**ЛЕКЦИЯ №5. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ.**

**План:**

5.1. Первое уравнение Максвелла.

5.2. Второе уравнение Максвелла.

5.3. Третье уравнение Максвелла.

5.4. Четвертое уравнение Максвелла.

5.5. Уравнение непрерывности

5.6. Полная система уравнений Максвелла

**5.1. Первое уравнение Максвелла**

Первое уравнение Максвелла является обобщением открытого Ампером закона полного тока. Ампер сформулировал этот закон следующим образом: ***циркуляция вектора напряженности магнитного поля по замкнутому контуру равна току, пронизывающему контур***:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.1) |

|  |  |
| --- | --- |
| где | *L* – замкнутый контур, |
|  | **dl** – векторный дифференциал длины контура: **dl = l0**dl, |
|  | **l0 –** орт дифференциала длины контура, |
|  | **J** – вектор плотности тока, пронизывающего контур, |
|  | *S* - произвольная поверхность, опирающаяся на контур L, |
|  | **dS** - векторный дифференциал поверхности: **dS** = **n0**dS, |
|  | **n0** - орт нормали к поверхности *S,* образующий с направлением обхода контура правовинтовую систему. |

Форма замкнутого контура L может быть произвольной.

Под током, пронизывающим контур, Ампер понимал только ток проводимо­сти, что справедливо для постоянного во времени поля. В переменном поле необходимо учесть введенный Максвеллом ток смещения. При этом формула (5.1) примет вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2) |

Уравнение (5.2) записано для контура конечных размеров и называется ***первым уравнением Максвелла в интегральной форме****.*

К дифференциальной форме первого уравнения перейдем с помощью теоремы Стокса (формула (1.34), [6]). Она позволяет заменить циркуляцию векто­ра **Н** по контуру*L* интегралом от rot **Н** по поверхности *S,* опирающейся на этот контур:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.3) |

Так как поверхность *S* выбрана произвольно, то равенство (5.3) может быть удовлетворено только в случае равенства подынтегральных выражений:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.4) |

Равенство (5.4) называется ***первым уравнением Максвелла в дифференциальной форме****.* Этовекторное уравнение эквивалентно трем скалярным уравне­ниям. В декартовой системе координат х, у, zони примут следующий вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5) |

Аналогичные уравнения в других системах координат могут быть получены с помощью формул перехода (5.5) – (5.7) или (5.11) – (5.13) [6].

**5.2. Второе уравнение Максвелла**

Второе уравнение Максвелла базируется на законе электромагнитной ин­дукции Фарадея, который формулируется следующим образом: ***если замкнутый контур пронизывает переменное магнитное поле, то в контуре возникает электродвижущая сила (ЭДС), равная скорости изменения магнитного потока***:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6) |

Знак минус в правой части формулы означает, что наведенная ЭДС всегда препятствует изменению магнитного потока, пронизывающего контур. Это положе­ние называется ***правилом Ленца***.

Фарадей полагал, что уравнение (5.6) справедливо только в случае контура из проводника. Максвелл предположил, что оно справедливо и в том случае, когда среда не об­ладает электропроводностью.

Электродвижущая сила, наводимая в любом замкнутом контуре, равна циркуляции вектора напряженности электрического поля по этому контуру:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.7) |

|  |  |
| --- | --- |
| где | *L* – замкнутый контур, |
|  | **dl** – векторный дифференциал длины контура: **dl = l0**dl, |
|  | **l0 –** орт дифференциала длины контура, |

Магнитный поток, пронизывающий контур, связан с вектором магнитной индукции следующим соотношением

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.8) |

|  |  |
| --- | --- |
| где | *S* - произвольная поверхность, опирающаяся на контур L, |
|  | **dS** - векторный дифференциал поверхности: **dS** = **n0**dS, |
|  | **n0** - орт нормали к поверхности *S,* образующий с направлением обхода контура правовинтовую систему. |

Подставим формулы (5.7) и (5.8) в (5.6). Получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.9) |

Это соотношение записано для контура конечных размеров и называется ***вторым уравнением Максвелла в инте­гральной форме****.* Для перехода к дифференциальной форме уравнения проделаем те же операции, что и в предыдущем параграфе. Получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.10) |

Это соотношение называют ***вторым уравнением Максвелла в дифференциальной форме.***

В декартовой системе координат векторное уравнение (5.10) преобразуется в систему из трех скалярных уравнений:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.11) |

Аналогичные уравнения в других системах координат могут быть получены с помощью формул перехода (5.5) – (5.7) или (5.11) – (5.13) [6].

**5.3. Третье уравнение Максвелла**

Третье уравнение Максвелла базируется на законе Гаусса, который ***связывает поток вектора электрической индукции через произвольную замк­нутую поверхность с зарядом, сосредоточенным внутри этой поверхности***:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.12) |

|  |  |
| --- | --- |
| где | *S* - произвольная замкнутая поверхность, |
|  | **dS** - векторный дифференциал поверхности: **dS** = **n0**dS, |
|  | **n0** - орт внешней нормали к поверхности *S,* |
|  | V – объем, ограниченный поверхностью *S*, |
|  | ρ – объемная плотность заряда внутри поверхности *S*. |

Гаусс получил уравнение (5.12) применительно к постоянным полям. Максвелл предположил, что его можно использовать и в случае переменных полей. Поэтому уравнение (5.12) обычно называют ***третьим уравнением Макс­велла в интегральной форме****.*

Для перехода к дифференциальной форме надо преобразовать левую часть уравнения (5.12) по теореме Остроградского – Гаусса (формула (1.33) [6]). Получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.13) |

Так как никаких ограничений на объем *V* не наложено, равенство (5.13) выполнится только в том случае, если равны подынтегральные выражения:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.14) |

Это соотношение называется ***третьим уравнением Максвелла в дифференциальной форме****.*

В декартовой системе координат можно от векторного уравнения перейти к скалярному:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.15) |

Из равенства (5.14) следует, что дивергенция вектора электрической индукции от­лична от нуля только в тех точках пространства, где имеются свободные заряды. В этих точках линии вектора **D** имеют начало (***исток***) или конец (***сток***). Линии вектора электрической индукции начинаются на положительных за­рядах и заканчиваются на отрицательных.

**5.4. Четвертое уравнение Максвелла**

Четвертое уравнение Максвелла базируется на законе Гаусса для магнитного поля, который можно сфор­мулировать следующим образом: ***поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю***:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.16) |

Это уравнение означает, что не существует линий век­тора магнитной индукции, которые только входят в замкнутую поверхность *S* или только выхо­дят из нее. Они всегда пронизыва­ют замкнутую поверхность насквозь.

Уравнение (5.16) называют ***четвертым уравнением Максвелла в интегральной форме.***

К дифференциальной форме уравнения можно перейти с помощью теоремы Остроградского-Гаусса так же, как это было сделано в случае третьего уравнения Максвелла. В результате получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.17) |

Уравнение (5.17) называется ***четвертым уравнением Максвелла****.* Оно утверждает факт отсутствия в природе магнитных зарядов. Из этого уравнения следует также, что силовые линии магнитного поля являются непрерывными.

**5.5. Уравнение непрерывности**

Уравнение непрерывности является математической формулировкой ***закона сохранения заряда***, который утверждает, что ***ни при каких условиях электрические заряды не могут самопроизвольно зарождаться или бесследно исчезать***.

Рассмотрим произвольный замкнутый объем *V*, ограниченный поверхностью *S*. Пусть внутри этого объема содержится некоторый заряд Q. Величина этого заряда может быть найдена интегрированием ***объемной плотности заряда*** по всему объему:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.18) |

Предположим, что величина заряда в объеме изменяется. В соответствии с законом сохранения заряда следует считать, что часть зарядов пересекает поверхность *S*, ограничивающую объем *V*. При этом возникает ток проводимости с плотностью **Jnp**.

Проинтегрируем плотность тока проводимости по поверхности, ограничивающей наш объем. Получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.19) |

По определению ток проводимости - это скорость изменения заряда:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.20) |

Знак минус говорит о том, что ток считается положительным, если величина заряда внутри объема уменьшается. С помощью формул (5.19) и (5.20) легко связать скорость изменения плотности заряда с плотностью тока проводимости:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.21) |

Для получения дифференциальной формы закона сохранения заряда преобразуем уравнение аналогично тому, что было сделано в предыдущем параграфе:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.22) |

Соотношение (5.22) называется ***уравнением непрерывности***.

**5.6. Полная система уравнений Мак­свелла**

Каждое из рассмотренных выше уравнений описывает некоторые свойства электромаг­нитного поля. Однако анализ электромагнитных процессов возможен толь­ко на основе решения ***системы уравнений Максвелла***. Большинство задач электродинамики решается с помощью системы уравнений в дифференциальной форме:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.23) |
|  |  |

Систему (5.23) необходимо решать совместно с материальными уравнениями, связывающими между собой векторы электромагнитного поля. В случае линейных изотропных сред эти уравнения имеют вид:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | (5.24) |

Уравнения Максвелла позволяют выделить следующие основные свойства электромагнитного поля:

* электриче­ское и магнитное поля тесно связаны между собой: любое изменение одного из них вызывает изменение другого;
* источниками электромагнит­ного поля являются заряды и токи;
* магнитное поле всегда вихре­вое, электрическое поле может быть вихревым и потенциальным;
* силовые линии электрического поля могут иметь истоки и стоки, си­ловые линии магнитного поля всегда непрерывны.

Из первого уравнения Максвелла следует, что линии магнит­ного поля охватывают линии полного тока, образуя с ними правовинтовую систему (рис. 5.3, а). Из второго уравнения Максвелла вытекает, что линии вихревого электрического поля охватывают линии вектора *д***В***/дt,* образуя с ними левовинтовую систему (рис. 5.3, б).

|  |
| --- |
| Безымянный |
| Рис. 5.1. Взаимосвязи электрической и магнитной составляющих переменного электромагнитного поля |

Уравнения Максвелла и материальные уравнения являются линейными дифференциальными уравнениями. Поэтому электромагнитные поля удовлетворяют ***принципу суперпозиции****:* поле, созданное не­сколькими источниками, можно рассматривать как сумму полей созданных каждым источником.

В дополнение к уравнениям Максвелла в дифференциальной форме в ряде случаев необходимо использовать уравнения Максвелла в ин­тегральной форме:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.25) |
|  |  |

**Сводка уравнений Максвелла**

Приведем сводку уравнений Максвелла, являющихся обобщением экспериментальных законов электромагнетизма (таблица 1.3).

Таблица 1.3 Сводка уравнений Максвелла

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № п/п | Форма системы уравнений Максвелла | | |
| Дифференциальная | Интегральная | Комплексная |
| 1 |  |  |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |
| 4 |  |  |  |
| 5 |  |  |  |
| 6 |  |  |  |

При решении задач электродинамики часто используют дифференциальную форму уравнений Максвелла, которая представляет собой пространственно-временное описание электромагнитного процесса. Уравнения Максвелла в интегральной форме определяют основные законы электромагнитных процессов, действующие в системе. Общую математическую формулировку основных законов электромагнитного поля Максвелл получил в 1873 году. Уравнения Максвелла применяют в случаях, если выполняется условие

, (1.79)

где  - длина электромагнитной волны,  - расстояние между элементарными частицами вещества. Если неравенство (1.79) не выполняется, то уравнения Максвелла не применимы.