3. General Quantum Dynamics for Error correction

Vaughan Sohn

October 14, 2024

Contents

General Quantum Dynamics

Motivation

- 이상적인 quantum dynamic에서는 완벽하게 외부와 상호작용하지 않는 closed system을 고려할 수 있다.
- 그러나 실제 현실 세계에서는 environment나 ancilla bits등과 원하지 않는 상호작용이 발생하고, 그 결과로 noise가 나타난다.
- open quantum system을 다뤄야 하는 2가지 motivation:
  - Measurement outcome을 이용한 system의 control
  - Environment의 noise를 분석

Table 1: closed system

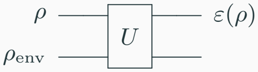


Table 2: open system

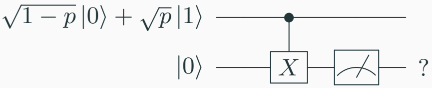
Motivation

Example: environment noise

- $|0\rangle$ state에 unitary gate X를 가하는 연산을 가정하자.
- closed system에서는 100% 확률로 측정결과 1을 얻게 된다.
- 그러나 open system에서는 environment가 원하지 않는 상호작용을 수행하여 X gate가 정상적으로 가해지지 않을 수 있다.
- 최종 state는 우리가 원하는 state와 원치않는 state의 mixed state가 된다.

$$\rho = (1-p)\,|0\rangle\langle 0| + pX\,|0\rangle\langle 0|\,X^\dagger$$

- 따라서 open system의 outcome은 각각 다음의 확률을 가지고 관측된다.
  - $p(0) = 1 - p$
  - $p(1) = p$

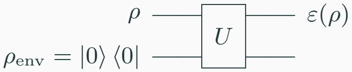


General Quantum Dynamics

이제 general quantum dynamics를 표현하는 방법을 정의해보자.

- ρ_{env}가 처음에 $|0\rangle\langle 0|$ state로 준비되었고 $\{|i\rangle\}$를 env의 basis라고 하자.
- Environment는 우리의 측정 대상이 아니기 때문에, 최종 state $\varepsilon(\rho)$는 system에 대한 reduced state로 정의한다.
- Kraus operator $K_i \triangleq \langle i|U|0\rangle$ 는 system에 대한 operator이다.

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\rho) &= \mathrm{tr}_E\big(U(\rho \otimes |0\rangle\langle 0|)U^\dagger\big) \\
&= \sum_i \langle i|U(\rho \otimes |0\rangle\langle 0|)U^\dagger|i\rangle \\
&= \sum_i \underbrace{\langle i|U|0\rangle}_{K_i} \rho \langle 0|U^\dagger|i\rangle \\
&= \sum_i K_i \rho K_i^\dagger \qquad \leftarrow \text{operator-sum representation}
\end{aligned}$$



General Quantum Dynamics

이제 general quantum dynamics를 표현하는 방법을 정의해보자.

- General quantum dynamics는 각각의 kraus operator들이 system에 연산한 결과들의 합으로 표현할 수 있다.

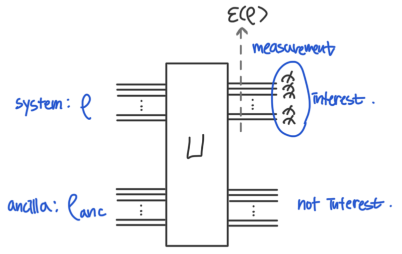
$$\varepsilon(\rho) = \sum_i K_i \rho K_i^\dagger \quad \leftarrow \text{operator-sum representation}$$

- Kraus operator들은 completeness relation을 만족한다. (system에 대해서)

$$\begin{aligned}\sum_i K_i^\dagger K_i &= \sum_i \langle 0|U^\dagger|i\rangle \langle i|U|0\rangle \\ &= \langle 0|U^\dagger(\underbrace{\Sigma_i |i\rangle \langle i|}_{I_E})U|0\rangle \\ &= \langle 0|\underbrace{U^\dagger U}_{I_{SE}}|0\rangle = I_S\end{aligned}$$

Represent system by General Quantum Dynamics

- Ancilla bits를 사용하는 system을 생각해보자. (e.g., phase estimation $|u\rangle$)



- composite system의 최종 상태는 다음과 같이 전개할 수 있다. (tip: I_A를 곱해준다.)

$$
\begin{aligned}
U|\psi_S\rangle|0_A\rangle &= I_A U|\psi_S\rangle|0_A\rangle \\
&= \sum_i |i_A\rangle\langle i_A| U|\psi_S\rangle|0_A\rangle \\
&= \sum_i |i_A\rangle \underbrace{\langle i_A|U|0_A\rangle}_{K_i} |\psi_S\rangle \\
&= \sum_i K_i|\psi_S\rangle|i_A\rangle
\end{aligned}
$$

Represent system by General Quantum Dynamics

- system의 최종상태를 관찰하면, ancilla bits에 대한 state인 $|i_A\rangle$와 system에 대한 state인 $K_i\,|\psi_S\rangle$로 이루어진다는 것을 알 수 있다.

$$U\,|\psi_S\rangle\,|0_A\rangle = \sum_i K_i\,|\psi_S\rangle\,|i_A\rangle$$

- 그러나, 최종 상태는 현재 superposition state이기 때문에 K_i중에서 실제로 어떤 operator가 system에 적용되는지는 알 수 없다.

Idea

Ancilla bits를 측정하면, kraus operator가 의존하는 eigenvector $|i_A\rangle$가 무엇인지를 알 수 있기 때문에, system에 가해진 operator가 무엇인지를 알아낼 수 있다!

$\rightarrow$ 이는 실제로 quantum error detection의 기본 아이디어이기도 하다.

Quantum Error Detection

Idea of Quantum error detection

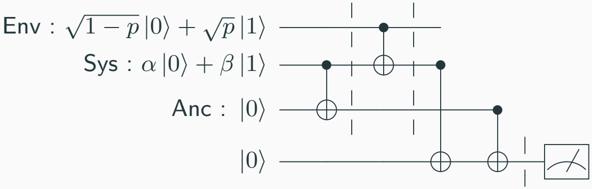
- Quantum error의 원인은 대부분 environment이다.
- General quantum dynamics 표현에 의하면, env/anc의 state를 측정하여 얻은 $|i\rangle$로부터 system에 가해진 operator K_i가 무엇인지 알 수 있다.
- 따라서 K_i가 원래 우리가 system에 취하려고 했던 연산인지 아닌지를 확인하여 error를 detection할 수 있다.

- Problem: 그러나 environment는 우리가 직접적으로 측정할 수 없다.
- Solution: environment 대신 우리가 측정할 수 있는 ancilla bits를 추가하자!

Quantum error detection algorithm

- 주어진 quantum circuit의 composite system은 단계별로 다음과 같이 변한다.
  1. $I \otimes C(X)$:
  $$\left(\sqrt{1-p}\,|0\rangle + \sqrt{p}\,|1\rangle\right)(\alpha\,|00\rangle + \beta\,|11\rangle)$$
  2. $C(X) \otimes I$:
  $$\left(\sqrt{1-p}\,|0\rangle\,(\alpha\,|00\rangle + \beta\,|11\rangle\,)\right) + \left(\sqrt{p}\,|1\rangle\,(\alpha\,|10\rangle + \beta\,|01\rangle)\right)$$
  3. measurement: 만약 sys $=$ anc이면 $X^2 = I$라서 state가 $|0\rangle$이지만 sys $\neq$ anc이면 X 이라서 $|1\rangle$이 된다.
  $$\begin{cases} 0, & \alpha\,|00\rangle + \beta\,|11\rangle \\ 1, & \alpha\,|01\rangle + \beta\,|10\rangle \end{cases}$$

- system qubit과 ancilla qubit이 동일한 경우엔 측정 결과가 0이 되고 다른 경우에는 측정결과가 1이 된다. $\rightarrow$ error가 발생했음을 감지할 수 있다.



References

- Lecture notes for EE547: Introduction to Quantum Information Processing (Fall 2024)