**ЛЕКЦИЯ №13. ВОЛНОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД. ЗАКОНЫ СНЕЛЛИУСА**

**План:**

13.1. Волновые явления на границе раздела двух сред.

13.2. Коэффициенты отражения и преломления волн.

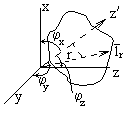
13.3. Типы поляризации на границе сред.

13.4. Угол Брюстера.

13.5. Законы Снеллиуса.

**13.1. Волновые явления на границе раздела двух сред.**

В предыдущих параграфах мы рассматривали плоские волны, распространяющиеся вдоль осей декартовой системы. Признаком распространения является .



Предполагаем, что среда без потерь.







где ,  **(1)**

Косинусы углов, определяющих направление волны, называются *направляющими*.

Уравнение фазовой плоскости (=const): 

Где  **(2)**

Тогда скалярное произведение:

 **(3)**

 **(4)**

Мы предполагали, что среда без потерь. В случае среды с потерями соотношения не меняются, только вместо k подставляется γ =β — jα. Перед началом рассмотрения волновых явлений дадим ряд определений.

Плоскость, проходящая через нормаль к границе раздела и параллельно направлению распространению волны, называется *плоскостью падения*. Вектор  перпендикулярен направлению распространения волны, а относительно плоскости падения волны он ориентирован произвольным образом.

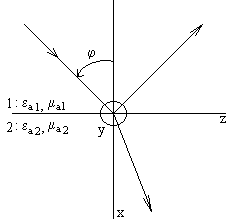
Не теряя обобщенности рассуждений, достаточно рассмотреть два случая ориентации .

1.)  перпендикулярен плоскости падения (нормальная поляризация)

2.)  параллелен плоскости падения (параллельная поляризация)

При произвольной ориентации вектора , он может быть представлен как суперпозиция двух этих случаев.

13.2. Падение плоской волны на границу раздела двух диэлектриков.



Вводное замечание.

Рассмотрим падение плоской волны на плоскую границу раздела сред. Среды предполагаются без потерь. Будем полагать, что плоскость падения совпадает с плоскостью xOy декартовой системы координат. Угол между направлением распространения и осью x называется углом падения. Граница раздела сред совпадает с плоскостью yOz. Направляющие косинусы будут определяться следующим соотношением:



т.е. фазовый множитель:

 где 

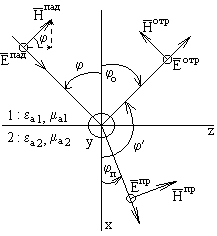
13.3. Нормальная поляризация.

В общем случае:  **(1)**

 **(2)**

В данном случае вектор  направлен так же как ось у.





Фазовый множитель : 

; 

Можно записать уравнение падающей волны. Подставляя предыдущие замечания в уравнения **(1)** и **(2)**, получим:

 **(3)**

 **(4)**

****

В общем случае, в результате падения волны на границу, падающая волна полностью или частично отражается или преломляется.

Естественно предположить, что отраженная и преломленная волны являются также плоскими, линейно поляризованными. Полагаем, что направление распространения падающей, отраженной и преломленной волн находится в плоскости xOz. Полагаем, что отраженная и преломленная волны, так же как и падающая, являются нормально поляризованными. Тогда для отраженной и преломленной волн можно записать:

 **(5)**

 **(6)**

 **(7)**

 **(8)**

где ; .

В данном случае являются известными характеристики падающей волны ϕ, . Искомыми являются ϕ′, ϕn, , . Если в результате решения задачи нам удастся получить решение, которое удовлетворяет следующим граничным условиям:

;  **(9)**

то, в соответствии с теоремой единственности, найденное решение будет верным и единственно возможным. Соотношения **(9)** должны выполняться во всех точках границы раздела, которая совпадает с осью z, т.е. при любых z граничные условия **(9)** должны выполняться. Это возможно, если падающая, отраженная и преломленная волны имеют одинаковую зависимость по z.

 **(10)**

 **(11)**

Учитывая, что угол ϕ′ имеет пределы , а угол ϕ имеет пределы , мы делаем заключение, что:

 **(12)**

При анализе подобных задач обычно предпочитают пользоваться не углом ϕ′, а дополняющим углом ϕо — углом отражения:

 **(13)**

Подставляя соотношение **(13)** в **(12)**, получим:  **(14)***— первый закон Снелиуса*.

Воспользуемся соотношением **(11)** из которого следует, что:

** (15)**

** (16)**

Соотношение **(15)**, записанное в форме **(16)**, называется *вторым законом**Снелиуса.*

Отношение синуса угла отражения к синусу угла падения равно относительному коэффициенту преломления. Граничное условие **(9)** записывается следующим образом:

****, x = 0 **(17)**

****, x = 0 **(18)**

где учтено, что тангенциальные компоненты в первой среде образуются падающей и отраженной волнами, а тангенциальные компоненты во второй среде образуются преломленными волнами. Подставляя в соотношения **(17)**, **(18)** соответствующие компоненты из соотношений **(3) — (8)**, получим:

****, x=0 **(19)**

**,**x=0 **(20)**

Учитывая одинаковую зависимость по z, можно отметить, что все фазовые множители одинаковые и их можно сократить. Кроме того, , получим: ** (21)**

** (22)**

Амплитуда отраженной и преломленной волн пропорциональна , т.е. ,  — коэффициент отражения,  — коэффициент преломления.



 **(23)**

Решая эту систему, получим:

 **(24)**

Коэффициенты отражения и преломления часто называют коэффициентами Френеля.

В соотношении **(24)** угол преломления можно исключить, используя закон Снелиуса.



Теперь можем записать результирующее поле в первой и второй средах, где учтено, что  и :





Выражения для R и T справедливы, если одна или обе среды обладают конечной проводимостью.

13.4. Параллельная поляризация.

Рассмотрим плоскую, линейную, поляризованную волну. Вектор  находится в плоскости падения (так же как и в первом случае).

Выражения для падающей, отраженной и преломленной волн:

, х ≤ 0 **(1)**

, х ≤ 0 **(2)**

Аналогично для отраженной и преломленной волн:

, х ≤ 0 **(3)**

, х ≤ 0 **(4)**

, х ≥ 0 **(5)**

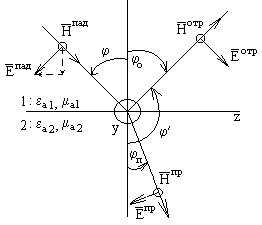
, х ≥ 0 **(6)**

Неизвестными являются ϕ′, ϕn, , . Они могут быть найдены в результате решения граничной задачи:

;  **(7)**

В данном случае соотношение (7) записывается следующим образом:

, х = 0 **(8)**



, х = 0 **(9)**

Соотношения **(7), (8), (9)** должны выполняться во всех точках границы раздела, т.е. при любых значениях координаты z. Это возможно, если составляющие поля отраженной, падающей и преломленной волн имеют одинаковую зависимость от z,

т.е.  **(10)**

 **(11)**

Пусть падающая волна параллельна полязизованной. В общем случае волна распадается на отраженную волну и преломленную.

Из соотношений **(10), (11)** следуют законы Снелиуса: 

т.е. законы Снелиуса инвариантны (безразличны) к поляризации падающей волны.

Подставим соотношения **(8), (9)** в соответствующие выражения для проекций поля:

** (12)**

** (13)**

Из соотношений **(10), (11)** следует, что все экспоненты равны. Сокращаем их и получаем:

** (14)**

** (15)**



Тогда соотношения **(14), (15)** можно переписать:

 (**16), (17)**

Решая систему, получим:

 (**18),(19) –**

коэффициенты Френеля для параллельной поляризации.

Косинус ϕ можно исключить: 

Если сравнить коэффициенты Френеля для нормальной и параллельной поляризации, то можно отметить, что для разных поляризаций коэффициенты Френеля различны.

Получим выражения для результирующего поля в первой и второй средах для параллельной поляризации:

, х ≤ 0 **(20)**

, х ≤ 0 **(21)**

, х ≥ 0 **(22)**

, х ≥ 0 **(23)**

В том случае, если плоская волна падает по нормали к плоскости раздела, понятие плоскости падения теряет смысл. В этом случае углы падающий, отраженный и преломленный равны нулю и выражения для коэффициентов Френеля упрощаются:





13.5. Угол Брюстера.

В случае эффекта полного преломления волна в первую среду не отражается и коэффициент отражения равен нулю.

Рассмотрим случай параллельной поляризации( получим условия полного отражения волны):

 **(1)**

 **(2)**

Выражая косинусы угла падения через синусы и, возводя правую и левую части в квадрат, получим:











 **(3)**



Для реальных диэлектрических сред выполняется равенство:

 **(4)**

Тогда:  **(5)**

Вспоминая известное тригонометрическое тождество: , получаем:  **(6)**

Угол  называется углом Брюстера.

В том случае, если в диэлектрических средах магнитные проницаемости не совпадают, то условие существования угла Брюстера определяется следующим неравенством:



Рассмотрим случай нормальной поляризации:  

Выражая  и  через  и возводя в квадрат, получим:





Выражая , получим:

Вынося  из числителя и знаменателя и раскрывая ее через параметры среды, получим:



 **(7)**

Из соотношения **(7)** следует, что в этом случае существование полного преломления возможно, если  **(8)**

Будем полагать, что  **(9)**

Получим: **(11)**

Если же в этой среде , то существование угла Брюстера определяется следующим неравенством:



Полное внутреннее преломление на границе диэлектрических сред с соотношениями  и  возможно только в случае параллельной поляризации. Волны, нормально поляризованные, от границы раздела двух диэлектриков отражаются при любых условиях.

**13.6. Законы Снеллиуса. Коэффициенты Френеля**

При рассмотрении вопросов распространения электромагнитных волн в случае наличия Земли и атмосферы необходимо учитывать явления, которые происходят при падении плоских волн на границу раздела двух сред; при дифракции волн; при распространении волн в неоднородной среде и пр.

Рассмотрим вначале явления происходящие при падении плоских волн на плоскую границу раздела двух сред. Пусть границей раздела является плос­кость *YOZ*, которая разделяет две среды с различными параметрами (рис. 13.1). Пусть на границу раздела падает плоская волна под углом ϕ. Выясним, какие волновые процессы происходят на границе раздела (плоскость *YOZ).*

ε*a*2, μ*a*2, σ2

ε*a*1, μ*a*1, σ1

ϕ ϕ1

*x*

*y*

θ

*z*

## Рисунок 13.1 – Падение плоской волны на границу раздела

Эту задачу удобно (и наиболее просто) рассматривать отдельно для двух случаев поляризации, когда у падающей волны вектор ** перпенди­кулярен плоскости падения (*нормально поляризованная волна)* и когда у падающей волны вектор ** перпендикулярен плоскости падения (*параллельно поляризованная волна). Плоскостью падения* называется плоскость, проходящая через нормаль к границе раздела и направление распространения волны (в рассматриваемом случае плоскость *XOZ* является плоскостью падения).

Представим электромагнитное поле в первой среде в виде суммы падающей и отраженной плоской волны, а во второй – в виде преломленнойплоской волны*.*

В случае нормальной поляризации комплексные амплитуды вектора ** падающей, отражённой и преломлённой волн представим в следующем виде:

, (13.1)

, (13.2)

, (13.3)

где ,  и  – углы падения, отражения и преломления;  и  – коэффициенты отражения и преломления нормально поляризованной волны;  и  – комплексные (в общем случае) волновые числа первой и второй среды соответственно.

Из формул (13.1) – (13.3) видно, что коэффициенты  и  можно определить следующим образом. *Коэффициентом отражения (преломления)* *для нормально поляризованной волны* называется величина, равная отношению комплексной амплитуды вектора ** отраженной (преломленной) и комплексной амплитуды вектора ** падающей волны на границе раздела.

Отметим, что комплексные амплитуды векторов **, соответствующие комплексным амплитудам, определяемым соотношениями (13.1) … (13.3), легко найти, используя второе уравнение Максвелла для комплексных амплитуд, которое имеет следующий вид (см. соотношения (1.36)):

. (13.4)

В случае параллельной поляризации комплексные амплитуды вектора ** падающей, отражённой и преломлённой волн представим в следующем виде:

, (13.5)

, (13.6)

. (13.7)

где  и  – коэффициенты отражения и преломления параллельно поляризо­ванной волны.

Из формул (13.5) … (13.7) видно, что коэффициенты  и  можно определить следующим образом. *Коэффициентом отражения (преломления)* *для параллельно поляризованной* волны называется величина, равная отношению комплексной амплитуды вектора ** отраженной (преломленной) и комплексной амплитуды вектора ** падающей волны на границе раздела.

Отметим, что комплексные амплитуды векторов **, соответствующие комплексным амплитудам, определяемым соотношениями (13.5) … (13.7), легко найти, используя первое уравнение Максвелла для комплексных амплитуд, которое имеет следующий вид (см. соотношения (1.36)):

. (13.8)

Величины , ,  и , входящие в соотношения (13.1) … (13.3) и   
(13.5) … (13.7) называются *коэффициентами Френеля.*

Используя граничные условия (1.22) и формулы (13.1) … (13.8) нетрудно получить следующие выражения для определения неизвестных нам величин, входящих в формулы (13.1) … (13.7) (углы отражения и преломления и коэффициенты Френеля). Эти выражения имеют следующий вид:

ϕ1 = ϕ, (13.9)

, (13.10)

, (13.11)

, (13.12)

, (13.13)

, (13.14)

где  и  – комплексные (в общем случае) волновые сопротивления первой и второй среды соответственно,

. (13.15)

Равенства (13.9) и (13.10) при действительных  и  (обе среды без потерь) называют*первым и вторым законами Снеллиуса.*

Из формул (13.11) … (13.14) видно, что коэффициенты Френеля в общем случае являются комплексными величинами и зависят как от параметров обеих сред, так и длины волны (если хотя бы одна из сред имеет потери). В следующих разделах будет проведен анализ коэффициентов Френеля для некоторых практически важных случаев.

Пусть на границу раздела падает волна круговой или эллиптической по­ляризации. В этом случае падающую волну целесообразно представить в виде суперпозиции двух волн, одна из которых поляризована нормально, другая – параллельно. Определяя для каждой из этих волн коэффициенты отражения и преломления (по формулам (13.11) … (13.14)) легко определить параметры отраженной и преломленной волн.

1

ϕ

ϕ'

3

2

θн

θоб

Рисунок 13.2 – К явлению двойного лучепреломления

Рассмотрим случай, когда вторая среда является анизотропной средой, и когда вол­новые числа второй среды различны для нор­мально и параллельно поляризованных волн. Пусть на границу раздела падает вол­на, представимая в виде суммы нормально и параллельно поляризованных волн. Выясним, что будет происходить с этой волной на гра­нице раздела. Из законов Снеллиуса следует, что в первой среде появиться отраженная вол­на, а во второй среде возникнуть две волны, идущие в различных направлениях (рис 13.2). Этот факт называется *явлением двойного лучепреломления.* В теории распространения волн в ионосфере одну из этих волн называю обыкновенной волной, другую необыкновенной.

Отметим, что коэффициенты Френеля, определяемые формулами   
(13.11) … (13.14), в большинстве практически важных случаев можно использовать при расчетах коэффициентов отражения (преломления) от поверхности Земли.

**Контрольные вопросы и задания**

1. Сформулируйте законы Снеллиуса.
2. Являются ли законы отражения и преломления плоских волн на границе раздела сред фундаментальными законами природы?
3. Дайте определение коэффициентам отражения и прохождения. Какова область значений этих величин?
4. Каково поведение ЭМВ параллельной поляризации на границе раздела ?
5. Охарактеризуйте поведение ЭМВ перпендикулярной поляризации на границе раздела сред.
6. Укажите условие согласования сред.
7. Назовите условия полного прохождения.
8. Назовите условия полного отражения.
9. Есть ли связь между явлением полного прохождения и эффектом полной поляризации?
10. При критическом угле падения исчезает прошедшая волна. Что наблюдается, если угол падения больше критического?
11. Как изменяются условия прохождения ЭМВ через границу раздела в средах с потерями?
12. Возможно ли полное отражение ЭМВ от границы раздела диэлектриков с потерями?
13. Дайте определение стоячей волне. Объясните особенности ее ЭМП.
14. Почему стоячая ЭМВ не переносит энергию, хотя векторы ЭМП  и  существуют?
15. Дайте определение и укажите область значений КСВ и КБВ.
16. Можно ли получить стоячую волну из бегущих волн?
17. На границу раздела сред без потерь под углом Брюстера падает ЭМВ параллельной поляризации. Найдите соотношения между модулями векторов Пойнтинга в обеих средах и объясните полученный результат с точки зрения закона сохранения энергии.