

1. Fundamental Matrix Estimation from Point Correspondences

(a) linear least squares eight point algorithm:

透過 $p^T F p' = 0$ 來找出 F ，這個式子可以寫成 $AF = 0$ ，其中 A 的每一個row為一組對應點所提供

$$(u, v, 1) \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (uu', uv', u, vu', vv', v, u', v', 1) \begin{pmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ F_{21} \\ F_{22} \\ F_{23} \\ F_{31} \\ F_{32} \\ F_{33} \end{pmatrix} = 0$$

這裡總共有46組對應點，因此 A 為46*9的matrix，目標是找到一組最好的 F 讓每個對應點的 $(p^T F p')^2$ 的和為最小，也就是解 $AF = 0$ 的linear least squares solution

$$\begin{aligned} \min \|Ax\|^2 - \lambda (\|x\|^2 - 1) \\ \partial/\partial x [\|Ax\|^2 - \lambda (\|x\|^2 - 1)] &= 0 \\ 2 A^T A x - 2 \lambda x &= 0 \\ A^T A x &= \lambda x \end{aligned}$$

經過計算後，solution會等於 $A^T A$ 最小的eigenvalue對應到的eigen vector，也就是 A 最小的singular value對應到的vector。

因此這題的作法是透過SVD讓 $A = U * D * V^T$ ，其中 D 的主對角線會是從大排到小的singular value，而 V^T 的row(i)會是對應到第i大的singular value的vector，所以拿 V^T 的最後一個row當作 F ，並把 F reshape回3*3的matrix

最後為了要讓 F 是rank 2，一樣對 F 做SVD得到 $F = U * D * V^T$ ，在這裡把 $D[2,2]$ 設為0，讓他只保留前兩個singular value，得到 D' ，最後 $F = U * D' * V^T$

(b) normalized eight point algorithm:

normalize的目的是為了讓所有對應點的座標都是相對於中心，也就是把座標中心設為(0,0)，並且所有對應點到中心點的平均距離為 $\sqrt{2}$ ，而這可以透過similarity transformation達成。如果要轉換img1上的點，會先算出所有點的x座標的平均(mean1[0])、所有點的y座標的平均(mean1[1])以及scale1 = $\sqrt{2}$ / 所有點的average distance，組成一個matrix對所有點做轉換，轉換後的 $x' = \text{scale1} * (x - \text{mean1}[0])$ ，符合normalize的目的

```
T1 = np.array([[scale1, 0, -mean1[0] * scale1],
               [0, scale1, -mean1[1] * scale1],
               [0, 0, 1]])
```

透過 T1,T2分別先對p和p'做轉換，並把轉換後的點做linear least squares得到F，最後透過 $F = T1^T * F * T2$ 得到最後recover的fundamental matrix

(c) Plot the epipolar lines

對於img1上的每個點p，他在img2上對應到的epipolar line為 $F^T p$ (3*1的vector，分別對應到 $ax+by+c = 0$ 上的a,b,c)。從feature points和他們對應到的epipolar lines的average distance來看，以img2來說，沒有做normalize算出來為14.56，做normalize後為0.89，可看出在normalize後的fundamental matrix有比較好的accuracy

2.Homography transform

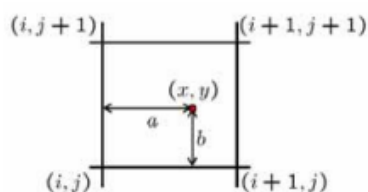
(a)

$$\begin{bmatrix} x_i & y_i & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'_i x_i & -x'_i y_i & -x'_i \\ 0 & 0 & 0 & x_i & y_i & 1 & -y'_i x_i & -y'_i y_i & -y'_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{00} \\ h_{01} \\ h_{02} \\ h_{10} \\ h_{11} \\ h_{12} \\ h_{20} \\ h_{21} \\ h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1組對應點可以提供2個式子，而H有一個參數為up to scale，因此我們最少可以透過4組對應點找到H。如果用4組對應點，這裡的A為8*9的matrix，這邊我和上題一樣對A做SVD找到 $AH = 0$ 的linear least squares solution

(b)

因為要顯示出建築物的正面，所以我用正面的4個角落並分別對應到rectified_img的4個角，讓rectified_img能夠用整張圖顯示出建築物正面，用這4組對應點透過(a)的公式算出H。在rectify的時候，因為使用backward warping，設target img的座標為 X' ，source img的座標為 X ，透過 $H^{-1}X' = X$ ，找到target img的每個座標對應到的source img座標。此時因為得到的source座標不一定會在整點上，可以透過bilinear interpolation找到他上下左右的4個整點並做內插法，以算出該target座標對應到的RGB value



$$f(x, y) = \begin{aligned} &(1-a)(1-b) f[i, j] \\ &+ a(1-b) f[i+1, j] \\ &+ ab f[i+1, j+1] \\ &+ (1-a)b f[i, j+1] \end{aligned}$$