**ЛЕКЦИЯ №9. ЭНЕРГИЯ И МОЩНОСТЬ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ.**

**План:**

9.1. Энергия и мощность электромагнитного поля.

9.2. Баланс энергии.

9.3. Теорема Умова-Пойтинга

**9.1. Энергия и мощность электромагнитного поля.**

***Энергией называется общая количественная мера различных форм движения материи***, а ***мощностью называется работа, производимая в единицу времени***.

Электромагнитное поле обладает энергией, значит, ее можно определить. При этом векторы поля и электродинамические характеристики средысчитаем известными.

Объемная плотность энергии электромагнитного поля в линейной изотропной среде задается соотношением:



с - скорость света в вакууме.

В случае плоской линейно поляризованной монохроматической волны, распространяющейся вдоль положительного направления ОY, напряженность электрического поля задается уравнением:



соответственно объемная плотность энергии этой волны 

Значение объемной плотности энергии волны меняется за период от 0 до .Среднее за период значение энергии равно:

.

8. Вектор плотности потока энергии электромагнитной волны называется *вектором Умова - Пойнтинга:*



Для линейно поляризованной монохроматической волны вектор Пойнтинга направлен в сторону распространения волны и численно равен: 

*Интенсивность электромагнитной волны* равна модулю среднего значения вектора Пойнтинга за период его полного колебания:



*Интенсивностью электромагнитной волны* называется физическая величина, численно равная энергии, переносимая волной за единицу времени через единицу площади поверхности, расположенной перпендикулярно к направлению распространения волны.

Интенсивность бегущей монохроматической волны:  - фазовая скорость волны, среднее значение объемной плотности энергии поля волны.

*Интенсивность света* (электромагнитных волн, рассматриваемых *в оптике*) прямо пропорциональна квадрату амплитуды колебаний вектора напряженности **Е** поля световой волны.

**9.2. Баланс энергии электромагнит­ного поля**

Вначале сформулируем уравнение баланса энергии в общем виде. Для этого рассмотрим объем *V*, заполненный однородной изо­тропной средой и ограни­ченный поверхностью *S*. Пусть в этом объеме за счет действия сторонних источни­ков выделяется электромаг­нитная энергия. Очевидно, что мощность, выделяемая сторонними источниками, может расходо­ваться на потери в среде, на изменение запаса энергии внутри объема и на излучение в окружающую среду через поверхность *S*. При этом должно выполняться следующее равенство:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.1) |

|  |  |
| --- | --- |
| где | *Рст* - мощность сторонних источников, Вт; |
|  | *Рп* - мощность потерь внутри объема *V*, Вт; |
|  | *PΣ* - мощность, излучаемая через поверхность *S*, Вт; |
|  | *W* - энергия электромагнитного поля, сосредоточенная в объе­ме *V*, Вт\*с; |
|  | *dW/dt* - мощность, расходуемая на изменение запаса энергии внутри объема *V*, Вт. |

Уравнение (9.1) дает качественное представление об энергетических соотношениях в электромагнитном поле. Для определения количественных характеристик воспользуемся уравнениями Максвелла.

Рассмотрим первое уравнение Максвелла с учетом сторонних токов из системы (2.23). Все члены этого уравнения - вектор­ные величины, имеющие размерность ампер на квадратный метр (А/м2). Чтобы сравнить его с уравнением (9.1) нужно преобразовать все слагаемые в скалярные величины, измеряющиеся в ваттах. Для этого до­статочно скалярно умножить их на вектор **Е** ипроинтегрировать полученное выражение по объему *V.* После скалярного умножения получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.2) |

Далее необходимо использовать формулу векторного анализа (1.26) [6] и выразить из нее произведение **Е** rot **Н**, стоящие в правой части уравнения (9.2):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.3) |

Подставим это выражение в формулу (9.2) и перенесем произведение вектора напряженности электрического поля на вектор плотности сторонних токов в левую часть, а все остальные слагаемые – в правую. Кроме того, с помощью второго уравнения Максвелла заменим rot **Е** на производную по времени от вектора магнитной индукции с обратным знаком и с помощью формул (1.9), (1.14) выразим векторы индукции через соответствующие векторы напряженности поля и проницаемости. Получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.4) |

Векторное произведение векторов **Е** и **Н** обозначается буквой **П** и называется ***вектор Пойнтинга***:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.5) |

Осталось проинтегрировать уравнение (9.4) по объему *V*. В результате получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.6) |

В преобразовании уравнения (9.6) использована теорема Остроградского-Гаусса (1.33) [6]. Кроме того, в последнем слагаемом правой части уравнения изменен порядок операций интегри­рования и дифференцирования.

Левая часть уравнения (9.6) определяет мощность, отдаваемую сторонними токами в объеме *V*. Сторонний ток проводимости – это упорядоченное движение заряженных частиц. Для простоты положим, что векторы напряженности электрического поля и плотности сторонних токов коллинеарны. Если частицы тормозятся полем, ток отдает ему свою энергию. Для этого требуется, чтобы векторы напряженности электрического поля и плотности стороннего тока были направлены про­тивоположно. Значит, скалярное произведе­ние векторов **Е** и **Jст** будет отрицательным и левая часть уравнения (9.5) станет положительной величиной. Такая ситуация характерна для работы некоторых передающих антенн.

Если векторы плотности стороннего тока и напряженности электрического поля направлены в одну сторону, заряженные частицы будут ускоряться полем, и ток станет отбирать у него энергию. Эту процедуру осуществляют разного рода приемные антенны, однако энергия, которую они могут отнять у поля в свободном пространстве, невелика.

Иначе обстоит дело в волноводах, которые служат для передачи энергии от источника к потребителю. На входном конце волновода сторонние силы реализуют процедуру возбуждения поля. Когда энергия достигает конца волновода, ее надо полностью отобрать у поля и передать потребителю. Для этого используются приемные устройства, преобразующие энергию электрической или магнитной составляющей поля в ток проводимости и передающие его дальше. В этом случае требуется отбирать у поля максимум энергии.

Реальная среда всегда обладает электропроводностью. Поэтому, зная напряженность электрического поля и электропроводность среды, можно найти мощность тепловых потерь, т. е. энергию, теряемую электромагнитным процессом за единицу времени.

|  |
| --- |
| Безымянный |
| Рис. 9.1. К определению мощности потерь |

Электрическая мощность – это произведение тока на напряжение. Нам известна напряженность электрического поля и электропроводность среды. Значит, можно определить плотность тока проводимости, создаваемого полем. Напряженность электрического поля имеет размерность В/м, а плотность тока проводимости – А/м2. Их произведение будет иметь размерность Вт/м3, то есть ***плотности мощности***. Значит, первое слагаемое в правой части формулы (9.6), интеграл от плотности мощности, описывает ***мощность потерь***.

Обратимся к рис. 9.1, на котором изображена картина линий вектора плотности тока проводимости. В объеме протекания тока выделена цилиндрическая область *V*. Этот цилиндр имеет длину *l* и площадь основания *S*, а ось его совпадает с направлением вектора плотности тока проводимости. Для упрощения решения задачи область должна быть так мала, чтобы вектор плотности тока внутри нее можно было бы считать не зависящим от координат. В этом случае в соответствии с первым слагаемым правой части формулы (9.6) получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.7) |

Так как плотность тока проводимости и напряженность поля не зависят от координат, они вынесены из-под знака интеграла. Там остался только скалярный дифференциал объема. Его интегрирование по объему дает величину объема. В средней части формулы (9.7) объем цилиндра представлен как произведение площади его основания *S* на длину *l,* а параллельные векторы плотности тока и напряженности поля заменены их модулями. Ток *I* в последней части формулы определен как произведение площади основания цилиндра на плотность тока, а напряжение *U* – как произведение длины цилиндра на напряженность электрического поля.

Равенство (9.7) эквивалентно ***закону Джоуля - Ленца***.

Для выяснения физического смысла последнего слагаемого в правой части уравнения (9.6) рассмотрим частный случай. Предположим, что объем *V* окружен идеальной проводящей оболочкой, совпадающей с поверхностью *S*. Такая оболочка блокирует обмен энергией с внешней средой, и объем становится ***энергетически изолированным***. В этом случае тангенциальная (касательная) составляющая напря­женности электрического поля на поверхности *S* будет равна нулю. Векторный дифференциал поверхности **dS** совпадает по направлению с ортом внешней нормали **n0**. Следовательно, поверхностный интеграл в уравнении (9.6) будет равен нулю из-за того, что нормальная компонента вектор­ного произведения [**Е, Н]** определяется тангенциальными составляю­щими входящих в него векторов.

Предположим, кроме того, что электропроводность среды в объеме *V* равна нулю. Значит, тепловые потери исчезнут, и первый интеграл в правой части уравнения (9.6) также будет ра­вен нулю. Получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.8) |

В таком изолированном объеме без потерь мощность сторонних источников может расходоваться только на изменение запаса энергии электромагнитного поля. Значит, правая часть уравнения (9.8) равна скорости изменения энергии электро­магнитного поля, запасенной в объеме *V,* а интеграл в правой части этого уравнения равен энергии электромагнитного поля в объеме *V*:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.9) |

Осталось выяснить физическую сущность поверхностного инте­грала в уравнении (9.6). Предположим, что потери внутри объема *V* отсут­ствуют и, кроме того, величина электромагнитной энергии остаетсяпостоянной. B этом случае уравнение (9.6) примет следующий вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.10) |

Потерь в объеме нет, и запас энергии не меняется, значит, вся мощность сторонних источников должна излучаться в окружающее пространство. Следовательно, поток вектора Пойнтинга **П** через поверхность *S* равен излучаемой мощности, которую в уравнении (9.1) мы обозначили *РΣ*.

Таким образом, качественное уравнение (9.1) преобразовано в уравнение (9.6) с помощью которого можно проводить количественные оценки составляющих баланса мощности.

Рассмотрим частный случай отбора энергии электромагнитного поля сторонними источниками. Пусть энергия поступает в объем *V* из окружающего пространства. Часть ее преобразуется в тепло, а другая отбирается сто­ронними источниками. При этом количество электромагнитной энер­гии, запасенной в объеме *V*, не изменяется. Урав­нение (9.6) в этом случае надо переписать в следующем виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.11) |

Левая часть уравнения (9.11) определяет мощность, поступающую в объем *V* извне, а правая часть - мощность, расходуемую в этом объеме. Это уравнение было получено Пойнтингом и носит название ***теоремы Пойнтинга в интегральной форме****.*

Так как левая часть уравнения (9.11) представляет собой поток энергии, то вектор Пойнтинга является ***вектором плотности потока энергии****.* ***Направление вектора Пойнтинга в изотропной среде совпадает с направлением распространения энергии***.

**9.2. Плотность энергии электромаг­нитного поля**

Мы выяснили, что энергия, запасенная электромаг­нитным полем в объеме *V* определяется формулой (9.9). Ин­теграл в этом выражении можно представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых зависит только от электрического по­ля, а второе - только от магнитного:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.12) |

где *Wэ* – энергия электрического поля, Вт\*с:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.13) |

*Wм* - энергия магнитного поля, Вт\*с:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.14) |

Подынтегральные выражения в формулах (9.13) и (9.14) описывают объемные плотности энергии электрического и магнитного полей:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.15) |
|  | (9.16) |

Сумма результатов вычислений по формулам (9.15) и (9.16) дает объемную плотность полной энергии электромагнитного поля.

Необходимо обратить внимание на следующий факт. Векторы напряженности электрического и магнитного полей удовлетворяют принципу суперпозиции. Это означает, что векторы напряженности полей, созданных разными источниками, складываются. Однако этот принцип не распространяется на энергию.

Для доказательства этого рассмотрим два поля, вектора напряженности которых равны **Е1, Н1** и **Е2, Н2** соответственно. Они существуют в одной области *V* и имеют энергии *W1* и *W2*. Векторы напряженности суммарного поля определятся простым суммированием: **Е = Е1 + Е2**, **Н = Н1 + H2**. Энергию суммарного поля надо определять по формуле (9.9):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.17) |

где *W12* - взаимная энергия полей:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.18) |

Взаимная энергия может быть как положительной, так и отрицательной. Если же векторы **Е1 и Е2**, а также **Н1 и Н2** взаимно перпенди­кулярны, то взаимная энергия полей равна нулю*.*

В переменном электромагнит­ном поле энергия непрерывно перераспределяется между электрическим и магнитным полем. Это перераспределение в каждой точке поля описывается уравнением (9.4). Однако его целесообразно переписать в ином виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.19) |

|  |  |
| --- | --- |
| где | *рст* *=* -**EJст** - плотность мощности сторонних источников, Вт/м3; |
|  | *pп* = **EJп** - плотность мощности тепловых потерь, Вт/м3; |

Уравнение (9.19) является ***дифференциальной формой теоремы Пойнтинга****.*

**9.3. Скорость распространения элек­тромагнитной энергии**

Электромагнитная энергия распространяется в пространстве не мгновенно, а с некоторой скоростью. Для определения этой скорости в пространстве, в котором распространяется энергия, выделим энергетическую трубку (рис. 9.2). Форма трубки должна быть такой, что­бы ее боковая поверхность совпадала с направлением вектора Пойнтинга. То есть на боковой поверхности трубки нормальная составляющая векто­ра Пойнтинга должна быть равна нулю.

|  |
| --- |
| Безымянный |
| Рис. 9.2. Энергетическая трубка |

За время Δ*t* через поперечное сечение труб­ки Δ*S* проходит энергия Δ*W*. Она сосредоточена в объеме Δ*V* между сечениями трубки Δ*S* и Δ*S1*. Расстояние между этими сечениями равно Δ*l*. При этих условиях скорость распространения энергии можно описать формулой:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.20) |

|  |  |
| --- | --- |
| где | **vэ** – скорость распространения энергии, м/с; |
|  | **10** - орт, показывающий направление распрост­ранения энергии |

Энергию Δ*W*, распространяющуюся вдоль трубки, можно определить интегрированием плотности энергии по площади сечения трубки и умножением результата на ее длину:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.21) |

|  |  |
| --- | --- |
| где | Δ*S'* - поперечное сечение трубки, расположенное между Δ*S* и Δ*S1* |

Положение этого сечения не важно, так как через любое сечение трубки за время Δ*t* проходит вся энергия Δ*W*. При достаточно малых промежутках времени Δ*t* вектор Пойнтинга можно считать неизменным, поэтому, кроме равенства (9.21) должно выполняться еще одно:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.22) |

Для того чтобы определить скорость переноса энергии надо разделить Δ*l* на Δ*t* и устремить Δ*t* к нулю. Для этого надо формулу (9.22) разделить на формулу (9.21), выделить искомое отношение и выполнить предельный переход:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.23) |

Если векторы **Е и Н** постоянны в сечении Δ*S*, постоянными будут и вектор Пойнтинга **П** и объемная плотность энергии *w*.В этом случае соотношение (9.23) можно упростить, основываясь на том, что ***направ­ление вектора Пойнтинга совпадает с направлением распростра­нения энергии***:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.24) |

Следовательно, ***скорость переноса энергии электромагнитным полем можно вычислить, разделив плотность потока энергии (вектор Пойнтинга) на плотность энергии***.

**9.4. Баланс энергии при гармонических колебаниях**

В радиотехнике гармонические колебания электромагнитных полей обычно бывают высокочастотными. Поэтому их энергетические характеристики чаще всего целесообразно усреднять по времени. Правила усреднения комплексных амплитуд описаны во многих учебниках и приведены, в том числе, в [6].

Результат усреднения можно выразить через комплексные амплитуды. Например, плотности энергии электрического и магнитного полей в формулах (9.15) и (9.16) пропорциональны квадратам напряженностей. С использованием комплексных амплитуд среднюю плотность энергии, запасенной электромагнитным полем, можно описать формулой:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.25) |

Среднее значение плотности мощности определяется как действительная часть комплексной плотности мощности:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.26) |

|  |  |
| --- | --- |
| где | -плотность комплексной мощности, Вт/м3 |

Аналогично определяется среднее значение вектора Пойнтинга:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.27) |

Для того чтобы понять, как соотносятся мгновенные и средние значения энергетических величин, проанализируем формулу (9.26), описывающую плотность мощности. Пусть имеется электрическая составляющая электромагнитного поля, которая описывается следующей формулой:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.28) |

В том же объеме существует ток, сдвинутый по фазе относительно напряженности:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.29) |

|  |  |
| --- | --- |
| где | φ – угол сдвига фаз между током и напряжением |

При этих условиях плотность мощности можно вычислить по следующей формуле:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.30) |

Важной особенностью полученного результата является наличие в описании плотности мощности двух слагаемых, изменяющихся по разным законам. Первое слагаемое, пропорциональное cos φ, не зависит от времени и равно ***среднему значению плотности мощности***. Второе слагаемое – ***переменная составляющая плотности мощности, колеблющаяся с удвоенной частотой***.

Результаты расчетов по формуле (9.30) при разных сдвигах фаз между током и напряжением приведены на рис. 9.3. Там построены графики зависимости напряженности электрического поля, плотности тока, мгновенной и средней плотности мощности от времени. Если напряженность поля и ток синфазны, то плотность мощности положительна, а ее среднее значение равно половине максимального (рис. 9.3,а).

|  |
| --- |
| Безымянный |
| Рис. 9.3. Мгновенные и средние величины плотности мощности |

При сдвиге фаз между током и напряжением π/4 (рис. 9.3, б) мгновенная плотность мощности некоторую часть периода отрицательна. Среднее значение мощности уменьшилось, но осталось положительным. Переменная составляющая мощности превышает среднюю более чем вдвое. При сдвиге фазы π/2 (рис. 9.3, в)среднее значение мощности равно нулю.

Если сдвиг фаз будет расти и дальше, картина изменения средней мощности повторится с изменением знака (рис. 9.3, г – е). Следовательно, ***переменная составляющая плотности мощности может как угодно превосходить модуль ее среднего значения***. Но ***модуль среднего значения плотности мощности может достигать лишь половины амплитуды переменной составляющей***.

Для описания среднего баланса энергии гармонического электромагнитного поля в некоторой области *V* воспользуемся комплексными амплитудами и комплексными проницаемостями. Прилучим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.31) |

В этой формуле за излучение отвечает левая часть, задана плотность комплексной мощности источников (последнее слагаемое в правой части), а электрические и магнитные потери учтены в соответствующих комплексных проницаемостях. Подставим в эту формулу комплексные проницаемости в виде сумм действительной и мнимой частей, выделим действительную и мнимую части результата и проинтегрируем полученные равенства по объему *V* с границей *S*. Получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.32) |
|  | (9.33) |

|  |  |
| --- | --- |
| где | -комплексная мощность источников, Вт. |

В левой части равенства (9.32) стоит действительная составляющая комплексного потока энергии РΣ – то есть ***средний поток энергии через поверхность S***. Последний член справа дает ***среднюю мощность источников***. Поэтому равенство (9.32) удобно записать в следующем виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.34) |

Это - ***уравнение среднего баланса энергии*** ***при гармонических колебаниях***.

Пусть источники отдают энергию полю, то есть средняя мощность сторонних источников меньше нуля. Если диэлектрическая и магнитная проницаемости вещественны, то объемный интеграл в формуле (9.32) исчезает. При этом в среднем вся мощность источников будет расходоваться на излучение.

Если же есть потери, то мнимые части проницаемостей будут больше нуля и объемный интеграл в формуле (9.34) будет положительным. Значит, средняя мощность излучения уменьшится на его величину. Из этих рассуждений следует, что объемный интеграл в формуле (9.34), взятый без знака минус, описывает ***среднюю мощность потерь*** в объеме *V*:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.35) |

Полученный результат еще раз поясняет смысл мнимых частей комплексных проницаемостей. Если они равны нулю, среда не поглощает энергии. Потери энергии существуют, если мнимые части проницаемостей больше нуля. Эти потери происходят в результате преобразования энергии поля в какие-то иные формы, и, в конечном счете – в тепло.

В простейшем варианте поглощение вызывается только электропроводностью среды. Этот случай встречается в практических задачах чаще всего. Для среды без магнитных потерь равенство (9.35) можно переписать в следующем виде:

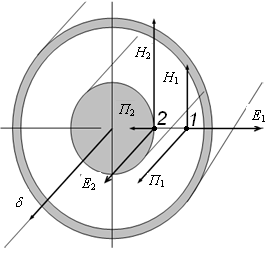
|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.36) |

Действительная часть мощности сторонних источников называется ***активной мощностью,*** а действительная часть мощности излучения - ***активным потоком энергии***. Мнимые части этих величин называются ***реактивной мощностью и реактивным потоком энергии***. При вещественных диэлектрической и магнитной проницаемостях получаем:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.37) |

Отсюда следует, что ***реактивные составляющие связаны здесь с разностью средних значений электрической и магнитной энергии*** в объеме *V*.

**9.5. Теорема Умова-Пойтинга**

 Теорема Умова-Пойтинга позволяет сделать важный теоретический вы­вод, что элек­трическая энергия от генератора к приемнику передается не по проводам линии электропере­дачи, а электромагнитным полем, окружающим эти провода, а сами провода выполняют две другие функции:

1) создают усло­вия для получения электромагнитного поля;

2) являются на­правляющими для потока электроэнергии.

К кабелю прило­жено постоянное напряжение *U* и протекает ток *I*.

Особенностью режима работы коаксиального кабеля является то, что его электриче­ское и магнитное поле не выходит за пределы наружной оболочки.

Рассмотрим режим точки 1, расположенной в диэлектрике на расстоянии *r* от оси ка­беля. Линейная плотность заряда:.

Радиальная составляющая напряженности электрического поля: .

Вектор напряженности магнитного поля имеет только угловую составляющую : .

Векторы поля и  направлены под углом в 90о друг к другу.

Вектор Пойтинга:.

По­ток вектора Пойтинга через поперечное сечение диэлектрика:

.

Вывод: поток вектора Пойтинга через поперечное сечение диэлектрика равен переда­ваемой мощности *Р*, т. е. энергия от источника к приемнику передается электромагнит­ным полем, сосредоточенным в диэлектрике между жилой и оболочкой.

Рассмотрим режим точки 2, расположенной на наружной поверхности жилы.

Плотность тока в жиле кабеля: .

Составляющая напряженности электрического поля по оси z: .

Напряженность магнитного поля: .

Векторы поля и  направлены под углом в 90о друг к другу.

Радиальная составляющая вектора Пойтинга: .

Поток вектора Пойтинга через боковую поверхность внутренней жилы:

.

Вывод: поток вектора Пойтинга через наружную поверхность жилы направлен внутрь провода и равен мощности тепловых потерь в жиле .

**Контрольные вопросы и задания**

1. Сформулируйте закон баланса энергии для ЭМП.
2. Укажите физический смысл, правила ориентации, единицу измерения вектора Пойнтинга.
3. Назовите основные разновидности мощностей.
4. Проанализируйте баланс энергии ЭМП в замкнутом последовательном контуре с потерями и без потерь.
5. Определите среднее значение вектора Пойнтинга через комплексные амплитуды векторов ЭМП.
6. Какие величины характеризуют изменение запаса энергии в системе?
7. Объясните энергетический смысл комплексных проницаемостей сред.
8. Как можно определить скорость движения энергии ЭМВ?
9. Каков смысл мнимой части вектора Пойнтинга и мощности излучения?
10. Как определяется  изотропного источника?