

5. Quantum Algorithm

Vaughan Sohn

November 15, 2024

Deutsch's Algorithm

Hamiltonian Simulation

Quantum Fourier Transformation

Phase Estimation

Deutsch's Algorithm

- Algorithm은 어떤 문제를 해결하는 동안, 다양한 *function*을 호출할 수 있다.
- 따라서 Quantum Algorithm을 설계하기 위해서는 어떤 주어진 *function*을 quantum computer에서 나타낼 수 있는 방법이 필요하다.

Represent boolean function

다음 boolean function을 unitary gate U_f 로 구현해보자.

$$f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$$

- one-qubit gate:

Problem: f 가 constant, 즉 non-invertable이라면 unitary가 아니다.

$$|x\rangle \rightarrow |f(x)\rangle$$

- two-qubit gate:

- ancilla qubit을 추가하여 two-qubit gate로 설계하면 unitary 조건을 만족한다.
- $|q\rangle$ 를 $|0\rangle$ 으로 설정하면 연산 결과, $|q\rangle$ 가 $f(x)$ 가 된다.

$$|x\rangle |q\rangle \rightarrow |x\rangle |q \oplus f(x)\rangle$$

Advantage of Quantum Algorithm

- Unitary gate U_f 의 입력을 *superposition state* $|x\rangle = |+\rangle$ 로 설정하게 되면, 단 한번 unitary gate를 통과함으로써 모든 input 0, 1에 대한 결과를 얻을 수 있다.

$$|+\rangle |0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle |f(0)\rangle + |1\rangle |f(1)\rangle)$$

- More generally*, $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ 에 대한 unitary에 superposition state를 제공하면 다음 상태를 얻는다.

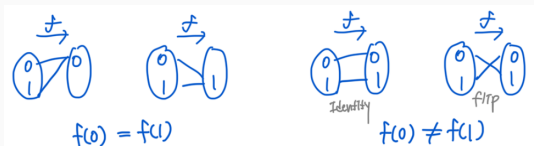
$$|+\rangle^{\otimes n} |0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x \in \{0, 1\}^n} |x\rangle |f(x)\rangle$$

Deutsch's Problem

Problem: 주어진 one-bit function $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ 이 constant인지 balance인지를 판단하는 문제

- 가능한 4가지 함수 중에서 constant / balance function은 각각 다음과 같이 구분된다.
- $f(0) \oplus f(1)$ 의 값을 구할 수 있다면, 함수가 constant인지 아닌지를 구분할 수 있다.

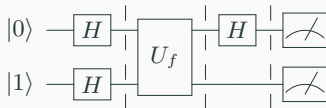
$$\begin{cases} \text{constant} & \text{if } f(0) \oplus f(1) = 0 \\ \text{balance} & \text{if } f(0) \oplus f(1) = 1 \end{cases}$$



Solutions:

- classically, 주어진 함수 f 에 대해 서로 다른 입력에 대해 2번 호출하면 $f(0), f(1)$ 의 결과를 알 수 있으므로 constant인지 balance인지를 구분할 수 있다.
- quantumly, 다음과 같이 구성한 quantum circuit을 실행하면, U_f 를 1번 호출하는 것만으로 함수가 constant인지 balance인지를 구분할 수 있다.
- U_f 는 다음의 동작을 수행하는 unitary gate이다.

$$U_f |x\rangle |y\rangle = |x\rangle |y \oplus f(x)\rangle$$



앞에서 제안한 quantum circuit을 이용하면 정말로 문제를 해결할 수 있는지 확인해보자. 각각의 gate를 통과한 뒤 system의 state는 다음과 같이 변화하게 된다.

1. $H \otimes H$

2. U_f

3. $H \otimes I$

따라서 측정 전, 최종 상태는 다음과 같다.

$$(-1)^{f(0)} \frac{1}{2} \left((|0\rangle + |1\rangle) + (-1)^{f(0) \oplus f(1)} (|0\rangle - |1\rangle) \right) |-\rangle$$

Deutsch Algorithm에서 얻은 최종 상태는 다음과 같다.

$$(-1)^{f(0)} \frac{1}{2} \left((|0\rangle + |1\rangle) + (-1)^{f(0) \oplus f(1)} (|0\rangle - |1\rangle) \right) |-\rangle$$

이 상태는 $f(0) \oplus f(1)$ 의 값이 0인지 1인지에 따라서 다음 둘 중 하나의 상태가 된다.

$$= \begin{cases} (-1)^{f(0)} |0\rangle |-\rangle & \text{if } f(0) \oplus f(1) = 0 : \text{const} \\ (-1)^{f(0)} |1\rangle |-\rangle & \text{if } f(0) \oplus f(1) = 1 : \text{balanced} \end{cases}$$

⇒ 따라서 첫번째 qubit의 값을 측정하여 $f(0) \oplus f(1)$ 의 값을 알아낼 수 있다.□

Idea: global / relative phase

f 가 constant 함수라면 global phase $(-1)^{f(0)}$ 만 가해지기 때문에 처음 상태와 동일한 상태가 된다. 하지만 f 가 balanced 함수라면 relative phase (-1) 이 가해지면서 qubit의 값이 $|1\rangle$ 로 변화된다.

Deutsch's-Jozsa Algorithm

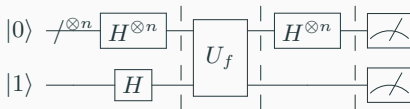
Problem: 주어진 n -bit function $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ 이 constant인지 balance인지를 판단하는 문제

Solutions:

- classically, 최악의 경우 $2^{n-1} + 1$ 번 함수를 호출해야한다. ($O(2^n)$)
- quantumly, Deutsch's algorithm을 활용하면 U_f 를 1번 호출하는 것만으로 함수가 constant인지 balance인지를 구분할 수 있다.
- U_f 는 다음의 동작을 수행하는 unitary gate이다.

$$U_f |x\rangle |y\rangle = |x\rangle |y \oplus f(x)\rangle$$

where $|x\rangle = |x_1 x_2 \cdots x_n\rangle$



앞에서 제안한 quantum circuit을 이용하면 정말로 문제를 해결할 수 있는지 확인해보자. 각각의 gate를 통과한 뒤 system의 state는 다음과 같이 변화하게 된다.

1. $H^{\otimes n+1}$

2. U_f

3. $H^{\otimes n} \otimes I$

따라서 측정 전, 최종 상태는 다음과 같다.

$$\left(\sum_{z, x \in \{0,1\}^n} \frac{(-1)^{x \cdot z + f(x)} |z\rangle}{2^n} \right) |-\rangle.$$

주어진 $f(x)$ 가 constant function이라면,

- $\forall x$ 에 대해서 $f(x)$ 의 결과는 항상 동일하기 때문에, 첫 번째 레지스터의 상태를 다음과 같이 표현할 수 있다. (*)

$$\frac{(-1)^{f(x)}}{2^n} \sum_{z, x \in \{0,1\}^n} (-1)^{x \cdot z} |z\rangle$$

- 만약 $z = 0^n$ 이라면, $x \cdot z = 0^n$ 이 되어서 $|0^n\rangle$ 의 계수가 ± 1 이 된다.
- 따라서, 첫 번째 레지스터를 측정하면 100%의 확률로 $|0^{\otimes n}\rangle$ 를 얻게된다.

반면, $f(x)$ 가 balanced function이라면,

- 첫 번째 레지스터의 상태를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{1}{2^n} \sum_{z, x \in \{0,1\}^n} (-1)^{f(x)} (-1)^{x \cdot z} |z\rangle$$

- 만약 $z = 0^n$ 이라면, $|0^n\rangle$ 의 계수는 $\sum (-1)^{f(x)}$ 에 의해 결정된다.
- f 가 balance function이므로 $(-1)^{f(x)}$ 의 값이 정확히 반은 1, 반은 -1이 되기 때문에 이를 다 summation하게 되면 계수가 0이 된다.
- 따라서, 첫 번째 레지스터를 측정했을 때, $|0^{\otimes n}\rangle$ 을 얻을 확률은 0%이다.□

Hamiltonian Simulation

Quantum Fourier Transformation

Implement Quantum Fourier Transform

Phase Estimation

- M. A. Nielsen and I. L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information
- Lecture notes for QU511: Quantum Computing (Fall 2024)