6. Quantum compression

Vaughan Sohn

December 8, 2024

Contents

- 동일한 arbitrary quantum state를 n개를 만드는(or 공유하는) 상황을 가정하자.
- Question: Qubit n개로 표현할 수 있는 $\rho^{\otimes n}$ state를 구분하기 위해 과연 n개의 qubit을 모두 사용해야할까?

$$\rho_i^{\otimes n} \neq \rho_j^{\otimes n}, \qquad \forall i, j, \quad s.t.\ i \neq j$$

- Answer: $m = n \times S(\rho)$개의 qubit만 사용해도 구분할 수 있다!
- 이때, $S(\rho)$는 **폰 노이만 엔트로피**를 나타낸다.

이번 강의에서는 양자 상태의 정보의 양을 나타내기 위해 사용되는 척도인 폰 노이만 엔트로피에 대해서 소개하고, 폰 노이만 엔트로피가 어떻게 quantum compression과 연관되어있는지 설명하려고한다.

Prerequirements: Entropy

Classical entropy: Shannon entropy

Definition 1 (Shannon entropy)

Random variable X가 Probability distribution P_X를 따른다고 하자. $(X \sim P_X)$
Shannon entropy는 다음과 같이 정의된다.

$$H(X) = -\sum_i P_X(i) \log P_X(i)$$

특히, 우리가 관심있는 *bit*를 표현하는 binary r.v라면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$H(X) = -P_X(0) \log P_X(0) - P_X(1) \log P_X(1)$$

<u>Some remarks</u>:

- Shannon entropy는 어떤 random variable에 대한 정보량, 또는 모호성(ambiguity)을 나타내는 척도이다.
- Classical domain에서 Shannon entropy는 data compression, teleportation과 같은 다양한 작업에서 응용된다.

Quantum entropy: von Neumann entropy

Definition 2 (von Neumann entropy)

Quantum state ρ에 대해 von Neumann entropy는 다음과 같이 정의된다.

$$S(\rho) = -\mathrm{tr}[\rho \log \rho] = -\sum_i \rho_{ii} \log \rho_{ii} \tag{1}$$

$$= -\sum_i \lambda_i \log \lambda_i, \tag{2}$$

where $\rho = \sum_i q_i \rho(i)$ and $\{\lambda_i\} = \mathrm{eig}(\rho)$.

Some remarks:

- Eq. (1)은 확률의 관점에서 폰 노이만 엔트로피를 해석한다.[1]
- Eq. (2)는 eigenvalue를 이용하여 폰 노이만 엔트로피를 해석한다.

[1] density matrix의 대각성분은 확률을 의미하기 때문.

Classical compression

Typical sequence and Asymptotic Equipartition Property (AEP)

- n bit sequence를 가정하자. (i.i.d)

$$x_1^n \triangleq x_1 x_2 \cdots x_n \in \mathcal{X}^n, \qquad p(x_1^n) = p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_n)$$

- n bit sequence의 empirical distribution은 다음과 같이 구할 수 있으며,[2] WLLN에 의해 empirical dist는 n이 커질수록 true dist와 가까워진다.

$$p(0) = \frac{n_0}{n}, \quad p(1) = \frac{n_1}{n}$$

- 따라서 주어진 **n bit sequence의 확률**을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$p(x_1^n) \;\approx\; p(0)^{n_0} p(1)^{n_1} = p(0)^{np(0)} p(1)^{np(1)}$$

- 이는 다음과 같이 Shannon entropy에 대한 term으로 표현할 수 있다.

$$\rightarrow \log p(x_q^n) = n\Big(p(0)\log p(0) + p(1)\log p(1)\Big) = -nH(X)$$

$$\rightarrow p(x_q^n) = \boxed{2^{-nH(X)}}$$

- 즉, sequence가 어떤 bit값을 가지는지에 관계없이 *empirical distribution*과 *true distribution*이 거의 유사하다면, Shannon entropy로 확률을 표현할 수 있다.

[2] n_0: 0이 등장한 횟수, n_1: 1이 등장한 횟수. $(n_0 + n_1 = n)$

Typical sequence and Asymptotic Equipartition Property (AEP)

앞의 아이디어를 이용하면, 다음의 정리를 정의할 수 있다.

Theorem 3 (Asymptotic Equipartition Property (AEP))

충분히 큰 n에 대해, **typical set***에 속하는 서로 다른 n-bit sequence의 확률은 거의 유사하다.*

$$p(x_1^n) \;\approx\; p(\hat{x}_1^n) \;\approx\; 2^{-nH(X)}$$

Definition 4 (Typical set)

다음과 같이 정의되는 set을 **typical set**이라고 부르며, typical set에 속하는 sequence를 typical sequence라고 한다.

$$A_\epsilon^n = \left\{ x_1^n \;:\; 2^{-n(H(X)+\epsilon)} \le p(x_1^n) \le 2^{-n(H(X)-\epsilon)} \right\}$$

Theorem 5 (Size of typical set)

$$|A_\epsilon^n| \le 2^{nH(X)}$$

proof : 확률의 정의에 의해 typical set안의 sequence에 대한 확률($= 2^{-nH(X)}$)의 합과 typical set밖의 sequence의 확률의 합이 1이 되어야한다는 것을 이용.□

Classical compression

따라서 AEP를 이용하면, typical set안에 있는 sequence를 표현하기 위해 필요한 m bit만 이용하여 n-bit sequence를 표현할 수 있다.[3]

- m : minimal number of bits to describe n-bit sequence
- n : length of original bit sequence
- $H(X)$: compression rate

$$m \cdot \underbrace{1}_{H} = n \cdot H(X), \quad \boxed{H(X) = \frac{m}{n}}$$

- 만약 X가 완전한 random bit, 즉 uniform distribution을 따른다면, 엔트로피가 1이 되기 때문에 random bit는 압축할 수 없다.

$$\text{if } X \sim P_U(X), \qquad \text{then } H(X) = \frac{1}{2}(-\log_2 \frac{1}{2} - \log_2 \frac{1}{2}) = 1$$

- 따라서 classical compression은 n biased bits를 압축하기 위해 m random bits를 사용한다고 생각할 수 있다. (n biased bits의 typical set의 크기와 m random bits의 typical set의 크기가 비슷)

[3] typical set의 크기, 확률로부터 typical set에 속하지 않는 원소의 확률은 0에 가깝다는 사실을 유추할 수 있다.

Quantum compression

Quantum compression system

그렇다면, quantum compression에서도 quantum version의 entropy인 폰 노이만 엔트로피를 활용할 수 없을까?

- n qubit system이 mixed state ρ에 대한 n개의 복사본 $\rho^{\otimes n}$으로 준비되어있다.

$$\rho = \sum_i p(i) \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|$$

- 이때, ρ는 다음과 같이 eigenvalue와 eigenvector로 나타낼 수 있다. ρ의 eigenvector는 2개이며[4] eigenvalue는 *probability condition*을 만족하며,

$$\rho = \sum_i \lambda_i \left|u_i\right\rangle \left\langle u_i\right| = \lambda_0 \left|u_0\right\rangle \left\langle u_0\right| + \lambda_1 \left|u_1\right\rangle \left\langle u_1\right|$$

- 위의 표현을 이용하면, n qubit system을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\rho^{\otimes n} &= \sum_{i_1} \lambda_{i_1} \left|u_{i_1}\right\rangle \left\langle u_{i_1}\right| \otimes \sum_{i_2} \lambda_{i_2} \left|u_{i_2}\right\rangle \left\langle u_{i_2}\right| \otimes \cdots \otimes \sum_{i_n} \lambda_i \left|u_{i_n}\right\rangle \left\langle u_{i_n}\right| \\
&= \sum_{i_1, \cdots, i_n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_n} \left|u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_n}\right\rangle \left\langle u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_n}\right|
\end{aligned}$$

[4] ρ는 single qubit이므로

- (아이디어) 이때, λ의 index를 나타내는 $i_1, i_2, \cdots i_n$을 n-bit string으로 생각할 수 있다. ($i_j \in \{0,1\}$) 따라서 이를 $X \sim P_X$로 나타내면,

$$\rho^{\otimes n} = \sum_{x_1,\cdots,x_n} \lambda_{x_1}\lambda_{x_2}\cdots\lambda_{x_n} \left|u_{x_1}u_{x_2}\cdots u_{x_n}\right\rangle \left\langle u_{x_1}u_{x_2}\cdots u_{x_n}\right|.$$

- 따라서 WLLN에 의해, 이 상태는 typical set안에 들어있는 x_1^n만 사용하여 표현할 수 있고, 따라서 entropy를 이용하여 표현하면, 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\rho^{\otimes n} &= \sum_{x_1^n \in A_\epsilon^n} \underbrace{\lambda_{x_1}\lambda_{x_2}\cdots\lambda_{x_n}}_{\approx 2^{-nS(\rho)}} \left|u_{x_1}u_{x_2}\cdots u_{x_n}\right\rangle \left\langle u_{x_1}u_{x_2}\cdots u_{x_n}\right| \\ &\quad + \sum_{x_1^n \notin A_\epsilon^n} \underbrace{\lambda_{x_1}\lambda_{x_2}\cdots\lambda_{x_n}}_{\approx 0} \left|u_{x_1}u_{x_2}\cdots u_{x_n}\right\rangle \left\langle u_{x_1}u_{x_2}\cdots u_{x_n}\right| \\ &\approx 2^{-nS(\rho)} \sum_{x_1^n \in A_\epsilon^n} \left|u_{x_1}u_{x_2}\cdots u_{x_n}\right\rangle \left\langle u_{x_1}u_{x_2}\cdots u_{x_n}\right|\end{aligned}$$

- 이때, 다음은 **typical subspace**에 투영시키는 projector로 이해할 수 있다.

$$P_\epsilon^n \triangleq \sum_{x_1^n \in A_\epsilon^n} \left|u_{x_1}u_{x_2}\cdots u_{x_n}\right\rangle \left\langle u_{x_1}u_{x_2}\cdots u_{x_n}\right|$$

typical subspace는 다음과 같다. $\mathcal{H} = \mathrm{span}\left\{ \left|u_{x_1}u_{x_2}\cdots u_{x_n}\right\rangle \ : \ x_1^n \in A_\epsilon^n \right\}$

Quantum compression system

- 앞에서 정의한 projector P_ϵ^n을 n qubit state에 가했을 때, trace는 다음과 같다.

$$\mathrm{tr}[\rho^{\otimes n} P_\epsilon^n] = \sum_{x_1^n \in A_\epsilon^n} \lambda_{x_1} \cdots \lambda_{x_n} = |A_\epsilon^n| \cdot 2^{-nS(\rho)} \approx 1.$$

  이는 typical subspace에 $\rho^{\otimes n}$가 존재할 확률로 해석할 수 있으며, 따라서 **대부분의 quantum state가 typical subspace에 존재한다**는 것을 알 수 있다.

- 따라서 n qubit state를 projector를 사용하여 typical subspace로 투영하면, typical subspace의 dimension에 해당하는 수의 qubit만 사용하여 state를 나타낼 수 있다.

$$P_\epsilon^n \rho^{\otimes n} P_\epsilon^n \approx \rho^{\otimes n}$$

  typical subspace의 차원은 $2^{nS(\rho)}$이므로, $nS(\rho)$개의 qubit만 있으면 표현가능하다!

$$m \cdot 1 = n \cdot S(\rho), \quad \boxed{R = S(\rho) = \frac{m}{n}}$$

- 반면, ρ가 완전히 랜덤이라면 classical case와 마찬가지로 더 이상 압축할 수 없다.

$$\text{if } \sigma = \frac{1}{2} |0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|, \text{ then } R = 1.$$

Some remarks of von Neumann entropy

Question: 두 개의 n-qubit state 중에서 어떤 state가 더 많은 information을 가지는가?

- 각 state의 엔트로피를 비교하자. (또는 m)

$$S(\rho_1) = \frac{m_1}{n}, \quad S(\rho_2)\frac{m_2}{2}$$

- 두 state중에서 엔트로피가 더 큰 state가 더 random한 상태에 가까워지며, 따라서 더 많은 information; uncertainty를 가진다.

Question: (폰 노이만) 엔트로피의 최댓값과 최솟값은?

- $S(\rho) = 0$는 mixed state에 대해 uncertainty가 없다는 의미이므로 pure state이다.
- $S(\rho) = 1$는 각 pure state의 확률이 $1/2$인 maximally mixed state이다.

$$0 \le S(\rho) \le 1$$

Question: 두 개의 n-qubit state중에서 어떤 state가 더 가치있을까?

- Quantum compression을 이용하면 두 state는 각각 폰 노이만 엔트로피에 따라 maximally mixed qubit m_1, m_2개로 표현된다.
- 물건의 가치를 화폐로 정의하는 것처럼, qubit의 가치는 몇 개의 maximally mixed qubit이 필요했는가로 정의된다.

Summary

Summary

- Entropy: information; uncertainty를 나타내는 measure
  - Shannon entropy:
  $$H(X) = -\sum_i P_X(i) \log P_X(i)$$
  - von Neumann entropy:
  $$S(\rho) = \mathrm{tr}[\rho \log \rho] = -\sum_i \lambda_i \log \lambda_i$$
- Typical sequence and Asymptotic Equipartition Property (AEP)
  - Typical set: empirical distribution과 true distribution이 거의 유사한 sequence들의 집합 $A_\epsilon^n = \left\{ x_1^n \ : \ 2^{-n(H(X)+\epsilon)} \leq p(x_1^n) \leq 2^{-n(H(X)-\epsilon)} \right\}$
  - Typical subspace: typical set에 해당하는 sequence를 인덱스로 갖는 quantum state들이 span하는 공간 $\mathcal{H} = \mathrm{span}\left\{ |u_{x_1} u_{x_2} \cdots u_{x_n}\rangle \ : \ x_1^n \in A_\epsilon^n \right\}$
  - AEP: typical set에 속하는 sequence들의 확률은 $2^{-nH(X)}$이다.
  - (Quantum) AEP: typical subspace에 속하는 quantum state의 확률은 $2^{-nS(\rho)}$이다.
- Compression rate
  - Classical case: $R = H(X)$
  - Quantum case: $R = S(\rho)$

References

- Lecture notes for EE547: Introduction to Quantum Information Processing (Fall 2024)