**ЛЕКЦИЯ №4. ОПЕРАТОРЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ.**

**План:**

4.1. Дифференциальные операторы в криволинейных координатах

4.2. Градиент, дивергенция, ротор.

4.3. Интегральные операторы: поток, дивергенция.

4.4. Дифференциальные операторы: ротор и дивергенция.

**4.1. Дифференциальные операторы в криволинейных координатах**

1. Пусть в некоторой области *D* с криволинейной системой координат https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/39_files/093.png задано скалярное поле

https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/39_files/094.png

Если векторы https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/39_files/001.png образуют базис в некоторой точке *M*, то градиент скалярного поля  *u*  в этой точке определяется формулой

https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/39_files/095.png

где https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/39_files/096.png – коэффициенты Ламе.  
В частности,https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/index_files/18x1.png в цилиндрической системе координат

https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/39_files/097.png  
https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/39_files/098.png  
https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/39_files/099.png

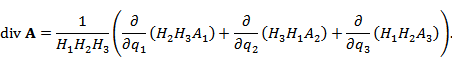
В сферических координатах

https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/39_files/100.png  
https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/39_files/051.png  
https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/39_files/101.png

1. Пусть в области *D* задано векторное поле

https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/39_files/102.png

Здесь https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/39_files/003.png - криволинейные координаты точки https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/39_files/002.png; https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/39_files/001.png - единичные касательные векторы координатных  https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/39_files/003.png-линий соответственно.  
Дивергенция векторного поля https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/index_files/18x1.png**A** в точке *M* с криволинейными координатами https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/39_files/093.png определяется формулой



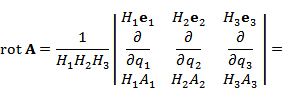
В цилиндрической системе координат

https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/39_files/104.png  
https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/39_files/105.png

В сферической системе координат

https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/39_files/106.png  
https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/39_files/107.png

1. Ротор векторного поля A в точке M с криволинейными координатами https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/39_files/093.png определяется формулой

  
https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/39_files/109.png  
https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/39_files/110.png  
https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/39_files/111.png

В цилиндрической системе координат

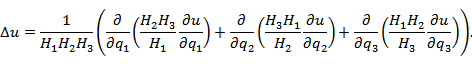
https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/39_files/112.png

В сферических координатах

https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/39_files/113.png  
https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/39_files/114.png

Операторы grad, div и rot представляют собой линейные дифференциальные операции. Оператор grad определен на дифференцируемых скалярных полях и сопоставляет им векторные поля, тогда как операторы div и rot определены на дифференцируемых векторных полях. Оператор div ставит им в соответствие скалярные поля, а оператор rot – векторные поля.

1. Действие оператора Лапласа на скалярную функцию *u* определяется формулой



В цилиндрической системе координат

https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/39_files/116.png

В сферической системе координат

https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/39_files/117.png

**4.2. Градиент, дивергенция, ротор**

Если каждой точке *М* пространства или некоторой его области *V* поставлена в соответствие скалярная величина *u*(*М*), то говорят, что в этой области задано скалярное поле. В декартовой системе координат задание скалярного поля эквивалентно заданию функции трех переменных *u*(*М*) = *u*(*x,y,z*). Примерами скалярных полей могут служить поле температур данного тела, поле атмосферного давления и т.д. Пусть функция *u*(*x, y, z*) является непрерывно дифференцируемой в области *V*. В каждой точке этой области определен вектор, проекциями которого на оси координат являются значения частных производных функции *u*(*x,y,z*):



Вектор grad *u* направлен в сторону наибыстрейшего возрастания скалярного поля *u*(*М*), а длина градиента равна наибольшей скорости изменения поля *u* в точке *М*.

Если каждой точке *М* некоторой области *V* поставлен в соответствие определенный вектор , то говорят, что в этой области задано векторное поле. В декартовой системе координат задание векторного поля равносильно заданию трех скалярных функций: *P*(*x,y,z*), *Q*(*x,y,z*) и *R*(*x,y,z*) – проекций этого вектора на оси координат. Вектор  в этом случае записывается в виде



а функции *P*(*x,y,z*), *Q*(*x,y,z*) и *R*(*x,y,z*) являются непрерывно дифференцируемыми в области *V*. В качестве примера векторного поля можно рассмотреть поле скоростей стационарного потока жидкости. Дивергенцией векторного поля  называется скаляр



Ротором (вихрем) векторного поля называется вектор



Все рассмотренные величины полей: grad *u*, div  и rot  вычисляются с помощью частного дифференцирования скалярного поля *u* и компонентов *P*, *Q*, *R* векторного поля. Таким образом, мы имеем дело с дифференциальными операциями первого порядка. Наряду с ними можно рассмотреть дифференциальные операции второго порядка: grad div , rot rot  и div grad *u*. Рассмотрим последнюю операцию:



Эту операцию можно записать кратко, вводя оператор Лапласа



Для векторного поля



#### Поток вектора электрической индукции

Введем понятие потока вектора электрической индукции. Рассмотрим бесконечно малую площадку. В большинстве случаев необходимо знать не только величину площадки, но и ее ориентацию в пространстве. Введем понятие вектор-площадка. Условимся под вектором-площадкой понимать вектор, направленный перпендикулярно площадке и численно равной величине площадки.



Рисунок 1 – К определению вектора – площадки

Назовем потоком вектора че­рез площадку скалярное произведение векторов  и . Таким образом,

.

Поток вектора  через произвольную поверхность  находится интегрированием всех элементарных потоков

 (4)

Если поле однородно и плоская поверхность  расположена перпен­дикулярно к полю, то:

. (5)

Приведенное выражение определяет число силовых линии, пронизывающих площадку  в единицу времени.

**Рассмотрим физический смысл потока векторного поля (поверхностного интеграла второго рода). Пусть в некоторой области  евклидова пространства  течет со скоростью ** **жидкость, имеющая объемную плотностью . Вычислим количество жидкости протекающей через некоторую гладкую поверхность , расположенную в области . Для этого ориентируем  единичным вектором нормали  и разобьем поверхность на части ,  столь малого диаметра, чтобы они практически не отличались от своих плоских площадок. Пусть  одна из таких частей с единичным вектором нормали . Тогда через  в направлении нормали  протечет в единицу времени  жидкости, где  – площадь части . Это выражение для количества  жидкости будет тем точнее, чем меньше диаметр . Заметим, что  будет положительным, если жидкость течет через  в направлении вектора  и отрицательным – в противоположном случае. Общее количество  жидкости, протекающей через поверхность , приблизительно равно**

**.**

**Переходя к пределу в этом выражении при , где  – максимальный диаметр частей , , находим**

**. (4.3.10)**

**Формула (4.3.10) определяет поток (количество) жидкости через выбранную сторону поверхности , заданную вектором** , **и физический смысл поверхностного интеграла второго рода.**

**Если  – поле сил, то говорят, что поток векторного поля**

**,**

**равен количеству силовых (векторных) линий, пронизывающих в единицу времени поверхность  в направлении .**

**Дивергенция и ротор**

Пусть  – дифференцируемое в области  векторное поле.

***Определение.*** Скаляр, обозначаемый  и равный

,

называется *дивергенцией векторного поля  в точке* .

Применяя понятие дивергенции векторного поля, сформулируем теорему (формулу) Остроградского Гаусса в векторной форме.

***Теорема.*** Пусть  – непрерывно дифференцируемое векторное поле в замкнутой области , ограниченной кусочно-гладкой поверхностью . Тогда справедлива *формула Остроградского-Гаусса*

,

где поток векторного поля вычисляется через замкнутую поверхность , ориентированную внешней нормалью.

Таким образом, *поток векторного поля  через замкнутую поверхность в сторону внешней нормали равен тройному интегралу от дивергенции векторного поля  по области, ограниченной этой поверхностью*.

Из теоремы Остроградского Гаусса в векторной форме следует инвариантное определение дивергенции векторного поля.

***Определение.*** Пусть в области , ограниченной кусочно-гладкой поверхностью , задано непрерывно дифференцируемое векторное поле **, и пусть  – внутренняя точка области . Тогда *дивергенцией векторного поля* * в точке*  называется скаляр, обозначаемый  и равный

,

где  и  – соответственно диаметр и объем области .

Оба определения дивергенции векторного поля эквивалентны.

Рассмотрим физический смысл дивергенции векторного поля  на примере поля скоростей  стационарного движения жидкости. Если положить в формуле Остроградского-Гаусса , где  – объемная плотность жидкости, то можно записать

.

Правая часть этой формулы определяет количество жидкости, вытекающей (или втекающей) в единицу времени через замкнутую поверхность , ограничивающую область , в направлении единичной нормали . Если , то в соответствии с формулой  равна нулю правая часть этого равенства, а, следовательно, количество вытекающей из жидкости уравновешивается количеством втекающей жидкости. Если , то количество жидкости вытекающей из  в единицу времени, преобладает над количеством втекающей жидкости за тот же промежуток времени. В этом случае можно говорить о наличие «источников» в области . Если же , то в области  имеются «стоки». Таким образом, дивергенция векторного поля характеризует среднюю удельную обильность «источников» и «стоков» в области .

С другой стороны, изменение потока векторного поля  через поверхность  должно сопровождаться изменением количества жидкости в области , и если правая часть равенства  положительна (отрицательна), то в соответствии с *законом сохранения массы* количество жидкости, находящееся в области , уменьшается (увеличивается) в единицу времени ровно на величину потока. Следовательно,

.

Таким образом,

.

Применяя к этому выражению теорему о среднем для тройного интеграла, получаем так называемое *уравнение непрерывности*

.

Уравнение непрерывности справедливо также для плотности электрического заряда, если под  понимать объемную плотность заряда, движущегося со скоростью .

Пусть в области  заданы произвольные непрерывно дифференцируемые скалярное поле  и векторные поля  и . Пусть также  – произвольный постоянный вектор. Тогда справедливы следующие свойства дивергенции.

**10.** .

**20.** .

**30.** .

**40.** .

***Определение****. Ротором* (или *вихрем)* *векторного поля*  в точке  называется вектор, обозначаемый  (или ) и равный

,

где частные производные вычислены в этой точке.

Ротор векторного поля часто записывают в виде символического определителя

.

Сформулируем теорему (формулу) Стокса в векторной форме.

***Теорема 5.3.1*.** Пусть в области  определено непрерывно дифференцируемое векторное поле , и в этой области расположена положительно ориентированная гладкая поверхность , ограниченная кусочно-гладким контуром . Тогда

.

Следовательно, *циркуляция векторного поля  вдоль замкнутого контура равна потоку ротора поля  через поверхность , натянутую на этот контур*.

Формула Стокса в векторной форме связывает циркуляцию и поток векторного поля. Она позволяет свести вычисление циркуляции векторного поля  по контуру  к вычислению потока поля  через незамкнутую поверхность , опирающуюся на контур . От поверхности  требуется только то, чтобы она опиралась на контур  и не выходила за пределы области . Поэтому, применяя формулу Стокса для вычисления циркуляции векторного поля, поверхность  выбирают в наиболее подходящей для вычисления форме.

В случае плоского векторного поля  из формулы Стокса следует формула Грина, а выражение для ротора принимает вид

. (5.3.2)

Прежде чем сформулировать инвариантное определение ротора векторного поля, введем поверхностный интеграл следующего вида:



,

где замкнутая поверхность , ограничивающая область , ориентирована внешней единичной нормалью .

***Определение.*** Пусть в области , ограниченной кусочно-гладкой поверхностью , задано непрерывно дифференцируемое векторное поле **, и пусть  – внутренняя точка области . Тогда ротором (вихрем) векторного поля  в точке  называется вектор, обозначаемый  и равный

,

где  и  – соответственно диаметр и объем области .

Можно доказать эквивалентность двух определений ротора.

Выясним *физический смысл ротора* на примере поля скоростей точек вращающегося твёрдого тела вокруг оси  с постоянной угловой скоростью . Из механики абсолютно твердого тела известно, что векторное поле скоростей  точек этого тела можно представить в виде

,

где  – вектор постоянной угловой скорости;  – радиус- вектор точки .

# Найдём ротор поля скоростей *:*

.

Таким образом,  является постоянным вектором во всех точках тела, направленным вдоль оси  вращения тела, а его модуль равен удвоенной угловой скорости вращения тела: . Следовательно, отличный от нуля вектор свидетельствует о вращении твердого тела.

Отметим некоторые свойства ротора векторного поля.

Пусть , ,  – произвольные непрерывно дифференцируемые векторные и скалярное поля, а  – произвольный постоянный вектор. Тогда

**10.** .

**20.** .

**30.** ,

где  – скалярная функция.

**Дифференциальные операции первого и второго порядков.**

Основные характеристики векторного анализа – градиент, дивергенция, ротор и операции над ними удобно представить с помощью символического вектора  – *оператора Гамильтона* (оператора «набла»)

.

Вычисления, проводимые с помощью оператора , сводятся к следующим правилам.

**10.** Произведение оператора  на скалярное поле  есть градиент этой этого поля:

,

то есть

.

**20.** Скалярное произведение оператора  на векторное поле  есть дивергенция этого поля:

,

то есть

.

**30.** Векторное произведение оператора  на векторное поле  есть ротор этого поля:

,

то есть

.

**40.** Если оператор  действует на линейную комбинацию , где  – скалярные или векторные поля;  – числа, то

.

**50.** Если оператор  действует на произведение нескольких полей , ,  (скалярных или векторных), то результат этого действия аналогичен результату дифференцирования произведения в том смысле, что оператор  последовательно применяют к каждому сомножителю (отметим его знаком ), а другие сомножители при этом считают фиксированными. Затем результаты складывают. Таким образом,

.

При этом следует иметь в виду, что слагаемые в правой части этого равенства предварительно преобразуют по правилам векторной алгебры так, чтобы за оператором  стоял тот множитель, который отмечен значком . После вычислений значки  опускают.

Правила 10 – 30 можно рассматривать как удобные обозначения градиента, дивергенции и ротора соответственно.

Основные векторные *дифференциальные операции первого порядка* сводятся к следующим формулам:

,

,

,

,

,

.

Рассмотрим *дифференциальные операции второго порядка*. В случае дважды дифференцируемых  и  справедливы тождества

.

.

Введем другую дифференциальную операцию второго порядка:

,

где оператор



называется *оператором Лапласа*.

**Теорема Остроградского-Гаусса.**

## Дивергенция напряженности электрического поля

Поток вектора электрической индукции сквозь произвольную замкнутую по­верхность  равен алгебраической сумме свободных электрических зарядов , охватываемых этой поверхностью

 (6)

Выражение (6) представляет собой теорему О-Г в интегральном виде. Теорема 0-Г оперирует с интегральным (суммарным) эффектом, т.е. если  то неизвестно, означает ли это отсутствие зарядов во всех точках исследуемой части пространства, или, то, что сумма положительных и отрицательных зарядов, расположенных в разных точках этого пространства равны нулю.

Для нахождения расположенных зарядов и их величины по заданному полю необходимо соотношение, связывающее вектор электрической индукции  в данной точке с зарядом в той же точке.

Предположим, что нам нужно определить наличие заряда в точ­ке **а** (рис.2)



Рисунок 2 – К расчету дивергенции вектора

Применим теорему О-Г. Поток вектора электрической индукции через произвольную поверхность, ограничивающую объем, в которой находится точка **а**, равен



Алгебраическую сумму зарядов в объеме можно записать в виде объемного интеграла

 (7)

где - заряд, отнесенный к единице объема ;

- элемент объема.

Для получения связи между полем и зарядом в точке **а** будем уменьшать объем, стягивая поверхность к точке **а**. При этом разделим обе части нашего равенства на величину . Переходя к пределу, получим:

.

Правая часть полученного выражения является по определению объемной плотностью заряда в рассмотренной точке пространства. Левая часть представляет собой предел отношения потока вектора электрической индукции через замкнутую по­верхность к объему, ограниченному этой поверхностью, когда объем стремится к нулю. Эта скалярная величина является важной характеристикой электрического поля и носит название **дивергенции вектора **.

Таким образом:

 ,

следовательно

, (8)

где  - объемная плотность заряда.

При помощи этого соотношения просто решается обратная задача электростатики, т.е. нахождение распределенных зарядов по известному полю.

Если вектор  задан, значит известны его проекции , ,  на координатные оси как функции координат и для вычисления распределенной плотности зарядов, создавших заданное поле, оказывается достаточно найти сумму трех частных производных этих проекций по соответствующим переменным. В тех точках для которых  зарядов нет. В точках где  положительна, имеется положительный заряд с объемной плотностью, равной , а в тех точках где  будет иметь отрицательное значение, находится отрицательный заряд, плотность которого также определяется значением дивергенции.

Выражение (8) представляет теорему 0-Г в дифференциальной форме. В такой форме теорема показывает, **что источниками электрического поля является свободные электрические заряды;** силовые линии вектора электрической индукции начинаются и заканчиваются соответственно на положительных и отрицательных зарядах.

## Преобразование интеграла по поверхности в интеграл по объему

Пользуясь понятием дивергенции, получим важное интегральное соотношение, известное в математике под преобразованием 0-Г.

Рассмотрим объем , ограниченный поверхностью .

Разобьем этот объем на бесконечное число бесконечно малых параллелепипедов. Для каждого параллелепипеда в соответствии с определением дивергенции запишем

,

где  - б/м поток через грани одного из параллелепипедов. Составляя подобные выражения для всех параллелепипедов, на которые разбит объем и суммируя, получим:

, или

 (9)

#### Электрический ток. Плотность тока

Введем понятие о электрическом токе. Электрическим током через замкнутую поверхность  назовем скорость изменения заряда  в объеме , ограниченном поверхностью 

 (10)

"-" говорит о том, что заряд в рассматриваемом объёме уменьшается.

Распределение электрического тока по поверхности  характеризуется вектором плотности тока . Он направлен в сторону движения положительных зарядов и численно равен:

 (11)

где  - вектор-площадка; откуда

 (12)

Подставим (12) в (10), получим:

 (13)

Уравнение (13) представляет закон сохранения заряда в интегральной форме, поскольку оно связывает поток вектора плотности электрического тока через замкнутую поверхность с изменением заряда во всем объеме.

Получим дифференциальное выражение этого закона. Для этого представим общий заряд  в объеме  в виде:

 (14)

где  – объёмная плотность заряда.

Выражение (13) запишем с учетом (14) в виде:



или меняя порядок интегрирования и дифференцирования

 (15)

Преобразуя поверхностный интеграл левой части на основании теоремы 0-Г (9) в интеграл по объему



получим



Приравнивая подынтегральные выражения получим закон сохранения заряда в дифференциальной форме или уравнение непрерывности

 (16)

Согласно уравнению (16) **истоками тока являются те точки пространства, где плотность заряда изменяется со временем.**

#### Ток смещения

Как известно, объемная плотность заряда связана с вектором электрической индукции соотношением

.

Подставляя это соотношение в уравнение (16) имеем

; 

Меняем местами порядок дифференцирования по времени и по пространственным координатам, получим:

 или  (17)

Полученное выражение показывает, что вектор, представляющий собой сумму вектора и вектора **, непрерывен, т.е. вектор  дополняет вектор плотности тока до замкнутости.

Максвелл ввел понятие о плотности тока смещения , понимая под ним изменение электрического поля во времени

** (18)

,где , то

****.

Полученное выражение представляет собой уравнение непрерывности в дифференциальной форме.