**ЛЕКЦИЯ №8. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ВЕКТОРОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА СРЕД.**

**План:**

8.1. Граничные условия.

8.2. Нормальные и касательные компоненты.

8.3. Граничные условия на поверхности идеального проводника.

**8.1. Граничные условия.**

Уравнения Максвелла, содержащие всю информацию об электромагнитном поле, позволяют определить, как изменяются векторы поля при переходе через границу раздела двух различных сред. На поверхности раздела параметры сред  ( или по крайней мере один из них) скачкообразно меняют свои значения. Например, на поверхности раздела вода-воздух происходят скачкообразные изменения проводимости и диэлектрической проницаемости. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме используются в средах, параметры которых либо не зависят от координат, либо являются непрерывными функциями координат. На поверхности раздела сред, где нарушается непрерывность параметров среды, уравнения Максвелла в дифференциальной форме теряют смысл и должны быть дополнены условиями, определяющими поведение векторов поля на границе раздела сред. Эти условия устанавливаются с помощью уравнений Максвелла в интегральной форме.

Соотношения, показывающие связь между значениями составляющих векторов электромагнитного поля в разных средах у поверхности раздела, называются граничными условиями.

Задача о граничных условиях ставится следующим образом. Имеется некоторая граница раздела *S* между первой средой с параметрами и второй средой с параметрами . Среды – линейные, изотропные. На границе раздела отсутствуют сторонние источники. На поверхности *S* выделяем точку *M*, предполагая, что в малой окрестности этой точки со стороны первой среды поле задано, а поле со стороны второй среды нужно найти. Векторы поля в окрестности точки *M* раскладываются на тангенциальные (касательные) и нормальные составляющие к границе раздела. Например, вектор  на границе раздела можно представить

 (8.1)

Здесь  – единственные векторы (орты) касательного и нормального направлений (рис. 8.1).



Рис. 8.1. Разложение одного из векторов поля на нормальную и касательную составляющие

Эти векторы лежат в плоскости, образованной вектором  и нормалью к границе раздела, проведенной в точке *M*. Поведение нормальных и тангенциальных составляющих векторов поля рассматриваются по отдельности. В окрестности точки *M* выделяется элементарный объем Δ*V* и элементарный контур Δ*L* такие, что часть Δ*V* и часть Δ*L* находятся в первой среде, а другие их части – во второй среде. Тогда с помощью уравнений Максвелла в интегральной форме можно связать векторы поля в обеих средах. При сжатии Δ*V* и Δ*L* к границе раздела сред предельные выражения уравнений Максвелла дадут граничные условия для нормальных и тангенциальных составляющих векторов электромагнитного поля.

**8.2. Граничные условия для нормальных составляющих векторов электромагнитного поля**

Установим условия, определяющие поведение нормальных к границе раздела сред составляющих векторов поля. На поверхности раздела *S* в окрестности выбранной точки *M* выделим элемент поверхности Δ*S*. Элемент Δ*S* должен быть настолько мал, чтобы, во-первых, его можно было считать плоским, во-вторых, чтобы в обеих средах распределение нормальной компоненты вектора  можно было считать равномерным в пределах Δ*S*. На элементе Δ*S* строится цилиндр высотой Δ*h* так, чтобы его основания (торцы) находились в разных средах (рис. 8.2).



Рис. 8.2. К выводу граничных условий для нормальных составляющих векторов электромагнитного поля

Единичные векторы  – орты нормали к торцам цилиндра,  – орт нормали к границе раздела. Применим третье уравнение Максвелла в интегральной форме к объему цилиндра Δ*V*, ограниченного поверхностями торцов Δ*S1* и Δ*S2* и боковой поверхностью цилиндра Δ*S*б.

 (8.2)

Сжимаем цилиндр к границе раздела, устремляя . Так как при  имеем , поэтому интеграл по боковой поверхности цилиндра стремится к нулю. В левой части (8.2) сохраняются интегралы по поверхностям торцов Δ*S*1 и Δ*S*2, остающимся в своих средах вблизи границы раздела

, (8.3)

где .

Учтем, что при :



.

Поскольку Δ*S* мало, то можно вынести и из под знака интеграла. Таким образом, при  из (8.3), сокращая Δ*S*, получаем соотношение

 (8.4)

В случае реальных сред заряды не скапливаются на границе раздела, они сосредотачиваются в тонком приграничном слое, так что объемная плотность зарядов остается конечной величиной и правая часть (8.4) стремится к нулю при . Соотношение (8.4) принимает вид

. (8.5)

Равенство (8.5) представляет собой граничное условие, которое формулируется следующим образом: нормальные составляющие вектора электрической индукции  на границе раздела двух сред непрерывны.

Выражая в уравнении (8.5)  и  через  и с помощью материального уравнения , получаем граничное условие для нормальных компонент вектора 

. (8.6)

Соотношение (8.6) показывает, что нормальная составляющая вектора  при переходе через поверхность раздела реальных сред имеет разрыв (скачок), величина которого определяется отношением диэлектрических проницаемостей этих сред.

Применим к объему цилиндра Δ*V* четвертое уравнение Максвелла в интегральной форме

.

При  предельное выражение этого уравнения представляет собой граничное условие для нормальных компонент вектора магнитной индукции 

. (8.7)

Нормальные составляющие вектора  при переходе через поверхность раздела сред непрерывны. Из материального уравнения  получаем граничное условие для нормальных компонент вектора напряженности магнитного поля 

 . (8.8)

Условия (8.8) показывают, что нормальная составляющая вектора  при переходе через поверхность раздела сред имеет разрыв, величина которого определяется отношением магнитных проницаемостей этих сред.

Граничные условия (8.5)…(8.8) справедливы для мгновенных значений векторов переменного электромагнитного поля. В случае гармонически изменяющегося поля (монохроматического) граничные условия (8.5)…(8.8) записываются для независящих от времени комплексных амплитуд векторов поля

. (8.9)

**8.3. Граничные условия для касательных составляющих векторов электромагнитного поля**

Установим условия, определяющие поведение касательных к границе раздела сред составляющих векторов поля. На поверхности раздела *S* двух изотропных сред из произвольной точки *M* проводится единичная нормаль , направленная из второй среды в первую (рис. 8.3).

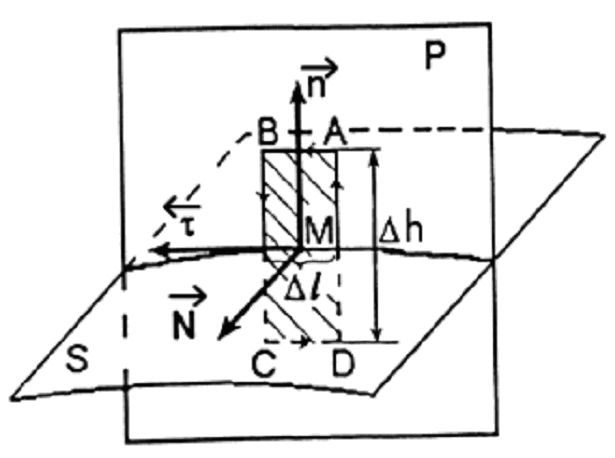


Рис. 8.3. К выводу граничных условий для касательных составляющих   
векторов электромагнитного поля

Через  проведем плоскость *P*. На линии пересечения поверхности раздела *S* с плоскостью *Р* выделим малый отрезок , содержащий точку *М*. Размеры отрезка должны быть такими малыми, чтобы, во-первых, его можно было считать прямолинейным, а во-вторых, чтобы распределения касательной составляющей вектора  в пределах  в обеих средах можно было считать равномерными. В плоскости *Р* построим прямоугольный замкнутый контур  (*АВСD*). Стороны *АВ* и *СD* параллельны  и находятся в разных средах. В точке *М* проведем единичную касательную  к линии пересечения поверхности раздела *S* с плоскостью *P* и единичную нормаль  к плоскости *Р*. Орты  составляют правую тройку векторов

, (8.10)

Обход контура *АВСD* образует правовинтовую систему с вектором .

Применим к контуру *АВСD* первое уравнение Максвелла в интегральной форме

, (8.11)

где  – площадь, охваченная контуром *АВСD*, а .

Интеграл по замкнутому контуру *АВСD* в (8.11) представляем в виде суммы по частям контура *АВ* и *СD* и двух интегралов по боковым сторонам длиной . Устремляем , при этом интегралы по боковым сторонам стремятся к нулю. В левой части (8.11) сохраняются интегралы по сторонам контура *АВ* и *СD*, остающимся в своих средах вблизи границы раздела

. (8.12)

Далее при  имеем:

 на стороне *АВ* и  на стороне *СD.*

Поскольку  мало, векторы поля и плотности токов можно вынести из под знака интеграла. Таким образом, при  из (8.12), сокращая , получаем соотношение

. (8.13)

В реальных средах числовые значения параметров сред конечны, следовательно, векторы плотности тока проводимости и тока смещения имеют конечные значения, при этом правая часть (8.13) при  стремится к нулю. Соотношение (8.13) принимает окончательный вид граничного условия

. (8.14)

Применим к контуру *АВСD* второе уравнение Максвелла в интегральной форме, проведем аналогичные преобразования и получим граничное условие для тангенциальных составляющих вектора 

. (8.15)

Условия (8.14), (8.15) формулируются следующим образом: касательные составляющие векторов напряженностей электрического и магнитного полей остаются непрерывными при переходе через поверхность раздела реальных сред.

Воспользуемся материальным уравнением  и запишем с учетом (8.15) граничные условия для касательных составляющих вектора 

 . (8.16)

Касательная составляющая вектора  претерпевает разрыв, величина которого определяется отношением диэлектрических проницаемостей сред. Из материального уравнения  и граничного условия (8.14) имеем

 . (8.17)

Граничное условие (8.17) показывает, что касательная составляющая вектора  претерпевает разрыв, величина которого зависит от соотношения между магнитными проницаемостями.

Граничные условия (8.14) и (8.17) записаны для мгновенных значений векторов переменного электромагнитного поля. В случае монохроматического поля граничные условия записываются для комплексных амплитуд векторов поля

. (8.18)

Обратим внимание на тот факт, что граничные условия для нормальных и тангенциальных составляющих векторов электромагнитного поля имеют различия. Причину этих различий покажем на примере вектора . Пусть имеются две изотропные среды с общей границей раздела, характеризуемые диэлектрическими проницаемостями  и . Под воздействием внешнего электрического поля обе среды поляризуются, причем вектор поляризованности  будет иметь различные значения, так как . Пусть вектор , а, следовательно, и вектор  перпендикулярны границе раздела (рис. 8.4).

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Рис. 8.4. Поляризация диэлектриков при нормальной ориентации вектора



Рис. 8.8. Поляризация диэлектриков при касательной ориентации вектора 

На рис. 8.4. показан случай, когда  и вторая среда поляризуется легче (символически это отображено на рис. 8.4) тем, что во второй среде больше молекулярных диполей, ориентированных параллельно вектору . На границе раздела возникают нескомпенсированные положительные связанные заряды (вторичные источники). Эти заряды создают дополнительное электрическое поле, которое в первой среде складывается с первичным полем, а во второй – вычитается, так что  и нормальная составляющая вектора  имеет разрыв при переходе через границу раздела.

Если векторы  и  параллельны поверхности раздела (рис. 8.5), то нескомпенсированных зарядов на границе раздела не возникает,  и тангенциальная составляющая непрерывна. Но при этом тангенциальная составляющая вектора индукции электрического поля  испытывает скачок в силу одинаковых  в обеих средах, но разных . Различие в граничных условиях для нормальных и тангенциальных составляющих векторов магнитного поля  и  объясняется разной степенью намагниченности сред, что приводит к появлению поверхностных молекулярных токов, создающих дополнительное магнитное поле.

**8.4. Граничные условия на поверхности идеального проводника**

При изучении переменных электромагнитных полей вблизи поверхности металлического тела предполагают, что рассматриваемое тело является идеальным проводником. При этом граничные условия упрощаются, так как в среде с  переменное поле отсутствует. Пусть идеально проводящей является вторая среда, тогда . Первая среда изотропная, непроводящая. Поведение нормальных составляющих векторов поля установим с помощью соотношения (8.4)



В присутствии переменного поля заряды идеального проводника сосредотачиваются на его поверхности в бесконечно тонком слое, распределяясь с некой поверхностной плотностью. Представим объемную плотность зарядов в следующем виде:

, (8.19)

где  – элемент поверхности проводника;

 – поверхностная плотность заряда (её часто называют также плотность поверхностных зарядов).

Тогда правая часть соотношения (8.4) принимает вид , и, приравняв нулю , получаем граничное условие для нормальной составляющей вектора  на поверхности идеального проводника

. (8.20)

Нормальная составляющая вектора  определяется из материального уравнения 

. (8.21)

Нормальные составляющие векторов магнитного поля определяются из (8.7) и (8.8)

, . (8.22)

Поведение касательных к поверхности *S* проводника составляющих векторов  и  установим с помощью соотношения (8.13)

.

Объемная плотность тока смещения величина всегда конечна, так как векторы поля и их производные величины ограниченные, поэтому в правой части (8.13) имеем  Особый разговор об объёмной плотности тока проводимости в правой части (8.13)

, (8.23)

где  – скорость носителей заряда.

Поскольку заряд сосредоточен на поверхности, (8.23) примет вид

, (8.24)

где  – поверхностная плотность тока проводимости (её часто называют плотность поверхностного тока).

Поверхностная плотность тока проводимости  имеет размерность А/м. Теперь предельный переход в (8.13) даст правую часть, отличную от нуля

. (8.25)

Заменяем  и используем свойства циклической перестановки сомножителей в смешанном произведении, в результате получаем

.

Поскольку это равенство выполняется при любом направлении орта , то из этого следует:

 . (8.26)

Из уравнения (8.15) получаем граничное условие для тангенциальной составляющей вектора 

. (8.27)

Итак, на поверхности идеального проводника выполняются следующие граничные условия для нормальных и тангенциальных составляющих векторов поля:

  (8.28)

Тангенциальная составляющая магнитного поля наводит на поверхности идеального проводника электрический ток с плотностью , который перпендикулярен вектору магнитного поля . На поверхности идеального проводника нормальная составляющая вектора  и касательная составляющая вектора  обращаются в нуль. Силовые линии магнитного поля (замкнутые) подходят к идеальному проводнику так, что только касаются его поверхности. Силовые линии электрического поля к идеальному проводнику подходят так, что всегда перпендикулярны его поверхности.

**Контрольные вопросы и задания**

1. Для чего вводятся условия на границе раздела для векторов ЭМП?
2. Дайте формулировку граничных условий для нормальных составляющих векторов ЭМП.
3. Сформулируйте граничные условия для касательных составляющих векторов ЭМП.
4. При каких условиях вектор  во второй среде направлен практически по нормали при наклонной ориентации аналогичного вектора в первой среде?
5. Какая компонента ЭМП наводит поверхностный ток в проводящей среде?
6. Какие уравнения используются для вывода граничных условий?
7. Как зависит угол наклона векторов  и  во второй среде от расположения в первой среде и параметров сред?
8. Как влияет электропроводность сред на граничные условия?