Многочлены

101

поступашки

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

$x^2 + 3x - 7$ – многочлен

$x^3 + x \sin x$ – не многочлен

$A(x)$ на $B(x)$ с остатком

$$\boxed{A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x) \qquad \deg R(x) < \deg B(x)}$$

$$x^4 + x^3 + 3x^2 + 1 = (x^2+1)(x^2+x+2) - x - 1$$

$$A(x) = B(x)\,Q_1(x) + R_1(x)$$
$$= B(x)\,Q_2(x) + R_2(x)$$

$$B(x)\left(Q_1(x) - Q_2(x)\right) = R_2(x) - R_1(x)$$

$x^{2023} + 2023x^{2022} + 2022$ ост. от дел на $x-1$

$x^{2023} + 2023x^{2022} + 2022 = (x-1)Q(x) + const$

$x = 1 \qquad \underline{4046 = const}$

а если "+" ???

$x^{2023} + 2023x^{2022} + 2022 = (x^2-1)Q(x) + ax + b$

$x = 1 \qquad \begin{cases} 4046 = a + b \\ 4044 = -a + b \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4045 \end{cases} \qquad R(x) = x + 4045$

Теорема Безу: $P(x)$ на $x - a \Rightarrow$ остаток $= P(a)$

$P(a) = 0 \qquad P(x) = (x-a)Q(x) + P(a) = (x-a)Q(x)$

$2x^3 + 3x^2 + 5x - 10 = (x-1)(2x^2 + 5x + 10)$

$$2x^2+5xy+2y^2 = 2(x+2y)(x+y/2) = (x+2y)(2x+y)$$

$$x_{1,2} = \frac{-5y \pm \sqrt{25y^2-16y^2}}{4} = \left[\begin{array}{l} -2y \\ -y/2 \end{array}\right.$$

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\dots+y^{n-1})$$

$$x^{2n+1}+y^{2n+1} = (x+y)(x^{2n}-x^{2n-1}y+\dots-y^{2n})$$

в пер: $x\neq 1$, $y=1$ $\boxed{\frac{b_1(x^n-1)}{x-1} = b_1x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\dots+b_1x+b_1}$

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2-x(y+z)+y^2-yz+z^2)$$

$$x=-y-z$$

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3 = 3\cdot(x+y)(x+z)(y+z)$$

$$x^4+4y^4 = x^4+4x^2y^2+4y^4-4x^2y^2 = (x^2-2xy+2y^2)\cdot$$
$$\cdot(x^2+2xy+2y^2)$$

$$(x^2+1)(x^2+4)$$

$$3x^3+3x^2+3x+1=0 \qquad x=\pm 1 \qquad x=\pm\frac{1}{3}$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$2x^3+(x+1)^3=0 \qquad (x+1)^3=-2x^3 \qquad x+1=-\sqrt[3]{2}\,x$$

$$x=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1} = -\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{3} \qquad a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$(x^2-x-2)^2-x^3=10 \qquad \pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 3 \quad \pm 6$$

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$$

$$(x^2-x-2)^2-3^2 = x^3+1^3 \qquad x^2-x-5=x+1$$

$$(x^2-x+1)(x^2-x-5)=(x+1)(x^2-x+1) \qquad x=1\pm\sqrt{7}$$

$$x^4 + (x-2)^4 = 8 \qquad x - 1 = t$$

$$(t+1)^4 + (t-1)^4 = 8$$

$$t^4 + \cancel{4t^3} + 6t^2 + \cancel{4t} + 1$$

$$+ \quad t^4 - \cancel{4t^3} + 6t^2 - \cancel{4t} + 1 \quad = 8$$

$$t^4 + 6t^2 - 3 = 0$$

$$(t^2 + 3)^2 = 12$$

$$t^2 + 3 = \sqrt{12}$$

$$t = \pm \sqrt{\sqrt{12} - 3}$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \end{array}$$

$$(x+y)^5 = 1 \cdot x^5 + 5 \cdot x^4 \cdot y + 10x^3y^2 +$$

$$(x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4)(x+y)$$

$$(x-y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2$$

$$x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 2x + 1 = 0 \qquad x + \frac{1}{x} = t$$

$$x^2 + 2x - 8 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \qquad x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

$$t^2 - 2t - 10 = 0 \qquad x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$t = 1 \pm \sqrt{11} \qquad x + \frac{1}{x} = 1 \pm \sqrt{11} \qquad x^2 + \frac{4}{x^2} + 2\left(x - \frac{2}{x}\right) - 8 = 0$$

$$(x^2+2x-10)^2+2(x^2+2x-10)-10=x$$

$$\begin{cases} t = x^2+2x-10 \\ x = t^2+2t-10 \end{cases} \qquad x^2-t^2+3x-3t=0$$

$$(x-t)(x+t+3)=0$$

$$\left[\begin{aligned} &x = x^2+2x-10 \\ &-x-3 = x^2+2x-10 \end{aligned}\right.$$

пром

зн-иях

$f(a)<0$

$f(b)>0$

на $[a;b]$

есть корень

f - непр

$f(x)=x^3+x^2-17x+1=0$ Найти Σ корней

$$x^2+ax+b=(x-x_1)(x-x_2)=x^2-x(x_1+x_2)+x_1x_2$$

$$a=-(x_1+x_2) \qquad b=x_1x_2 \qquad f(-100)<0 \qquad f(0)>0 \qquad f(1)<0 \qquad f(100)>0$$

$$x^3+x^2-17x+1=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+$$

$$+(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)x-x_1x_2x_3=x^3+ax^2+bx+c$$

$$-a=x_1+x_2+x_3 \qquad b=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 \qquad -c=x_1x_2x_3 \qquad \Sigma=-1$$

Домашняя работа

1. Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$. Выразите через p и q следующие величины

а) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$; б) $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}$; в) $x_1^3+x_2^3$; г) $\dfrac{1}{(x_1+p)^2}+\dfrac{1}{(x_2+p)^2}$.

2. Уравнение $x^2+px+q=0$ имеет корни x_1 и x_2. Напишите уравнение, корнями которого будут числа y_1, y_2 равные:

а) x_1^3, x_2^3; б) $\dfrac{1}{x_1^2}$, $\dfrac{1}{x_2^2}$; в) $x_1+\dfrac{1}{x_2}$, $x_2+\dfrac{1}{x_1}$; г) $\dfrac{x_2}{x_1}$, $\dfrac{x_1}{x_2}$.

3. Пусть x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ и $S_n=x_1^n+x_2^n$ $(n\geqslant 0)$. Докажите формулу

$$aS_m+bS_{m-1}+cS_{m-2}=0 \quad (m\geqslant 2).$$

4. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения

$$x^2+2ax+2a^2+4a+3=0$$

является наибольшей? Чему равна эта сумма?

5. Какими должны быть p и q, чтобы выполнялось равенство

$$Ax^4+Bx^2+C=A(x^2+px+q)(x^2-px+q)?$$

6. Нарисуйте множество всех таких точек координатной плоскости, из которых к параболе $y=x^2/4$ можно провести две перпендикулярные друг другу касательные.

7. Докажите, что корни уравнения

а) $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)=0$;

б) $c(x-a)(x-b)+a(x-b)(x-c)+b(x-a)(x-c)=0$

— всегда вещественные.

8. Известно, что многочлены ax^2+bx+c и bx^2+cx+a $(a\neq 0)$ имеют общий корень. Найдите его.

9. При каких a уравнения $x^2+ax+1=0$ и $x^2+x+a=0$ имеют хотя бы один общий корень?

10. При каком значении a многочлен $P(x)=x^{1000}+ax^2+9$ делится на $x+1$?

11. Многочлен $P(x)$ дает остаток 2 при делении на $x-1$, и остаток 1 при делении на $x-2$. Какой остаток дает $P(x)$ при делении на многочлен $(x-1)(x-2)$?

12. Найдите необходимое и достаточное условие для того, чтобы выражение

$$x^3+y^3+z^3+k\,xyz$$

делилось на $x+y+z$.

13. Докажите, что многочлен $P(x)=(x+1)^6-x^6-2x-1$ делится на $x(x+1)(2x+1)$.

14. Докажите, что многочлен

$$a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$$

делится на $(b-c)(c-a)(a-b)$.

15. Разложите на множители с действительными коэффициентами многочлены:

а) $2x^3+x^2+x-1$;

б) $x^{10}+x^5+1$;

в) $x^2y^2-x^2+4xy-y^2+1$;

г) $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$;

д) $a^8+a^6b^2+a^4b^4+a^2b^6+b^8$;

е) $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$;