Многочлены 102

Разложить на множители: $(a+b+c)^5 - a^5 - b^5 - c^5 =$
$= (a+b)(a+c)(b+c)(5(a^2+b^2+c^2) + X(ab+bc+ac))$

$a=1 \quad b=1 \quad c=0 \; : \; 30 = 2\cdot(10+X) \Rightarrow X = 5$

$Q(x;y) = Q(y;x) \qquad B(x;y) = B(y;x) \qquad A(x;y) \neq A(y;x)$

$Q(x;y) = B(x;y) \cdot A(x;y)$

$Q(y;x) = B(y;x) \cdot A(y;x)$

Дано: $\left(\frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}\right)^2 + \left(\frac{b^2-c^2-a^2}{2ca}\right)^2 + \left(\frac{c^2-a^2-b^2}{2ab}\right)^2 = 1$

Д-ть: какое-то из слагаемых $= 0$

$a^2(a^2-b^2-c^2)^2 + b^2(b^2-c^2-a^2)^2 + c^2(c^2-a^2-b^2)^2 - 4a^2b^2c^2 = 0$

отн a^2 – многочлен 3-ей степ. $a^2 = b^2+c^2$; $a^2 = b^2-c^2$; $a^2 = c^2-b^2$

Дано ур-е: $x^3 + x^2 - 10x + 1 = 0$ с корнями x_1, x_2, x_3

Найти многочлен с корнями x_1^3, x_2^3, x_3^3

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -10 \\ x_1x_2x_3 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -34 & a \\ x_1^3x_2^3 + x_1^3x_3^3 + x_2^3x_1^3 = -967 & б \\ x_1^3x_2^3x_3^3 = -1 & c \end{cases}$$

$a:\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 10(x_1 + x_2 + x_3) - 3 = -34$

$б:\ -1000 = \underline{x_1^3x_2^3 + x_2^3x_3^3 + x_1^3x_3^3} + 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) \cdot$

$\cdot\ x_1x_2x_3 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) - 3x_1^2x_2^2x_3^2$

$x_1^3x_2^3 + x_2^3x_3^2 + x_1^3x_3^3 = -1000 + 30 + 3 = -967$ $\Rightarrow x^3 + 34x^2 - 967x + 1 = 0$

$$(a+b+c)^3 = \begin{array}{l} a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b+c)(ab+bc+ac) - 3abc \\ a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + b^2a + c^2a + a^2c + c^2b + b^2c) + 6abc \end{array}$$

Дано: $x^3 + x - 1 = 0$

Найти: многочлен корни которого – кубы исходного

$x_0: \ x_0^3 + x_0 - 1 = 0 \iff x_0^3 = 1 - 3x_0^3 + 3x_0^6 - x_0^9$

$t^3 - 3t^2 + 4t - 1 = 0$

Найти: $\log_x(x^4 - 8x^2 + 2)$, если $x^{10} - 2x^6 + 4x^2 = 1$

$2x^{10} - 4x^6 = -8x^2 + 2 \Rightarrow x^4 - 8x^2 + 2 = x^4 + 2x^{10} - 4x^6 =$

$= x^4(2x^6 - 4x^2 + 1) = x^{14} \Rightarrow \log_x x^{14} = 14$

Дано: $x^3 + x - 1 = 0$

Найти: многочлен корень которого обратен.

$x_0: \ x_0^3 + x_0 - 1 = 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{x_0^3} = 0$

$1 + t^2 - t^3 = 0$

Дано: $x^3 - 11x^2 + ax - 8 = 0$.

Найти: a – ? 3 корня (разл, вещ) геом. прогрессия

$b_1, \; b_1 q, \; b_1 q^2$ – наши корни

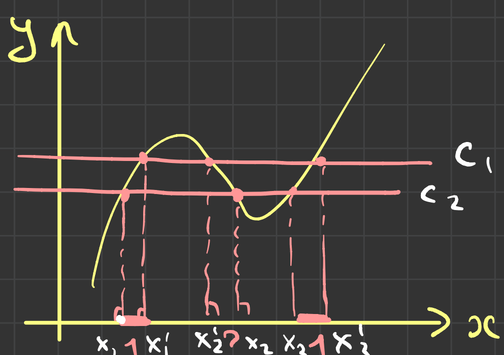
$$\begin{cases} b_1 + b_1 q + b_1 q^2 = 11 \\ b_1^2 q + b_1^2 q^2 + b_1^2 q^3 = a \\ b_1^3 q^3 = 8 \iff b_1 q = 2 \end{cases}$$

$\to 8 - 44 + 2a - 8 = 0 \qquad a = 22$

$x^3 - 11x^2 + 22x - 8 = 0$

$(x-2)(x^2 - 9x + 4) = 0 \qquad D > 0$

Дано: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ Найти: длину



$ax^3 + bx^2 + cx + d = c_1 \qquad x_1, x_2, x_3$

$ax^3 + bx^2 + cx + d = c_2 \qquad x_1', x_2', x_3'$

$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 + x_2 + x_3 = x_1' + x_2' + x_3'$

$x_1' + x_2' + x_3' = -\frac{b}{a} \qquad \underbrace{x_1' - x_1}_{1} + \underbrace{x_3' - x_3}_{1} = \underbrace{x_2' - x_2}_{2}$

Есть ли кратные корни: $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}=P(x)$

$P(x)=(x-x_0)^2Q(x)$: $P'(x)=2(x-x_0)\cdot Q(x)+\underline{(x-x_0)^2Q'(x)}$

$P(x)=(x-x_0)Q(x)$: $P'(x)=Q(x)+Q'(x)(x-x_0)$

$(Q(x_0)\neq 0)$ $\qquad P'(x_0)\neq 0$

$P(x)=(x-x_0)^3Q(x)$: $P'(x)=3(x-x_0)^2Q(x)+\underline{(x-x_0)^3Q'(x)}$

$P''(x)=6(x-x_0)\cdot Q(x)+3(x-x_0)^2Q'(x)$

$P(x)=(x-x_0)^kQ(x)$: $P'(x_0)=0$ $\qquad P^{(k-1)}(x_0)=0$

$P''(x_0)=0$ $\quad\ldots\quad$ $P^{(k)}(x_0)\neq 0$

как мы докажем $\exists x$:

$$\begin{cases}1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}=0\\ 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=0\end{cases}\Rightarrow \frac{x^n}{n!}=0 \qquad x=0,\ \text{но } P(0)\neq 0 \Rightarrow \text{нет}$$

Решить ур-е: $x = c\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + b\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + a\frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)}$

$x = a$ л.ч. $= a$, пр.ч. $= a$, аналогично $x = b$ и $x = c$

$\Rightarrow$ т.к. корней хотя бы 3, а степень не более 2-ой, то равенство тождеств.

Составить многочлен: $(1;0)$ $(2;5)$ $(3;-7)$

$P(x) = ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 5 \\ 9a + 3b + c = -7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3a + b = 5 \\ 8a + 2b = -7 \end{cases} \qquad 2a = -17$$

$c = -22$

$b = 30{,}5$

$a = -8{,}5$

Составить многочлен; $(x_1; y_1)$; $(x_2; y_2)$; ...; $(x_n; y_n)$

$(x_1; y_1)$ $(x_2; 0)$ ... $(x_n; 0)$

$$P_1(x) = y_1 \cdot \frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)}$$

$$P_2(x) = y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)}$$

$$\vdots$$

$$P_n(x) = y_n \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})}$$

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x) + \ldots + P(x_n)$$ ← интерпол. мн-чен Лагранжа

Домашняя работа

1. Докажите, что если $xyz = (x+y+z)(xy+yz+zx)$, то среди чисел x, y, z найдутся 2 числа, сумма которых равна нулю.

2. Докажите, что $\frac{1}{x^{99}} + \frac{1}{y^{99}} + \frac{1}{z^{99}} = \frac{1}{x^{99}+y^{99}+z^{99}}$ если известно, что $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z}$

3. Существуют ли вещественные числа x, y, z разность никакой пары из которых не равна нулю таких, что $x^4y^3 + y^4z^3 + z^4x^3 = y^4x^3 + z^4y^3 + x^4z^3$.

4. Известно, что уравнение $ax^5 + bx^4 + c = 0$ имеет три различных вещественных корня. Докажите, что уравнение $cx^5 + bx + a = 0$ имеет три корня.

5. Известно, что a, b, c - различные корни уравнения $x^3 - x + 1 = 0$. Найдите многочлен наименьшей степени с целыми коэффициентами корнями которого являются числа $\frac{a+1}{a-1}, \frac{b+1}{b-1}, \frac{c+1}{c-1}$.

6. Докажите, что многочлен $P(x) = x^3 - 2x^2 - 10x - 3$ имеет три различных вещественных корня и найдите многочлен $Q(x)$ третьей степени с корнями $a^2b^2c, b^2c^2a, c^2a^2b$, где a, b, c - корни многочлена $P(x)$.

7. Сколько существует уравнений $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ с различными коэффициентами a, b, c корнями которых являются числа a, b, c?

8. При каких значениях параметров a, b, c множество решений уравнения $x^5 + 2x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ состоит в точности из чисел 1 и -1?

9. Докажите, что при любом натуральном n выполняется равенство $x^n + y^n + z^n = a^n + b^n + c^n$, если нам известно, что:

$$\begin{cases} x + y + z = a + b + c \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3 + b^3 + c^3 \end{cases}$$

10. Про многочлен $P(x) = x^{10} + a_9x^9 + \ldots + a_0$ известно, что $P(1) = P(-1), \ldots, P(5) = P(-5)$. Докажите, что $P(x) = P(-x)$ для любого действительного x

11. Корабль с постоянной скоростью проплывает по прямой линии мимо небольшого острова. Капитан каждый час измеряет расстояние до острова. В 12, 14 и 15 часов расстояния равнялись 7, 5 и 11 километров соответственно. Каким было расстояние до острова в 13 часов? Чему оно будет равно в 16 часов?

12. Определите значение многочлена $P(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ в точке $x = 2018$, если $P(2019) = P(2023) = 0, P(2020) = P(2022) = 3, P(2021) = 4$