**ЛЕКЦИЯ №7. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ МОНОХРОМАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ.**

**План:**

7.1. Система уравнений Максвелла для монохроматического поля.

7.2. Комплексная диэлектрическая проницаемость.

7.3. Тангенс угла диэлектрических потерь.

**7.1. Система уравнений Максвелла для монохроматического поля.**

Большинство реальных источников возбуждают гармонические электромагнитные поля, то есть поля, изменяющиеся во времени по синусоидальному закону с определенной частотой. Такие поля получили еще название монохроматические, то есть «одноцветные» (термин взят из оптики). Монохроматические поля обладают энергией, но не несут информации. Информация будет передаваться, если в соответствии с заданным законом или случайным образом будут меняться амплитуда, частота и фаза электромагнитных волн. Это эквивалентно использованию группы (спектра) монохроматических волн, определенное суммирование которых дает электромагнитный сигнал, переносящий информацию. Связь составляющих спектра с этим сигналом производится с помощью преобразования Фурье. Знание поведения монохроматических волн с произвольными частотами в реальных условиях (естественные трассы распространения, линии передач, и т.д.) позволяют анализировать поведение сложных сигналов в тех же условиях.

При изучении монохроматических полей, подчиняющихся линейным уравнениям Максвелла, эффективно используется метод комплексных амплитуд. Суть метода заключается в том, что векторным и скалярным величинам, входящим в системы (7.16), (7.17), приводятся в соответствие комплексные амплитуды. Связь между физическими величинами и их комплексными амплитудами покажем, например, для вектора напряженности электрического поля . Мгновенное значение вектора , изменяющегося во времени по гармоническому закону, в некоторой точке пространства записывается так:

. (7.20)

Здесь  – амплитуды и фазы отдельных составляющих вектора , которые все являются действительными величинами. Фазы  будут определены далее при решении волновых уравнений и учете особенностей поляризации волн. Запись (7.20) может быть переписана как действительная часть (Re) комплексного вектора

. (7.21)

Вектор

 (7.22)

не зависит от времени и называется комплексной амплитудой. Здесь и в дальнейшем комплексные амплитуды будут помечаться точками сверху. Мгновенное значение вектора (7.20), гармонически изменяющегося во времени, выражается через комплексную амплитуду следующим образом:

. (7.23)

Аналогичным образом вводятся комплексные амплитуды для всех физических величин, входящих в уравнения (7.16), (7.17) и колеблющихся с частотой . Например, для скалярных функций объемных плотностей свободных и сторонних зарядов имеем

 , . (7.24)

Уравнения Максвелла являются линейными дифференциальными уравнениями. В случае монохроматического поля этим же уравнениям будут удовлетворять соответствующие комплексные векторные и скалярные функции. Возьмем первое уравнение Максвелла из системы (7.16), подставим комплексные векторы , продифференцируем по времени, сократим  и получим уравнение для комплексных амплитуд

. (7.25)

Преобразуем уравнение (7.25) к следующему виду:

, (7.26)

где  – комплексная диэлектрическая проницаемость среды.

Третье уравнение Максвелла для комплексных амплитуд примет вид

. (7.27)

В теории монохроматических электромагнитных полей свободные заряды в среде обычно не рассматриваются, поскольку в силу уравнения непрерывности (7.19) они однозначно определяются токами проводимости

.

Последнее соотношение подставляем в (7.27), получаем

 . (7.28)

Второе и четвертое уравнения Максвелла системы (7.16), а также материальные уравнения системы (7.17) без дополнительных преобразований сразу записываются для комплексных амплитуд. Система уравнений для монохроматического электромагнитного поля принимает следующий вид

 (7.29);

 (7.30)

Такая форма записи уравнений монохроматического поля применима в достаточно широком диапазоне частот и наиболее употребительна для практических расчетов. Уравнения записаны для комплексных амплитуд, являющихся функциями трех пространственных координат и не зависящих от времени. Таким образом, из уравнений исключена временная переменная. Если решением электродинамической задачи найдены комплексные амплитуды векторов поля, то их мгновенные значения восстанавливаются по формуле (7.23).

Вернемся к введенной комплексной диэлектрической проницаемости

.

Введя этот параметр, можно одновременно учесть диэлектрические (поляризационные) и проводящие свойства среды. Комплексная диэлектрическая проницаемость может быть изображена на комплексной плоскости (рис. 7.1)

Соотношение между действительной и мнимой частями можно описать тангенсом угла 

. (7.31)

Величина (7.31) называется тангенсом угла диэлектрических потерь. С другой

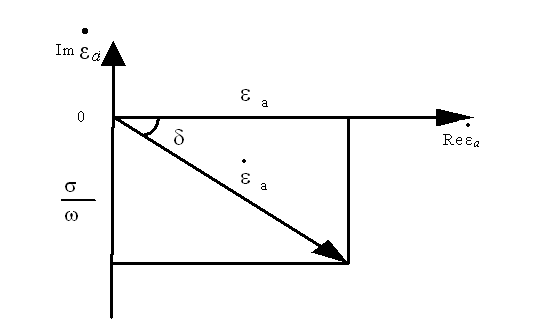


Рис. 7.1. Угол диэлектрических потерь 

стороны тангенс угла потерь равен отношению амплитуды плотности тока проводимости к амплитуде плотности тока смещения

. (7.32)

Для монохроматического поля комплексные амплитуды векторов плотности тока проводимости и плотности тока смещения равны соответственно

.

Тангенс угла диэлектрических потерь является критерием деления сред на проводники и диэлектрики. Если , то в веществе плотность тока проводимости намного больше плотности тока смещения, и вещество называется проводником. Если , то в веществе плотность тока смещения намного больше плотности тока проводимости, и вещество называют диэлектриком. Металлы имеют большую удельную проводимость, поэтому у металлов  на всех частотах радиодиапазона. У типичных диэлектриков, наоборот, удельная проводимость очень мала, например, у кварца , у стекла . Существуют среды, у которых проводимость незначительна: у морской воды , у влажной почвы . Такие среды на низких частотах проявляют свойства проводников (), а на высоких частотах – свойства диэлектриков ().

При математическом анализе электромагнитных волн применяют понятие идеального диэлектрика и идеального проводника. Если , то среда (вещество) называется идеальным диэлектриком. Идеальный проводник – это среда с бесконечно большой удельной проводимостью (). Переменное электромагнитное поле не проникает в идеальный проводник, т.е. в нем  и . Предположим от противного, что внутри идеального проводника , тогда плотность тока проводимости . Сторонних источников, которые могли бы компенсировать бесконечные потери на нагревание, не существует. Остается предположить, что при  поле . Тогда из второго уравнения Максвелла следует, что , т.е. внутри идеального проводника в отсутствии электрического поля переменное магнитное поле существовать не может. Таким образом, в идеальном проводнике  и , поэтому идеальный проводник, находящийся в электромагнитном поле, тепловых потерь в поле не вносит. Понятия идеальных проводников и диэлектриков упрощают решение практически значимых задач, результаты которых могут быть использованы для реальных сред, близких по свойствам к идеальным.

**7.2. Комплексная диэлектрическая проницаемость**

Для вывода формулы, описывающей комплексную диэлектрическую проницаемость, воспользуемся материальным уравнением для электрического поля и перепишем первое уравнение системы (7.6) в следующем виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7.7) |

|  |  |
| --- | --- |
| где | – ***комплексная диэлектрическая проницаемость***: |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7.8) |

Действительная часть комплексной характеристики поля или среды в электродинамике обычно обозначается штрихом вверху, а мнимая – двумя штрихами:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7.9) |

Введение комплексной диэлектрической проницаемости позволяет легко учитывать как диэлектрические, так и проводящие свойства вещества. Величина вещественной части абсолютной диэлектрической проницаемости говорит об интенсивности процесса поляризации. Мнимая часть характеризует плотность токов проводимости.

Комплексную абсолютную диэлектрическую проницаемость можно изобразить на комплексной плоскости (рис. 7.1). Она образует с действительной осью отрицательный угол δ, который называется ***углом диэлектрических потерь***.

|  |
| --- |
| Безымянный |
| Рис. 7.1. Комплексная диэлектрическая проницаемость на комплексной плоскости |

Величина угла диэлектрических потерь определяется соотношением между мнимой и действительной частями комплексной диэлектрической проницаемости. На практике чаще всего пользуются ***тангенсом*** угла диэлектрических потерь:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7.10) |

Тангенс угла диэлектрических потерь равен отношению плотности токов проводимости и плотности токов смещения. В электродинамике он используется для классификации сред.

Электропроводность природных сред лежит в интервале приблизительно от 10-17 до 6.1\*107 См/м. Из-за такой разницы электропроводности сред их поведение в электромагнит­ном поле будет различным. Чем больше величина электропроводности, тем больше плотность тока проводимости в среде при той же напряженности электрического поля. С другой стороны, чем выше скорость изменения электрического поля и диэлектрическая проницаемость, тем больше плотность тока смещения.

Для упрощения анализа вводятся понятия ***идеального проводника***и ***идеального диэлектрика.***Идеальный проводник - это среда с бесконечно боль­шой электропроводностью (σ → ∞), а у идеального диэлектрика электропроводности нет (σ = 0). В идеальном про­воднике может существовать только ток проводимости, а в идеаль­ном диэлектрике - только ток смещения.

В реальных средах имеется ток проводимости и ток смещения, Поэтому ***проводниками принято называть среды, в ко­торых ток проводимости намного превосходит ток смещения. Среды, в которых основным является ток смещения, относят к ди­электрикам. Полупроводником считается среда, в которой токи смещения и токи проводимости одного порядка, то есть тангенс угла электрических потерь порядка единицы***.

Такое деление сред имеет относи­тельный характер, так как, при прочих равных условиях, зависит от скорости изменения электромагнитного поля, то есть от частоты.

**7.3. Тангенс угла диэлектрических потерь.**

**Тангенс угла диэлектрических потерь.** Для оценки соотношения между током проводимости и током смещения удобно ввести величину ***тангенс угла диэлектрических потерь***

== . (7.15)

В зависимости от значения tg*δ* среды можно классифицировать так:

 (7.16)

*– диэлектрик;*

*– полупроводящая среда;*

*– проводник.*

Из уравнения (7.15) следует, что tg*δ* зависит от частоты. Это значит, что одно и то же вещество может на НЧ вести себя как проводник, а на ВЧ – как диэлектрик.

Например, морская вода с параметрами *σ* = 1 См/м и *ε* = 80 на частотах менее 23 МГц проявляет себя как ***проводник***, а на частотах более 2,3 ГГц – как ***диэлектрик***. Следует отметить, что такие типичные диэлектрики, как фарфор, эбонит, слюда, из-за очень малой проводимости (*σ* <10–12 См/м) даже на очень низких частотах остаются диэлектриками, а металлы из-за очень высокой проводимости(*σ* >106 См/м) остаются проводниками на высоких частотах вплоть до диапазона КВЧ.

При измерениях на высоких частотах tg*δ* обычно оказывается больше, чем результаты по уравнению (7.15). Это происходит в основном из-за влияния ***поляризационных потерь*** [1, 11], которые суммируются с tg*δ* (7.15). Для типичных радиодиэлектриков на высоких частотах именно данный вид потерь является преобладающим [2], поэтому более точным будет определение tg*δ* как ***отношения активной части*** плотности полного тока смещения ***к реактивной*** [1, 2]

 , (7.17)

где *ψЭ* – угол запаздывания по фазе  от  [1, 2].

# Монохроматическое электромагнитное поле. Классификация электромагнитных явлений.

Для удобства решений поля условно разделяют на статические, стационарные и квази стационарные.

Решение уравнений Максвелла представляет собой сложную математическую задачу. Упростить задачу решения можно для монохроматических электромагнитных полей, т. е. для полей, изменяющихся во времени по гармоническому закону с частотой . Это упрощение возможно путём использования так называемого метода комплексных амплитуд. В этом случае вместо любой скалярной функции , изменяются по закону; -амплитуда, -начальная фаза, -круговая частота, вводится в рассмотрение комплексная функция  - комплексная амплитуда функции . Для перехода от  к исходной  нужно взять от  реальную часть 

Аналогично вместо вектора

 можно ввести комплексный вектор

 -комплексная амплитуда .

Определение комплексных функций во многих случаях проще, чем исходных. Это объясняется тем, что дифференцирование комплексной функции по времени равносильно умножению ее на : , а интегрирование по времени--делению на : 

При изучении монохроматических электромагнитных полей вместо векторов  и можно рассматривать комплексные векторы  и , связанные с векторами и  соотношениями  . Если

 то

--комплексная амплитуда.

Перейдём в системе уравнений Максвелла к комплексным векторам  и .

Первое уравнение:  т. к. , 

.

Введя обозначение:  перепишем уравнение в форме:

-первое уравнение Максвелла для монохроматического поля.

-комплексная диэлектрическая проницаемость среды. Кроме того это же уравнение может быть записано в виде: .

Аналогично второе уравнение Максвелла можно записать в форме: , а также:; ; ; .

Составим уравнение баланса для средних за период значений мощности монохроматического ЭМП.

Величина вектора Пойнтинга показывает плотность потока мощности т. е. мощность, проходящую через площадку размером 1м2, расположенную перпендикулярно направлению распространению энергии.

Рассмотрим выражение через комплексные амплитуды гармонических полей  и .





.

Представив эти выражения для вектора Пойнтинга

.

Первое слагаемое в правой части формулы не зависит от времени. Остальные слагаемые изменяются с двойной частотой и поэтому их среднее за период значение равно нулю. Следовательно, при усреднении вектора Пойнтинга, получаем:

.

Комплексный вектор  называют комплексным вектором Пойнтинга.

. Средний поток энергии через поверхность S, ограничивающую рассматриваемый объем V: 

.

Аналогично вычисляются средние значения остальных величин, входящих в уравнение баланса.

Дж. потери  .

Среднее значение электрической и магнитной энергии

а среднее за период изменение электромагнитной энергии = 0. , таким образом подходим к уравнению: 

## Классификация электромагнитных явлений.

Можно выделить несколько видов полей:

1. Электростатическое поле.

Описывается системой дифференциальных уравнений Максвелла в предложении, что векторы поля не зависят от времени и отсутствует перемещение зарядов.

Из уравнений следует, что оно является потенциальным, а его силовые линии начинаются и заканчиваются на зарядах. Вектор  можно представить в виде градиента скалярной функции и, называемой электростатическим потенциалом.



Энергия электростатического поля 

Явления, описываемые вышеприведёнными уравнениями- электростатические.

## Стационарное электромагнитное поле.

Это неизменное во времени ЭМП, существующее при наличии постоянного тока.

; ; ; ; ; .

Стационарные электромагнитные явления.

Магнитостатические явления характеризуются уравнениями: ; ; . И представляют поля, создаваемые постоянными магнитами.

В качестве самостоятельного класса выделяют квази стационарные процессы, т. е. процессы, протекающие достаточно медленно.

В этом случае в первом уравнении при наличии тока проводимости можно пренебречь током смещения. .

В остальных случаях используют полную систему уравнений Максвелла.