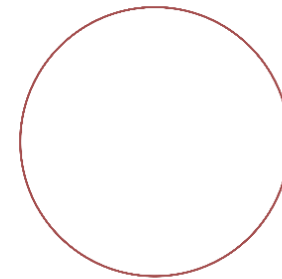
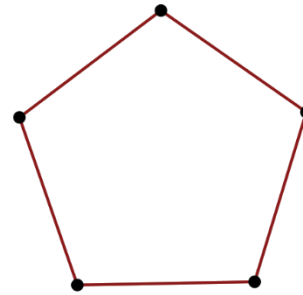
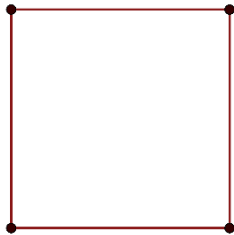


# Inégalité isopérimétrique et simulation informatique

Qu'est-ce que l'isopérimétrie ?

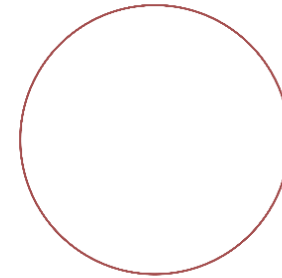
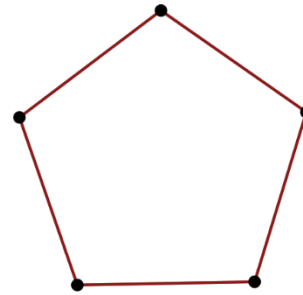
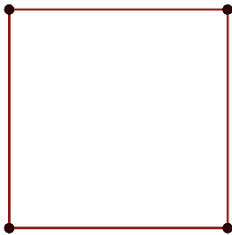
Qu'est-ce que l'isopérimétrie ?



Qu'est-ce que l'inégalité isopérimétrique ?

Soit  $A$  l'aire délimitée par le contour et  $P$  son périmètre  
Alors on a :

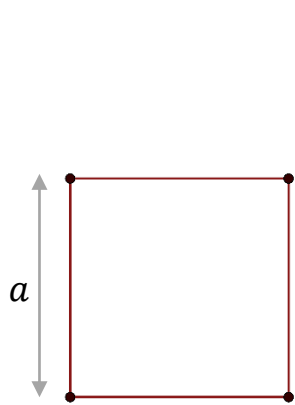
$$4\pi A \leq P^2$$



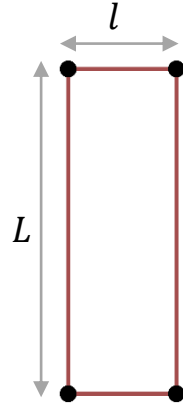
## Qu'est-ce que l'inégalité isopérimétrique ?

Soit  $A$  l'aire délimitée par le contour et  $P$  son périmètre  
Alors on a :

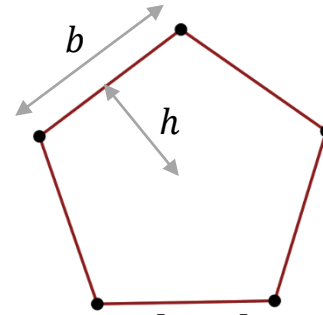
$$4\pi A \leq P^2$$



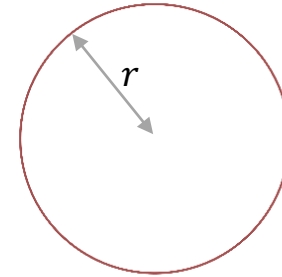
$$4\pi a^2 \leq (4a)^2$$



$$4\pi l \times L \leq (2l + 2L)^2$$



$$4\pi \times 5 \frac{b \times h}{2} \leq (5b)^2$$

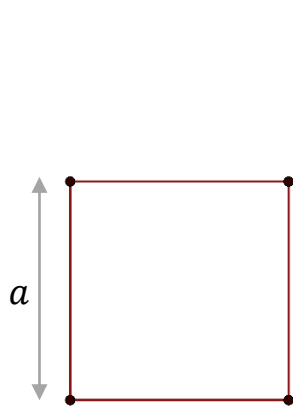


$$4\pi \times \pi r^2 \leq (2\pi r)^2$$

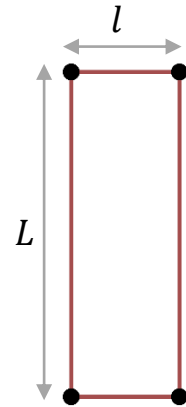
## Qu'est-ce que l'inégalité isopérimétrique ?

Soit  $A$  l'aire délimitée par le contour et  $P$  son périmètre  
Alors on a :

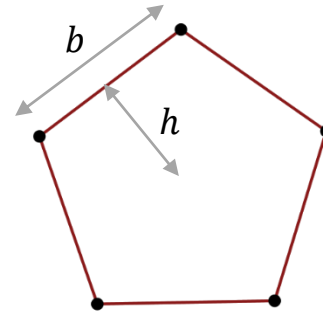
$$4\pi A \leq P^2$$



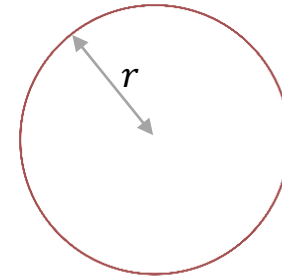
$$4\pi a^2 \leq (4a)^2$$



$$4\pi l \times L \leq (2l + 2L)^2$$



$$4\pi \times 5 \frac{b \times h}{2} \leq (5b)^2$$



$$4\pi \times \pi r^2 = (2\pi r)^2$$

Qu'est-ce que l'inégalité isopérimétrique ?

Soit  $A$  l'aire délimitée par le contour et  $P$  son périmètre  
Alors on a :

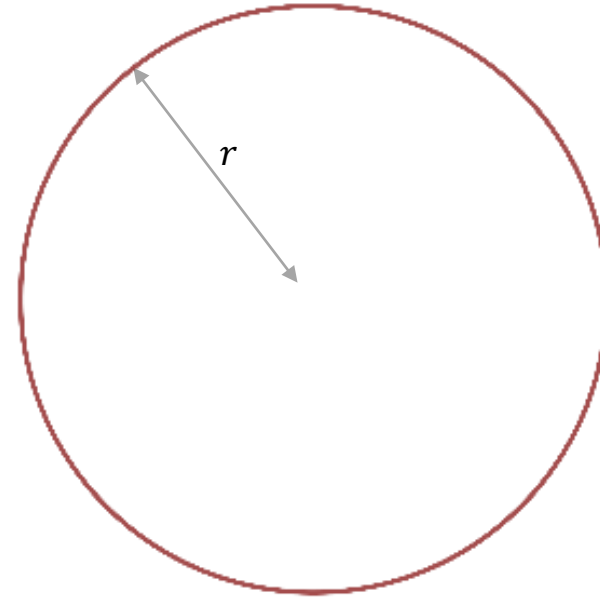
$$4\pi A \leq P^2$$

Qu'est ce que le problème isopérimétrique ?

À  $P$  constant  $\Rightarrow$  On cherche la forme qui aura le maximum possible pour  $A$

i.e. pour le cas :

$$4\pi A = P^2$$



$$4\pi \times \pi r^2 = (2\pi r)^2$$

Qu'est-ce que l'inégalité isopérimétrique ?

Soit  $A$  l'aire délimitée par le contour et  $P$  son périmètre  
Alors on a :

$$4\pi A \leq P^2$$

Qu'est ce que le problème isopérimétrique ?

À  $P$  constant  $\Rightarrow$  On cherche la forme qui aura le maximum possible pour  $A$

i.e. pour le cas :

$$4\pi A = P^2$$





Ce que l'on va faire :

$$\alpha = \frac{4\pi A}{p^2}$$

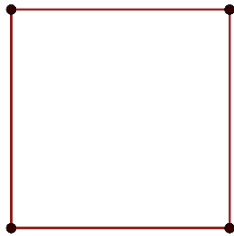
*Rapport isopérimétrique*

On a :

$$\alpha \leq 1$$

Notre objectif :

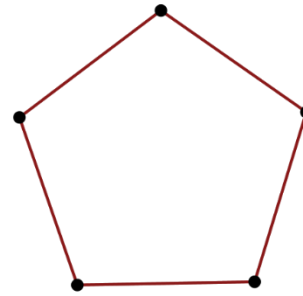
$$\alpha \rightarrow 1$$



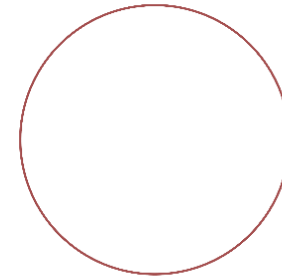
$$\alpha = 0,7853981634$$



$$\alpha = 0,5890486225$$



$$\alpha = 0,8645662983$$



$$\alpha = 1$$

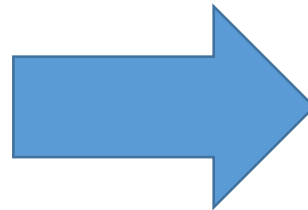
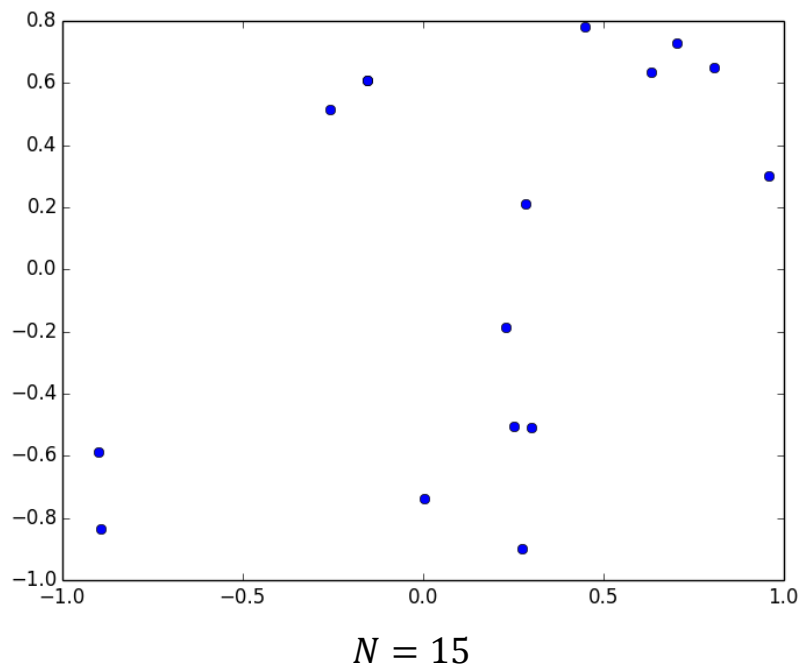
1. Première approche : application de l'inégalité isopérimétrique sur une figure quelconque
2. Evolution en présence de contraintes spatiales

Première approche : application de l'inégalité  
isopérimétrique sur une figure quelconque

Mise en place :

*Créer une forme quelconque*

On place des points de façon aléatoire

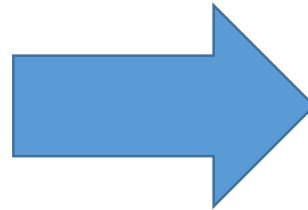
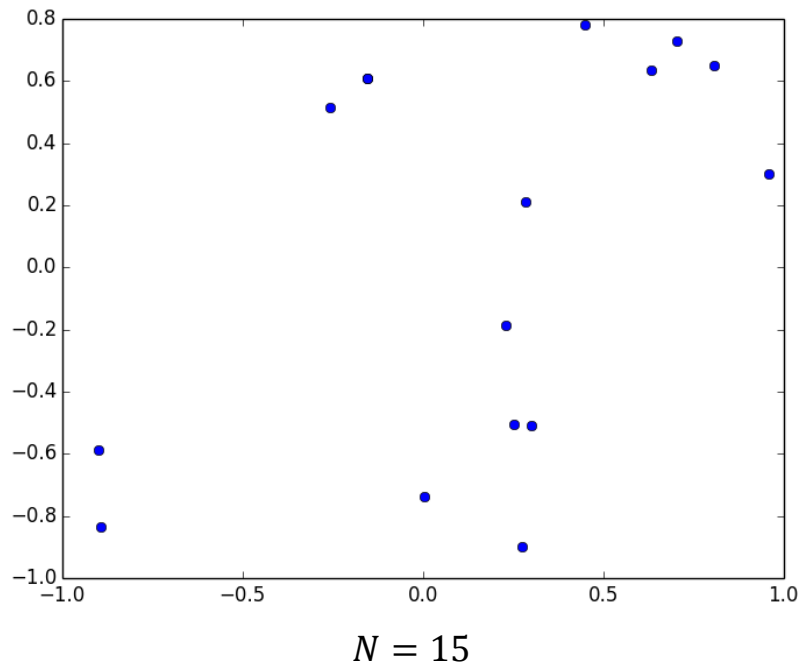


À relier

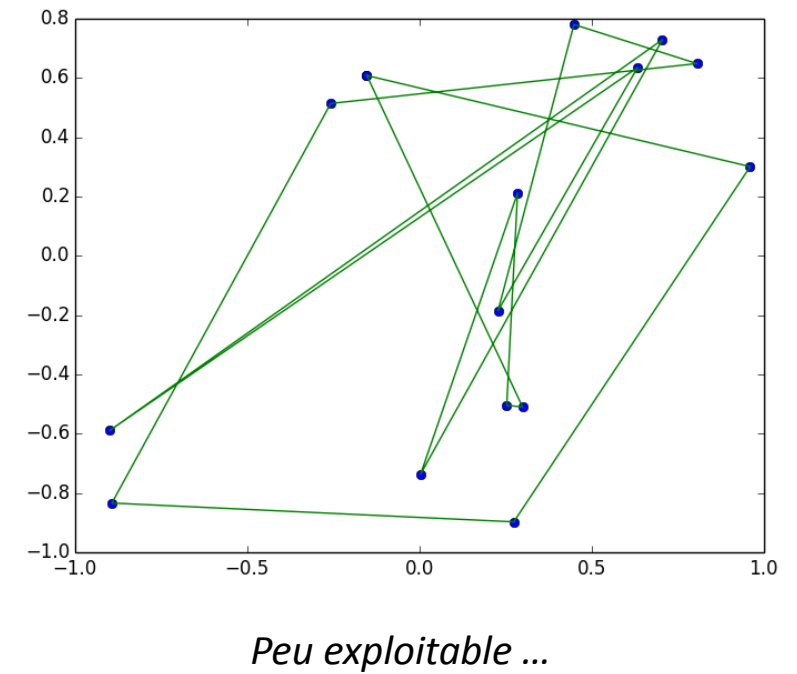
Mise en place :

*Créer une forme quelconque*

On place des points de façon aléatoire



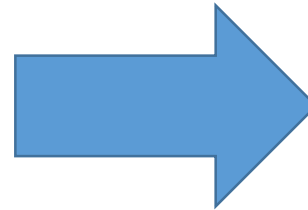
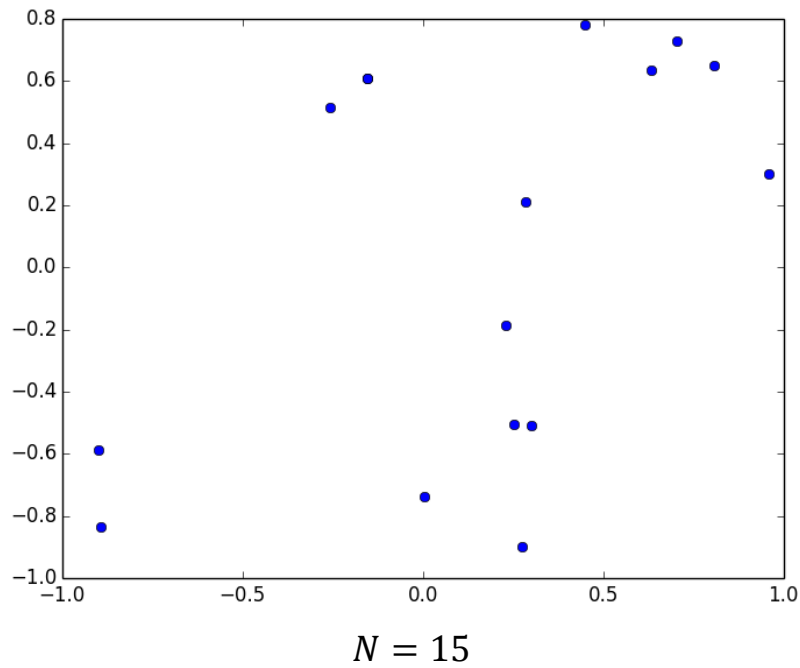
On cherche à relier ces points



Mise en place :

*Créer une forme quelconque*

On place des points de façon aléatoire



On cherche à relier ces points

Coordonnées cartésiennes



Coordonnées polaires

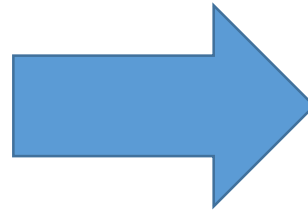
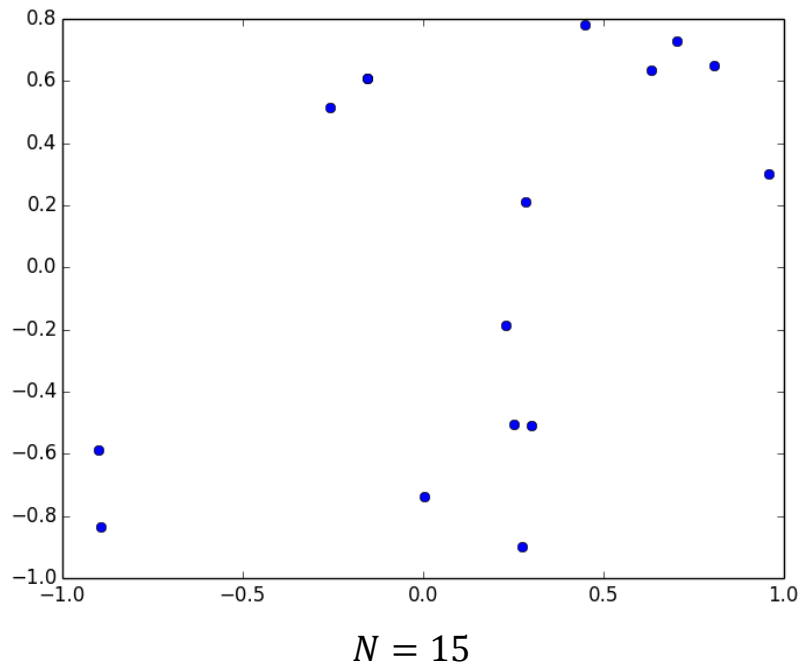


Tri des coordonnées cartésiennes des points en fonction de leur angle par rapport à l'origine

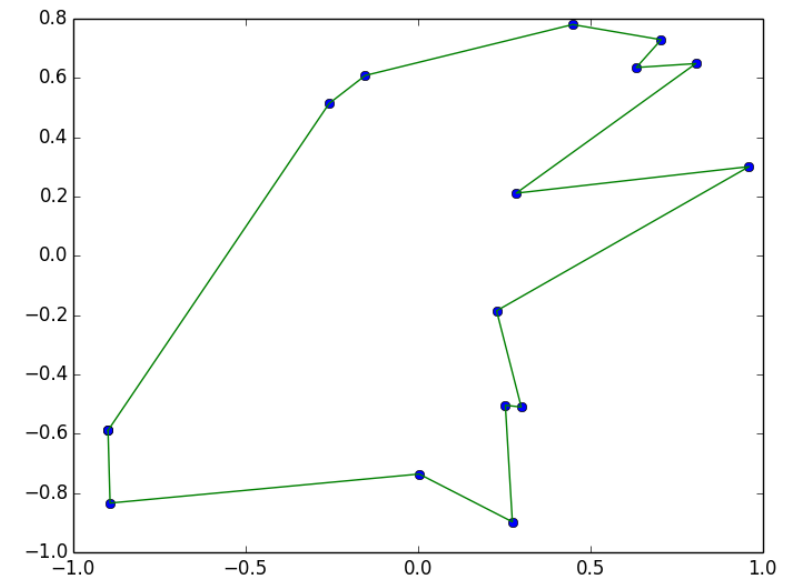
Mise en place :

*Créer une forme quelconque*

On place des points de façon aléatoire



On cherche à relier ces points



**Mise en place :**

*Calcul de l'aire et du périmètre de cette forme*

$$\alpha = \frac{4\pi A}{P^2}$$

>>> Calcul du périmètre :

Distance entre deux points : Soient  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$ ,

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



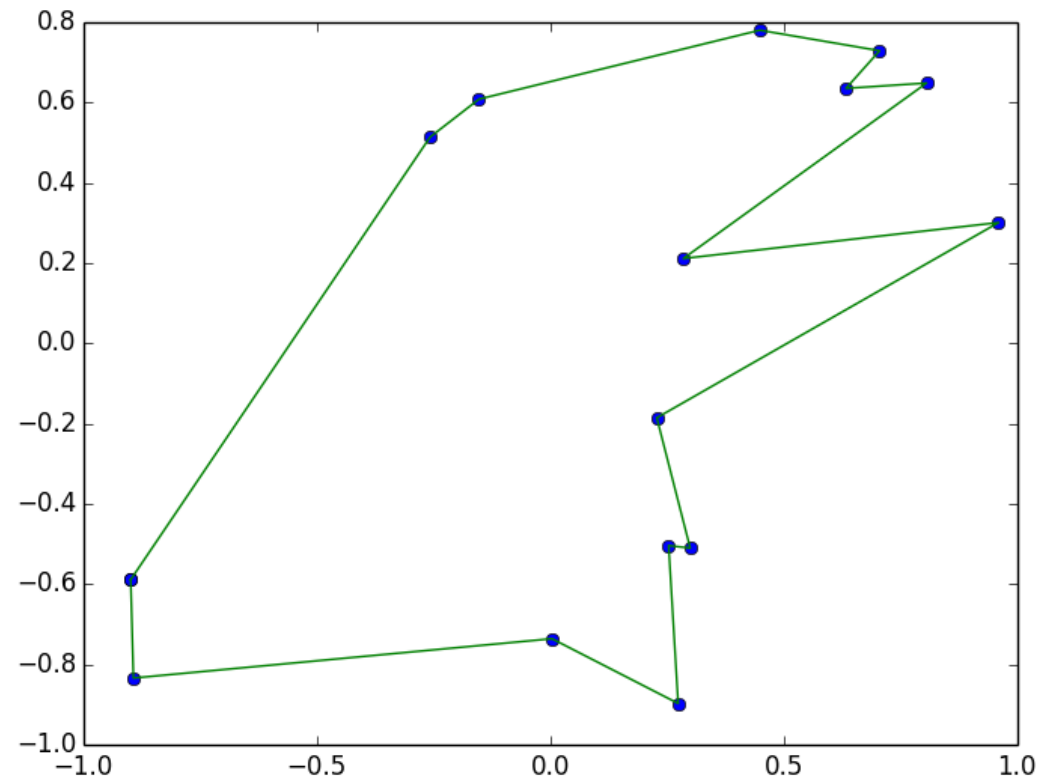
Mise en place :

*Calcul de l'aire et du périmètre de cette forme*

$$\alpha = \frac{4\pi A}{P^2}$$

>>> Calcul de l'aire:

*On procède par triangulation*



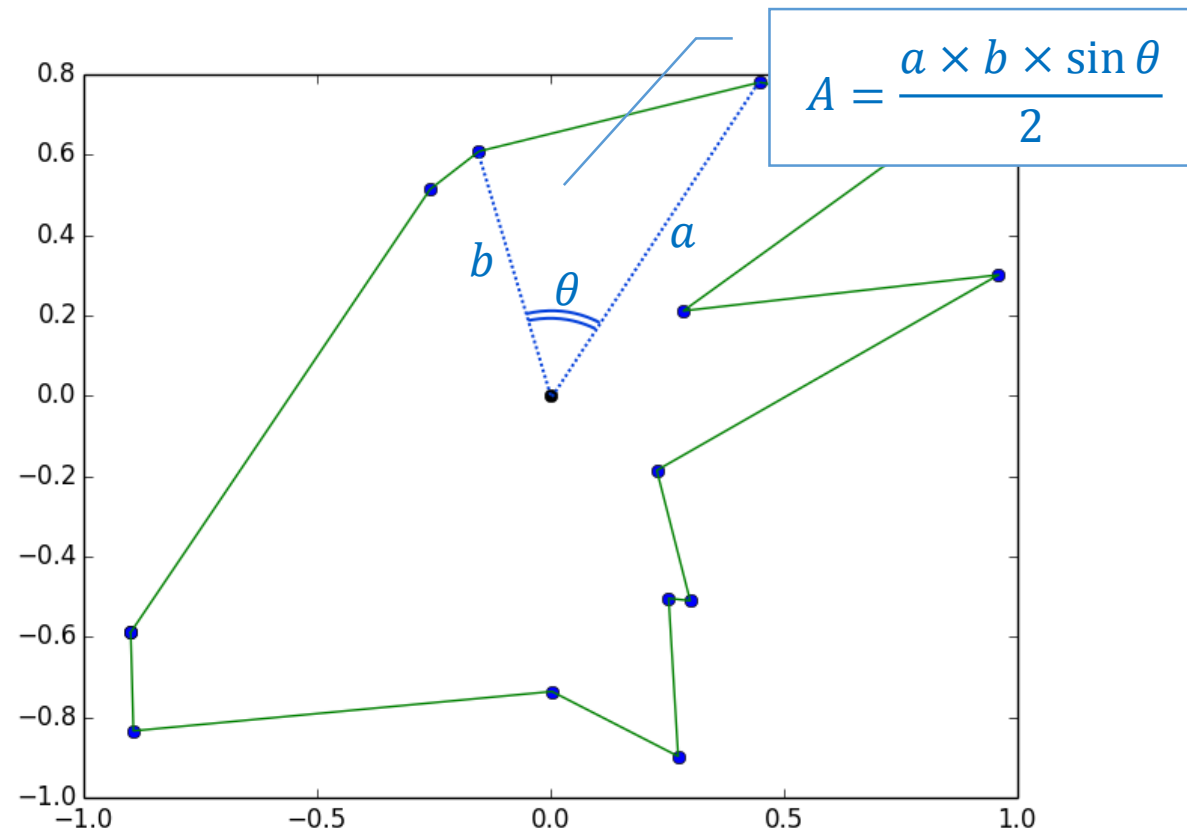
Mise en place :

*Calcul de l'aire et du périmètre de cette forme*

$$\alpha = \frac{4\pi A}{P^2}$$

>>> Calcul de l'aire:

*On procède par triangulation*



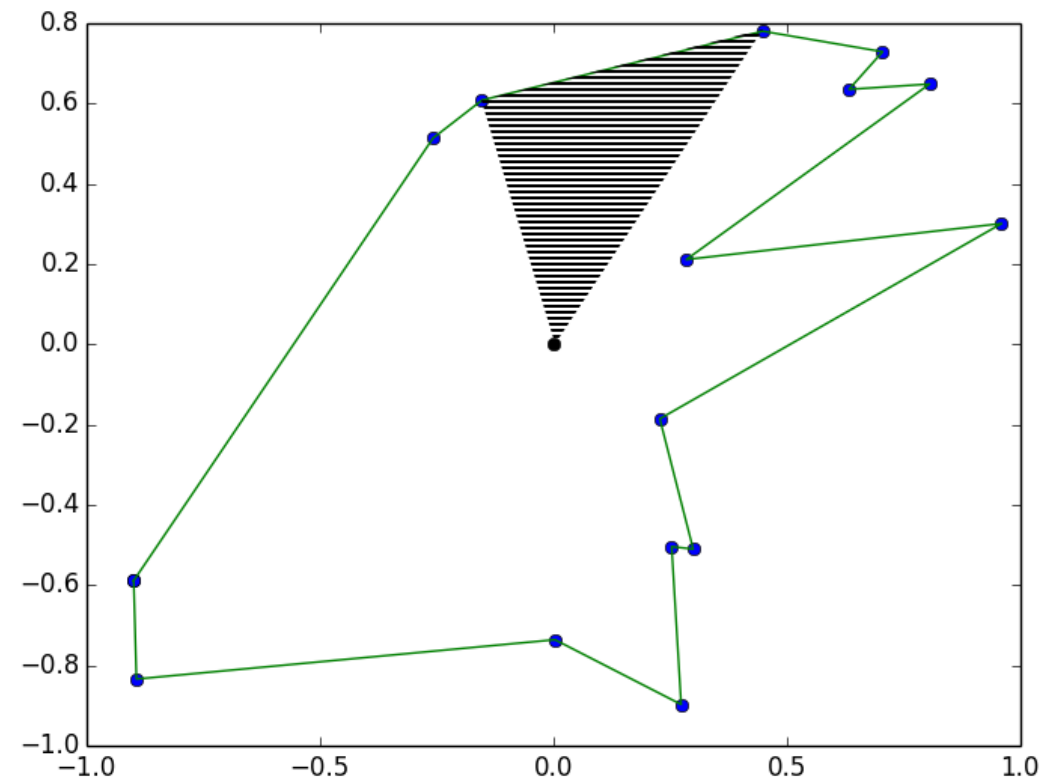
Mise en place :

*Calcul de l'aire et du périmètre de cette forme*

$$\alpha = \frac{4\pi A}{P^2}$$

>>> Calcul de l'aire:

*On procède par triangulation*



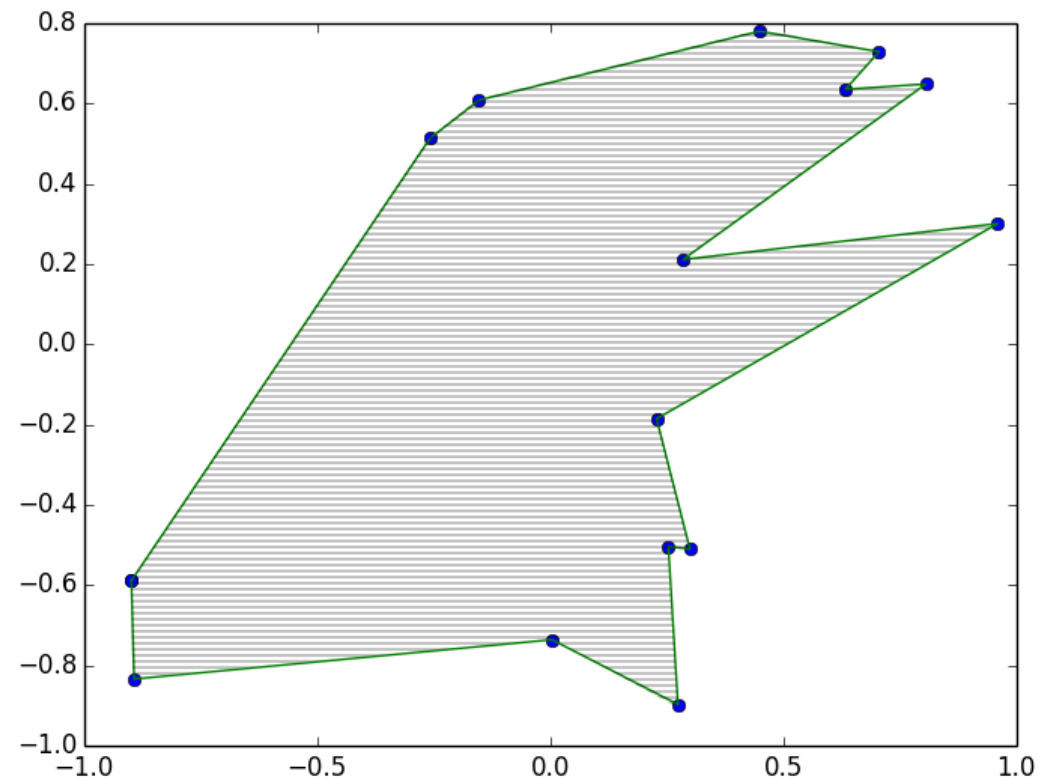
Mise en place :

*Calcul de l'aire et du périmètre de cette forme*

$$\alpha = \frac{4\pi A}{P^2}$$

>>> Calcul de l'aire:

*On procède par triangulation*



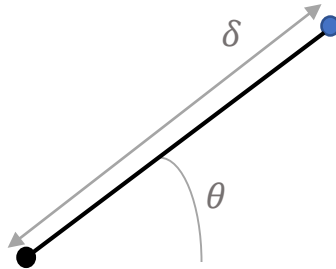
**Améliorer le rapport isopérimétrique de notre figure :**

$$\alpha = \frac{4\pi A}{P^2}$$

**Améliorer le rapport isopérimétrique de notre figure :**

$$\alpha = \frac{4\pi A}{P^2}$$

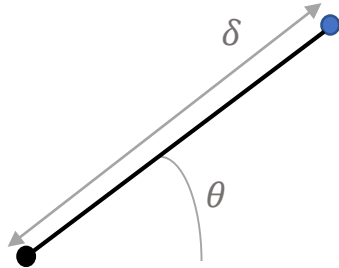
- Générer un nouveau point :
  - Donner une valeur  $\delta$
  - Choix aléatoire d'un angle  $\theta \in ]0, 2\pi]$



**Améliorer le rapport isopérimétrique de notre figure :**

$$\alpha = \frac{4\pi A}{P^2}$$

- Générer un nouveau point :
  - Donner une valeur  $\delta$
  - Choix aléatoire d'un angle  $\theta \in ]0, 2\pi]$

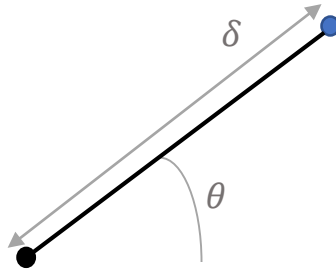


$$\begin{aligned} x &\leftarrow x + \delta \cos \theta \\ y &\leftarrow y + \delta \sin \theta \end{aligned}$$

**Améliorer le rapport isopérimétrique de notre figure :**

$$\alpha = \frac{4\pi A}{P^2}$$

- Générer un nouveau point :
  - Donner une valeur  $\delta$
  - Choix aléatoire d'un angle  $\theta \in ]0, 2\pi]$



$$\begin{aligned} x &\leftarrow x + \delta \cos \theta \\ y &\leftarrow y + \delta \sin \theta \end{aligned}$$

- Evaluer si la figure obtenue après déplacement du point a un meilleur rapport :

$$\alpha_{avant} < \alpha_{après}$$



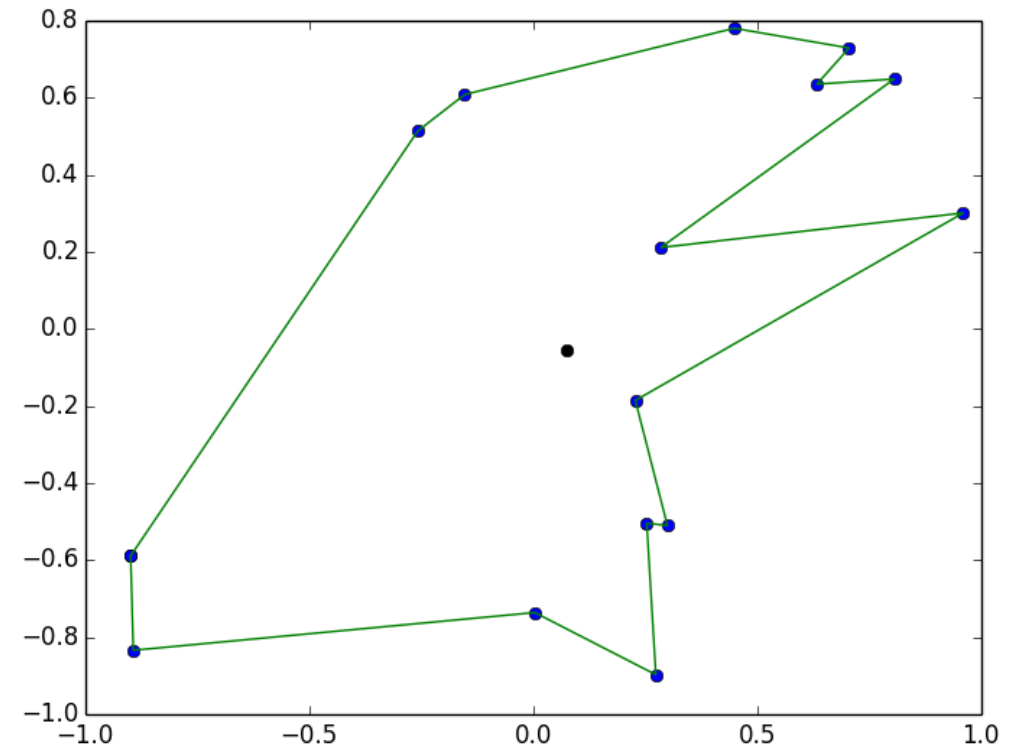
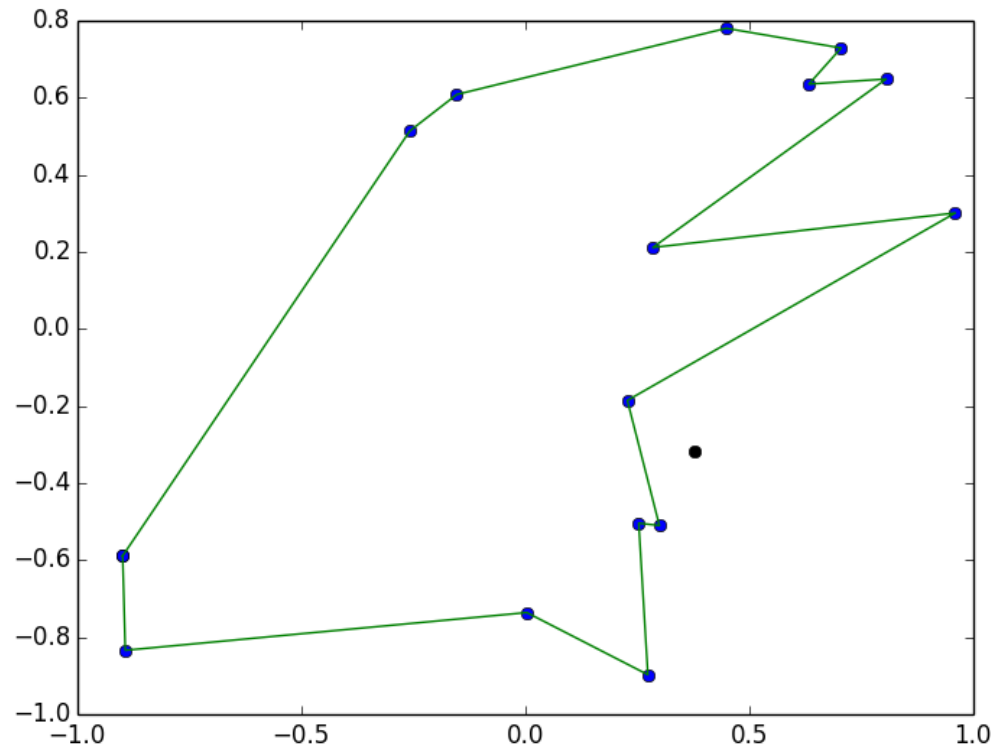
Conservation du nouveau point



Exemple :

$$\delta = 0.2$$

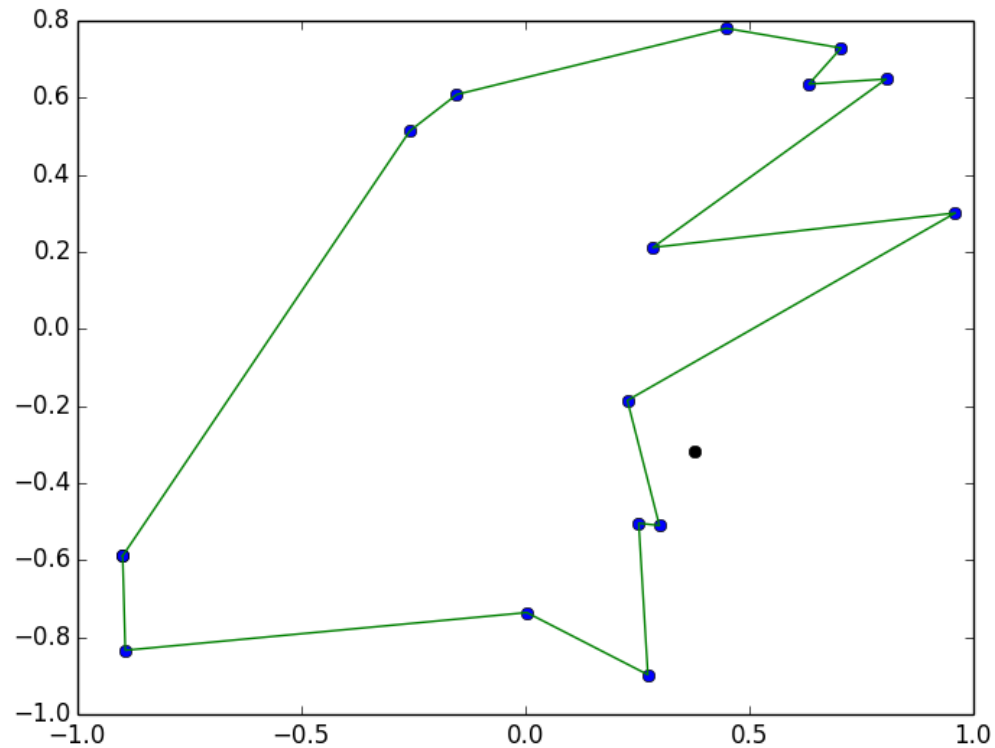
$$\alpha = \frac{4\pi A}{P^2}$$



Exemple :

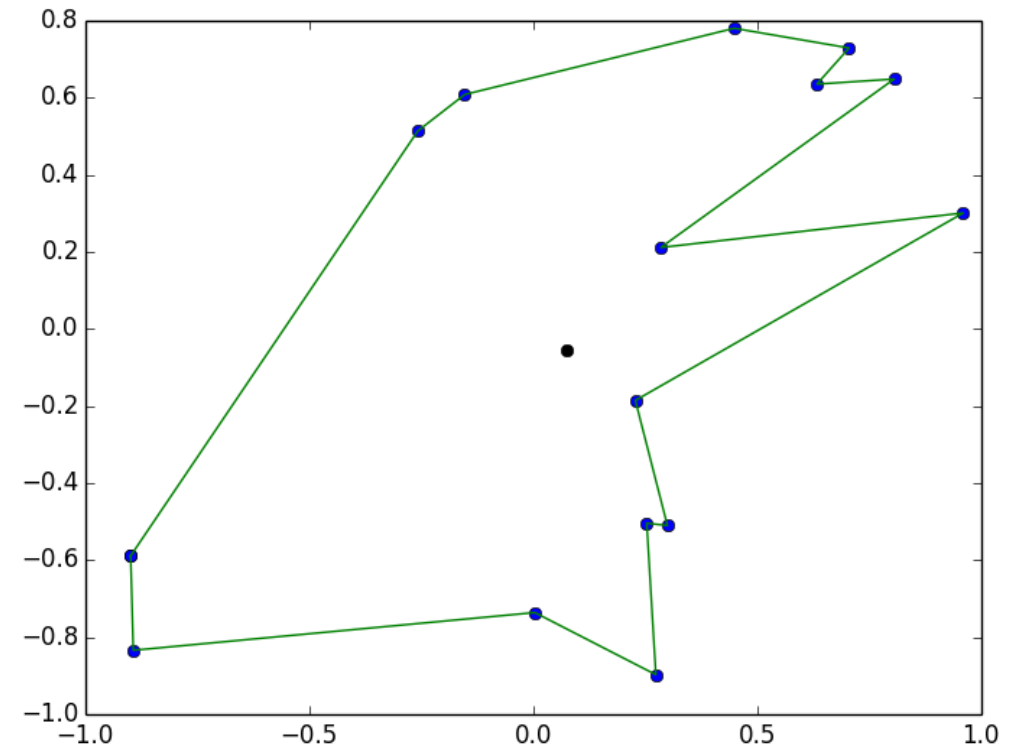
$$\delta = 0.2$$

$$\alpha = \frac{4\pi A}{P^2}$$



$$\alpha_{\text{avant}} = 0.3839432536090895$$

$$\alpha_{\text{après}} = 0.42872127437939517$$



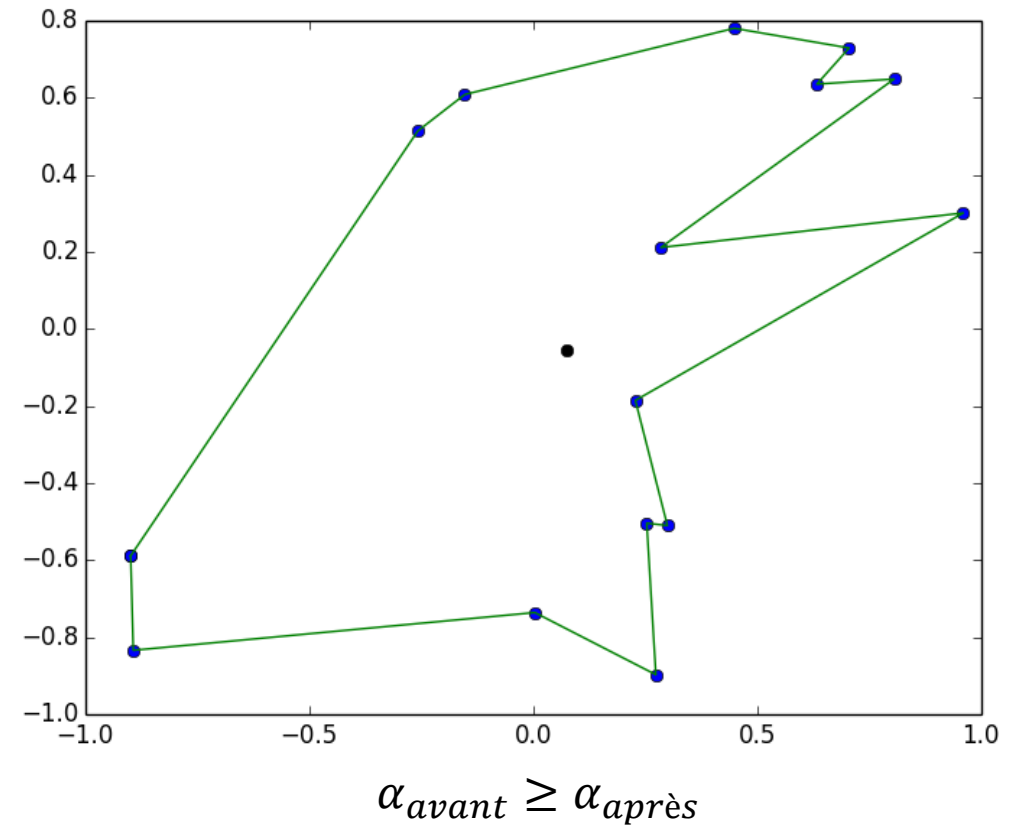
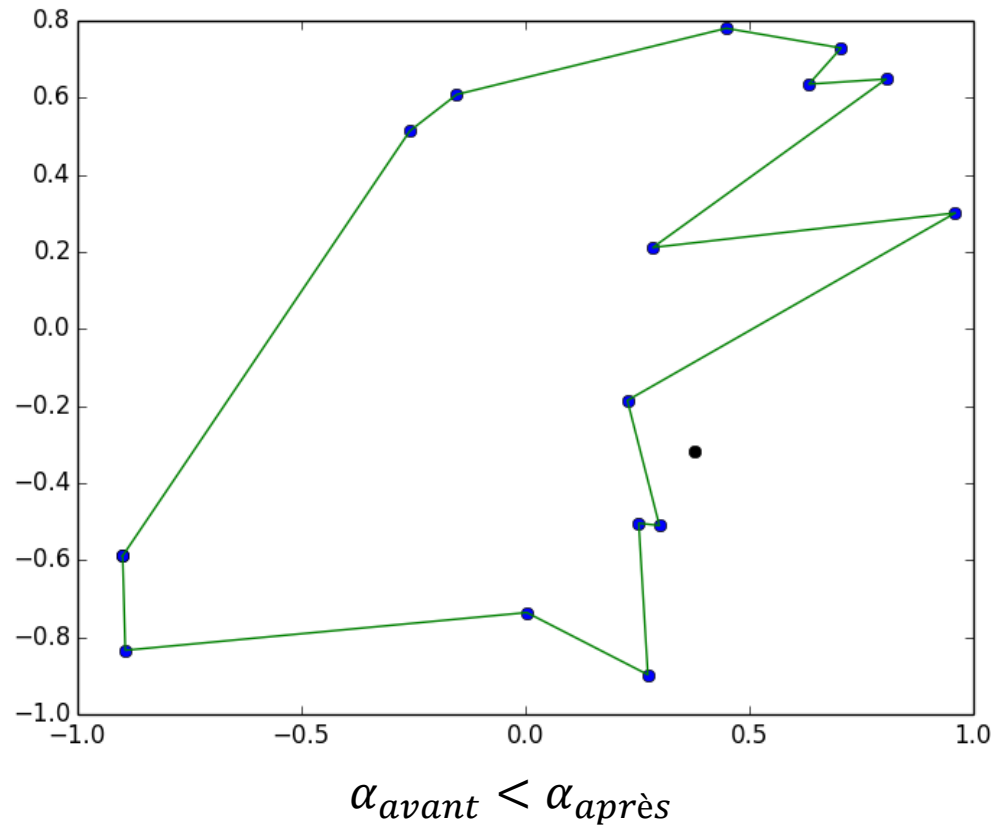
$$\alpha_{\text{avant}} = 0.3839432536090895$$

$$\alpha_{\text{après}} = 0.3337619749114045$$

Exemple :

$$\delta = 0.2$$

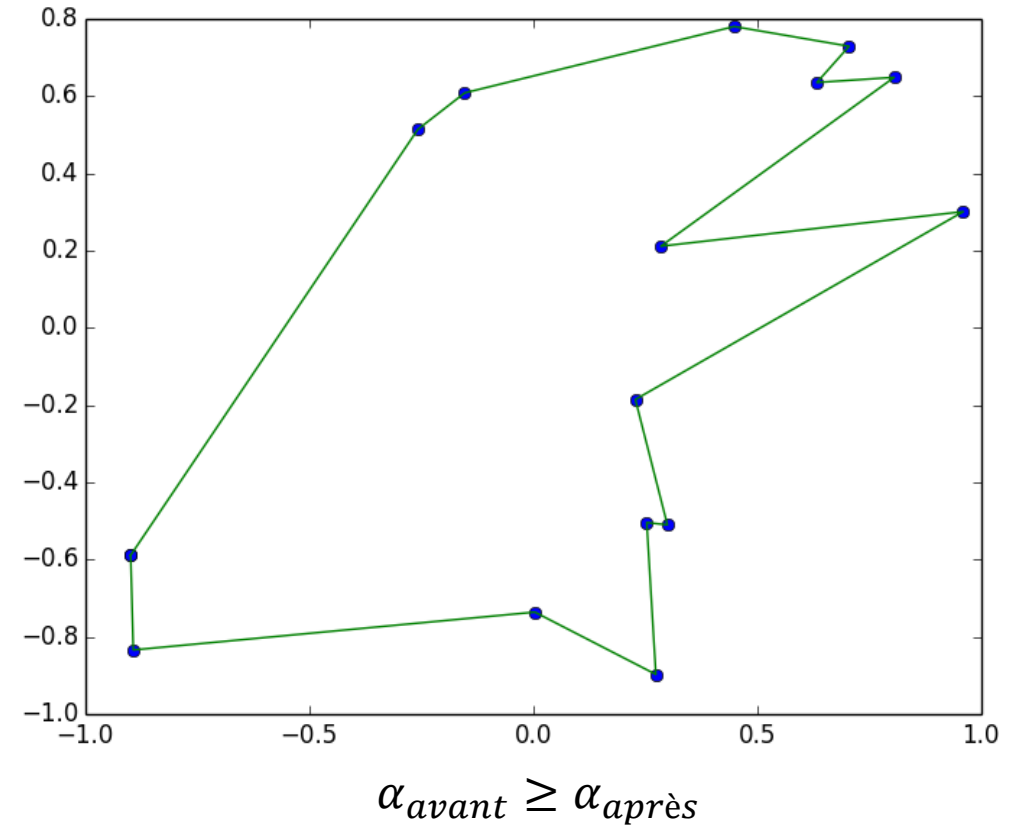
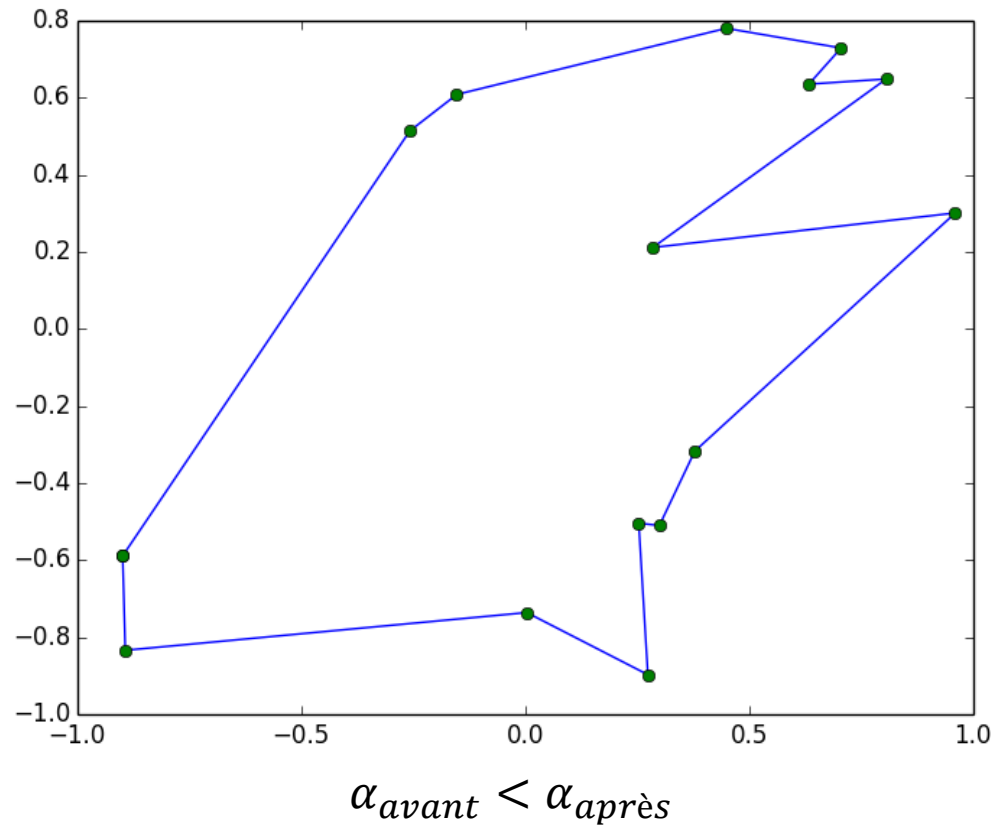
$$\alpha = \frac{4\pi A}{P^2}$$



**Exemple :**

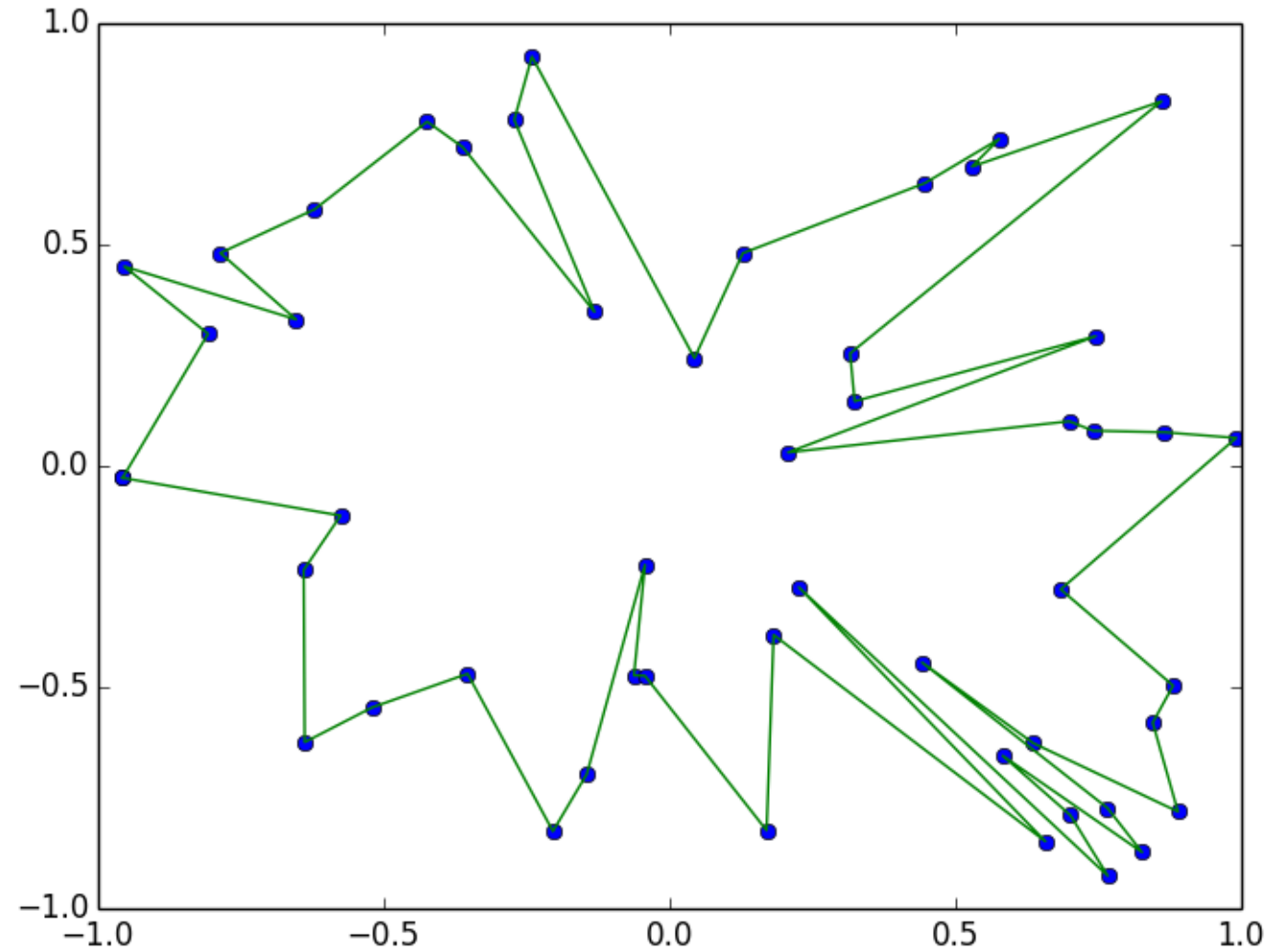
$$\delta = 0.2$$

$$\alpha = \frac{4\pi A}{P^2}$$



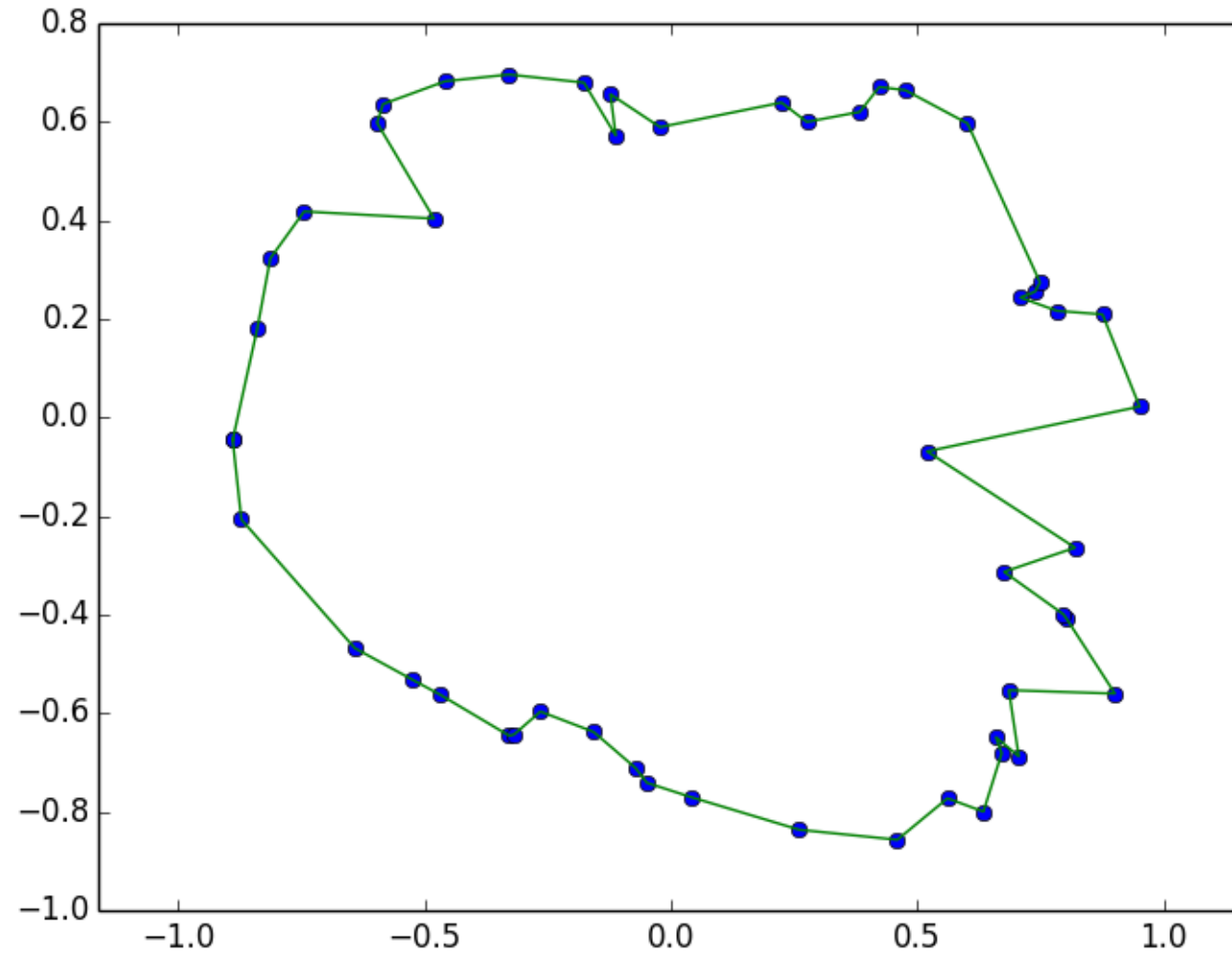
**Application :**

$N = 50$



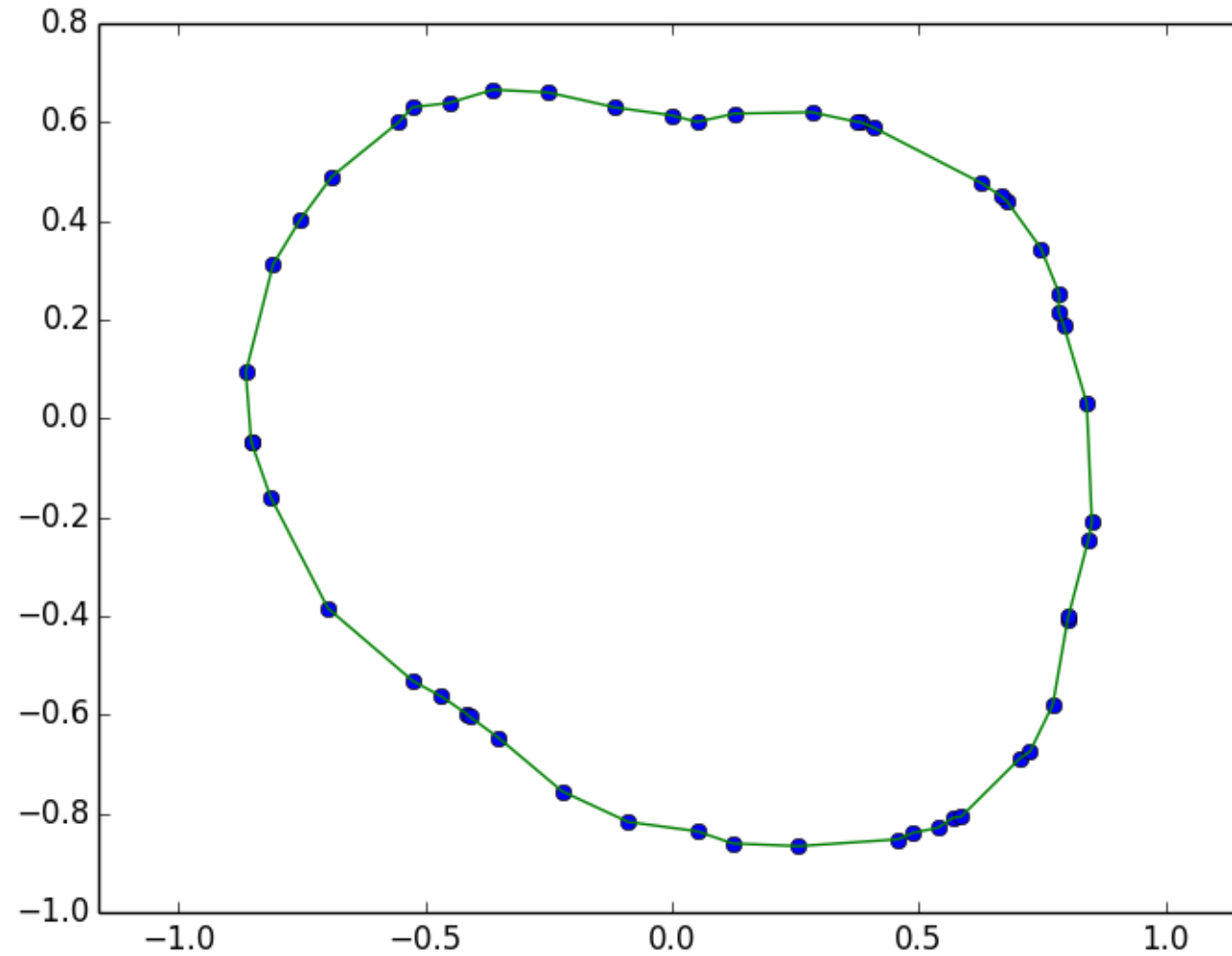
**Application :**

$N = 50$



**Application :**

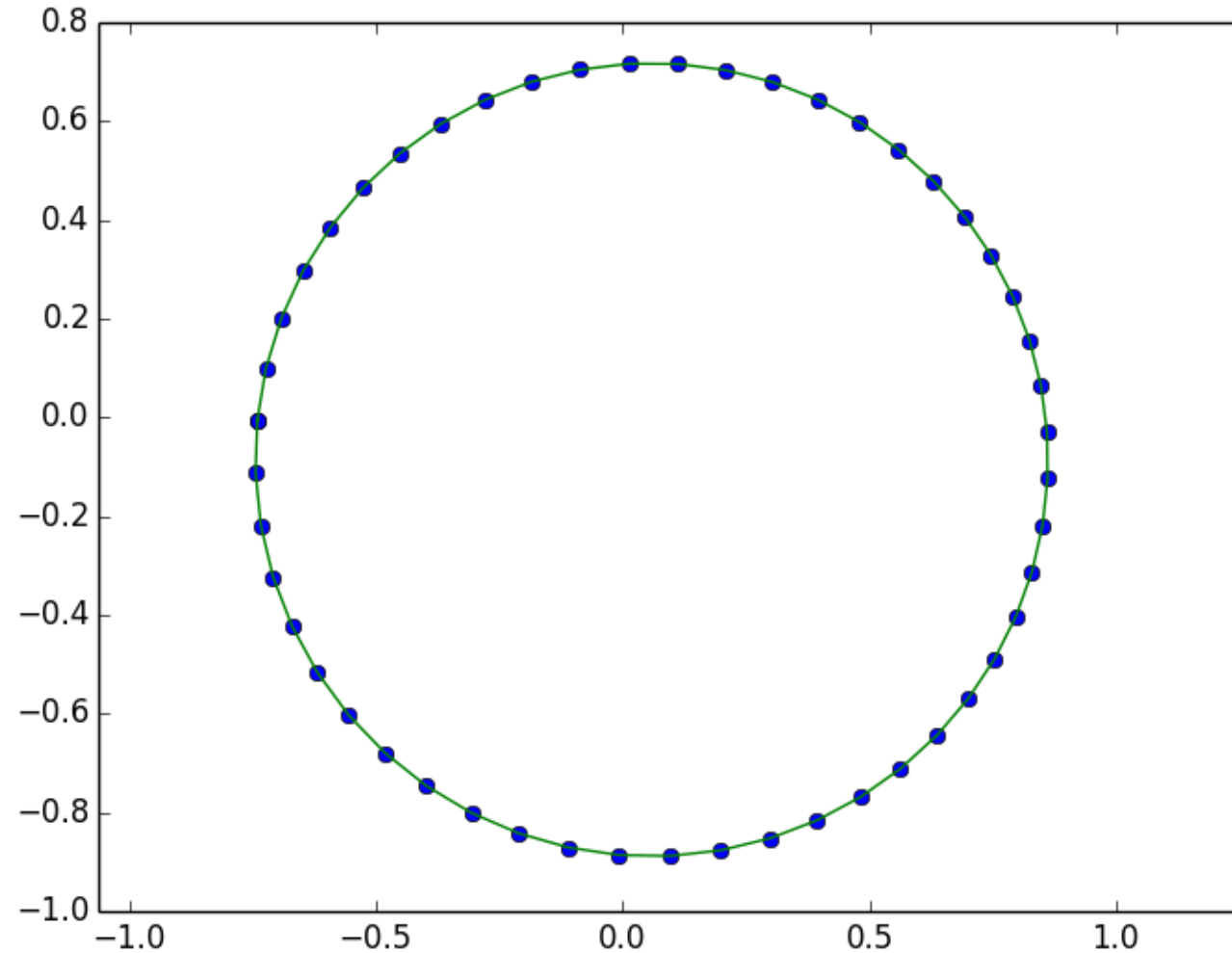
$N = 50$



**Application :**

$N = 50$

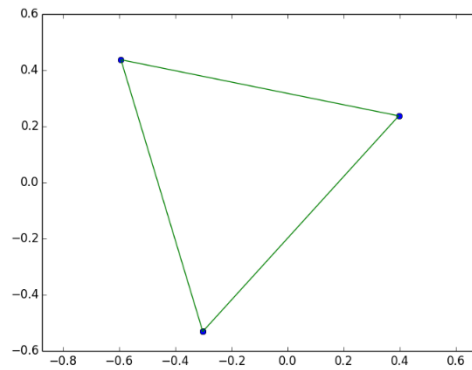
$\alpha = 0.998675745305 \approx 1$



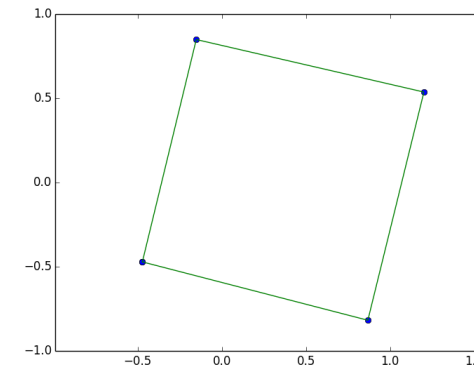


**Application :**

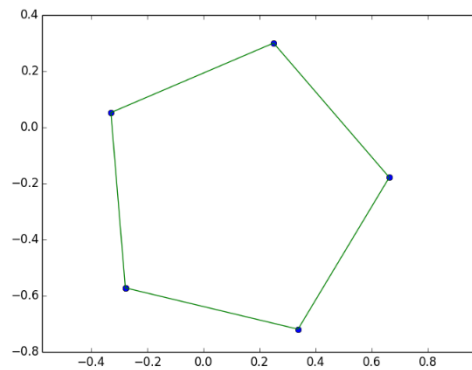
Résultats pour  $N$  « petit »



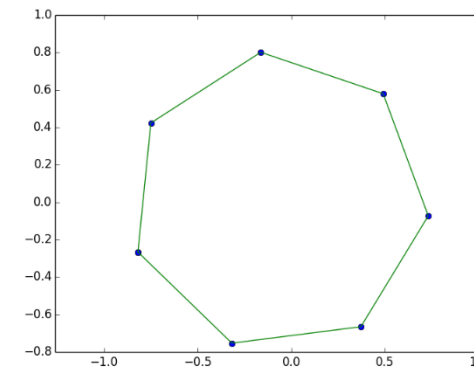
$$\alpha = 0.604299154682$$



$$\alpha = 0.785320106942$$



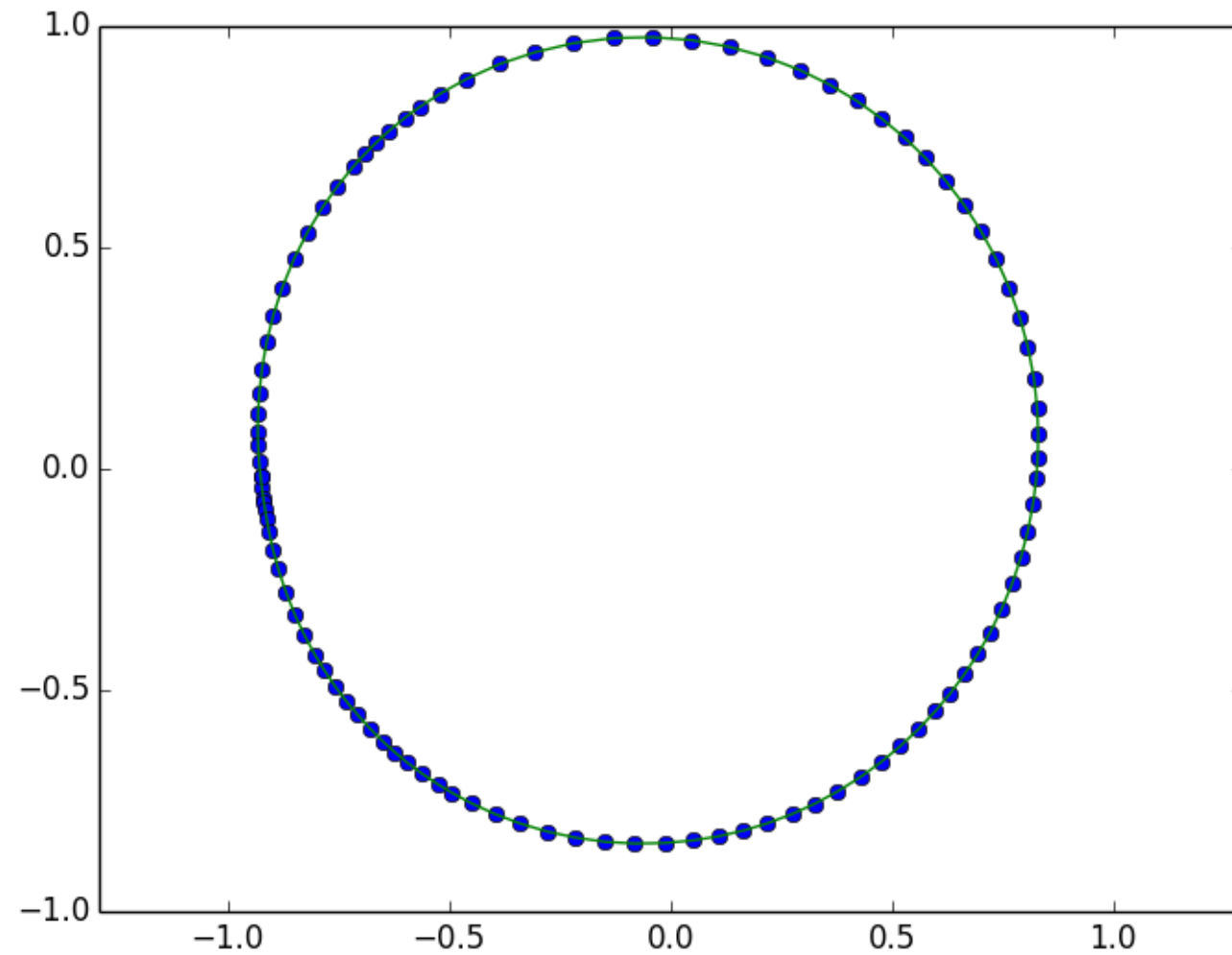
$$\alpha = 0.864788379723$$



$$\alpha = 0,931932995393$$

**Application :**

$N = 100$



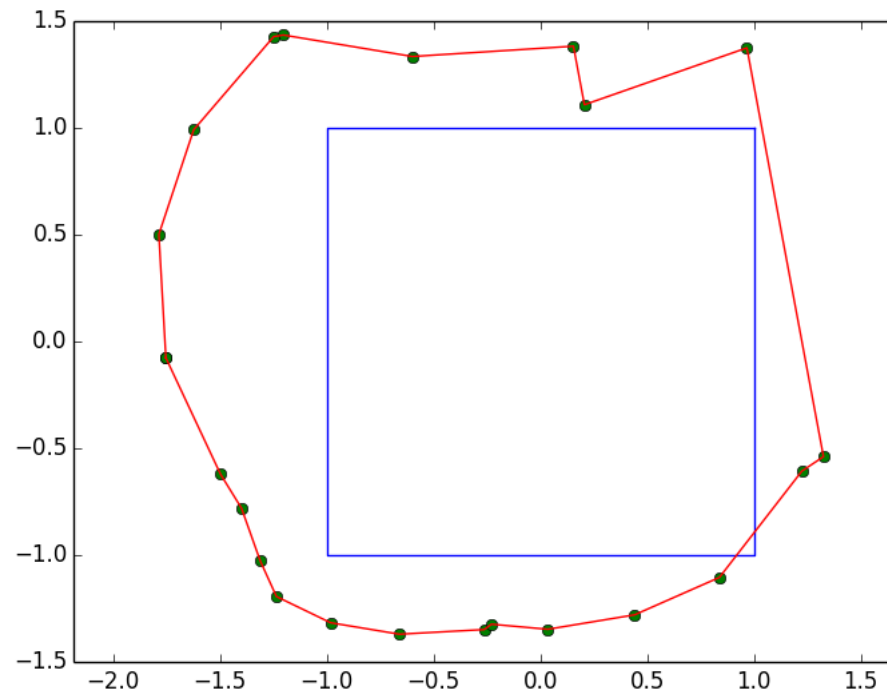
# Evolution en présence de contraintes spatiales

**Mise en place :**

- Faire en sorte qu'un point ne sorte/ne rentre pas dans une zone interdite

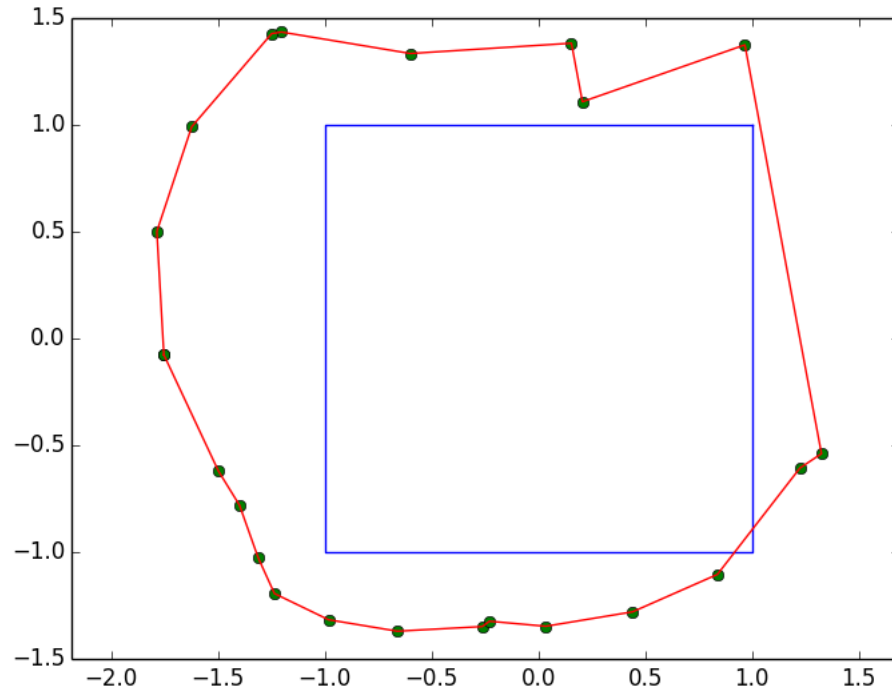
### Mise en place :

- Faire en sorte qu'un point ne sorte/ne rentre pas dans une zone interdite



### Mise en place :

- Faire en sorte qu'un point ne sorte/ne rentre pas dans une zone interdite



- Faire en sorte qu'une droite ne rentre pas dans une zone interdite

### Mise en place :

- Faire en sorte qu'un point ne rentre pas dans une zone interdite
- Faire en sorte qu'une droite ne rentre pas dans une zone interdite

$$y = ax + b$$

↳ Calcul des coordonnées sur la droite du carré

### Mise en place :

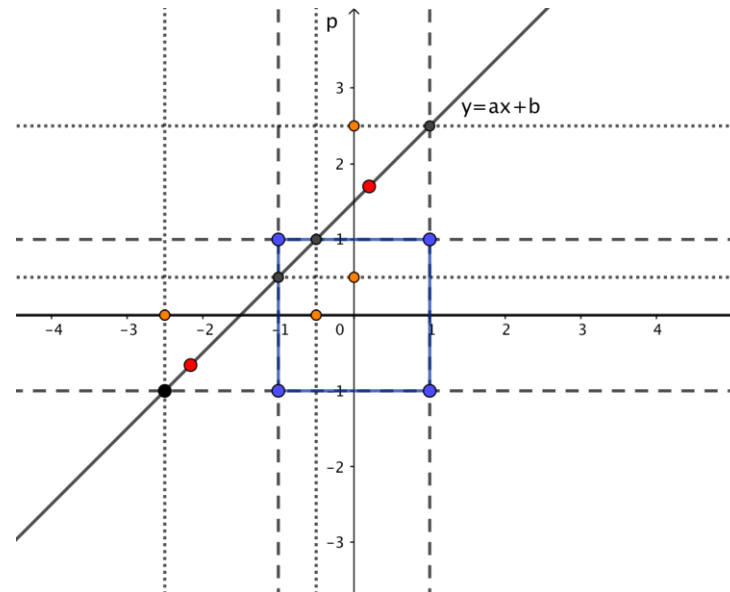
- Faire en sorte qu'un point ne rentre pas dans une zone interdite
- Faire en sorte qu'une droite ne rentre pas dans une zone interdite

$$y = ax + b$$



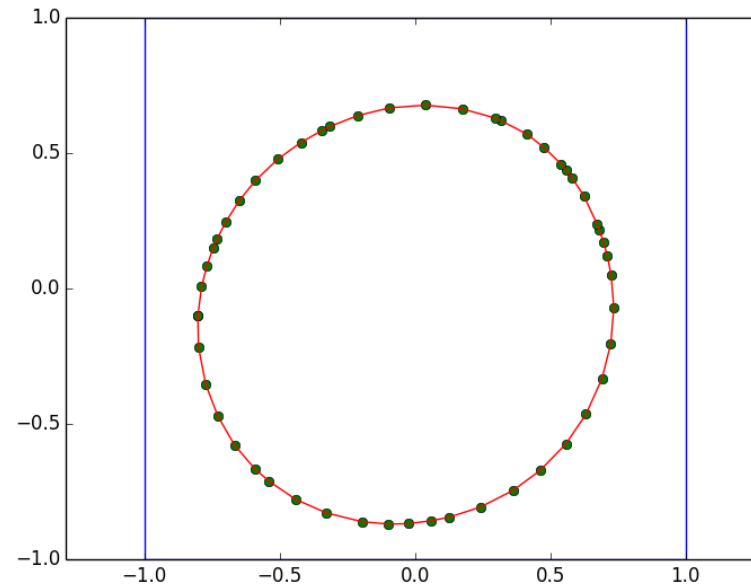
Calcul des coordonnées sur la droite du carré

**Exemple :**

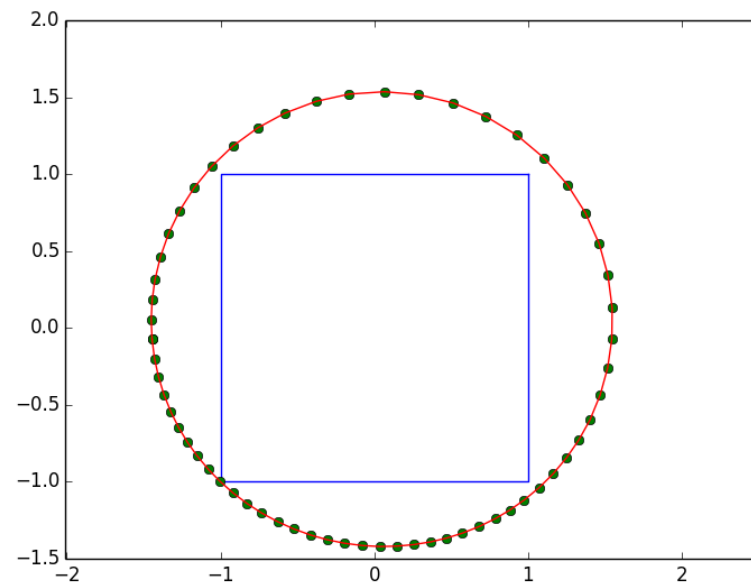




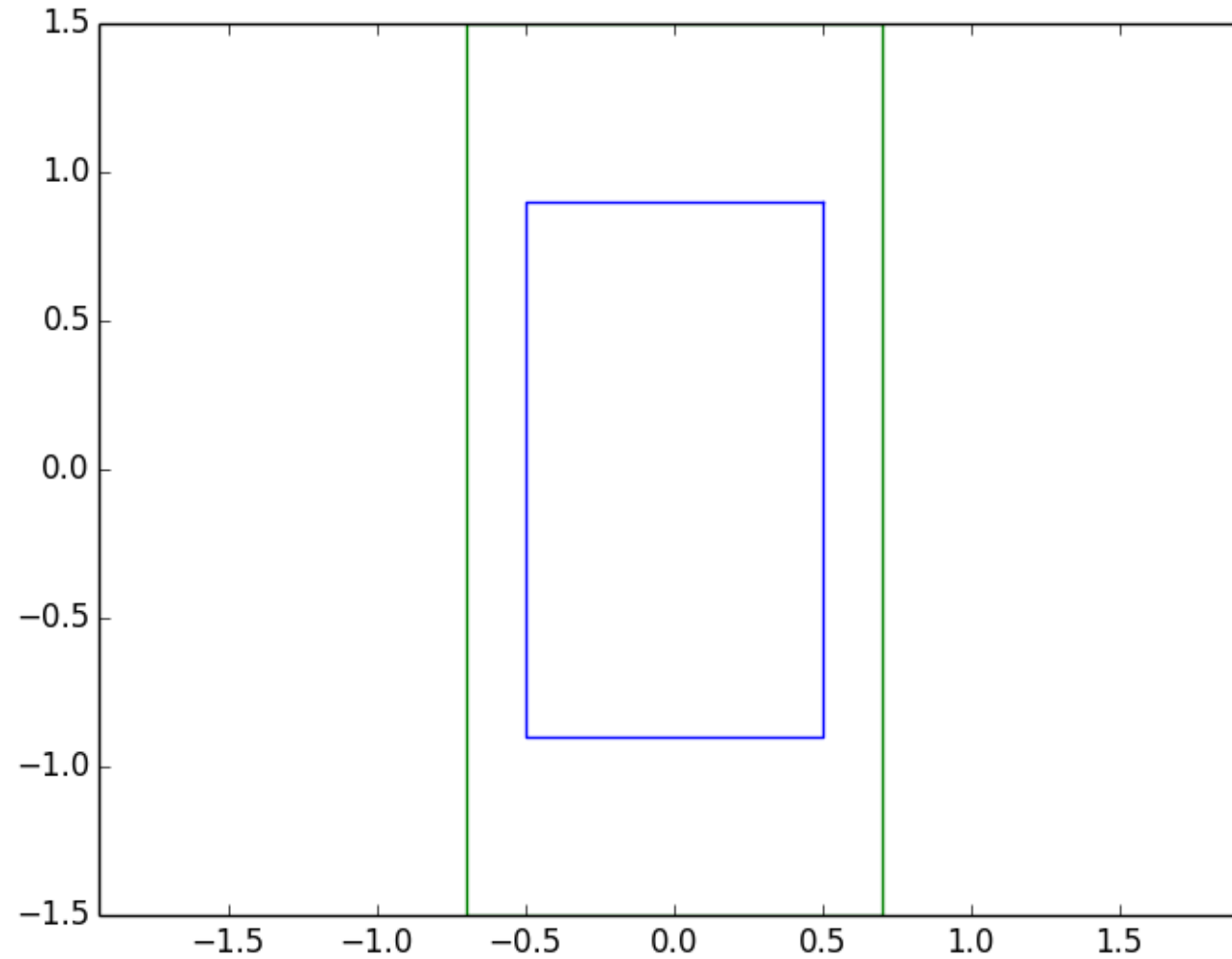
À l'intérieur d'un carré :



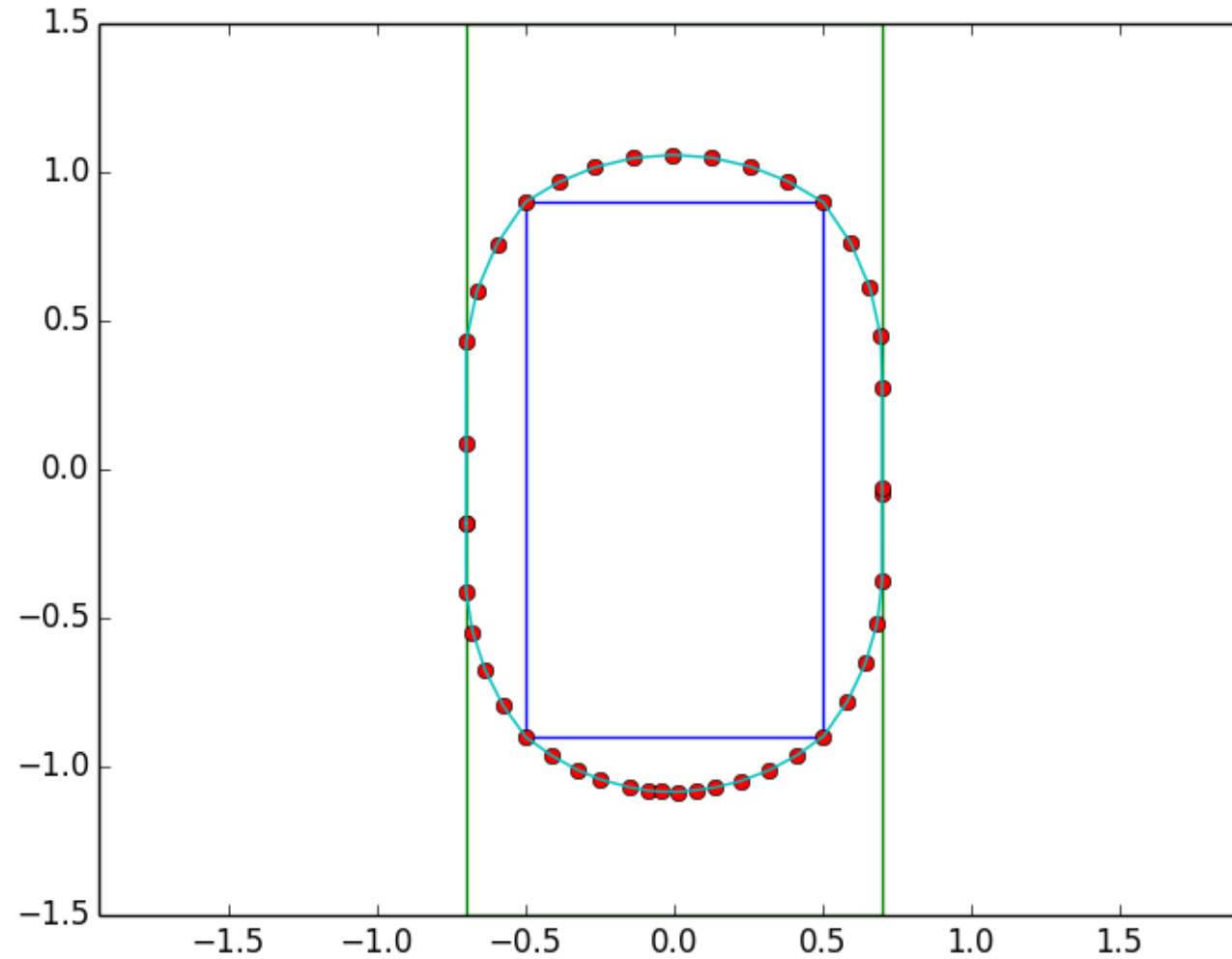
À l'extérieur d'un carré :



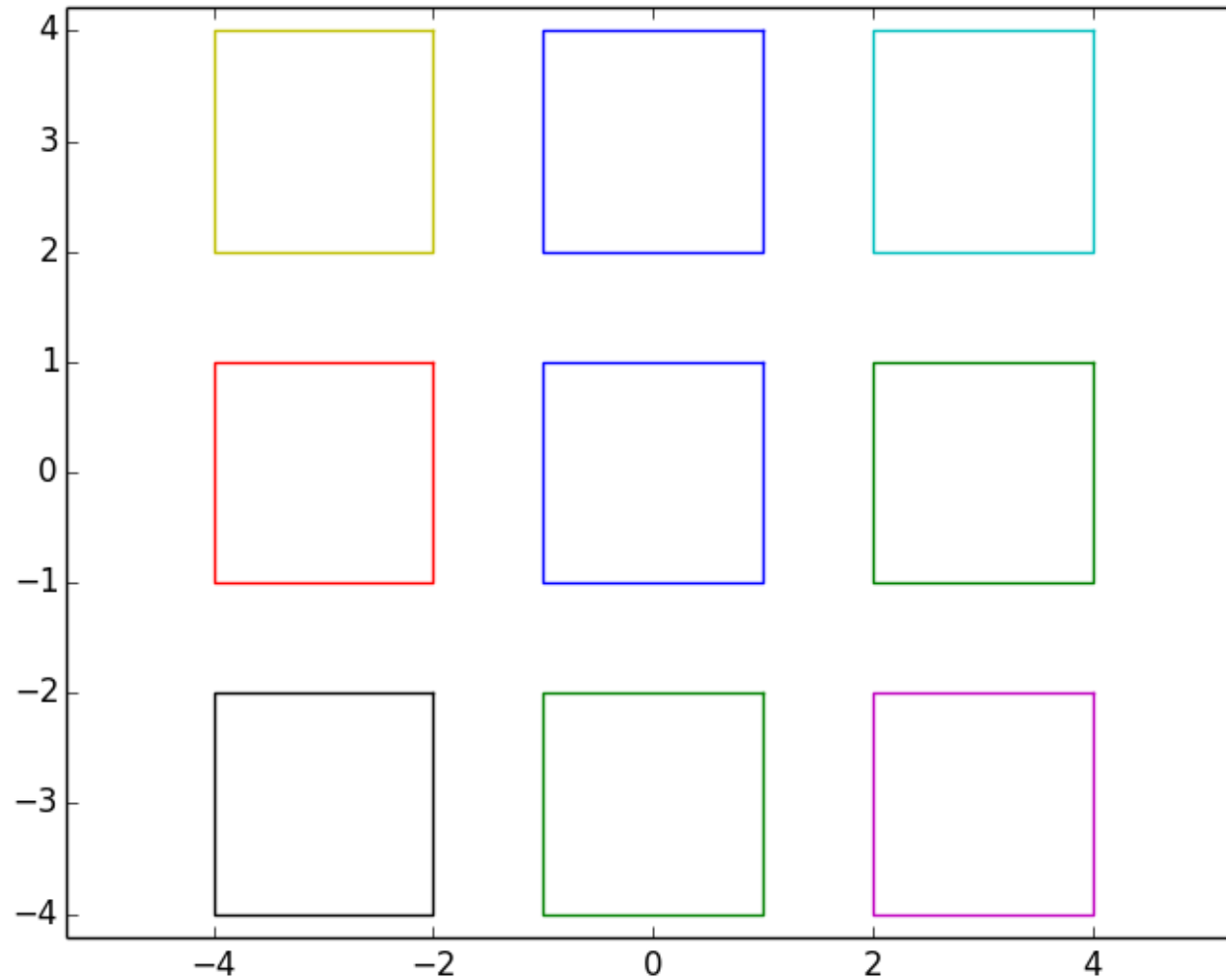
**Essais avec des obstacles variés :**



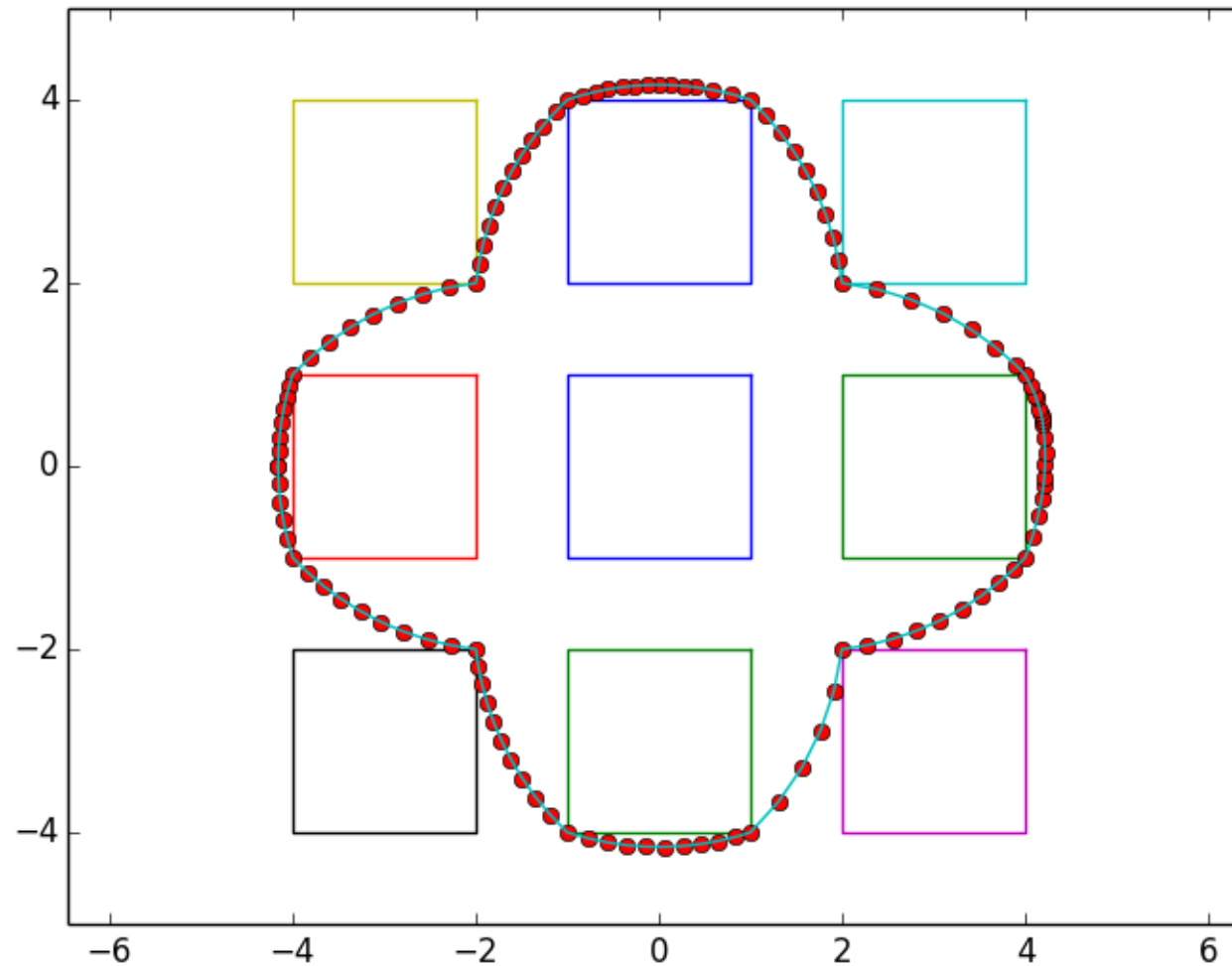
**Essais avec des obstacles variés :**



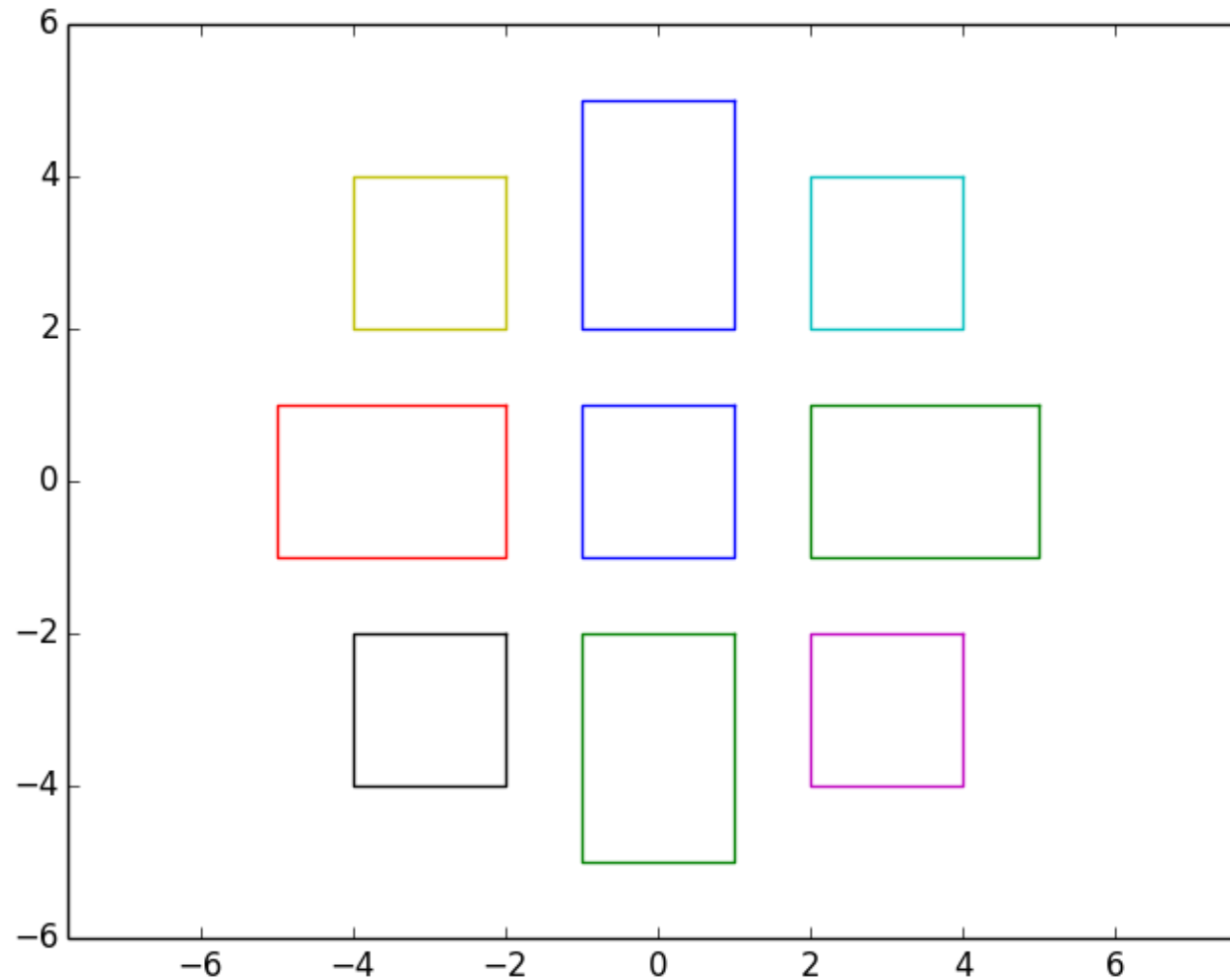
**Essais avec des obstacles variés :**



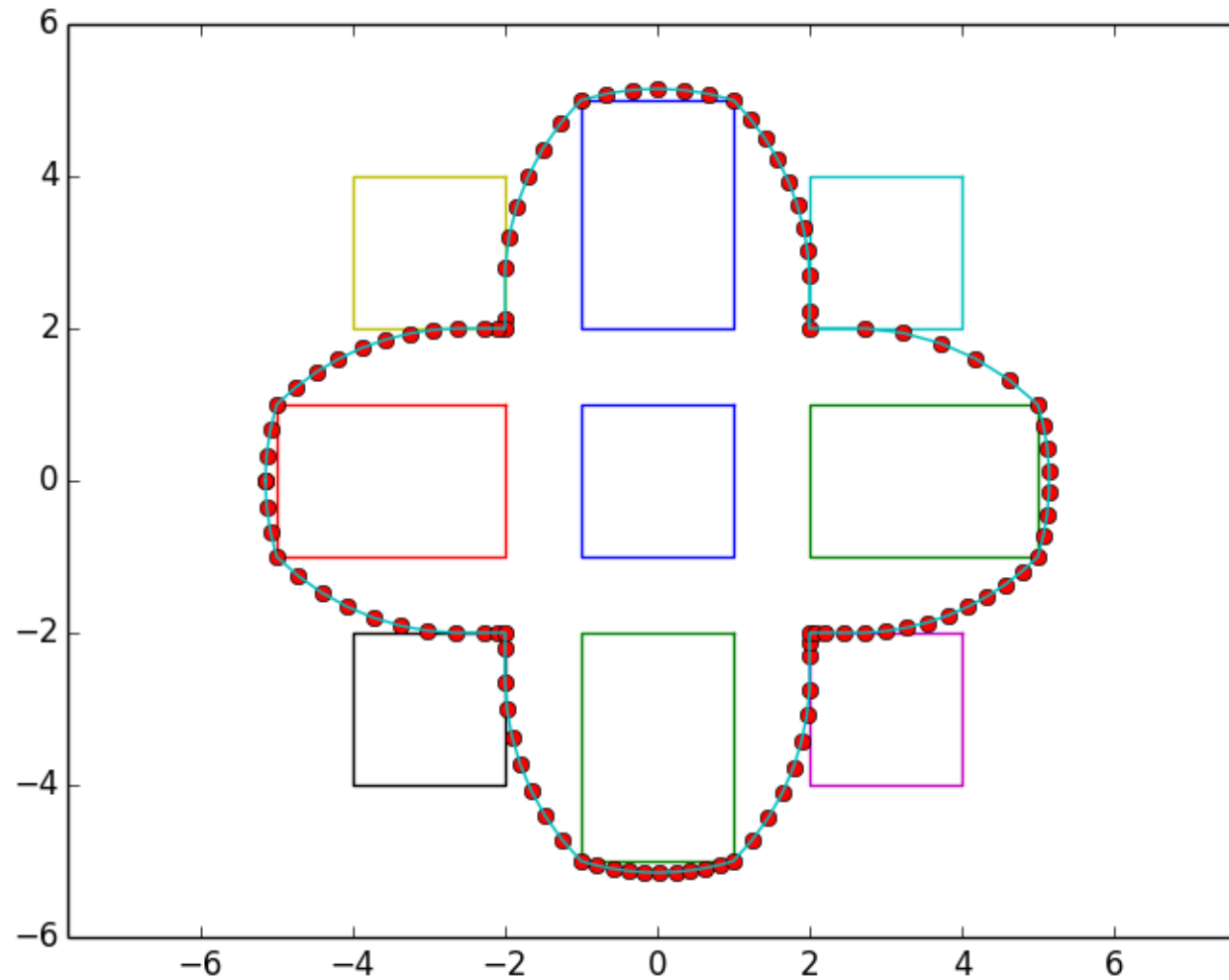
**Essais avec des obstacles variés :**



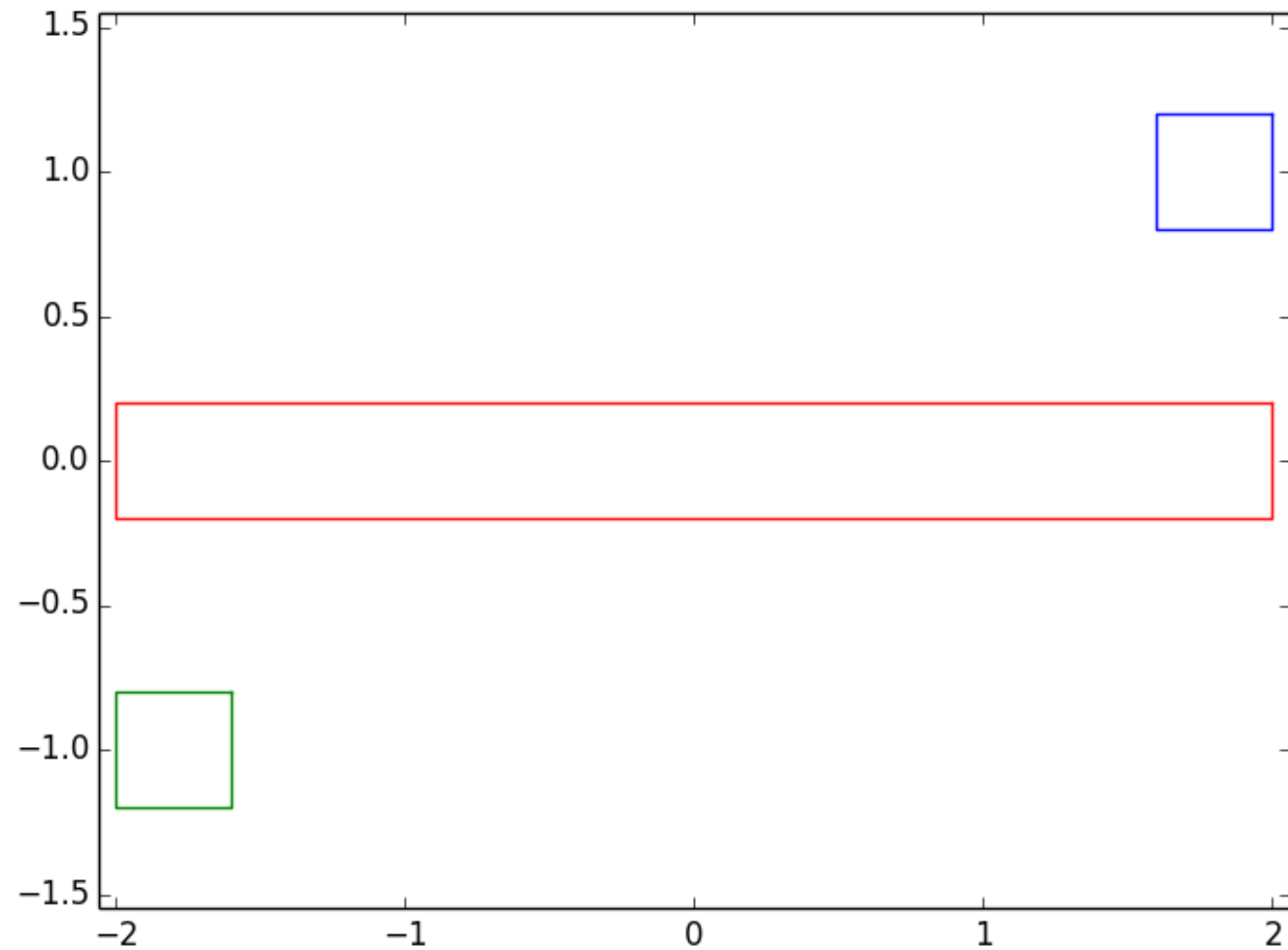
**Essais avec des obstacles variés :**



**Essais avec des obstacles variés :**

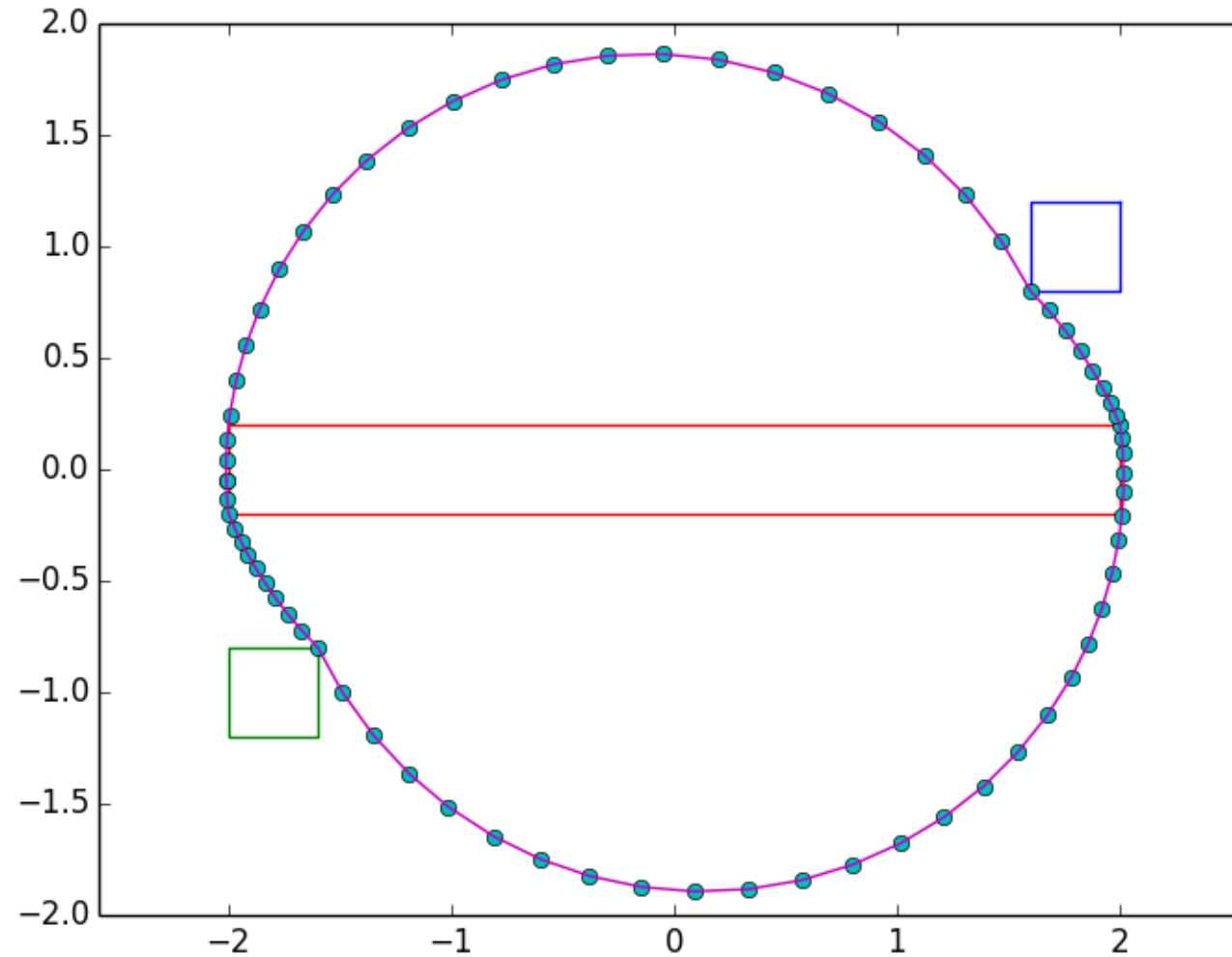


**Essais avec des obstacles variés :**

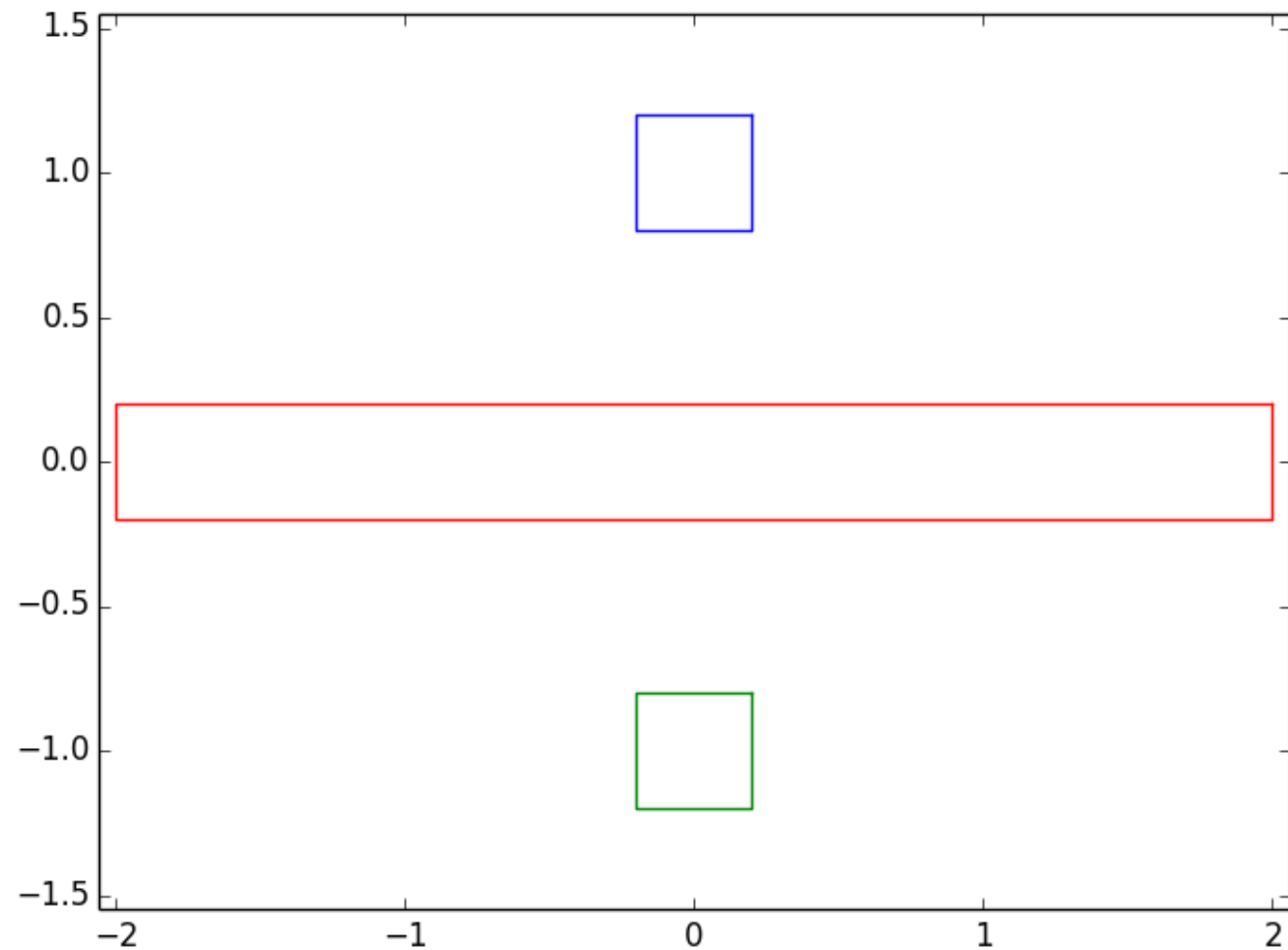




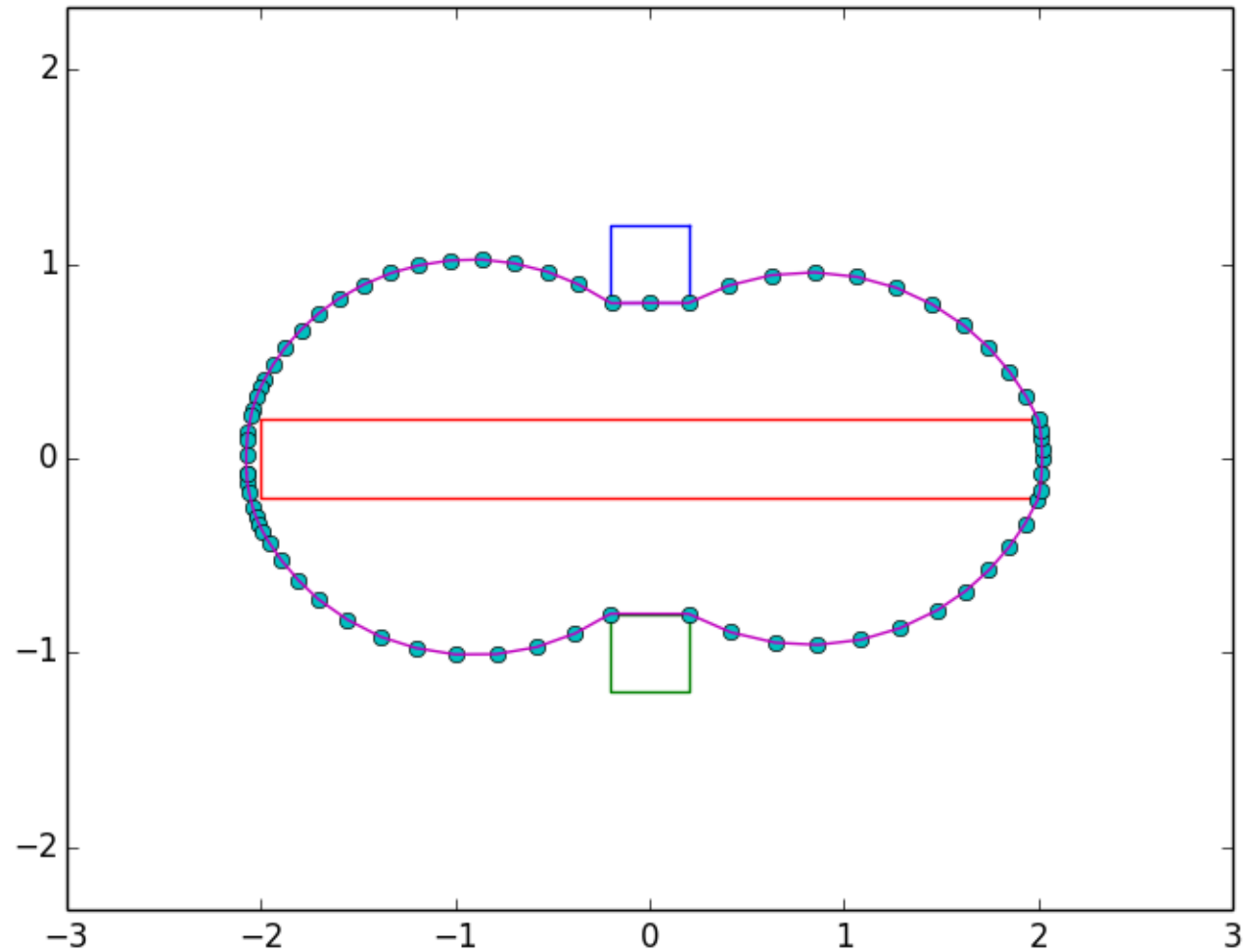
**Essais avec des obstacles variés :**



**Essais avec des obstacles variés :**



**Essais avec des obstacles variés :**





# Conclusion