como ***un producto de sumas*** en las que aparecen todas las variables (en su estado normal o negadas).

$$\mathbf{F} = (a+b+c) \,.\, (a+\overline{b}+\overline{c}) \,.\, (\overline{a}+b+c)$$

Obtención de la primera forma canónica de una función lógica partiendo de su tabla de verdad

Dada la función **F = (a + b) . (a + c)**

1º PASO

Desarrollamos la tabla de verdad

a	b	c	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

2º PASO

La 1º Forma Canónica se obtiene por ***la suma de todos los productos que den 1 (uno)***. Estos productos deben completarse con todas las variables. ***Las variables cuyo valor es 0 (cero) aparecen negadas***.

a	b	c	F	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
1	0	0	1	$a . \overline{b} . \overline{c}$
0	1	1	1	$\rightarrow + \overline{a} . b . c$
1	0	1	1	$\rightarrow + a . \overline{b} . c$
1	1	0	1	$\rightarrow + a . b . \overline{c}$
1	1	1	1	$\rightarrow + a . b . c$

$$\boxed{a.\overline{b}.\overline{c} + \overline{a}.b.c + a.\overline{b}.c + a.b.\overline{c} + a.b.c}$$

Obtención de la segunda forma canónica de una función lógica partiendo de su tabla de verdad

Dada la función **F = (a + b) . (a + c)**

1º PASO

Como en el caso de la **1º Forma Canónica** desarrollamos la tabla de verdad.

2º PASO

La 2º Forma Canónica se obtiene por el producto de todas las sumas que den 0 (cero). Estas sumas deben completarse con todas las variables. Las variables cuyo valor es 1 (uno) aparecen negadas.

a	b	c	F	
0	0	0	0	$(a+b+c)$
0	0	1	0	$\rightarrow (a+b+\overline{c})$
0	1	0	0	$\rightarrow (a+\overline{b}+c)$
1	0	0	1	
0	1	1	1	
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	1	

$$\boxed{(a+b+c)\,.\,(a+b+\overline{c})\,.\,(a+\overline{b}+c)}$$

SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS

Método Gráfico De Karnaugh

Es un método válido para simplificar funciones de ***hasta 4 variables***, ya que una mayor cantidad de ellas convierten al método en algo muy engorroso.

Se utiliza una tabla, denominada ***Mapa de Karnaugh***, que presenta las siguientes formas según sea la cantidad de variables:

	a 0	a 1
c 0		
c 1		

Mapa de 2 variables

	a b 0 0	a b 0 1	a b 1 1	a b 1 0
c 0				
c 1				

Mapa de 3 variables

	a b 0 0	a b 0 1	a b 1 1	a b 1 0
c d 0 0				
c d 0 1				
c d 1 1				
c d 1 0				

Mapa de 4 variables

Pasos para la aplicación del método:

Dada la función lógica **F = (a+b).(a+c)**

1º PASO

Desarrollamos la tabla de verdad

a	b	c	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

2º PASO

En las casillas correspondientes a las combinaciones donde la función vale ***1 (uno)*** se coloca una marca (***X***).

	a b 0 0	a b 0 1	a b 1 1	a b 1 0
c 0			X	X
c 1		X	X	X

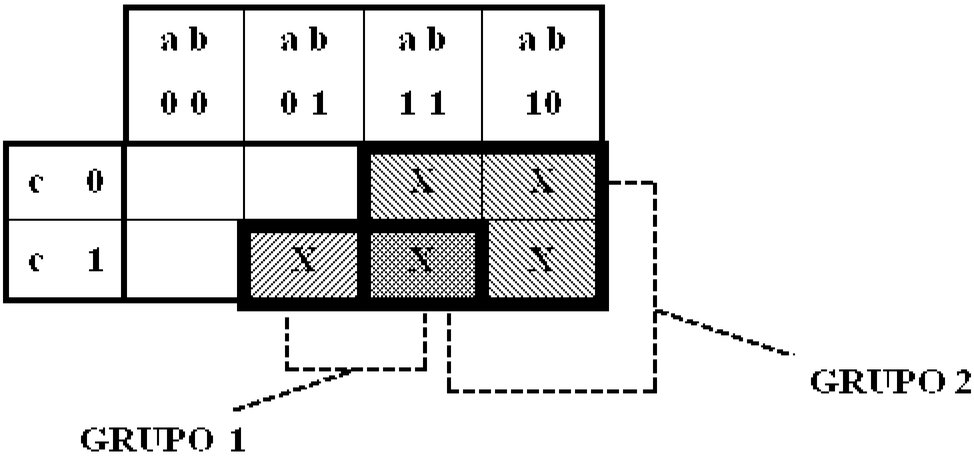
a	b	c	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

3º PASO

A continuación se agrupan las **X** adyacentes en grupos de **2(dos), 4(cuatro), 8(ocho), ...**

Puede haber intersección de grupos. A mayor agrupamiento habrá mayor simplificación.

A cada grupo le corresponde un término donde se eliminan las variables que aparecen con **1(uno)** y **0(cero)** dentro del mismo grupo.



NOTA:

- En el **GRUPO 1** intervienen las variables **a=0, b=1, c=1** para el primer casillero, y **a=1, b=1, c=1** para el segundo. Como puede verse, la variable **a** presenta los dos valores (1 y 0), por lo que se anula quedando el término **b.c**.

- En el **GRUPO 2** intervienen **a=1, b=1, c=0** para el primer casillero, **a=1, b=0, c=0** para el segundo, **a=1, b=1, c=1** para el tercero, y **a=1, b=0, c=1** para el cuarto. Como se ve **b** y **c** se anulan por presentar valores 0 y 1 dentro del grupo.

4º PASO

La función resultante se obtiene de los grupos anteriores, donde las variables que valen 1 (uno) aparecen en forma normal y las que valen 0 (cero) aparecen negadas.

Al trabajar con los 1 (unos) de la función se obtiene una suma de productos:

$$\mathbf{F = a + b.c}$$

NOTA: a esta técnica se la conoce con el nombre de **MINITÉRMINOS**

COMPUERTAS LÓGICAS

Los datos y las instrucciones se mueven dentro del ordenador por intermedio de pulsos eléctricos.

Las ***compuertas lógicas*** **(**pequeño circuito que responde a una ***función lógica básica*****)** dentro de los chips combinan esos pulsos como si siguieran una serie de reglas.

La lógica de las computadoras es una combinación de entradas y salidas producidas por los elementos lógicos (las ***variables*** son las ***entradas***, mientras que la ***función*** representa la ***salida*****)**.

Los elementos lógicos de las computadoras son elementos biestables capaces de presentar sólo 2 (dos) estados, ***representados con 1 y 0.***

Estos elementos actúan como interruptores que permiten o no el paso de un pulso eléctrico.

La tabla denominada ***"Tabla de Símbolos y Expresiones Lógicas***" que aparece al final de este apunte muestra la relación entre las compuertas lógicas y las correspondientes funciones lógicas básicas.

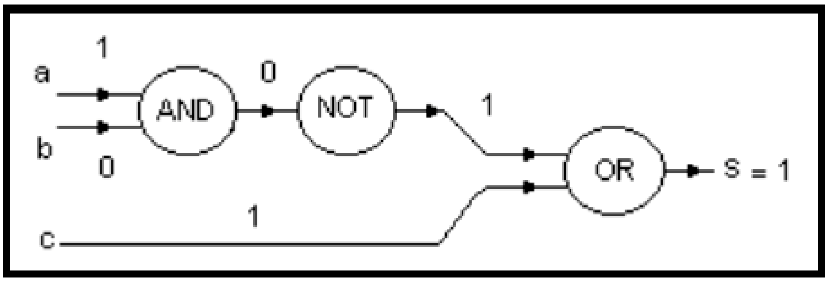
Combinaciones de compuertas lógicas

Todas las operaciones lógicas y aritméticas realizadas por las computadoras son llevadas a cabo por combinaciones de las compuertas lógicas mencionadas.

Esas combinaciones reciben el nombre de ***circuitos lógicos*** o ***circuitos de conmutación***.

La tabla de operación de un circuito lógico se realiza siguiendo todas las posibles señales de entrada.

Ejemplo:



En el ejemplo la combinación **a = 1, b = 0, c = 1** es seguida a lo largo de todo el circuito lógico dando como resultado una salida **S = 1**.

Más compuertas lógicas

A las compuertas lógicas básicas pueden agregárseles otras tres compuertas lógicas más:

Compuerta NOR

Es la ***negación*** de la compuerta ***OR***.

Opera entre ***dos variables*** o ***valores lógicos*** y el resultado es ***1 (uno)*** o ***verdadero*** si ambos son ***falsos***.

F = a NOR b		
a	**b**	**F**
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Figura 6: Tabla de Verdad de la compuerta NOR.

Compuerta NAND

Es la ***negación*** de la compuerta ***AND***.

Opera entre ***dos variables*** o ***valores lógicos*** y el resultado es ***1 (uno)*** o ***verdadero*** si los dos valores o uno de ellos son ***falsos***.

F = a nand b		
a	**b**	**F**
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Figura 7: Tabla de Verdad de la compuerta NAND.

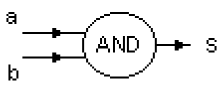
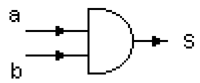
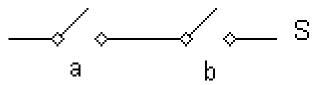
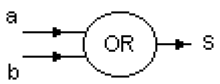
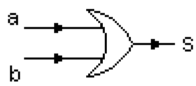
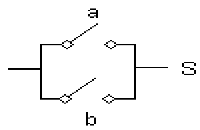
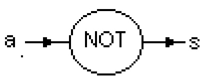
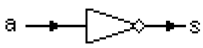
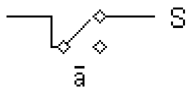
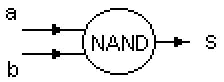
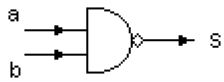
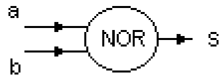
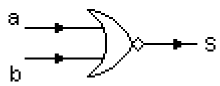
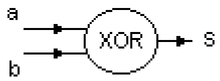
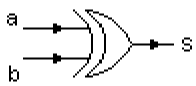
Compuerta XOR (OR exclusivo)

Opera con ***dos variables*** y el resultado es ***verdadero*** cuando ***sólo una de ellas es verdadera***.

F = a xor b		
a	**b**	**F**
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Figura 8: Tabla de Verdad de la compuerta XOR.

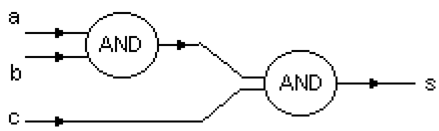
TABLA DE SÍMBOLOS

ELEMENTO LÓGICO	SÍMBOLOS DE CIRCUITOS LÓGICOS		SÍMBOLOS DE EXPRESIONES LÓGICAS		INTERRUPTORES LÓGICOS
	SET DE TIPO 1	SET DE TIPO 2	SET DE TIPO 1	SET DE TIPO 2	
AND			$A \wedge B$	$a . b$	
OR			$A \vee B$	$a + b$	
NOT			$\overline{A}$	$\overline{a}$	
NAND			$\overline{(A \wedge B)}$	$\overline{(a . b)}$	
NOR			$\overline{(A \vee B)}$	$\overline{(a + b)}$	
XOR					

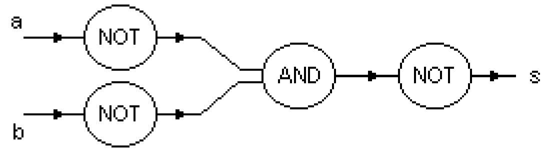
EJERCITACIÓN

1) Desarrolle las tablas de verdad para los siguientes circuitos lógicos:

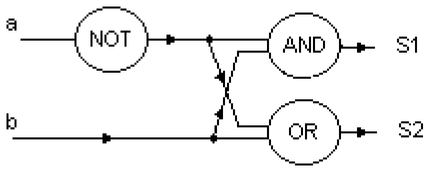
a)



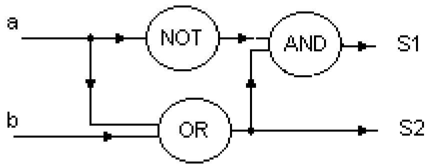
c)



b)



d)



2) ¿Con qué compuerta básica pueden reemplazarse todas las compuertas del ejercicio 1c?.

3) Utilizando los símbolos de expresiones lógicas de tipo 1 que figuran en la tabla, escriba las expresiones correspondientes al ejercicio 1.

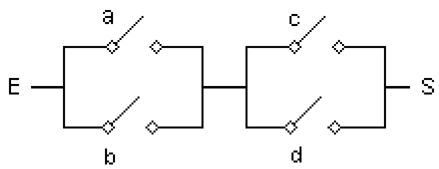
4) Desarrolle las primeras y segundas formas canónicas correspondientes a los circuitos del ejercicio 1.

5) Utilizando el conjunto de símbolos que prefiera, dibuje los circuitos lógicos correspondientes a las siguientes expresiones:

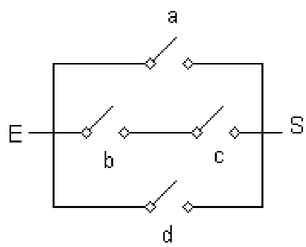
   a) D = - ((A v B) v C)
   b) D = A v – (B ^ C)
   c) (- A ^ B) v (A ^ - B)

6) Dibuje las tablas de operación para los circuitos lógicos del ejercicio 7.

7) Escriba las expresiones lógicas para los siguientes circuitos de conectores:



a)



b)