5. Quantum Algorithm

Vaughan Sohn

October 16, 2024

Contents

Deutsch's Algorithm

Design Quantum Algorithm

- Algorithm은 어떤 문제를 해결하는 동안, 다양한 *function*을 호출할 수 있다.
- 따라서 Quantum Algorithm을 설계하기 위해서는 어떤 주어진 *function*을 quantum computer에서 나타낼 수 있는 방법이 필요하다.

Represent boolean function
다음 boolean function을 unitary gate U_f로 구현해보자.

$$f : \{0,1\} \to \{0,1\}$$

- one-qubit gate:
  Problem: f가 constant, 즉 non-invertable이라면 unitary가 아니다.

$$|x\rangle \to |f(x)\rangle$$

- two-qubit gate:
  - ancilla qubit을 추가하여 two-qubit gate로 설계하면 unitary 조건을 만족한다.
  - $|q\rangle$를 $|0\rangle$으로 설정하면 연산 결과, $|q\rangle$가 $f(x)$가 된다.

$$|x\rangle |q\rangle \to |x\rangle |q \oplus f(x)\rangle$$

Advantage of Quantum Algorithm

- Unitary gate U_f의 입력을 *superposition state* $|x\rangle = |+\rangle$로 설정하게 되면, 단 한번 unitary gate를 통과함으로서 모든 input $0, 1$에 대한 결과를 얻을 수 있다.

$$|+\rangle |0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle |f(0)\rangle + |1\rangle |f(1)\rangle)$$

- *More generally*, $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$에 대한 unitary에 superposition state를 제공하면 다음 상태를 얻는다.

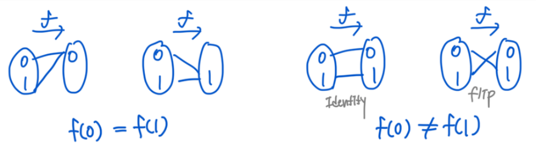
$$|+\rangle^{\otimes n} |0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x \in \{0,1\}^n} |x\rangle |f(x)\rangle$$

Deutsch's Problem

Problem: 주어진 one-bi function $f : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$이 constant인지 balance인지를 판단하는 문제

- 가능한 4가지 함수 중에서 constant / balance function은 각각 다음과 같이 구분된다.
- $f(0) \oplus f(1)$의 값을 구할 수 있다면, 함수가 constant인지 아닌지를 구분할 수 있다.

$$\begin{cases} \text{constant} & \text{if } f(0) \oplus f(1) = 0 \\ \text{balance} & \text{if } f(0) \oplus f(1) = 1 \end{cases}$$

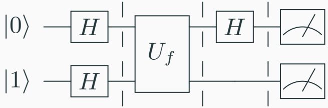


Deutsch's Algorithm

<u>Solutions</u>:

- classically, 주어진 함수 f에 대해 서로 다른 입력에 대해 2번 호출하면 $f(0), f(1)$의 결과를 알 수 있으므로 constant인지 balance인지를 구분할 수 있다.
- quantumly, 다음과 같이 구성한 quantum circuit을 실행하면, U_f를 1번 호출하는 것만으로 함수가 constant인지 balance인지를 구분할 수 있다.
- U_f는 다음의 동작을 수행하는 unitary gate이다.

$$U_f \left|x\right\rangle \left|y\right\rangle = \left|x\right\rangle \left|y \oplus f(x)\right\rangle$$



앞에서 제안한 quantum circuit을 이용하면 정말로 문제를 해결할 수 있는지 확인해보자. 각각의 gate를 통과한 뒤 system의 state는 다음과 같이 변화하게 된다.

1. $H \otimes H$
2. U_f
3. $H \otimes I$

따라서 측정 전, 최종 상태는 다음과 같다.

$$(-1)^{f(0)}\frac{1}{2}\Big((|0\rangle + |1\rangle) + (-1)^{f(0)\oplus f(1)}(|0\rangle - |1\rangle)\Big)\,|-\rangle$$

Deutsch's Algorithm

Deutsch Algorithm에서 얻은 최종 상태는 다음과 같다.

$$(-1)^{f(0)}\frac{1}{2}\Big((|0\rangle + |1\rangle) + (-1)^{f(0)\oplus f(1)}(|0\rangle - |1\rangle)\Big)\,|-\rangle$$

이 상태는 $f(0) \oplus f(1)$의 값이 0인지 1인지에 따라서 다음 둘 중 하나의 상태가 된다.

$$= \begin{cases} (-1)^{f(0)}\,|0\rangle\,|-\rangle & \text{if } f(0) \oplus f(1) = 0 \quad : const \\ (-1)^{f(0)}\,|1\rangle\,|-\rangle & \text{if } f(0) \oplus f(1) = 1 \quad : balanced \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 따라서 첫번째 qubit의 값을 측정하여 $f(0) \oplus f(1)$의 값을 알아낼 수 있다.□

Idea: global / relative phase

f가 constant 함수라면 global phase $(-1)^{f(0)}$만 가해지기 때문에 처음 상태와 동일한 상태가 된다. 하지만 f가 balanced 함수라면 relative phase (-1)이 가해지면서 qubit의 값이 $|1\rangle$로 변화된다.

Deutsch's-Jozsa Algorithm

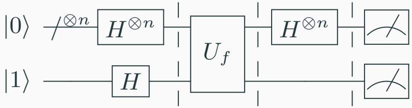
<u>Problem</u>: 주어진 n-bit function $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$이 constant인지 balance인지를 판단하는 문제

<u>Solutions</u>:

- classically, 최악의 경우 $2^{n-1}+1$번 함수를 호출해야한다. ($O(2^n)$)
- quantumly, Deutsch's algorithm을 활용하면 U_f를 1번 호출하는 것만으로 함수가 constant인지 balance인지를 구분할 수 있다.
- U_f는 다음의 동작을 수행하는 unitary gate이다.

$$U_f |x\rangle |y\rangle = |x\rangle |y \oplus f(x)\rangle$$

where $|x\rangle = |x_1 x_2 \cdots x_n\rangle$



Deutsch's-Jozsa Algorithm

앞에서 제안한 quantum circuit을 이용하면 정말로 문제를 해결할 수 있는지 확인해보자. 각각의 gate를 통과한 뒤 system의 state는 다음과 같이 변화하게 된다.

1. $H^{\otimes n+1}$
2. U_f
3. $H^{\otimes n} \otimes I$

따라서 측정 전, 최종 상태는 다음과 같다.

$$\left(\sum_{z,x \in \{0,1\}^n} \frac{(-1)^{x \cdot z + f(x)} |z\rangle}{2^n} \right) |-\rangle .$$

Deutsch's-Jozsa Algorithm

주어진 $f(x)$가 constant function이라면,

- $\forall x$에 대해서 $f(x)$의 결과는 항상 동일하기 때문에, 첫 번째 레지스터의 상태를 다음과 같이 표현할 수 있다. (*)

$$\frac{(-1)^{f(x)}}{2^n} \sum_{z,x \in \{0,1\}^n} (-1)^{x \cdot z} |z\rangle$$

- 만약 $z = 0^n$이라면, $x \cdot z = 0^n$이 되어서 $|0^n\rangle$의 계수가 ± 1이 된다.
- 따라서, 첫 번째 레지스터를 측정하면 100%의 확률로 $|0^{\otimes n}\rangle$를 얻게된다.

반면, $f(x)$가 balanced function이라면,

- 첫 번째 레지스터의 상태를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{1}{2^n} \sum_{z,x \in \{0,1\}^n} (-1)^{f(x)} (-1)^{x \cdot z} |z\rangle$$

- 만약 $z = 0^n$이라면, $|0^n\rangle$의 계수는 $\Sigma(-1)^{f(x)}$에 의해 결정된다.
- f가 balance function이므로 $(-1)^{f(x)}$의 값이 정확히 반은 1, 반은 -1이 되기 때문에 이를 다 summation하게 되면 계수가 0이 된다.
- 따라서, 첫 번째 레지스터를 측정했을 때, $|0^{\otimes n}\rangle$을 얻을 확률은 0%이다.$\square$

Hamiltonian Simulation

Hamiltonian Simulation Problem

Hamiltonian Simulation by Trotter formular

Error bound of Hamiltonian Simulation

Quantum Fourier Transformation

Classical and Quantum Fourier Transform

Implement Quantum Fourier Transform

Phase Estimation

Phase estimation

Error bound of Phase estimation

References

- M. A. Nielson and I. L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information
- Lecture notes for QU511: Quantum Computing (Fall 2024)