Braket notation

Vaughan Sohn

October 15, 2024

Contents

Basic operations

Basic property

Vector space

- $|\psi\rangle + |\phi\rangle = |\phi\rangle + |\psi\rangle$
- $\{|\psi\rangle + |\phi\rangle\} + |\chi\rangle = |\psi\rangle + \{|\phi\rangle + |\chi\rangle\}$
- $c\{|\psi\rangle + |\phi\rangle\} = c\,|\psi\rangle + c\,|\phi\rangle$
- $c_1\,|\psi\rangle + c_2\,|\psi\rangle = (c_1 + c_2)\,|\psi\rangle$
- $\langle\phi|\,(|\psi\rangle + |\psi'\rangle) = \langle\phi|\psi\rangle + \langle\phi|\psi'\rangle$
- $(\langle\psi| + \langle\psi'|)\,|\phi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle + \langle\psi'|\phi\rangle$

Conjugate transpose

- $|\psi\rangle^\dagger = \langle\psi|$
- $(|\psi\rangle + |\phi\rangle)^\dagger = \langle\psi| + \langle\phi|$
- $(z\,|\psi\rangle)^\dagger = z^*\,\langle\psi|$

Inner product and Outer product

Inner product

- $\langle\psi|A|\phi\rangle$는 다음 2가지 의미로 생각할 수 있다.
  - $(|\psi\rangle, A|\phi\rangle)$: $|\psi\rangle$와 $A|\phi\rangle$의 내적
  - $(A^\dagger|\psi\rangle, |\phi\rangle)$: $A^\dagger|\psi\rangle$와 $|\phi\rangle$의 내적
- $\langle\phi|\{|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle\} = \langle\phi|\psi_1\rangle + \langle\phi|\psi_2\rangle$
- $(\langle\psi|\phi\rangle)^* = \langle\phi|\psi\rangle$

Outer product

- Outer product $|w\rangle\langle v|, (|w\rangle \in W, |v\rangle \in V)$의 의미: V에서 W로 가는 linear operator
- $(|w\rangle\langle v|)|v\rangle'$는 다음 2가지로 표현할 수 있다.
  - $|w\rangle\langle v|v'\rangle$
  - $\langle v|v'\rangle|w\rangle$
- Outer product를 사용하면 어떤 연산자 $A : V \to W$도 eigenvector를 사용하여 다음과 같이 외적으로 나타낼 수 있다.

$$I_V A I_W = \sum_{ij} |v_i\rangle\langle v_i| A |w_j\rangle\langle w_j| = \sum_{ij} \underbrace{\langle v_i|A|w_j\rangle}_{a_{ij}} |v_i\rangle\langle w_j|$$

- 특히 normal operator는 이런 표현을 eigenvector와 eigenvalue로 나타낼 수 있다.
  - 이는 주어진 operator를 대각화 할 수 있음을 의미한다.
  - operator function은 이런 표현의 eigenvalue에만 작용한다.

$$N = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|$$

Trace

Trace

- outer product에서 $\langle i|A|j\rangle$가 A_{ij}를 의미하는 것임을 알았다.
- 따라서 대각성분의 합인 trace는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_i \langle i|A|i\rangle$$

- property:
  - $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$
  - $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$
  - $\mathrm{tr}(zA) = z \cdot \mathrm{tr}(A)$
  - (unitary invariant)

$$\mathrm{tr}(UAU^\dagger) = \mathrm{tr}(A)$$

  - $\langle\psi|A|\psi\rangle = \mathrm{tr}[A\,|\psi\rangle\,\langle\psi|]$ (*)

Tensor product

Tensor product

- For an arbitrary scalar z and vectors $|v\rangle \in V$ and $|w\rangle \in W$
  1. $z(|v\rangle \otimes |w\rangle) = (z\,|v\rangle) \otimes |w\rangle = |v\rangle \otimes (z\,|w\rangle)$,
  2. $(|v_1\rangle + |v_2\rangle) \otimes |w\rangle = |v_1\rangle \otimes |w\rangle + |v_2\rangle \otimes w$,
  3. $|v\rangle \otimes (|w_1\rangle + |w_2\rangle) = |v\rangle \otimes |w_1\rangle + |v\rangle \otimes |w_2\rangle$
  4. $|v\rangle \otimes (|w\rangle \otimes |z\rangle) = (|v\rangle \otimes |w\rangle) \otimes |z\rangle$
- Tensor product operator

$$(A \otimes B)(|v\rangle \otimes |w\rangle) = A\,|v\rangle \otimes B\,|w\rangle$$

- partial trace

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_B(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) &= |a_1\rangle\langle a_2|\,\mathrm{tr}_B(|b_1\rangle\langle b_2|) = |a_1\rangle\langle a_2|\,\langle b_1|b_2\rangle \\ &= \sum_i \langle i_B|(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|)|i_B\rangle \\ &= |a_1\rangle\langle a_2| \otimes \sum_i \langle i_B|(|b_1\rangle\langle b_2|)|i_B\rangle \end{aligned}$$