Étude des positions licites du gear cube

Positionnement thématique:
Structure algébrique (théorie des groupes), programmation impérative

Mots clés:

Permutations	Permutations
Sous-groupes engendrés	Subgroup generated
Orbites	Orbits
Mathématiques du Rubik's cube	Rubik's Cube mathematics
Test informatique	Informatic test

Bibliographie commentée:

La notion de groupe introduite par E. Galois en 1830 permet de décrire le fonctionnement d'une structure abstraite, équipée d'une loi de composition interne respectant des axiomes précis. Elle permit une révolution du monde mathématique, notamment pour son application à la résolution d'équations polynomiales, généralisant les méthodes calculatoires de Jérôme Cardan et Ludovico Ferrarri. Elle fut développée et approfondie, étendue à d'autres structures algébriques plus riches mais plus restrictives, pour ainsi donner l'algèbre moderne que l'on connaît aujourd'hui. L'aboutissement d'années de recherches est rassemblé notamment dans [1] « *Leçons d'algèbre moderne* » (1961) par P. Dubreil et M.L Dubreil-Jacotin.

E. Galois a notamment introduit la notion de groupes de permutations, qui est en particulier illustrée avec la célèbre invention du professeur Ernõ Rubik : le Rubik's cube 3x3x3 (1974). Celle-ci a été largement étudiée au fil des années. On peut citer la mise en place de différentes méthodes de résolution, comme celles de Jessica Fridrich ou Lars Petrus. On peut aussi noter les travaux portant sur l'optimisation de celles-ci, cherchant le nombre minimal de coups nécessaires ; ou encore la détermination de « l'algorithme de Dieu », en lien avec le problème P=NP, et visant à donner le transport optimal de chaque pièces à la bonne position, pour toute situation de départ. D'autres travaux ont une approche combinatoire du cube, en cherchant à déterminer le nombre de positions atteignables sous certaines conditions. De plus, d'autres Rubik's cube de formes et tailles différentes ont été inventés, diversifiant les restrictions infligées aux mouvements possibles pour transporter les pièces. En particulier, le Gear Cube est un cube 3x3x3 semblable au Rubik's cube classique mais aux arrêtes équipées de roues dentées, qui entraînent des mouvements plus complexes et une méthode de résolution complètement différente.

La notion de morphisme de groupes permet d'utiliser la similarité entre deux groupes pour les étudier, permettant de lier les deux ensembles par des applications conservant les propriétés des lois de compositions internes. Ainsi, il est possible de relier les groupes de permutations et le groupe des positions du Rubik's cube pour étudier celui-ci. Il est aussi possible d'étudier les différents groupes de positions de différents cubes en utilisant leurs similarités avec Rubik's cube. Ces méthodes sont présentés notamment dans [2] « *Handbook of cubik's math* » (1982) de David Singmaster, où on y apprend comment lier Rubik's cube et permutations. L'ensemble des positions licites selon les mouvement légaux est alors caractérisé par des restrictions sur les orbites de chaque pièces. Jérôme Daquin applique ces raisonnements dans son mémoire, [3] « *Rubik's cube et théorie des groupes* » (2010), les positions licites du Rubik's cube sont alors caractérisées avec des propriétés sur les orientations des pièces donnant une rotation globale toujours nulle, ou des propriétés sur les signatures des permutations mises en jeux.

Problématique retenue :

Notre but est d'appliquer les méthodes utilisées pour l'étude sur le Rubik's cube au Gear Cube, en cherchant notamment l'apport des rouages sur les positions atteignables par transport légal des pièces. Étant donnée une position théorique, est-elle licite ? Comment caractériser les positions licites ?

Objectifs du TIPE:

Une modélisation du Gear cube similaire à celle du Rubik's cube pose problème avec l'introduction des rouages. En utilisant une méthode de résolution personnelle, je me propose de programmer un algorithme de résolution dans le but de prendre conscience du fonctionnement du Gear cube. Cela permettra une modélisation précise pour l'étude de la validité d'une position donnée. Je me suis fixé l'objectif de démontrer des conditions nécessaires et suffisantes sur les signatures des permutations mises en jeux et l'orientation des pièce d'une position donnée atteignable par transport licite de chaque pièce.

Liste des références bibliographiques :

[1] P.Dubreil et M.L Dubreil-Jacotin : *Leçons d'algèbre moderne* Chapitre 2,3 et 8 ,Edition Dunod ,1961

[2] Alexander H.Frey et David Singmaster : *Handbook of cubik's math* , https://maths-people.anu.edu.au/~burkej/cube/frey-singmaster.pdf , 1982

[3] Jerôme Daquin, *Rubik's cube et théorie des groupes* , 2010
Commentaire : Ce mémoire s'appuie sur la référence précédente et propose u approche concrète du problème, avec une rigueur cependant plus limitée.

[4] Serge Lang : *Algèbre* , Edition Dunod, Chapitre 1

[5] Hernstein : *Topics in Algebra*, Edition Wiley