4. Two-qubit system

Vaughan Sohn

December 8, 2024

Contents

Two-qubit system

Two-qubit system

State vector

- 2개의 single qubit system A, B에 대한 composite system의 Hilbert space는 각 system의 basis들의 tensor product를 basis로 가진다.

$$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B = \text{span}\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$$

- State vector를 composite system의 (computational) basis로 나타내면 다음과 같다.

$$|\psi\rangle_{AB} = \alpha |00\rangle + \beta |01\rangle + \gamma |10\rangle + \delta |11\rangle, \qquad \langle\psi|\psi\rangle = 1.$$

Quantum gate

- Quantum gate는 정의에 의하여 모두 *unitary*이므로 여러 gate들의 조합으로 구성된 일련의 연산을 하나의 거대한 unitary gate로 생각할 수 있다.
- Two-qubit system에서 2개의 qubit을 모두 사용하는 연산은 대부분 **Controlled** operation이며 single qubit gate는 A, B둘 중에 하나의 system에만 가해지기 때문에 Local Operation이라고도 불린다.

Two-qubit measurement set

Two-qubit system에서 measurement는 다음의 2가지 경우를 고려할 수 있다.

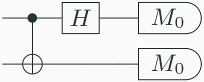
- Individual measurement : 각 qubit에 single qubit measurement를 수행하는 경우 (e.g., $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, and $\{|+\rangle, |-\rangle\}$)
- Joint measurement : 전체 qubit을 대상으로 measurement를 수행하는 경우.
  - $\{|00\rangle\langle 00|, |01\rangle\langle 01|, |10\rangle\langle 10|, |11\rangle\langle 11|\}$
  - $\{|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+|,\ |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|,\ |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|,\ |\Phi^-\rangle\langle\Phi^-|\}$

Example: state ρ를 M_{Φ^+}[1]로 측정했을 때, 확률은 다음과 같다.

- Heisenberg picture: M_0 operator가 $C(X)(H \otimes I)$가 가해져서 변화한다.
- Schrödinger picture: ρ state가 $C(X)(H \otimes I)$가 가해져서 변화한다.

$$\begin{aligned}
P(\Phi^+) = \mathrm{tr}\,[\rho\ M_{\Phi^+}] &= \mathrm{tr}\left[\rho_0 \cdot U(H \otimes I)\,|00\rangle\langle 00|\,(H \otimes I)U^\dagger\right] && \text{(Heisenberg picture)} \\
&= \mathrm{tr}\left[(H \otimes I)U^\dagger \rho_0 U(H \otimes I)\,|00\rangle\langle 00|\right] && \text{(Schrödinger picture)}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 따라서 joint measurement는 individual measurement와 gate들로 구현할 수 있다.



[1] Φ^+state에 대한 projector (i.e., $|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|$)

Two-qubit measurement set

그렇다면 system B만 individual measurement M_0를 수행했을 때, 남은 system A의 state는 어떻게 표현할 수 있을까?

- outcome이 0일 때, A의 state[2]

$$\mathrm{tr}_B\left[\rho_{AB}(I_A \otimes |0\rangle_B \langle 0|)\right] = p(0)\rho_{A|B=0}$$

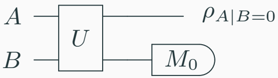
- outcome이 1일 때, A의 state

$$\mathrm{tr}_B\left[\rho_{AB}(I_A \otimes |1\rangle_B \langle 1|)\right] = p(1)\rho_{A|B=1}$$

반면 $\rho_{A|B}$는 다음과 같다.

$$tr_B[\rho_{AB}(I_A \otimes (|0\rangle_B \langle 0| + |1\rangle_B \langle 1|))] = tr_B[\rho_{AB}(I_A \otimes I_B)] = \mathrm{tr}_B \rho_{AB} = \boxed{\rho_A}$$

$\Rightarrow$ Partial measurement를 수행한 뒤 전체 system의 state ρ_{AB}에 대해 **partial trace**를 가하여 subsystem의 state를 구할 수 있다. 이는 B의 outcome과 관계없다!



2 전체 system의 post state에 partial trace를 가하여 얻을 수 있다.

Two-qubit entanglement

LOCC: Local Operation and Classical Communication

LOCC는 **entanglement**와 밀접한 관련이 있는 개념이다.

- System A, B에 대한 다음과 같은 2개의 product state가 주어졌다고 가정하자.

$$|\psi\rangle_{AB} = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B\,, \quad |\phi\rangle_{AB} = |\phi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B$$

- 각 partial system의 state는 서로간의 *unitary transformation*을 찾을 수 있다.

$$U_A\,|\psi\rangle_A = |\phi\rangle_A\,, \quad U_B\,|\psi\rangle_B = |\phi\rangle_B$$

- 따라서 이를 이용하면 composite system의 unitary transformation이 LOCC의 tensor product로 표현된다.

$$|\psi\rangle_{AB} = (U_A \otimes U_B)\,|\phi\rangle_{AB} \;\left(= U_A\,|\phi\rangle_A \otimes U_B\,|\phi\rangle_B \right)$$

Definition 1 (LOCC & entanglement)

Product state는 **LOCC**로 만들 수 있는 state를 의미한다.[3] 반면, entangled state는 LOCC로는 만들 수 없는 state이다.

[3] init state $|00\rangle$에 LOCC를 가하면 product state를 만들 수 있다.

Schmidt decomposition

Schmidt decomposition은 주어진 state가 entangled state인지 아닌지를 구분하기 위해 사용하는 방법이다.

$$|\psi\rangle_{AB} = \lambda_1 |u_1\rangle |v_1\rangle + \lambda_2 |u_1\rangle |v_2\rangle$$

위와 같이 각 system의 basis에서 **동일한 순서**에 있는 basis[4]들의 product의 summation으로 상태를 표현했을 때, $\lambda \neq 0$인 coefficient가 2개 이상이면 entangled state이다.

Theorem 2 (Schmidt decomposition)

For given state $|\psi\rangle == \sum_{i,j} c_{ij} |i\rangle |j\rangle$, *Schmidt decomposition is*

$$|\psi\rangle = \sum_k \lambda_k \underbrace{\left(\sum_i u_{ik} |i\rangle\right)}_{|u_k\rangle} \otimes \underbrace{\left(\sum_j v^\dagger_{jk} |j\rangle\right)}_{|v_k\rangle} = \sum_k \lambda_k |u_k\rangle |v_k\rangle$$

where $c_{ij} = (UDV^\dagger) = \sum_k u_{ik}\lambda_{kk}v^\dagger_{jk}$.

[4] 여기서 basis는 그냥 아무런 basis를 사용해도된다. 그렇기 때문에 만약 주어진 상태가 product state $|\psi\rangle_A \times |\psi\rangle_B$라면 basis를 $\{|\psi\rangle_A, |\psi\rangle_A^\perp\}, \{|\psi\rangle_B, |\psi\rangle_B^\perp\}$로 설정함으로서 Schmidt decomposition을 수행할 수 있다.

Summary

Summary

- Product state: LOCC만 사용하여 준비 가능한 상태
- Non-product state: LOCC만 사용해서는 준비할 수 없는 상태 (= entangled state)
- Schmidt decomposition: entangled state인지 아닌지 확안하기 위한 방법. Schmidt decomposition의 rank가 1보다 크다면 entangled state이다.
- Multi-qubit system에서는 각각의 qubit을 측정하거나 여러개의 qubit을 동시에 측정할 수 있다.
  - joint measurement는 individual measurement와 gate로 구현가능
  - partial measurement를 수행한 결과는 partial trace를 취해서 구할 수 있다.

$$\rho_A = \mathrm{tr}_B[(I \otimes M)\rho]$$

References

- Lecture notes for EE547: Introduction to Quantum Information Processing (Fall 2024)