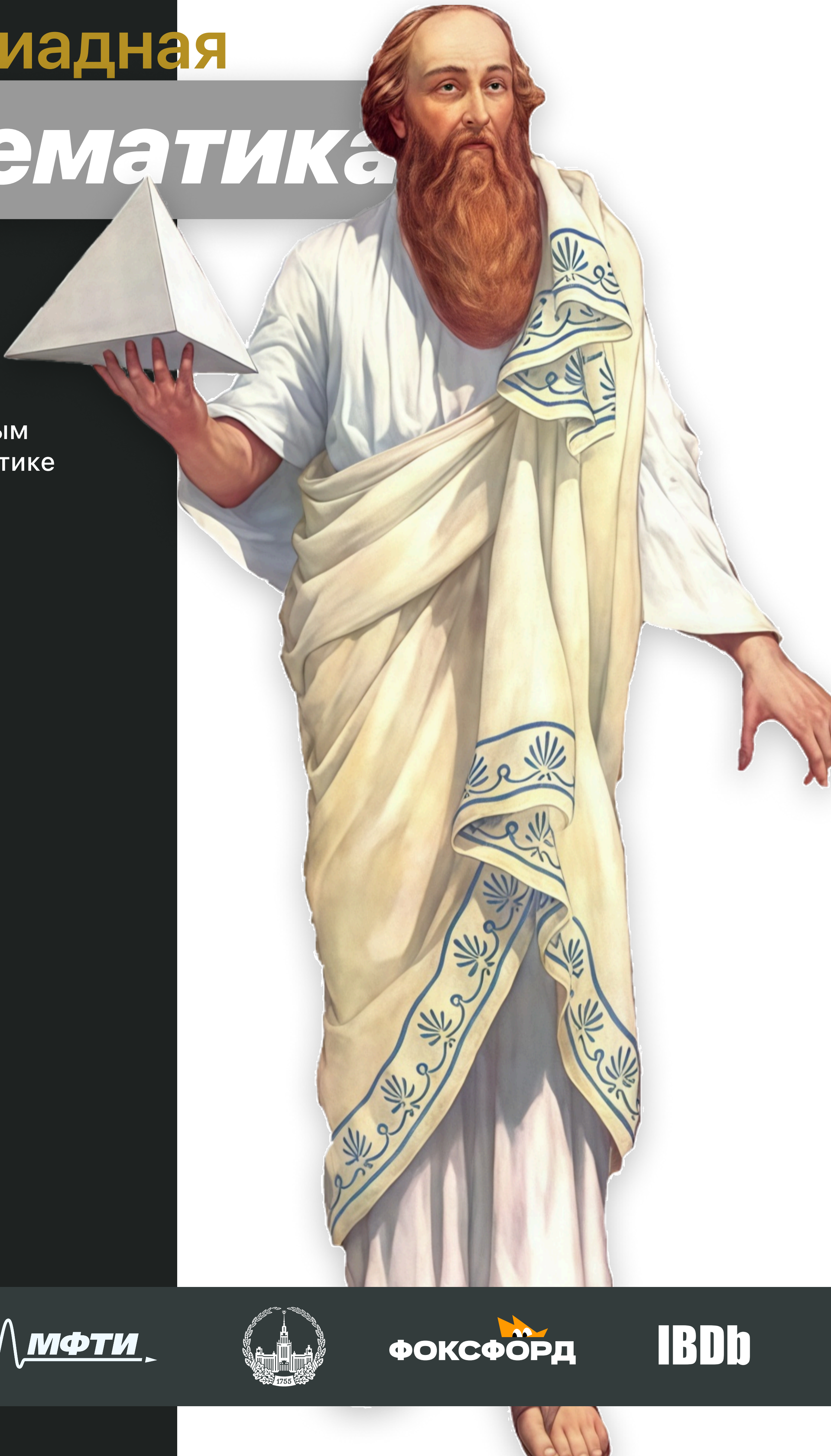
Борис Трушин

Олимпиадная Математика



Сборник задач для подготовки к перечневым олимпиадам по математике

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
МФТИ
ФОКСФОРД
IBDb

Борис Трушин

Сборник задач для подготовки к олимпиадам по математике

Москва
Издательство **IBDb**
2025

УДК 475:874
ББК 32.81я721
Ж31

Борис Викторович Трушин.

Олимпиадная Математика: Математика. Задачи для подготовки к олимпиадам по математике для школьников 10-11 классов/ Б.В. Трушин - Москва: Издательство IBDb, 2025
ISBN - 438-424-68-36-4

В этом сборник представлены задачи из олимпиад второго уровня по математика, таких как Физтех, ОММО (Объединённая межвузовская математическая олимпиада), ПВГ (Покори воробьёвы горы!), Ломоносов. Сборник составлен так, что задачи разных лет отсортированы по темам, что гораздо упрощает подготовку.

Сборник идеально пойдёт учащимся 10-11 классов, которые хотят получить БВИ (Поступление без вступительных испытаний) и поступить в один из лучших вузов нашей страны.

Дизайн обложки и LATEX-вёрстка - А. Баринов

УДК 475:874
ББК 32.81я721

ISBN - 438-424-68-36-4

Содержание

§1. Преобразования выражений, уравнения и неравенства.

Урок

1.1.1. [Ломоносов-2018, 10-11 класс] На каком из пяти интервалов, на которые разбивают числовую четыре точки

$$x^5 < y^8 < y^3 < x^6,$$

лежит число 0?

1.1.2. [ОММО-2017, 11 класс] Представьте в виде несократимой дроби

$$\frac{12+15}{18} + \frac{21+24}{27} + ... + \frac{48+51}{54}.$$

1.1.3. [ОММО-2016, 11 класс] Представьте в виде несократимой дроби

$$7\frac{19}{2015} \cdot 6\frac{19}{2016} - 13\frac{1996}{2015} \cdot 2\frac{1997}{2016} - 9 \cdot \frac{19}{2015}.$$

1.1.4. [ПВГ-2019, 10-11 классы] Найдите десятичную запись числа

$$\frac{(2x-x^2)\cdot 10^6}{33} + \left(\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2}-1}{3}}\right),$$

если $x = 0,9999$.

1.1.5. [Ломоносов-2018, 10-11 класс] Какое из чисел больше

$$\underbrace{\sqrt{17\sqrt{13\sqrt{17\sqrt{13\sqrt{17...}}}}}}_{\text{2018 знаков корня}} \quad \text{или} \quad 17\sqrt[3]{\frac{13}{17}}?$$

1.1.6. [Физтех-2016, 9 класс] Найдите значение выражения $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, где a и b - соответственно наибольший и наименьший корни уравнения $x^3 - 7x^2 + 7x = 1$.

1.1.7. [ПВГ-2015, 10-11 класс] Сравните число

$$\sqrt{|\ 8\sqrt{3}-16\ |} - \sqrt{|\ 8\sqrt{3}+16\ |}$$

и наименьший корень уравнения $4x^2 + 21x + 17 = 0$.

1.1.8. [Физтех-2021, 10 класс] Решите уравнение

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2$$

1.1.9. [Физтех-2018, 11 класс] Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графикиу $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $3(g(x))^2 + 2f(x)$, если наименьшее значение функции $3(f(x))^2 + 2g(x)$ равно $-\frac{19}{6}$.

1.1.10. [ПВГ-2019, 10-11 классы] Решите уравнение

$$x^2 + 8\{x+4\} - 9 = 0,$$

где $\{a\}$ - дробная часть числа a.

1.1.11. [ОММО-2019, 11 класс] Обозначим $f(x) = 9x^2 + 8x - 2$. Решите уравнение $f(f(x)) = x$.

1.1.12. [Физтех-2013, 11 класс] Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{|x+1|-2}} \le \frac{1}{9+x}$$

Домашнее задание

1.2.1. Найдите наименьший корень уравнения:

$$\frac{4}{x^2-2x+3} - \frac{5}{x^2-2x+6} = 1.$$

1.2.2. Найдите произведение корней уравнения

$$\sqrt{25x^2+9} - \sqrt{25x^2-7} = 2.$$

1.2.3. Найдите произведение корней уравнения

$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{10-x} = 3.$$

1.2.4. Найдите сумму целых решений неравенства

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) \le 3.$$

1.2.5. Решите неравенство

$$\frac{2}{2+\sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{2-\sqrt{4-x^2}} > \frac{1}{x}.$$

§2. Системы уравнений.

Урок

2.1.1. [Физтех-2014, 11 класс] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^3 + 3xy + 3y^2 = 16, \\ x^3 - x^2 + xy + 2y^2 = 8. \end{cases}$$

2.1.2. [Физтех-2016, 11 класс] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 - 2x - 2y + 10 = 0, \\ x^3y - xy^3 - 2x^2 + 2y^2 - 30 = 0. \end{cases}$$

2.1.3. [ОММО-2020, 11 класс] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 12x^2 + 4xy + 3y^2 + 16x = -6, \\ 4x^2 - 12xy + y^2 + 12x - 10y = -7. \end{cases}$$

2.1.4. [Физтех-2021, 10 класс] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2, \\ x^4 + y^4 + 3x^2y^2 = 5. \end{cases}$$

2.1.5. [Ломоносов-2019, 10-11 класс] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{x+2y} + 2^x = 3 \cdot 2^y, \\ 2^{2x+y} + 2 \cdot 2^y = 4 \cdot 2^x. \end{cases}$$

2.1.6. [ПВГ-2019, 10-11 класс] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{x-y\sqrt{2}} + \frac{1}{x\sqrt{2}-y} = 1, \\ \frac{1}{y+x\sqrt{2}} - \frac{1}{y\sqrt{2}+x} = -1. \end{cases}$$

2.1.7. [ОММО-2017, 11 класс] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + 2 - 4xy = 0, \\ y + z + 2 - 4yz = 0, \\ z + x + 2 - 4zx = 0. \end{cases}$$

2.1.8. [Физтех-2015, 11 класс] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = -\frac{2}{15}, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{x+z} = -\frac{2}{3}, \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

2.1.9. [Ломоносов-2021, 11 класс] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3y + \frac{1}{xy} = 6, \\ 3z - 6x + \frac{1}{xz} = 2, \\ 6y - 2z + \frac{1}{yz} = 3. \end{cases}$$

2.1.10. [ОММО-2020, 11 класс] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 = (y-z)^2 - 3, \\ y^2 = (z-x)^2 - 7, \\ z^2 = (x-y)^2 + 21. \end{cases}$$

2.1.11. [ПВГ-2018, 10-11 класс] Найдите сумму $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, если известно, что три различных действительных числа x, y и z удовлетворяют условиям: $x^3 + 1009 = 2018x$, $y^3 + 1009 = 2018y$, $z^3 + 1009 = 2018z$.

Домашнее задание

2.2.1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{3}{2}, \\ \frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=-\frac{3}{4}. \end{cases}$$

2.2.2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2-x)(y^2-y)=72, \\ (x+1)(y+1)=20. \end{cases}$$

2.2.3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2-xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=185, \\ (x^2+xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=65. \end{cases}$$

2.2.4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3y+xy^3=300, \\ x^2+y^2=25. \end{cases}$$

§3. Алгебраические уравнения, неравенства и системы.

Урок

3.1.1. [Физтех-2017, 10 класс] Решите неравенство

$$\sqrt{\sqrt{x+1}-2}+\sqrt{x+82-18\sqrt{x+1}}>5$$

3.1.2. [Ломоносов-2017, 10-11 класс] Решите уравнение

$$\sqrt{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}=2\sqrt{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}+\sqrt{2}$$

3.1.3. [Физтех-2016, 11 класс] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+\sqrt{x+2y}-2y=\frac{7}{2}, \\ x^2+x+2y-4y^2=\frac{27}{2}. \end{cases}$$

3.1.4. [ОММО-2016, 10-11 класс] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=19, \\ x^4+x^2y^2+y^4=931. \end{cases}$$

3.1.5. [ПВГ-2015, 10-11 класс] Гипербола $y=\frac{5}{x}$ пересекается с прямой $2x+y=12$ в точках A и B, а с прямой $x+2y=8$ - в точках C и D. Докажите, что существует окружность, проходящая через точки A, B, C, D, и найдите её центр и радиус.

3.1.6. [ПВГ-2015, 10-11 класс] Решите уравнение

$$(1+x+x^2)(1+x+x^2+...+x^{10})=(1+x+x^2+...+x^6)^2.$$

3.1.7. [ПВГ-2015, 10-11 класс] Решите уравнение

$$|x\sqrt{1-x^2}+x| = \sqrt{1+x^2}.$$

3.1.8. [ОММО-2014, 10-11 класс] Найдите все решения уравнения

$$(u(v-1))^2 + (v-1)^2 + u^2 + 1 - 4u|v-1| = 0.$$

3.1.9. [ПВГ-2014, 10-11 класс] Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}}} \geq 1.$$

3.1.10. [Физтех-2014, 11 класс] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 = 2x - 4y + 3, \\ \sqrt{3x-6y} = 2 - xy. \end{cases}$$

Домашнее задание

3.2.1. Найдите среднее арифметическое значение корней уравнение

$$5\sqrt[15]{x^{22}} + 4\sqrt[15]{x^{14}\sqrt{x}} = 12\sqrt[15]{x^7}.$$

3.2.2. Сколько различных корней, в зависимости от значений параметров a, b, c и d (разные параметры принимают разные значения) может иметь уравнение $\sqrt{x-a}\cdot\sqrt{x-b}\cdot\sqrt{x-c}\cdot\sqrt{x-d} = 0$.

3.2.3. Найдите сумму длин всех промежутков, входящих в решение неравенства

$$\frac{1}{x-2} + \frac{5}{6-3\sqrt{4+3x-x^2}} > \frac{1}{1+|x-2|}.$$

3.2.4. Будем говорить, что квадратный трёхчлен $f(x)$ меняет местами (перествaляет) пару различных чисел $(a;b)$, если $f(a) = b$, $f(b) = a$. Какое наибольшее количество различных пар может менять местами (переставлять) квадратный трёхчлен? (Пары, отличающиеся перестановкой чисел, считаем одинаковыми.)

3.2.5. Сколько существует таких целых чисел b, для которых $\lfloor x^2 \rfloor - 2012x + b = 0$ имеет нечётное число корней? (*Скобки $\lfloor t \rfloor$ обозначают целую часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t.*)

§4. Тригонометрия.

Урок

4.1.1. [ОММО-2015, 10-11 класс] Для $x = \frac{\pi}{2n}$ найдите значение суммы

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + ... + \sin^2 nx.$$

4.1.2. [Физтех-2018, 11 класс] Числа x и y таковы, что выполняются равенства

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = 3 \quad \text{и} \quad 2\sin(2x+2y) = \sin 2x \sin 2y.$$

Найдите $\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y$.

4.1.3. [Физтех-2018, 11 класс] Числа x и y таковы, что выполняются равенства

$$\cos x + \cos y = \sin 3x \quad \text{и} \quad \sin 2y - \sin 2x = \cos 4x - \cos 2x.$$

Какое *наименьшее* значение может принимать сумма $\sin y + \sin x$?

4.1.4. [ПВГ-2014, 10-11 класс] Определите минимальное значение величины $|x+y|$ при условии, что числа x и y удовлетворяют соотношению

$$5\cos(x+4y) - 3\cos(x-4y) - 4\sin(x-4y) = 10.$$

4.1.5. [Физтех-2019, 11 класс] Известно, что

$$\frac{\cos 3x}{(2\cos 2x - 1)\cos y} = \frac{2}{3} + \cos^2(x-y) \quad \text{и} \quad \frac{\sin 3x}{(2\cos 2x + 1)\sin y} = -\frac{1}{3} - \sin^2(x-y).$$

Найдите все возможные значения выражения $\cos(x-3y)$, если известно, что их не менее двух.

4.1.6. [ОММО-2016, 10-11 класс] Вычислите

$$\operatorname{arctg} 2 + \arcsin\frac{4}{5}.$$

4.1.7. [Ломоносов-2015, 10-11 класс] Найдите главный (наименьший положительный) период функции

$$y = (\arcsin(\sin(\arccos(\cos 3x))))^{-5}.$$

4.1.8. [ПВГ-2015, 10-11 класс] Что больше

$$2\sin\frac{5\pi}{16}\cos\frac{\pi}{16} \quad \text{или сумма корней уравнения} \quad |3\arccos x| = |\arcsin x|?$$

Домашнее задание

4.2.1. Сколько различных целых значений принимает функция $17\sin x + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$?

4.2.2. Вычислите $\arcsin\left(\cos\frac{7\pi}{8}\right)$. Полученное число разделите на π и результат запишите в ответе.

4.2.3. Вычислите $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)$.

4.2.4. Сколько различных чисел в последовательности $\operatorname{tg} 1°, \operatorname{tg} 11°, \operatorname{tg} 111°, ...$?

4.2.5. Сколько корней имеет уравнение $\sin x = \frac{x}{100}$?

4.2.6. Дана функция

$$f(x) = \frac{2\cos^4 x + \sin^2 x}{2\sin^4 x + 3\cos^2 x}.$$

Найдите отношение её минимального значения к максимальному.

§5. Тригонометрические уравнения I.

Урок

5.1.1. [ПВГ-2014, 10-11 класс] Решите уравнение

$$\cos\left(11x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(17x+\frac{\pi}{4}\right).$$

5.1.2. [Физтех-2016, 11 класс] Решите уравнение

$$(\cos x-3\cos 4x)^2=16+\sin^2 3x.$$

5.1.3. [ПВГ-2014, 10-11 класс] Решите уравнение

$$\sin^2\left(\frac{2013x}{2}\right)\cdot\cos^2(2014x)\cdot\sin^2\left(\frac{2015x}{2}\right)=1.$$

5.1.4. [ПВГ-2014, 10-11 класс] Решите уравнение

$$\frac{\cos 5x+\cos x}{\cos 4x+\cos 2x}=\frac{1+\cos 4x}{\cos x}.$$

5.1.5. [Физтех-2014] Решите уравнение

$$\sqrt{3}\left(\frac{\sin x}{\sin x-\cos x}+\operatorname{tg} 2x\right)=\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}.$$

5.1.6. [Физтех-2014] Решите уравнение

$$\frac{\cos x\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{7\cos^2 x+5\sin^2 x-6}+\frac{\cos x\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{6-5\cos^2 x-7\sin^2 x}=\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}}$$

5.1.7. [Физтех-2013] Решите уравнение

$$\sqrt{3+4\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\sqrt{3}}+3\cos x.$$

5.1.8. [Ломоносов-2013, 10-11 класс] Решите уравнение

$$\sqrt{6}\sin x+\sqrt{2}|\cos x|=2.$$

5.1.9. [Физтех-2016] Решите уравнение

$$\frac{2\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}=5|\cos x|.$$

5.1.10. [Ломоносов-2016, 10-11 класс] Найдите все решения уравнения

$$\operatorname{arcctg}^2 x=3\operatorname{arctg}^2 x+\frac{\pi^2}{36}.$$

5.1.11. [Ломоносов-2016, 10-11 класс] Найдите все решения неравенства

$$\sqrt{\sin x+\frac{1}{2}}>2\sin x$$

на отрезке $\left[-\frac{1}{2}; \frac{8}{3}\right]$.

5.1.12. [ПВГ-2017 10-11 класс] Решите неравенство

$$\left(\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}\right)^7 > 1.$$

Домашнее задание

5.2.1. Решите уравнение

$$\sin\left(\frac{2x+1}{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

5.2.2. Найдите количество корней уравнения

$$2\sin^2 x + \cos 4x = 0$$

на отрезке $[0; 2\pi]$.

5.2.3. Решите уравнения

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x.$$

5.2.4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y + \sin x = 0, \\ (5\sqrt{\sin x} - 1)(2y + 4) = 0. \end{cases}$$

5.2.5. Найдите количество корней уравнения на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}.$$

§6. Тригонометрические уравнения II.

Домашнее задание

6.1.1. Решите уравнение $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 5x$.

6.1.2. Сколько существует корней уравнения $\sin 3x + |\sin x| = \sin 2x$, принадлежащих промежутку $[0; 2\pi)$?

6.1.3. Найдите количество корней уравнения $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 3\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x + 4 = 0$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

6.1.4. При каких значениях a уравнения $\cos 2x + 2\cos x - 2a^2 - 2a + 1 = 0$ имеет ровно одно решение на промежутке $[0; 2\pi)$?

6.1.5. Решите неравенство

$$\sqrt[4]{\frac{7 - \cos 4x}{2}} > -2\cos x.$$

6.1.6. Решите уравнение
$$\frac{\cos 3x \cos 5x + |\sin 3x \sin 5x|}{\sin 2x} = 2\cos 2x.$$

§7. Показательные и логарифмические уравнения.

Урок

7.1.1. [ОММО-2018, 11 класс] Докажите неравенство
$$\log_{2015} 2017 > \frac{\log_{2015} 1 + \log_{2015} 2 + \ldots + \log_{2015} 2016}{2016}.$$

7.1.2. [ПВГ-2019, 10-11 класс] Решите уравнение $\log_{\frac{2}{9}} 2 = (\log_x 2)(\log_{4x} 2)(\log_{9x} 2)$.

7.1.3. [Физтех-2015, 11 класс] Решите уравнение $x^{\log_2 8x} = \frac{x^7}{8}$.

7.1.4. [ПВГ-2015, 10-11 класс] Найдите наибольшее значение $x+y$, если x и y удовлетворяют неравенству $\log_{\frac{x^2+y^2}{2}} y \geq 1$.

7.1.5. [Физтех-2018] Найдите все значения x, при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_x \left(x - \frac{3}{2}\right)$, $\log_{x-\frac{3}{2}} (x-3)$ и $\log_{x-3} x$ равно произведению двух остальных.

7.1.6. [Физтех-2021] Даны числа $\log_{\sqrt{5x-1}} (4x+1)$, $\log_{4x+1} \left(\frac{x}{2}+2\right)^2$, $\log_{\frac{x}{2}+2} (5x-1)$. При каких x два из этих числа равны, а третье меньше их на 1?

7.1.7. [ПВГ-2021, 10-11 класс] Сколько корней имеет уравнение $2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{x^2-2}$.

7.1.8. [ПВГ-2015, 10-11 класс] Решите уравнение
$$\left|\log_2 \frac{x}{2}\right|^3 + |\log_2 2x|^3 = 28.$$

7.1.9. [Физтех-2014, 11 класс] Решите уравнение
$$\log_{2^{x+1}+1} (3x^2+4x-3) = \log_{10-2^{2-x}} (3x^2+4x-3).$$

7.1.10. [Физтех-2014, 11 класс] Решите уравнение
$$\log_{6x-5} (6x^2-11x+5) \cdot \log_{x-1} (x^3-1) = \log_{6x-5} (6x^2-11x+5) + \log_{x-1} (x^3-1).$$

7.1.11. [ПВГ-2015, 10-11 класс] Найдите корни уравнения
$$\log_2 |\operatorname{tg} \pi x| + \log_4 \frac{\cos \pi x}{2\cos \pi x + \sin \pi x} = 0,$$
принадлежащие отрезку $\left[\frac{9}{4}; 3\right]$.

7.1.12. [Ломоносов-2016, 10-11 класс] Пусть
$$A = \log_{\frac{\pi}{6}} (2z-5) - \log_{\frac{\pi}{6}} (7-2z), \quad B = \cos\left(z + \frac{7}{4}\right) - \cos(2z-1), \quad C = |z-4| - |2z-5|.$$

Найдите все решения неравенства $A \cdot B \cdot C \geq 0$.

7.1.13. [ПВГ-2017, 10-11 класс] Решите неравенство

$$(\pi-3)^{\ln(x^2-2x)} \leq (2-x)^{\ln(\pi-3)}.$$

7.1.14. [Физтех-2013, 11 класс] Решите уравнение

$$\log_{3^x-1}(x^2-11x+19)+\log_{27^{x-1}} x^3=\frac{2}{x-1}.$$

Домашнее задание

7.2.1. Решите неравенство

$$7^{-|x-3|} \cdot \log_2(6x-x^2-7) \geq 1.$$

7.2.2. Найдите наименьшее значение функции $y=3x-\ln(x+3)^3$ на отрезке $[-2.5; 0]$.

7.2.3. Сколько существуют таких натуральных n, что $[\log_4 n]=[\log_3 n]$?

7.2.4. Решите систему

$$\begin{cases} 2\log_3^2(x+2y)=\log_{\frac{1}{3}}(x+2y)\log_{\frac{1}{3}}(x-y)+\log_3^2(x-y), \\ x^2+xy-2y^2=9. \end{cases}$$

§8. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства.

Урок

8.1.1. [Физтех-2019] Решите неравенство

$$\left(\log_{\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}}\left(1+4x^2\right) \cdot \log_{\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}}\left(1-4x^2\right)+1\right) \cdot \log_{1-16x^4}\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{4x}{3}+\frac{5}{6}\right) \geq 1.$$

8.1.2. [Физтех-2019] Решите неравенство

$$\log_{1+x^2}\left(1+27x^5\right)+\log_{1-2x^2+27x^4}\left(1+x^2\right) \leq 1+\log_{1-2x^2+27x^4}\left(1+27x^5\right).$$

8.1.3. [Физтех-2018] Найдите все значения x, при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_{x^2}(x^2-3x+2)$, $\log_{x^2}\frac{x^2}{x-2}$ и $\log_{x^2}\frac{x^2}{x-1}$ равно сумме двух остальных.

8.1.4. [ПВГ-2017, 10-11 класс] Решите уравнение

$$\log_3(2x^2+4x+29)+\log_{\frac{1}{2}}(31-2x-x^2)=\log_{\frac{1}{5}}(3x^2+6x+28).$$

8.1.5. [Физтех-2017] Решите неравенство

$$\log_9 4+(16-\log_3^2 2)\log_{162} 3 \leq 64^{\log_4^2 x}-15 \cdot x^{\log_4 x}.$$

8.1.6. [Физтех-2017] Решите неравенство

$$x^{\log_3 x} - 2 \leq \left(\sqrt[3]{3}\right)^{\log^2_{\sqrt{3}} x} - 2 \cdot x^{\log_3 \sqrt[3]{x}}.$$

8.1.7. [Физтех-2016] Решите неравенство

$$\log_{\frac{x^2-2}{2x-3}} \left(\frac{(x^2-2)(2x-3)}{4}\right) \geq 1.$$

8.1.8. [Физтех-2016] Решите неравенство

$$17^{\frac{5x-3}{3-x}} \cdot 2^{3-x} \leq 68.$$

8.1.9. [Физтех-2015, 11 класс] Решите уравнение

$$\left(\frac{3x}{2}\right)^{\log_3 (8x)} = \frac{x^7}{8}.$$

8.1.10. [ПВГ-2014, 11 класс] Решите неравенство

$$(\log_5 x)^{\log_3 \log_2 x} + (\log_2 x)^{\log_3 \log_5 x} > 2.$$

8.1.11. [Ломносов-2013, 11 класс] Решите неравенство

$$\log_{x^2+3x+2} (x-5)^2 \cdot \log_{-x^2+4x+5} (4-x)^3 \leq 0.$$

8.1.12. [ОММО-2013, 11 класс] Пусть

$$S_f(n) = f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + ... + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f(1).$$

Найдите $S_f(2013)$ для $f(x) = \frac{9^x}{9^x+3}$.

Домашнее задание

8.2.1. Найдите произведение всех корней уравнения

$$4^{2x^2-1} - 4^{(x+1)^2} - 3 \cdot 16^{2(x+1)} = 0.$$

8.2.2. Решите уравнение

$$\log_5(x+2) - 2\log_{x+2} 5 - 1 = 0.$$

8.2.3. Решите уравнение $1 + \log_2(9x^2+5) = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{8x^4+14}$.

8.2.4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\log_5 (5x-3y-1)}{\log_5 (2y-x+3)} = \frac{\log_2 (5+4y-3x)-1}{\log_2 (3x-y+1)}, \\ 2x^2 + y^2 = 3xy + x + 1. \end{cases}$$

Для каждого решения вычислите величину $(2x-y)^3 + (3x-2y-1)^6$.

8.2.5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{2}{\log_3(xy)} - \log_3 \frac{1}{xy} = 3, \\ \log_3 (3+xy) - 2\log_9 y = \log_3(y-1). \end{cases}$$

§9. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства II.

Урок

9.1.1. [Физтех-2016, 11 класс] Решите неравенство

$$(x^2-3x+3)^{4x^3+5x^2} \le (x^2-3x+3)^{2x^3+18x}.$$

9.1.2. [Физтех-2015, 11 класс] Решите неравенство

$$\frac{\log_3 x^4 \cdot \log_{\frac{1}{3}} x^2 + \log_3 x^2 - \log_{\frac{1}{3}} x^4 + 2}{\left(\log_{\frac{1}{3}} x^2\right)^3 + 64} \le 0.$$

9.1.3. [ПВГ-2012, 10-11 класс] Решите уравнение

$$x - \sqrt{x} \cdot 2^{-x^6} = 2^{1-2x^6}.$$

9.1.4. [Ломоносов-2012, 11 класс] Найдите множество значений функции

$$f(x) = \log_2 x \cdot \log_2 \frac{64}{x} \cdot \sqrt{\log_3 (27-3x) \cdot \log_3 \frac{9}{27-3x}}.$$

9.1.5. [Физтех-2012, 11 класс] Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{x-5}{x+3}\right) - \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^2}{2} + 4x + 9\right) \le 2\log_4 (x^2+5x+6).$$

9.1.6. [ПВГ-2011, 10-11 класс] Решите уравнение

$$\left(3\log_{|5x-3|} 2 \cdot \log_2 |5x-3| - x\right) \sqrt{5x^2-9x+4} = 0.$$

9.1.7. [Ломоносов-2011, 11 класс] Решите неравенство

$$\log_3 3x^2 < \log_3 \left(3 + \frac{4}{x}\right) \cdot \log_3 (3x^2+4x).$$

9.1.8. [Физтех-2011, 11 класс] Решите неравенство

$$\frac{2}{\log_{x-1} \left(\frac{5}{2} - x\right)} \le 1.$$

9.1.9. [ПВГ-2010, 10-11 класс] Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{16}} x \ge -2^{-x}.$$

9.1.10. [Ломоносов-2010, 11 класс] Решите неравенство

$$\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^{(\log_2 3)^{4-x^2}} \le \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-(\log_3 2)^{2x-1}}.$$

9.1.11. [Физтех-2010, 11 класс] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x (y+1) = 4\log_{x+2}\sqrt{y-1}, \\ \log_{y-1}(x+2) = \log_x\left(\frac{x^3}{x+1}\right). \end{cases}$$

9.1.12. [ПВГ-2010, 10-11 класс] Найдите все x из отрезка $[0; 2\pi]$, для которых

$$\log_{\sin x}\cos x > \log_{\operatorname{ctg} x}\cos x.$$

Домашнее задание

9.2.1. Сравните $\log_3 4$ и $\log_4 5$.

9.2.2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{x+5}(6-x)\cdot\log_{4-x}(x+3) \geq 0, \\ |2x-6|^{x+1} + |2x-6|^{-x-1} \leq 2. \end{cases}$$

9.2.3. Решите неравенство

$$\log_{\frac{x}{3}}\left(\log_x\sqrt{3-x}\right) \geq 0.$$

9.2.4. Решите неравенство

$$\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2) \leq 2.$$

9.2.5. Решите неравенство

$$\left(\log_{|x+\frac{1}{2}|}\left(\frac{1}{4}-x\right)-1\right)\cdot\log_{16}\left(\frac{1}{4}-x\right) > \log_4\frac{\frac{1}{4}-x}{\left|x+\frac{1}{2}\right|}.$$

§10. Планиметрия I.

Урок

10.1.1. [Физтех-2021, 9 класс] Высоты CF и AE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке ABC. Точки M и N – середины отрезков AH и CH соответственно. Известно, что $FM = 2$, $EN = 5$, и при этом $FM \parallel EN$. Найдите $\angle ABC$, площадь треугольника ABC и радиус описанной около него окружности.

10.1.2. [ОММО-2020, 11 класс] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке E. Через точку E проведена касательная к окружности, которая пересекает катет CB в точке D. Найдите длину DB, если $AE = 6$, а $BE = 2$.

10.1.3. [Физтех-2020, 11 класс] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

10.1.4. [ПВГ-2019, 10-11 класс] В равнобедренном треугольнике ABC на высоте BH, равной основанию AC, как на диаметре, построена окружность, пересекающая боковую сторону BC в точке F. Каково отношение площади треугольника FCH к площади треугольника ABC? Какая часть площади треугольника ABC находится внутри окружности?

10.1.5. [Ломоносов-2019, 10-11 класс] В треугольнике ABC, площадь которого равна 20, проведена медиана CD. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если известно, что $AC = \sqrt{41}$, а центр окружности, вписанной в треугольник ACD, лежит на окружности, описанной около треугольника BCD.

10.1.6. [ОММО-2019, 11 класс] Точка O лежит внутри равнобедренного прямоугольного треугольника ABC. Расстояние от неё до вершины A прямого угла равно 6, до вершины B равно 4, до вершины C равно 8. Найти площадь треугольника ABC.

10.1.7. [Физтех-2018, 11 класс]Окружность Ω радиуса $\sqrt{3}$ касается сторон BC и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AB в точках M и N (M лежит между A и N) так, что отрезок MK параллелен AC, $KC = 1$, $AL = 4$. Найдите $\angle ACK$, MK, AB и площадь треугольника CMN.

§11. Планиметрия II.

Урок

11.1.1. [ПВГ-2019, 10-11 класс] В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle CAD = \angle CDB$ и $\angle BAD = \angle CDA = 60°$.
1. Можно ли в четырехугольник ABCD вписать окружность?
2. Найдите минимум отношения стороны BC к стороне AD.

11.1.2. [Физтех-2018, 10 класс] В выпуклом четырёхугольнике ABCD проведена диагональ BD, и в каждый из полученных треугольников ABD и BCD вписана окружность. Прямая, проходящая через вершину B и центр одной из окружностей, пересекает сторону DA в точке M. При этом $AM = \frac{8}{5}$ и $MD = \frac{12}{5}$.Аналогично, прямая, проходящая через вершину D и центр второй окружности, пересекает сторону BC в точке N. При этом $BN = \frac{30}{11}$ и $NC = \frac{25}{11}$.
а) Найдите отношение $AB : CD$.
б) Найдите длины сторон AB и CD, если дополнительно известно, что данные окружности касаются друг друга.

11.1.3. [Физтех-2018, 10 класс] Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P. Известно, что расстояния от точки P до сторон AB, BC,CD, DA равны 4, $\sqrt{3}$, $\frac{8}{\sqrt{19}}$ и $8\sqrt{\frac{3}{19}}$ соответственно (основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны, лежат на этих сторонах).
а) Найдите отношение $AP : PC$.
б) Найдите длину диагонали BD, если дополнительно известно, что $AC = 10$.

11.1.4. [Физтех-2018] Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с радиусом 5 описана вокруг треугольника ABM, где M – точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка MK равна 6. Найдите длины отрезков AD, BK и периметр треугольника EBM.

11.1.5. [Ломоносов-2015, 10-11 класс] В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и DB перпендикулярны сторонам DC и AB соответственно. Из точки В проведён перпендикуляр на сторону AD, пересекающий AC в точке O. Найдите AO, если $AB = 4$, $OC = 6$.

11.1.6. [ПВГ-2015, 10-11 класс] В четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 4$, $CD = 5$ вписали окружность и вокруг него описали окружность. Найдите площадь четырёхугольника.

11.1.7. [Ломоносов-2014, 10-11 класс] Прямоугольник, отношение сторон которого равно 5, имеет наибольшую площадь среди всех прямоугольников, вершины которых лежат на сторонах данного ромба, а стороны параллельны диагоналям ромба. Найдите острый угол ромба.

11.1.8. [ОММО-2014, 11 класс] Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а боковые стороны образуют угол 30°. Основания имеют длины 6 и 2. Найдите высоту трапеции.

11.1.9. [Ломоносов-2013, 10-11 класс] В трапеции $ABCD$, где $BC \parallel AD$, а диагонали пересекаются в точке O, на отрезке BC выбрана точка K так, что $BK : CK = 2 : 1$, а на отрезке AD выбрана точка M так, что $AM : MD = 1 : 2$. Найдите площадь треугольника COD, если $AD = 5$, $BC = 2$,$KM = \frac{7}{3}$, а $\cos\angle CAD = \frac{1}{3}$.

Домашнее задание

11.2.1. Найдите большее из оснований трапеции, если ее меньшее основание равно 6, а средняя линия делится диагоналями на три равные части.

11.2.2. Стороны параллелограмма равны 8 и 11. Найдите большую из диагоналей четырехугольника, образованного пересечениями биссектрис внутренних углов параллелограмма.

11.2.3. В трапеции $ABCD$ $BC = BO$, где BC - основание трапеции, а - точка пересечения ее диагоналей. MN - средняя линия трапеции, а точки и F - середины отрезков и соответственно.
а) Докажите, что четырехугольник $MENF$ является трапецией.
б) Найдите периметр четырехугольника $MENF$, если периметр трапеции $ABCD$ равен 27.

11.2.4. Прямая, проходящая через вершину D параллелограмма $ABCD$, делит его площадь в отношении 8 : 3. Эта прямая пересекает диагональ длины 34 в точке и делит ее на два отрезка. Какова длина большего из них?

11.2.5. Вершины ромба расположены на сторонах параллелограмма, а стороны ромба параллельны диагоналям параллелограмма. Найдите отношение площадей ромба и параллелограмма, если отношение диагоналей параллелограмма равно 3 : 2.

11.2.6. Найдите наибольшую возможную площадь параллелограмма, если синус его острого угла равен $\frac{2}{\sqrt{29}}$, одна из диагоналей равна 26, а одна из его высот равна 10.

11.2.7. В прямоугольнике BCD со сторонами $= 6$ и $C = 14$ на середине расположена точка L. На стороне AD находятся точки и N, причем $MD = 8$. Прямая CM пересекает прямую LN в точке . Найдите минимально возможную длину отрезка MN, если площадь треугольника MNP равна 4.

§12. Планиметрия III.

Урок

12.1.1. [ПВГ-2015, 10-11 класс] Города A, B, C, D, E лежат на одной окружности и попарно соединены прямолинейными дорогами. Два велосипедиста выехали одновременно из A в D и из C в E, повстречавшись в пути. Затем они выехали одновременно из D в B и из E в C, опять повстречавшись в пути. Наконец, они выехали одновременно из B в E и из C в B, прибыв в пункты назначения одновременно. Найдите BC, если $AE = 2$ км и $CD = 4$ км, а скорость каждого велосипедиста постоянна.

12.1.2. [Физтех-2021, 10 классы] Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC. Окружность с диаметром BD пересекает стороны AB и BC в точках P и T соответственно. Точки M и N – середины отрезков AD и CD соответственно. Известно, что $PM \parallel TN$.
а) Найдите угол ABC.
б) Пусть дополнительно известно, что $MP = \frac{1}{2}$, $NT = \frac{5}{2}$, $BD = 2$. Найдите площадь треугольника ABC.

12.1.3. [Физтех-2021, 9-10 классы] Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, и при этом треугольники BOC и AOD – правильные. Точка T симметрична точке O относительно середины стороны CD.
а) Докажите, что ABT – правильный треугольник.
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 3$, $AD = 7$. Найдите отношение площади треугольника ABT к площади четырёхугольника $ABCD$.

12.1.4. [Физтех-2020, 11 класс] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D, пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E, а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 2. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1.
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 2$.

12.1.5. [ОММО-2019, 11 класс] Дан треугольник ABC. На отрезках AB и BC выбраны точки X и Y соответственно так, что $AX = BY$. Оказалось, что точки A, X, Y и C лежат на одной окружности. Пусть BL – биссектриса треугольника ABC (L на отрезке AC). Докажите, что $XL \parallel BC$.

12.1.6. [Физтех-2019, 11 класс] Хорды AB и CD окружности Ω с центром O имеют длину 4. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L, причём $AL : LC = 2 : 3$.
а) Найдите AP.
б) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности равен $\frac{5}{2}$, а точка T – центр окружности,

вписанной в треугольник ACP. Найдите длину отрезка PT и площадь треугольника ACP.

12.1.7. [ПВГ-2019, 10-11 класс] В треугольнике ABC, $\angle A = 2\alpha$, биссектрисы BD и CE пересекаются в точке I. Найдите наименьший возможный радиус окружности, описанной около треугольника DEI, если сумма длин отрезков DI и EI равна $2d$.

12.1.8. [Ломоносов-2018, 10-11 класс] На стороне AC треугольника ABC взяты точки E и K, причём точка E лежит между точками A и K и $AE : EK : KC = 3 : 5 : 4$. Медиана AD пересекает отрезки BE и BK в точках L и M соответственно. Найдите отношение площадей треугольников BLM и ABC.

12.1.9. [Физтех-2017] Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса 7. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи BC и AD пересекаются в точке Q. Известно, что треугольники ADP и QAB подобны (вершины не обязательно указаны в соответствующем порядке).
а) Найдите AC.
б) Пусть дополнительно известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD касаются отрезка AC в точках K и T соответственно, причём $CK : KT : TA = 6 : 1 : 7$ (точка T лежит между K и A). Найдите $\angle DAC$ и площадь четырёхугольника $ABCD$.

12.1.10. [ОММО-2017, 11.7] В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD > BC$) боковая сторона равна 20, угол BAC равен 45°. Пусть O – центр окружности, описанной вокруг ABCD. Оказалось, что прямые OD и AB перпендикулярны. Найдите длину основания AD трапеции.

Домашнее задание

12.2.1. В треугольнике $= 4$, $= 11$. Точки и L на сторонах и соответственно таковы, что $AK = 3$, $CL = 4$. M - середина отрезка KL, N - точка пересечения прямых и . Найдите значение выражения $11 \cdot \frac{AN}{NC}$.

12.2.2. Расстояние от ортоцентра треугольника до вершины равно стороне . Какое наибольшее значение (в градусах) может быть у угла ?

12.2.3. В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 - середины сторон BC, CA и AB соответственно. Найдите длину стороны AC, если известно, что сумма векторов $3 \cdot \overrightarrow{AA_1} + 4 \cdot \overrightarrow{BB_1} + 5 \cdot \overrightarrow{CC_1}$ равна вектору с координатами $(6\sqrt{5}, 3\sqrt{5})$.

12.2.4. В треугольник вписана окружность радиуса 21. Одна из точек касания с ней делит соответствующую сторону треугольника на отрезки длин 23 и 27. Найдите периметр треугольника.

12.2.5. Биссектриса угла $\angle C = 60°$ треугольника равна $5\sqrt{3}$. Найдите $\operatorname{tg} \angle A$ (в ответе впишите величину $\sqrt{3} \operatorname{tg} \angle A$) и длину , если $C : BC = 5 : 2$.

12.2.6. Вершины ромба расположены на сторонах параллелограмма, а стороны ромба параллельны диагоналям параллелограмма. Найдите отношение площадей ромба и параллелограмма, если отношение диагоналей параллелограмма равно 3 : 2.

12.2.7. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а боковые стороны образуют угол 30°.

Основания имеют длины 6 и 2. Найдите высоту трапеции.

12.2.8. Прямоугольник, отношение сторон которого равно 5, имеет наибольшую площадь среди всех прямоугольников, вершины которых лежат на сторонах данного ромба, а стороны параллельны диагоналям ромба. Найдите острый угол ромба.

12.2.9. На боковых сторонах и CD трапеции с основаниями AD и отмечены точки и Q соответственно, причем $PQ \parallel AD$. Прямая PQ разбивает трапецию на две трапеции, площади которых относятся как $1:2$. Найдите наименьшее возможное значение PQ, если $AD = 5$ и $BC = 1$. Найдите наименьшее возможное значение PQ, если $AD = 5$ и $BC = 1$.

12.2.10. Основания трапеции равны 6 и 20. Найдите больший из отрезков, на которые среднюю линию делит одна из ее диагоналей.

§13. Планиметрия IV.

Домашнее задание

13.1.1. Найдите углы ортотреугольника (треугольника, вершины которого - основания высот) в треугольнике с углами $15°$, $80°$, $85°$. В ответе укажите наименьший из них (в градусах).

13.1.2. A и CD - две параллельные хорды, расположенные по разные стороны от центра окружности радиуса 15. $AB = 18$, $CD = 24$. Найдите расстояние между хордами.

13.1.3. В параллелограмме $ABCD$ известны стороны $AB = 50$, $BC = 21$ и $\cos\angle BAD = 5$ Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BAD и BCD.

13.1.4. На плоскости расположены окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 и радиусами $r_1 = 1$ и $r_2 = 4$ соответственно. Точка находится на расстоянии 3 от прямой O_1O_2. Из точки проведены касательные PA_1 и PB_1 к окружности ω_1 и касательные PA_2 и PB_2 к окружности ω_2 ($A_1, B_1 \in \omega_1$; $A_2, B_2 \in \omega_2$). Точки M_1 и N_1 являются серединами отрезков PA_1 и PB_1, а точки M_2 и N_2 являются серединами отрезков PA_2 и PB_2. Прямые M_1N_1 и M_2N_2 пересекаются в точке . Найдите расстояние от проекции точки на прямую O_1O_2 до точки O_1, если известно, что $O_1O_2 = 15$.

13.1.5. Дан треугольник со стороной $= 21$. К прямым и проведены высоты и BF. Известно, что, $17AH = 30R, 5BH = 6R$, где - точка пересечения прямых AE и BF, R - радиус окружности, описанной около треугольника . Найдите максимально возможную площадь треугольника .

13.1.6. Найдите максимально возможное количество острых углов выпуклого многоугольника.

13.1.7. В равносторонний треугольник со стороной 3 вписана окружность, которая касается внешним образом трех таких же окружностей в точках касания со сторонами треугольника. Центры внешних окружностей - O_A, O_B, O_C (эти точки лежат напротив точек , и соответственно). Найдите площадь шестиугольника, получающегося пересечением треугольников и $O_AO_BO_C$.

13.1.8. На столе лежит правильный 100-угольник. В вершинах этого 100-угольника написаны числа $1, 2, \ldots, 100$. Эти числа переписывают в порядке удаления от выбранного края стола. Если две вершины находятся на равном расстоянии от края, сначала выписывается левое число, затем правое. Выписаны всевозможные наборы чисел, соответствующие разным положениям 100−угольника. Вычислить сумму чисел, стоящих в этих наборах на 13-х местах слева.

13.1.9. Какое минимальное количество вершин может быть у многоугольника, чтобы он при повороте вокруг некоторой точки на $70°$ переходил в себя?

13.1.10. У Васи много квадратов со стороной 1 и правильных пятиугольников со стороной 1. Он хочет сложить из них «кольцо», прикладывая имеющиеся многоугольники друг к другу сторонами так, чтобы квадраты и пятиугольники чередовались. При этом образовавшийся внутри кольца многоугольник должен быть выпуклым. Какое наименьшее количество фигур ему придется использовать?

§14. Векторы.

Домашнее задание

14.1.1. Найдите углы ортотреугольника (треугольника, вершины которого - основания высот) в треугольнике с углами $15°$, $80°$, $85°$. В ответе укажите наименьший из них (в градусах).

14.1.2. Найдите угол между прямой, проходящей через точки $(-3; 0; 1)$ и $B(2; 1; -1)$ и прямой , проходящей через точки $(-2; 2; 0)$ и $D(1; 3; 2)$. В ответ укажите косинус этого угла.

14.1.3. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 1. Ребро SA пирамиды перпендикулярно плоскости основания, а его длина равна $\sqrt{3}$. Плоскость αпараллельна прямым SB и AC, а плоскость β параллельна прямым SC и AB. Найти косинус угла между этими плоскостями.

14.1.4. Чему равен наибольший угол между векторами (x, y, z) и (y, z, x)? Ответ выразите в градусах.

14.1.5. В тетраэдре $ABCD$ известно, что $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 5$, $AD = DB = 2$, $DC = 4$. Найдите квадрат длины медианы тетраэдра (отрезок, соединяющий вершину с центром масс противолежащей грани), проведённой из вершины D, умноженный на 9.

14.1.6. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$, найдите расстояние между вершинами A и $D1$.

14.1.7. Высота SH тетраэдра $SABC$ падает в ортоцентр (точку пересечения высот) треугольника ABC. Найдите отношение площадей треугольников ASC и ASB, если $SC = \sqrt{12}$, $SB = \sqrt{3}$, $BC = \sqrt{15}$.

14.1.8. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми 1 и $BE1$. Ответ напишите в градусах.

14.1.9. Известно, что точки , , и D не лежат в одной плоскости. Найдите суммарное число точек пересечения между прямыми A и CD, прямыми и BD, прямыми AD и BC.

14.1.10. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, рёбра основания которой равны $2\sqrt{7}$.

Сечение, проходящее через боковое ребро AA_1 и середину M ребра B_1C_1 является квадратом. Найдите расстояние между прямыми A_1B и AM.

14.1.11. Множество Ф состоит из точек, координаты которых (x, y) в прямоугольной системе координат удовлетворяют соотношению $= |y - 2x^2|$. При каком наибольшем значении а прямая $y - 3x = a$ будет иметь меньше трех общих точек с множеством Ф?

§15. Задачи на координатной плоскости.

Урок

15.1.1. [Физтех-2019, 10 класс] На координатной плоскости рассамтривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенства

$$\begin{cases} |x-1| + |5-x| \le 4, \\ \frac{x^2-6x+2y+7}{x+y-4} \le 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите её площадь.

15.1.2. [ПВГ-2018, 10-11 класс] Найдите площадь фигуры, заданно на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} 3^{\sqrt{x}} - 3^{2\sqrt{y}} \ge 2\sqrt{y} - \sqrt{x}, \\ x^2 + y^2 \le 9 + 2xy. \end{cases}$$

15.1.3. [ПВГ-2018, 10-11 класс] Найдите площадь фигуры, заданно на координатной плоскости неравенством

$$\arcsin 2x + \arccos 2x \ge \frac{\pi}{4} \cdot (y^2 - 2).$$

15.1.4. [Физтех-2017, 10 класс] а) Изобразите на координатной плоскости фигуру Ф, координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - y^2 \le 2(x-y), \\ x^2 + y^2 \le 4(x+y-1). \end{cases}$$

б) Найдите площадь фигуры Ф и расстояние от точки T $(0; 4)$ до ближайшей точки фигуры Ф.

15.1.5. [Физтех-2017, 10 класс] Изобразите на плоскости фигуру Ф, состоящую из точек $(x; y)$ координатной плоскости таких, что выполнена система неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3y^2 + 4x + 4} \le 2x + 1, \\ x^2 + y^2 \le 4. \end{cases}$$

Определите, из скольких частей состоит фигура Ф.

15.1.6. [Физтех-2016, 10 класс] Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$|16 + x - x^2 - y^2| + |6x| = 16 + 12x - x^2 - y^2,$$

и найдите площадь полученной фигуры.

15.1.7. [Физтех-2016, 10 класс] Изобразите на плоскости $(x;y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению
$$|15x| + |8y| + |120 - 15x - 8y| = 120,$$
и найдите площадь полученной фигуры.

15.1.8. [ПВГ-2013, 10-11 класс] Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством
$$\sqrt{\arcsin x} \le \sqrt{\arccos y}.$$

15.1.9. [ПВГ-2013, 10-11 класс] Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством
$$||x| - 6| + ||y| - 7| \le 10.$$

15.1.10. [Физтех-2003, 11 класс] Дана система неравенств
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4|x|, \\ |x| + |y| \ge 2, \\ x^2 - y^2 + 16 - 8x \ge 0. \end{cases}$$
Найти площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют первому неравенству системы; первым двум неравенствам системы; всем трем неравенствам системы.

15.1.11. [Физтех-1999, 11 класс] Дана система неравенств
$$\begin{cases} |x| + |y| \le 2, \\ x^2 + y^2 \ge 4(x + y - 1), \\ (y - 3x - 2)(3y - x + 2) \le 0. \end{cases}$$
Найти площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют

а) первому неравенству системы;

б) первым двум неравенствам системы;

в) всем трем неравенствам системы.

15.1.12. [Физтех-1999, 11 класс] На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{xy}{15}} \ge y - 2x, \\ \frac{x-25}{x^2+y^2-625} > \frac{1}{26} \end{cases}$$
Изобразить фигуру М и найти ее площадь.

Домашнее задание

15.2.1. Найдите площадь фигуры, задаваемой системой неравенств:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 12x - 4y + 24 \le 0, \\ x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 \le 0. \end{cases}$$

15.2.2. Сколько вершин у фигуры, задающейся на плоскости следующей совокупностью неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} -1 \leq y \leq 5 - |x|, \\ 0 \leq y \leq 8 - \left|\frac{1}{2}x - 2\right| - \left|\frac{1}{2}x + 2\right|. \end{array}\right.$$

15.2.3. Найдите площадь фигуры, заданной двойным неравенством

$$\frac{|x+1| + |x-1|}{2} \leq y \leq 4.$$

15.2.4. Найдите площадь S фигуры Φ, кординаты точек которой удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} |x| + |y| \leq 3, \\ x^2 + y^2 \geq 3 \cdot (2y - 2x - 3), \\ (2x + y - 3)(x + 5y + 3) \leq 0. \end{cases}$$

15.2.5. На координатной плоскости изображена фигура M, состоящая из точек, координаты $(x; y)$ которых таковы, что выражние

$$4 + p^2(2y - x^2 + 14) - p^{-2}(x^2 + 4x + 2y).$$

неотрицательно при всех $p \neq 0$. Оказалось, что существует такой прямоугольник $ABCD$, что прямая BD параллельная оси Ox и множество M вписано в него (каждая сторона прямоугольника касается границы множества). Найдите квадрат площади этого прямоугольника.

Борис Викторович Трушин

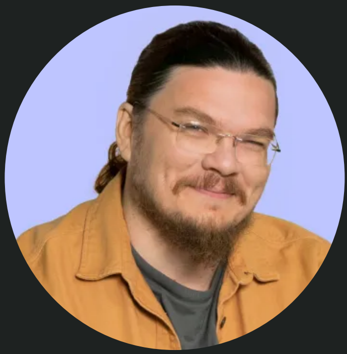
Олимпиадная Математика: Математика. Задачи для подготовки к олимпиадам по математике для школьников 10-11 классов/ Б.В. Трушин - Москва: Издательство IBDb, 2025
ISBN - 438-424-68-36-4

Дизайн обложки и LATEX-вёрстка - А. Баринов

РЕКОМЕНДОВАНО МИНИСТЕРСТВОМ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МИНОБРНАУКИ РОССИИ МФТИ IBDb

– Выпускник МФТИ, кандидат физико-математических наук
– Средний балл учеников на ЕГЭ — 86
– Преподаёт с 1999 года
– Каждый третий ученик набирает 90+ на экзамене
– Помог более 40 000 школьникам сдать ЕГЭ на 80+
– Автор учебников по алгебре для 8–9 классов (в соавторстве с Н. Агахановым, Л. Петерсон и другими)
– Бывший член жюри Всероссийской олимпиады школьников по математике
– Автор YouTube-канала по математике с аудиторией более 380 тысяч подписчиков



Борис Трушин

6 476467 642420