Useful things: mathematics

Vaughn Sohn

December 14, 2024

Quantum computing에서 자주 사용되는 수학적 개념이나 정리들

1 Linear algebra 1
2 Quantum mechanics . . . 1
Principle 1
Schrödinger equation . . 1
3 Complex exponential . . . 1
4 Group theory 2
5 Etc... 2
Series 2
Calculus 2
trigonometric function . . 3
approximation 3

1 Linear algebra

2 Quantum mechanics

Principle

Definition 2.1 (Measurement on density matrix) *density matrix에 대해서 outcome m의 확률은*

$$\mathrm{tr}\left[M_m^\dagger M_m \cdot \rho\right],$$

post-measurement state는 다음과 같다.

$$\frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\mathrm{tr}\left[M_m^\dagger M_m \cdot \rho\right]}$$

Schrödinger equation

Theorem 2.1 (Schrödinger time evolution equation)

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\psi(0)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle$$

3 Complex exponential

Remark 3.1 Complex exponential function의 중요한 값

- $e^{i\pi} = e^{2i\pi\times(1/2)} = -1$
- $e^0 = e^{2i\pi\times(0/2)} = 1$

Remark 3.2 Complex exponential function과 관련된 몇가지 bound

- $|1 - e^{i\theta}| \geq \frac{2|\theta|}{\pi}$, for $-\pi \leq \theta \leq \pi$
- $|1 - e^{i\theta}| \leq 2$, for any $\theta \in \mathbb{R}$

Theorem 3.1 (Orthogonality of compex exponential)

$$\sum_{s=0}^{r-1} e^{(2\pi is/r)(k-l)} = \begin{cases} 0, & if\ k \neq l \\ r, & if\ k = l \end{cases}$$

special case ($l \leftarrow 0$) *:*

$$\sum_{s=0}^{r-1} e^{(2\pi is/r)(k)} = \begin{cases} 0, & if\ k \neq 0 \\ r, & if\ k = 0 \end{cases}$$

4 Group theory

5 Etc...

Series

Theorem 5.1 (등비 급수) *일반항이* $a_i = a_1 \cdot r^{n-1}$*인 등비급수의* n *차항 까지의 합은 다음과 같다.*

$$S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Theorem 5.2 (matrix exponential)

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k$$

where $X^0 = I$*.*

Calculus

Theorem 5.3 (Duhamel's principle) *듀하멜 원리는 비동차(Nonhomogeneous) 선형 미분 방정식의 해를 동차(Homogeneous) 방정식의 해와 적분 형태로 표현하는 방법이다.* $\tilde{U}(t), F(t)$*가 시간에 의존하고* H*는 시간에 독립적인 연산자일 때, 비동차 미분 방정식은 다음과 같다.*

$$i\frac{d\tilde{U}(t)}{dt} = H\tilde{U}(t) + F(t)$$

이때 동차 미분 방정식은 다음을 풀어서 쉽게 얻을 수 있다.

$$i\frac{d\tilde{U}(t)}{dt} = H\tilde{U}(t)$$

Duhamel's principle에 따르면 비동차 미분 방정식의 해를 동차 미분 방정식의 해를 사용하여 구할 수 있다. ($U(t)$*는 해석적 연산자)*[1]

$$\tilde{U}(t) = \tilde{U}_{\text{sol}}(t) + -i\int_0^t U(t-\tau)F(\tau)d\tau$$

1: Hamiltonian simulation에서도 듀하멜 원리를 적용하기 위해서 주어진 미분방식의 형태를 변경시켰다. 이때 미분방정식의 해가 exponential인 이유는 동차 미분 방정식의 형태가 미분해서 자기자신이 나오는 형태이기 때문이다.

trigonometric function

Remark 5.1 삼각함수에서 자주 쓰이는 몇 가지 값들

- $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Remark 5.2 (삼각함수 합 공식)

$$
\begin{aligned}
\sin A + \sin B &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\
\sin A - \sin B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \\
\cos A + \cos B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\
\cos A - \cos B &= -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}
\end{aligned}
$$

approximation

- $\arccos(\sqrt{1} - x) \approx \sqrt{x} + O(x^{3/2})$