

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA  
O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

---

---

A.A. ABDUMALIKOV

# ELEKTRODINAMIKA

*O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lif vazirligi  
tomonidan 5140200 — «Fizika» ta'lif yo'nalishi talablari uchun  
derslik sifatida tavsiya etilgan*

*Cho'lpox nomidagi nashriyot-matbaa ijodiy uyi  
Toshkent — 2011*

UDK: 537.8(075)  
BBK 22.31ya73  
A15

Taqrizchilar:

*K.A. Tursunmetov – fizika-matematika fanlari doktori, professor,  
A. Boydedorov – fizika-matematika fanlari doktori, professor*

**Abdumalikov A.A.**

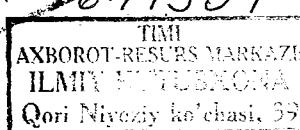
A15 Elektrodinamika: universitetlar va pedagogik universitetlar uchun  
derslik / A.A.Abdumalikov. – T.: Cho'lpox nomidagi nashriyot-matbaa  
ijodiy uyi, 2011. – 344 b.

ISBN 978-9943-05-408-0

Mazkur darslik nazariy fizika kursining elektrodinamika qismiga  
bag'ishlangan bo'lib, maxsus nisbiylik nazariysi, mikroskopik va makroskopik  
elektrodinamika bo'limlarini qamrab oladi. Mavzularni tanlash va ularni bayon  
qilishda Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti nazariy  
fizika kafedrasida ishlab chiqilgan namunaviy o'quv dasturga amal qilindi.  
Darslikda asosiy e'tibor fizikadagi asosiy prinsiplargatayangan holdauzluksiz  
ravishda maxsus nisbiylik nazariysi va elektrodinamika qonunlarining va  
muhim effektlarning fizik mohiyatini ochishga qaratilgan. Ushbu darslik oliv  
ta'lif muassasalarini fizika, astronomiya va texnika yo'nalishida ta'lif olayotgan  
talabalarga mo'jallangan.

UDK: 5378(075)  
BBK 22.31ya73

ISBN 978-9943-05-408-0



© A.A. Abdumalikov, 2011

© Cho'lpox nomidagi nashriyot-matbaa ijodiy uyi, 2011

## So‘zboshi

Nazariy fizika bo‘limlarini bir butun holda qamrab olgan fan va texnikaning zamonaviy yutuqlarini aks ettiruvchi o‘zbek tilida yozilgan darslik mavjud emas. Bundan tashqari, oxirgi o‘n yillarda fizika va u bilan bog‘liq sohalarning intensiv rivojlanishi mavjud bo‘lgan (asosan rus tilida) va eskirgan o‘quv qo‘llanmalarda o‘z aksini topmagan.

Fizikaning zamonaviy yutuqlarining texnika va texnologiyaga, hamda fizika bilan bog‘langan fanlarga (ekologiya, geofizika, astrofizika, biologiya, tibbiyat va boshqalar) kirib borishi soha mutaxassislaridan keng spektrdagi elektrodinamika masalalarini yechish metodlarini egal-lagan bo‘lishini talab qiladi. Shu vaqtida elektrodinamikaning o‘zi va tatbiqiy masalalari juda kengayib ketganligi sababli bitta darslikda uning hamma jabhalarini qamrab olish mumkin emas. Bundan tashqari oliy ta‘lim tizimida mustaqil ravishda ulmiy izlanishlar olib bora oladigan va muhim masalalarni yecha oladigan mutaxassislarni tayyorlashga katta e’tibor qaratilganligi bois, talabalarning mustaqil saboq olishining ulishi kundan kunga oshub bormoqda.

Yuzaga kelgan bu sharoit nazariy fizika bo‘yicha yangi tipdagi darsliklar majmuasini yaratishni ta‘qazo qiladi. O‘quvchilarga havola qilinayotgan ushbu kitob nazariy fizika kursi bo‘yicha 4 jildli “Nazariy fizika kursi” darsligining ikkinchi jildi hisoblanadi. Klassik o‘quv qo‘llanmalarda va darsliklarda elektrodinamikaning asosiy tenglamalari fenomenologik, ya‘ni tajriba natijalarini umumlashtirish yo‘li bilan yoziladi. Elektrodinamika qonunlarini o‘rganishda bunday yondoshish ushbu fanning rivojlanish tarixi bilan ham ohang bo‘lib, umumiyligi fizika kursidan deyarli farq qilmaydi, faqat biroz murakkab matematik apparatdan foydalaniлади.

Darslikda mavzularni bayon qilish tartibi muallifning Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universitetida, Buxoro davlat universitetida va Nizomiy nomidagi pedagogika universitetida leksiyalar o‘qish jarayonida to‘plagan ko‘p yillik tajribasiga asoslangan bo‘lib, prinsipial ravishda odatdagisi yondashishdan farq qiladi.

Asosiy urg‘u tabiat qonunlarini aks ettiruvchi fundamental prinsiplar – fazo va vaqtning bir jinsliligi va izotroplik xossalariiga tayangan holda, nazariy fizikaning zamonaviy metodlari orqali uzluksiz ravishda maxsus nisbiylik nazariyasi va elektrodinamika qonunlarini va muhim effektlarning fizik mohiyatini ochishga qaratilgan. Bunda tajribalarning roli inkor etilmaydi.

Tajribalarga ikki holda tayaniлади: Birinchidan, Galiley zamonidan Eynshteyn davrigacha olib borilgan izlanishlar natijasida vaqt va fazoning xossalari to‘g‘risidagi fundamental prinsiplarning qaror topishida tajribalar muhim rol o‘ynagan. Ikkinchidan, nazariy yo‘l bilan aniqlangan qonunlarning to‘g‘ri ekanligini tasdiqlashda tajribalar muhim ahamiyat kasb etadi. Ushbu darslikda tanlagan yo‘l tajribalarda kashf qilingan tabiat qonunlarining fizik mohiyatini ochib berish va tushunturish bilan bir qatorda yangi qonunlarni kashf etishga zamin yaratadi.

Darsliklar majmuasining ushbu jildi uch qismdan iborat. Birinchi qism *maxsus nisbiylik nazariysiga* bag‘ishlangan. Unda maxsus nisbiylik nazariyasining yaratilishi bilan bog‘liq bo‘lgan tarixiy ma’lumotlar va asosiy tajribalarning mohiyati qisqacha bayon qilingan. Nazariyaning yaratilishida tajribalarning roli va o‘rnii aniq ko‘rsatilgan. Asosiy prinsiplarga tayangan holda yangi nazariyaning yaratilish bosqichlari yoritilgan. Interval, xususiy vaqt, voqeа, to‘rt o‘lchovli fazo kabi angi fizik atamalarning ma’nosi ochib berilgan. Ushbu qism relyativistik nazariyaning birinchi tatbig‘i sifatida - relyativistik mexanikaning asosiy masalalarini qisqacha yoritish bilan yakunlanadi. Bu yerda relyativistik nazariyaning 4-o‘lchovli ta’rifini tasavvur qilish va unga ko‘nikma hosil qilish uchun parallel ravishda uch o‘lchovli ta’rifdan ham foydalanilgan.

Ikkinchisi qismda relyativistik nazariyaning mantiqiy davomi sifatida *mikroskopik* elektrodinamika bayon qilingan. Real sharoitda turli tuman xossalari bilan bir-biridan keckin farq qiladigan muhitlardagi elektrodinamika bilan ish ko‘rishga to‘g‘ri keladi. Bu holda nazariya juda murakkablashib ketadi.

Muhitsiz fazodagi elektrodinamika bunday muammolardan holi. Bunda faqat zaryadlar va ularning harakati tufayli yuzaga keladigan toklardan iborat bo‘lgan fazoda elektrodinamika qonunlari ko‘rib chiqilgan. Shu bilan birga elektrodinamikaning asosiy matematik apparati ishlab chiqilgan. Mikroskopik elektrodinamikaning asosiy tenglamalari – Maksvell-Lorentz tengalamalari eng qisqa ta’sir prinsipiiga asoslangan Lagranj formalizmi orqali keltirib chiqariladi. Bu tenglamalar yordamida elektrodinamikaning xususiy masalalari ko‘rib chiqilgan.

Uchinchi qismda elektrodinamikaning eng murakkab qismi shu bilan birga amaliy ahamiyatga ega bo‘lgan, muhitdagi elektrodinamika - *makroskopik* elektrodinamika bayon qilingan. Bunda xossalari bilan farq qiluvchi turli tuman – muhitlar o‘rniga izotrop va bir jinsli, fer-

romagnit va ferroelektrik xossalarga ega bo'lmagan ideal muhit uchun elektrodinamika qonunlarini aks ettiruvchi – Maksvell tenglamalari keltilib chiqarilgan.

Muhitning real xossalarini hisobga olgan elektrodinamikaning maxsus masalalari fan sohalarining mustaqil yo'nalishlari bo'lib alohida o'r ganiladi. Shu bilan birga imkoniyat darajasida masalani murakkab lashtirmaydigan hollarda muhitning ayrim xossalarini inobatga olish nazariyada qanday o'zgarishlarga olib kelishi ko'rib chiqilgan.

Darslikda asosiy e'tibor maydon tabiatiga qaratilgan bo'lib, elektrostatika, magnitostatika, kvazistatsionar va yuqori chastotali maydonlar nazariyasi mukammal ko'rib chiqilgan.

Nihoyat, yangi tipdag'i aloqa va axborot uzatish tizimlarini, hamda kelajakda elektronikaning o'rnini bosa oladigan mantiqiy elementlarni yaratish prinsiplarini beruvchi elektrodinamikaning zamonaviy masalalaridan biri bo'lgan – *nochiziqli optikaning* asosiy prinsiplari bayon qilingan.<sup>1</sup>

Kitobning oxirida foydalanilgan asosiy matematik formulalar ilova sifatida keltirilgan.

Darslikda bayon qilingan mavzularni o'zlashtirish darajasini ko'tarish va mustaqil saboq olishning samaradorligini oshirish maqsadida har bir bobning oxirida masalalar va tekshirish savollari keltirilgan. Tipik va ayrim murakkab masalalarning yechimlari berilgan. Bundan tashqari, ko'p hollarda mavzularni yoritishda rasm va chizmalardan foydalanilgan.

Darslik universitetlarning fizika fakultetlari talabalari hamda boshqa oliy ta'lif muassasalarining fizika bilan bog'liq bo'lgan yo'nalishlардаги талабаларга мөлжалланган. Шу билан бирга назарию физика мутаксислигидаги таҳсил олуви магистр ва aspirantlar uchun ham foydali bo'ladi.

Ushbu darslik O'zbekisto Respublikasi Vazirlar Mahkamasi qoshidagi Fan va texnologiyalarni rivojlantirishni mufofiqlashtirish qo'mitasiining "ОИД-3-9" - sonli innovatsion loihasi doirasida yozilgan.

---

<sup>1</sup> Ushbu bob prof. F.Kh.Abdullaev ishtirokida yozildi.

Quyida chet el olimlarining ismi shariflarining yozilishiga izoh berilgan:

Ona tilida to'liq ismi sharifi	Ushbu kitobda	Rus adabiyotida
Ampére André Marie (1775-1836)	Amper	Ампер
Biot Jean-Baptiste (1774-1862)	Bio	Био
D'lambert Jean Le Rond (1717-1783)	Dalamber	Даламбер
Einshtein Albert Frank (1879-1955)	Eynshteyn	Эйнштейн
Faraday Michael (1791-1867)	Faradey	Фарадей
Fourier Jean-Baptiste-Joseph (1768-1830)	Furye	Фурье
Galilei Galileo (1564-1642)	Galiley	Галилей
Hamilton William Rowan (1805-1865)	Gamilton	Гамильтон
Hertz Heinrich Rudolf (1857-1894)	Gers	Герц
Joule James Prescott (1818-1889)	Joul	Джоуль
Kramers Hendrik Antony (1894-1952)	Kramers	Крамерс
Lagrange Joseph Louis (1736-1813)	Lagranj	Лагранж
Laplace Pierre-Simon (1749-1827)	Laplas	Лаплас
Ленц Эмилий Христианович (1804-1865)	Lentz	Ленц
Lorenz Ludvig Valentin (1829-1891)	Lorenz	Лоренц
Lorentz Hendrik Antoon (1853-1928)	Lorentz	Лоренц
Maxwell James Clerk (1831-1879)	Maksvell	Максвелл
Michelson Albert Abraham (1852-1931)	Maykelson	Майкельсон
Morley Edward Williams (1838-1923)	Morli	Морли
Newton Isaac (1643-1727)	Nyuton	Ньютон
Oersted Hans Christian (1777-1851)	Ersted	Эрстед
Ohm Georg Simon (1787-1854)	Om	Ом
Poynting Jonh Henry; (1852-1914)	Poynting	Пойнтинг
Rayleigh Jhon Strutt (1842-1919)	Reley	Рэлей
Savart Félix (1791-1841)	Savar	Савар
Schrödinger Erwin Rudolf		
Josef Alexander (1887-1961)	Shredinger	Шредингер
Thomson Joseph John (1856-1940)	Tomson	Томсон

# 1-bob

## Maxsus nisbiylik nazariyasi asoslari

### 1.1 Nisbiylik prinsiplari

Klassik mexanika kursidan ma'lumki, Nyutonning birinchi qonuniga asosan jismga kuch ta'sir qilmasa, yoki ta'sir qilayotgan kuchlarning yig'indisi nolga teng bo'lsa, inersial sanoq sistemalarda u o'zining tinch holatini yoki to'g'ri chiziqli tekis harakatini saqlaydi. Ikkinci tomondan bu qonun bajariladigan sanoq sistemalar inersial deyiladi. Bu qonunning to'g'rilingiga hech qanday shubha yo'q.

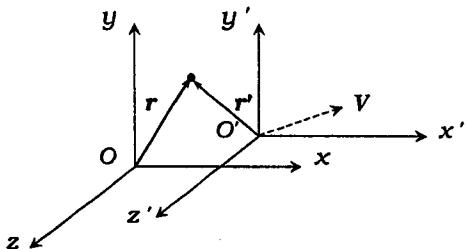
Tabiiyki savol tug'iladi, inersial sanoq sistemalarida faqat to'g'ri chiziqli tekis harakat bir xil ifodalanadimi? Bunga Galileyning nisbiylik prinsipi aniq javob beradi. *Barcha inersial sanoq sistemalarda mexanika qonunlari birday o'rinali bo'ladi.*

Galiley nisbiylik prinsipiga ko'ra birorta inersial sanoq sistemada qandaydir mexanika qonuni aniqlangan bo'lsa, bu qonun barcha inersial sanoq sistemalarda o'rinali bo'lib, bir xil ifodalanadi. Bu prinsipning matematik ifodasini Galiley almashtirishlari aniqlaydi:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t', \quad t = t', \quad (1.1)$$

bu yerda  $\mathbf{V}$  o'zgarmas bo'lib,  $K'$  sanoq sistemaning  $K$  sanoq sistemaga nisbatan harakat tezligi. Ifoda (1.1) bir inersial sanoq sistemidan ikkinchisiga o'tishda koordinata va vaqt ni almashtirish formulalarini beradi (1.1-rasm).

Klassik mexanikada (1.1) almashtirish formulalarida  $t = t'$  yozilmaydi, klassik fizika nuqtai nazaridan barcha inersial sanoq sistemalarda vaqt birday oqishini ta'kidlash uchun uni keltirildi. Vaqtning bunday xossasi klassik mexanikada signal yoki o'zaro ta'sir cheksiz tezlik bilan uzatiladi degan g'oyaga



1.1-rasm:

asoslangan. Birorta  $K$  inersial sanoq sistemada qandaydir qurilma har tomonga izotrop holda cheksiz tezlik bilan tarqaluvchi signal chiqarayotgan bo'lsin. Bu sanoq sistemadagi ixtiyoriy boshqa nuqtalardagi signalni qabul qiluvchi qurilmalar bu sughalni oniy vaqtida qayd qiladi. Bundan tashqari  $K$  sanoq sistemaga nisbatan chekli tezlik bilan harakatlanayotgan sanoq sistemadagi signalni qabul qiluvchi qirilmalar ham bu signalni shu vaqtida qayd qiladi. Bunday signallar barcha soatlarni sinxronlash imkonini beradi. Boshqacha qilib gapirsak, bu holat barcha sistemalarda birday o'tadigan ( $t' = t'' = \dots = t$ ), absolyut vaqtini kiritish mumkinligini ko'rsatadi.

Galiley almashtirishi (1.1) dan vaqt bo'yicha birinchi tartibli hosila olsak, klassik mexanikadagi tezliklarni qo'shish formulasini olamiz:

$$v = v' + V, \quad (1.2)$$

Bu tenglamadan yana bir marta hosila olib moddiy nuqtaning tezlanishi har ikkala sanoq sistemada teng ekanligini aniqlaymiz:

$$a = a', \quad \text{yoki} \quad F = ma = ma' = F'. \quad (1.3)$$

Bundan ko'rileyotgan moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi kuch barcha inersial sanoq sistemalarda birday ekanligi kelib chiqadi (Nyuton ikkinch qonuni). Shunga o'xshash mexanikaning boshqa qonunlarini tekshirib ko'rish mumkin. Demak, umumiy holda klassik mexanika qonunlari Galiley almashtirishlari (1.1) ga nisbatan ko'rinisini o'zgartirmaydi, ya'ni invariantdir.

XIX asr oxiriga kelib elektr va magnetizm qonunlari to'liq shaklanib, Maksvell tenglamalarida bir butun holda o'z aksini topdi. Maksvell tenglamalariga asoslangan klassik elektrodinamika, maydonlar haqidagi birinchi jiddiy nazariya bo'lib, kuzatilgan barcha elektromagnit hodisalarini tushuntiribgina qolmay, keyinchalik tajribalarda kuzatilgan va keng tatbig'ni topgan elektromagnit to'lqinlarining mavjudligini bashorat qildi. Bu qonunlarda doimiy bo'lgan yorug'lik tezligining ( $c = 2,997925 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ) ishtirok etishi bilan Nyuton mexanikasi qonunlaridan tubdan farq qiladi.

Maksvell nazariyasining rivojlanishi bilan ba'zi qiyinchiliklar paydo bo'la boshladи. Bu nazariya birinchi qarashda Galiley nisbiylik prinsipi bilan jiddiy ziddiyatda edi.  $K$  sanoq sistemada tinch turgan zaryadni ko'ramiz. Bu sanoq sistemada zaryad tinch turganligi uchun faqat

elektrostatik maydon hosil qiladi.  $K'$  sanoq sistemadagi kuzatuvchiga nisbatan zaryad  $V$  tezlik bilan harakat qiladi. Shuning uchun bu sanoq sistemada zaryad elektr maydon bilan bir qatorda magnit maydonni ham hosil qiladi. Shunga o'xshash  $K$  sanoq sistemada tinch turgan o'zgarmas magnit o'z atrofida faqat magnit maydon hosil qiladi. Uni  $K'$  sanoq sistemada turib kuzatsak berk konturda hosil bo'ladigan elektr yurutuvchi kuch magnit maydondan tashqari elektr maydon mavjud ekanligidan dalolat beradi. Ko'rilgan har ikkala misol elektr va magnit maydon kuchlanganliklari Galiley almashtirishlariga nisbatan invariant emasligini ko'rsatadi. Boshqa tomondan elektrodinamika qonunlari laboratoriya va harakatdagi inersial sanoq sistemalarda birday o'rini bo'lishi tajribalarda aniqlangan.

Bu yerda bir-biri bilan uzviy bog'langan ikkita muammo paydo bo'ladi. Birinchisi, yorug'lik tezligi bilan bog'liq bo'lib, uning tarqalish tezligi izotropmi, bir inersial sanoq sistemadan ikkinchisiga o'tganda qanday o'zgaradi? Ikkinchisi, Maksvell tenglamalari Galiley almashtirishlariga nisbatan invariantmi? Ikkila muammoni birlashtirib, mexanika qonunlari uchun o'rini bo'lgan Galiley nisbiylik prinsipini elektromagnit qonunlariga tatbiq qilish mumkinmi degan savol paydo bo'ladi?

Aniqlangan holat o'ta jiddiy bo'lib, XIX asr oxirlarida fiziklar oldiga muhim savol qo'ydi. Bu savolga javob ko'p jihatdan XX asrda fizikaning rivojlanish yo'nalishini aniqlab berdi. Haqiqatan ham quyidagilardan birini tanlash kerak edi:

1. Maksvell tenglamalari Galiley almashtirishlariga nisbatan invariant emas deb tan olish kerak. U holda barcha inersial sanoq sistemalardan farq qiladigan sanoq sistema mavjud bo'lib, faqat unga nisbatan Maksvell tenglamalari standart ko'rinishga ega bo'ladi.
2. Maksvell tenglamalari barcha inersial sanoq sistemalarda birday o'rini bo'ladi (ko'rinishga ega) deb qabul qilish kerak. Bu holda Galiley almashtirishlari noto'g'ri bo'lib chiqadi va barcha inersial sanoq sistemalarning ekvivalentligini boshqacha tushinish kerak.

Birinchi yo'l efir nazariyasini paydo bo'lishiga olib keldi. Bu nazariyaga ko'ra tanlangan inersial sanoq sistema gipotetik materiya - efir bilan bog'langan. Bu materiyaning na rangi, na hidi va na massasi bor. U butun fazoni to'ldirgan bo'lib, o'zini hech qanday holatda namoyon qilmaydi. Uning birdan bir qismati elektromagnit ta'sirni uzatishdir. Efirning bunday g'ayrioddiy xossasi efir nazariyasini o'ta sun'iy qilib qo'ydi. Shuning uchun bu nazariya uzoq yashamadi.

Ikkinchı yo'l keskin bo'lib, Galiley almashtirishidan voz kechishni taqozo qilardi. Bu o'z navbatida Nyuton ta'riflagan klassik mexanikan dan voz kechishga olib kelardi. Bunga qaramasdan fanning rivojlanishi aynan shu yo'ldan bordi.

Efir nazariyasiga - yorug'likning tarqalish tezligi bilan bog'liq bo'l-gan masalaga **Maykelson** va **Morli tajribalari** oydinlik kiritdi, aniq-roq'i efir nazariysi asossiz ekanligini ko'rsatdi. Ma'lumki, havo tinch turganda tovush tezligi hamma yo'nalishlarda bir xil bo'ladi. Agar shamol esayotgan bo'lsa, shamol yo'nalishida tovush tezligi unga qarshi yo'nalishdagidan katta bo'ladi, shu bilan birga har ikkala yo'nalishdagi tezliklar ko'ndalang yo'nalishdagidan farq qiladi. Bunday hulosa har qanday to'lqin uchun o'rinnidir, faqat *yorug'lik uchun emas*. Bizning dadilligimiz juda katta aniqlikda bajarilgan Maykelson va Morlining o'ta nozik tajribalariga (1880 yilda boshlangan va 1887 yilda e'lon qilingan<sup>1</sup>) asoslangan. Tajribalarda harakatdagi sanoq sistema sifatida Yer olingan. (Lokal tajribalar uchun Yer amalda juda yuqori aniqlikda inersial sanoq sistema bo'la oladi.) Yer o'z orbitasi bo'ylab Quyosh atrofida  $30 \text{ km/s}$  tezlik bilan harakat qiladi. Maykelson va Morli Yerning harakat yo'nalishida hamda unga ko'ndalang yo'nalishlarda yorug'lik tezligini uning berk traektoriyada bosib o'tgan yo'li orqali taqqoslashgan. Bu tajribalar yilning turli davrlarida qayta - qayta o'tkazilgan. Tajribalarda yorug'lik tezligining o'zaro perpendikular yo'nalishlardagi nisbatiga Yerning harakati ta'sir qilmasligi aniqlangan. Tajribalar yorug'lik tezligini o'zaro perpendikular yo'nalishlardagi farqi  $5 \text{ km/s}$  aniqlikda o'lchash imkonini bergan. Bu tajriba yanada takomillashtirilganda, aniqlik Yer tezligining 3% ni tashkil qilgan, bu  $0,9 \text{ km/s}$  ga to'g'ri keladi. Bu tajribalaridan kelib chiqadigan asosiy hulosa:

*Yorug'lik tezligi inersial sanoq sistemalarining harakat yo'nalishiga va tezligiga bog'liq emas.*

A.Eynshteyn "Harakatdagi jismlar elektrodinamikasiga doir"<sup>2</sup> ma-qolasida Maksvell elektrodinamikasini harakatdagi jismlarga tatbiq qiliш bu hodisalarga xos bo'limgan asimmetriyaga olib kelishi va "yorug'lik tashuvchi" muhitga nisbatan Yerning harakatini aniqlash yo'lidiagi urinishlarning zoye ketishi kabi holatlarni tahlil qilib, *maxsus nisbiylik nazariyasini* yaratilishiga olib kelgan muhim fikrlarni ilgari surgan.

<sup>1</sup>A. A. Michelson, E. W. Morley, American Journal of Science, 34, 333 (1887).

<sup>2</sup>А. Эйнштейн, Собрание научных трудов, том I, 7-33 с., (1905)

Nafaqat mexanikada, balki elektrodinamikada ham hodisalarining hech qanday xossasi absolyut tinchlik tushinchasiga to'g'ri kelmaydi. Bunda tashqari, inersial sanoq sistemalarda mexanika qonunlari invariant bo'lgani kabi elektrodinamika va optika qonunlari ham invariant bo'lshi kerak degan g'oyani ilgari suradi. Yorug'lik tarqaluvchi gipotetik muhit - tushunchasiz harakatdagi jismlar elektrodinamikasini yaratdi.

A. Eynshteyn bu g'oyani asos qilib Galiley nisbiylik prinsipiiga yangi ma'no beradi.

*Barcha inersial sanoq sistemalarda tabiat qonunlari bir-day o'rinki bo'ladi va yorug'lik bo'shlida manbaning harakat tezligiga bog'liq bo'lmanan aniq "c" tezlik bilan tarqaladi.*

Ushbu ikkita fundamental g'oya ichki qarama-qarshilikdan holi bo'l-gan harakatdagi jismlar elektrodinamikasini yaratish imkoniyatini beradi. Bunda "efir" tushunchasini kiritishga hojat qolmaydi, chunki yangi nazariyada mutloq tinch turgan alohida xossalarga ega bo'lgan fazo tushunchasi kiritilmaydi hamda bo'sh fazoning hech qaysi nuqtasi qandaydir tezlik vektori bilan bog'lanmaydi. Shu bilan fazoning bir jinslli va izotroplik xossalari saqlanishi ta'kidlanadi.

Maykelson va Morli tajribalaridan qariyb 50 yildan keyin *Kennedi va Torndayk*<sup>3</sup> yorug'lik tezligini o'lhash bo'yicha o'z tajribalarini o'tkazishdi. Bu tajribalarda ham harakatdagi sanoq sistema sifatida Yer tanlab olingan. Tajribadan maqsad, yilning turli davrlarida Yer Quyoshga nisbatan turli yo'nalishda harakat qilishidan foydalanib, yorug'lik tezligiga uning ta'sirini aniqlash bo'lgan. Bu holda sanoq sistemalarning nisbiy tezligi  $60 \text{ km/s}$  ga teng bo'ladi. Maykelson va Morli tajriba natijalarini bir-biri bilan taqqoslash uchun bir kun yetarli bo'l-gan bo'lsa, Kennedi va Torndayk tajribalari uchun bir necha oy lab bir xil sharoitni ushlab turish kerak bo'lgan. Shu bilan bu tajribalar bir-biridan farq qilgan. Kennedi va Torndayk tajribalarida yilning turli davrlarida o'lchanganda yorug'lik tezligining farqi taxminan  $2 \text{ m/s}$  ni tashkil qilgan. Bu tajribalardan kelib chiqadigan asosiy xulosa:

*Yorug'lik tezligi barcha inersial sanoq sistemalarda bir xil son qiymatni qabul qiladi.*

Bu natija A. Eynshteyn nisbiylik prinsipidagi birinchi va asosiy aksioma - yorug'lik tarqalish tezligi mutloq ekanligini va manbaning xossalariiga bog'liq emasligini juda yuqori aniqlikda isbotladi.

<sup>3</sup>R. J. Kennedy, E. M. Thorndike, Phys.Rev., **42**, 400 (1932).

## 1.2 Nisbiylik nazariyasida interval

Ba'zan klassik fizikada interval tushunchasi ikki ma'noda qo'llaniladi. Birinchisi, uch o'lchovli fazoda ikki nuqta orasidagi metrlarda o'lchanadigan interval - masofa bo'lsa, ikkinchisi, fazoda ketma-ket sodir bo'lgan ikki voqealarni sekundlarda o'lchanadigan vaqt intervalidir. Uch o'lchovli fazoda ikki nuqta orasidagi masofa shu nuqtalarning koordinatalari orqali aniqlanadi:

$$\Delta l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \quad (1.4)$$

bu yerda  $x_i, y_i, z_i$  ( $i = 1, 2$ ) birinchi va ikkinchi nuqtalarning bir vaqtida o'lchanan dekart koordinatalari. Klassik fizika nuqtai nazaridan bunday ta'riflangan interval koordinatalarni ixtiyoriy chiziqli almashtirishlariga nisbatan invariant kattaliklardir<sup>4</sup>. Vaqt intervali, voqealar sodir bo'lgan vaqt momentlari orqali aniqlanadi:

$$\Delta t = t_2 - t_1, \quad (1.5)$$

bu yerda  $t_1, t_2$  birinchi va ikkinchi voqealar sodir bo'lgan vaqt momentlari.

Klassik fizika nuqtai nazaridan yuqorida ta'riflangan fazoviy va vaqt intervallari fazoda berilgan ikki nuqta hamda voqealarni sonoq sistemaga bog'liq bo'lmashtirishlariga nisbatan invariant kattaliklardir. Ya'ni kuzatuvchi turgan sanoq sistemaga bog'liq emas.

Nisbiylik nazariyasida interval yangi ma'no kacb etadi. "Voqealarni" tushunchasini kiritamiz. Voqealarni - moddiy nuqta bilan sodir bo'ladigan ixtiyoriy hodisa bo'lib, sodir bo'lish joyi (uch o'lchovli fazoviy koordinatalar) va vaqt bilan aniqlanadi. Tasavvur etish qulay bo'lishi uchun o'qlariga fazoviy koordinatalar va vaqt qo'yilgan faraziy to'rt o'lchovli fazoda tushunchasini kiritamiz. Bu fazoda har qanday voqealarni *dunyo nuqtasi* bilan tasvirlanadi. Moddiy nuqtaga bu fazoda qandaydir chiziqni - *dunyo chizig'ini* mos keltiramiz. Masalan, tinch holatdagi moddiy nuqtaga to'rt o'lchovli fazoda to'g'ri chiziq mos keladi. To'g'ri chiziqli tekis harakat va tinch holat xossalari jihatdan bir-biridan farq qilmaganligi uchun bu fazoda unga ham to'g'ri chiziq mos keladi.

Laboratoriya bilan bog'liq bo'lgan  $K$  va unga nisbatan o'zgarmas tezlik bilan harakatlanayotgan  $K'$  inersial sanoq sistemalarda turib voqealarni kuzatamiz. Laboratoriya sanoq sistemada  $t_1$  vaqtida  $x_1, y_1, z_1$

---

<sup>4</sup>Mashtabni o'zgartiradigan almashtirishlar bundan istesno.

nuqtada lampaning yonishi (yoki chaqmoq chaqishi) birinchi voqeal, lampadan chiqqan yorug'lik signalini  $t_2$  vaqtida  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $z_2$  nuqtada qabul qilish ikkinchi voqeal bo'lgin. Shu ikki voqeal sodir bo'lgan nuqtalar orasidagi masofa (fazoviy interval)

$$l_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ifoda bilan aniqlanadi. Ikkinci tomonda  $c$  tezlik bilan tarqalayotgan yorug'lik signali ikki voqeal orasida o'tgan vaqt ichida

$$l'_{12} = c(t_2 - t_1)$$

masofani bosib o'tadi. Ravshanki, har ikkala masofalar bir-biriga teng. Shu sababli ko'rيلayotgan ikki voqeanning to'rt o'lchovli fazodagi koordinatalaridan quyidagi tenglikni hosil qilish mumkin:

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0. \quad (1.6)$$

Shu ikki voqeani laboratoriya sanoq sistemaga nisbatan o'zgarmas tezlik bilan harakatlanayotgan ( $K'$ ) sanoq sistemada turib kuzatamiz. Yorug'lik barcha inersial sanoq sistemalarda bir xil tezlik bilan tarqalishini hisobga olib yuqorida ko'rilgan ikki voqeal uchun (1.6) ko'rinishdagi ifodani hosil qilsak, u nolga teng bo'ladi. Bu ikki voqeani ( $K$ ) va ( $K'$ ) sanoq sistemaga nisbatan o'zgarmas tezliklar bilan harakatlanayotga  $K''$  sanoq sistemada turib kuzatsak, (1.6) ko'rinishdagi ifoda yana nolga teng ekanligini ko'ramiz. Bu faraziy tajribani istagancha davom ettirish mumkin. Yorug'lik signali bilan bog'langan ikki voqeal uchun (1.6) sanoq sistemaga bog'liq bo'lмагan kattalik bo'lib, doimo nolga teng, ya'ni u invariant kattalik ekan. U holda (1.6) ifodani yorug'lik tezligining invariantligining matematik ifodasi deb qabul qilish mumkin.

Endi yuqorida ko'rib chiqilgan masalani yorug'lik signali bilan bog'lanmagan ikki voqeaga tatbiq qilamiz. Bu holda (1.6) ko'rinishdagi ifoda endi nolga teng bo'lmaydi:

$$S_{12}^2 = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}. \quad (1.7)$$

Bu yerda  $S_{12}$  ikki voqeal orasidagi *interval* deyiladi. Interval berilgan ikki voqeal uchun invariant kattalik bo'ladi.

Bu tasdiq yorug'lik signali bilan bog'langan voqealar uchun o'z isbotini topdi. Umimiy holda intervalning invariantligini avval geometrik

yo'l bilan isbotlaymiz. Laboratoriya sanoq sistemasiga nisbatan o'zgarmas tezlik bilan harakatlanayotgan raketada sodir bo'layoutgan ikki voqeani ko'rib chiqamiz. Bu voqealardan birinchisi, raketadagi lampanning chaqnashi ( $A$  nuqtada) bo'lsa, ikkinchisi, lampadan chiqqan yorug'lik nurining raketga harakatiga perpendikular yo'naliishda  $l$  masofadagi ko'zgu ( $C$ ) dan qaytib lampa bilan bir nuqtada ( $B$ ) joylashgan foto elementda qayd qilish bo'lsin. Raketadagi kuzatuvchi uchun bu ikki voqeasidan interval (1.2b-rasm)

$$S_{AB} = \sqrt{c^2(t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2},$$

laboratoriyyadagi kuzatuvchi uchun(1.2a-rasm)

$$S'_{AB} = \sqrt{c^2(t'_B - t'_A)^2 - (x'_B - x'_A)^2},$$

birinchi raketadan tezroq harakatlanayotgan ikkinchi raketadagi kuzatuvchi uchun (1.2c-rasm)

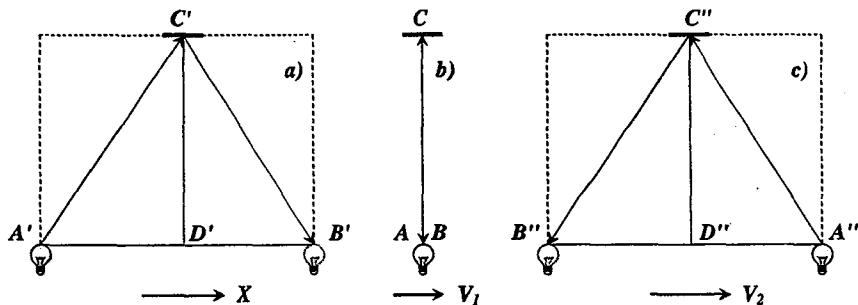
$$S''_{AB} = \sqrt{c^2(t''_B - t''_A)^2 - (x''_B - x''_A)^2}.$$

Bu yerda  $\{t_A, x_A; t'_A, x'_A; t''_A, x''_A\}$ ;  $\{t_B, x_B; t'_B, x'_B; t''_B, x''_B\}$  mos ravishda birinchi va ikkinchi voqealarning birinchi raketga, laboratoriya va ikkinchi raketga bilan bog'langan sanoq sistemalarga nisbatan koordinatalari. Birinchi va ikkinchi voqealar orasida o'tgan vaqt ichida birinchi raketadagi kuzatuvchi uchun foto elementning ko'chishi  $x_B - x_A = 0$ , laboratoriya sistemasida  $x'_B - x'_A < 0$ , va ikkinchi raketada esa  $x''_B - x''_A > 0$ . Bunday bo'lishiga qaramasdan uchchala holda ko'rila yotgan ikki voqeasidan interval  $2l$  ga teng ekanligi 1.2-rasmdagi  $\Delta A'C'B'$  va  $\Delta A''C''B''$  teng yonli uchburchaklardan ko'rish mumkin.

Shunday qilib, nisbiylik prinsipiiga asosan yorug'lik tezligi laboratoriya va raketga sanoq sistemalarda bir xil bo'lishi quyidagi muhim hulosalarga olib keldi:

1. *Sanoq sistemaning harakatiga perpendikulyar yo'naliishda masofa o'zgarmas ekan. Aks holda birorta sanoq sistemada turib uning to'g'ri chizig'li tekis harakat tezligini aniqlash mumkin bo'lardi. Boshqacha qilib gapirsak, sanoq sistemalarni bir-biridan farqlash mumkun bo'lardi.*

2. *Ikki voqeasidan interval turli (raketa va laboratoriya) sanoq sistemalarda turlichalig'i bo'lib, nisbiy tezlik kattalashgan sari ularning nisbati ham ortib boradi ( $\Delta t'_{AB} > \Delta t_{AB}$ ). Demak, turli inersial sanoq sistemalarda vaqt turlichalig'i o'tar ekan.*



1.2-rasm:

3. Raketa va laboratoriya sanoq sistemalarda ikki voqeа orasidagi vaqt hamda fazoviy masofa turlichа bo'l shiga qaramasdan ikkala sanoq sistemada bir xil bo'ladigan kattalik mavjud ekan. Bu kattalik nisbiylik nazariyasida interval deyiladi.

Endi intervalning invariant ekanligini fazo va vaqtning bir jinslli hamda fazoning izotroplik xossalardan foydalanib isbotlaymiz. Birorta sanoq sistemada bir-biriga cheksiz yaqin bo'lgan ikki voqeа uchun intervalni yozamiz:

$$dS = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} \quad (1.8)$$

Shu ikki voqeа uchun interval boshqa sanoq sistemada  $dS'$  ga teng bo'lsin. Matematik nuqtai nazardan  $dS$  va  $dS'$  lar bir xil tartibdagi cheksiz kichik miqdorlar bo'lganligi uchun ular bir-biriga proporsional bo'ladi:

$$dS = a dS'. \quad (1.9)$$

Bu yerda proporsionallik koefitsienti  $a$  fazo va vaqtning bir jinslilik xossasiga asosan koordinata va vaqtga bog'liq bo'lmaydi, bundan tashqari fazo izotrop bo'lganligi uchun sanoq sistemalarining nisbiy harakat tezligining yo'nali shiga ham bog'liq bo'lmasi kerak. U faqat tezlikning moduliga bog'liq bo'lishi mumkin. Endi bu ikki voqeani  $K$ ,  $K'$  va  $K''$  sanoq sistemalaridan kuzatamiz.  $V$  va  $V''$  mos ravishda  $K'$  va  $K''$  sanoq sistemalarining  $K$  ga nisbatan harakat tezligi bo'lsin. U holda

$$dS = a(|V'|) dS' \quad dS = a(|V''|) dS''. \quad (1.10)$$

Shunga o'xshash

$$dS' = a(|V'' - V'|) dS'' \quad (1.11)$$

tenglikni yozish mumkin. Bu ifodaga ko'ra  $a$  tezliklarning yo'nalishga bog'liq bo'lib qoldi. Bunday natija fazoning izotropligiga zid bo'lganligi uchun  $a$  tezlikning moduliga ham bog'liq bo'masligi kelib chiqadi. Demak,  $a$  o'zgarmas ekan. (1.9)–(1.11) tengliklardan

$$a = \frac{a}{a} \quad (1.12)$$

tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamadan  $a = 1$  ekanligi ko'rinish turibdi. Ko'rileyotgan cheksiz yaqin ikki voqealar orasidagi interval barcha inersial sanoq sistemalarda teng, ya'ni invariant ekan. Cheksiz kichik intervalning invariantligidan chekli intervalning ham invariantligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, ikki yo'l bilan intervalning invariant ekanligi isbotlandi. Intervalning invariantligi nisbiylik prinsipinden kelib chiqadigan yorug'lik tezligining invariantligini, ya'ni barcha inersial sanoq sistemalarda o'zgarmasligining matematik ifodasidir.

Ifoda (1.7) dan ko'rinish turibdiki, interval ikkita ixtiyoriy voqealar uchun haqiqiy yoki mavhum, ya'ni unung kvadrati musbat yoki manfiy bo'lishi mumkin. Intervalning bu holat bilan bog'liq xossalarini ko'rib chiqamiz. Birorta ( $K$ ) sanoq sistemada ikki voqeanning koordinatalari hamda sodir bo'lislari ( $x_1, y_1, z_1, t_1$ ) va ( $x_2, y_2, z_2, t_2$ ) bo'lsin. Belgilashlar kiritamiz:

$$l_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2, \quad t_{12} = t_2 - t_1$$

Bu belgilashlarda ikki voqealar orasidagi intervalning kvadratini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$S_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2.$$

Ikki voqealar orasidagi interval haqiqiy bo'lsin ( $S_{12}^2 > 0$ ). Bu holda  $t_{12}$  vaqt ichida yorug'likning bosib o'tgan yo'li ikki voqealar orasidagi fazoviy masofadan katta bo'ladi, ya'ni ikki voqealari yorug'lik signali bilan bog'lash mumkin. Bu holda shunday ( $K'$ ) sanoq sistemani<sup>5</sup> ko'rsatish mumkinki, unda har ikkala voqealar bir nuqtada sodir bo'ladi, ya'ni ikki voqealar orasidagi fazoviy interval nolga teng:

$$l'_{12} = 0, \quad S_{12} = ct'_{12}.$$

---

<sup>5</sup>Bundan keyin alohida ta'kidlanmasa sanoq sistema deganda inersial sanoq sistemani tushunamiz

Masalan, laboratoriyadagi bitta lampaning yonib o'chishi yoki ikki marta ketma-ket yonishi bunga misol bo'ladi. Bu misolda fazoviy masofa nolga teng va interval faqat ikki voqealor orasida o'tgan vaqt bilan aniqlanadi. Shu sababli haqiqiy intervallar "vaqtsimon" deyiladi. Bir jism ustida ketma-ket ikki voqealor sodir bo'lsa, ular orasidagi interval doimo vaqtsimon bo'ladi.

Ikki voqealor orasidagi interval mavhum bo'lsin ( $S_{12}^2 < 0$ ). Bu holda  $t_{12}$  vaqt ichida yorug'likning bosib o'tgan yo'li ikki voqealor orasidagi fazoviy masofadan kichik bo'ladi. Ikki voqealor yorug'lik signali bilan bog'lash mumkin bo'lmaydi. Bu holda shunday ( $K'$ ) sanoq sistemani ko'rsatish mumkinki unda har ikkala voqealor bir vaqtida sodir bo'ladi, ya'ni ikki voqealor orasida o'tgan vaqt nolga teng:

$$t'_{12} = 0, \quad S_{12} = i \cdot l'_{12},$$

bu yerda " $i$ " mavhum birlik. Masalan, laboratoriyada turli nuqtalarda turgan ikki lampaning bir vaqtida yonishi. Bu holda interval voqealar sodir bo'layotgan ikki nuqta orasidagi fazoviy masofa bilan aniqlanadi. Bunday intervallar "fazosimon" deyiladi.

Interval nolga teng bo'lsa, "yorug'liksimon" deyiladi. Bunday ikki voqealor yorug'lik signali bilan aniq bog'langan bo'ladi.

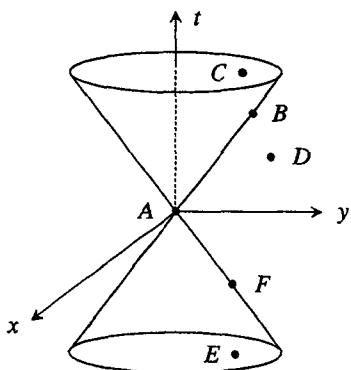
Interval invariant bo'lganligi uchun uni vaqtsimon, fazosimon va yorug'liksimonligi sanoq sistemaga bog'liq bo'lmaydi.

Yuqoridagi fikrlarni grafik ko'rinishda tasvirlash intervalni ajratishning mohiyatini yanada ochib beradi. Buning uchun barcha voqealar uchun  $z = 0$  bo'lsin, ya'ni voqealar uch o'lchovli  $\{x, y, t\}$  fazoda sodir bo'ladi deb olamiz. Birinchi ( $A$ ) voqealor koordinata boshida,  $x_1 = 0$ ,  $y_1 = 0$  nuqtada va  $t_1 = 0$  momentda, ikkinchi voqealor esa ko'rilarayotgan fazoning ixtiyoriy nuqtasida sodir bo'lsin. Bunday ikki voqealor uchun quyidagi hollarni bir-biridan farqlash kerak:

1. Interval yorug'liksimon bo'lsin. Bunda ikkinchi voqealar

$$ct = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.13}$$

tenglama bilan aniqlanuvchi konus sirtida yotadi (1.2-rasm). (1.13) tenglamada "+" ishoraga to'g'ri kelgan  $B$  voqealar  $A$  voqealardan keyin sodir bo'ladi ( $t > 0$ ). "-" ga to'g'ri kelgan  $F$  voqealar esa  $A$  voqealardan avval sodir bo'ladi ( $t < 0$ ).



1.3-rasm: Yorug'lik konusi

Yuqoridagilarni  $z \neq 0$  hol uchun ko'rib chiqsak, uch o'lchovli fazodagi konus to'rt o'lchovli fazodagi konusga aylanadi. Bunday konus Yevklid geometriyasida yo'q. Lekin, Lorentz geometriyasida bunday sirt mavjud bo'lib, "yorug'lik konusi" deb ataladi. Bunday konusni tasavvur qilish uchun oddiy konus turli vaqtlarda chizilgan aylanalar to'plamidan iborat desak, yorug'lik konusini sferalar to'plamidan iborat deb qarash mumkin.

### 1.3 Nisbiylik nazariyasida vaqt

Sanoq sistemalarning inersiallik chegarasini aniqlash tajriba natijalarini talqin qilishda juda muhimdir. Har bir sanoq sistemasining inersiallik chegarasi mavjud. Buni ko'z oldimizga keltirish uchun erkin tushayotgan raketa bilan bog'liq bo'lgan sanoq sistemasini ko'rib chiqamiz. Odatda, bunday raketadagi ixtiyoriy jism bilan bog'langan sanoq sistema ideal inersial sanoq sistema hisoblanadi.

Raketaning uch qismida turgan jism uning orqa qismidagi jismga nisbatan Yerga kattaroq kuch bilan tortiladi. Raketaning uzunligi qancha katta bo'lsa, kuchlar farqi shuncha katta bo'ladi. Shuning uchun raketaning harakati davomida jismlar orasidagi masofa ortib boradi va kuzatish vaqtি qancha katta bo'lsa, ular orasidagi farq shuncha katta bo'ladi. Demak, ikkinchi jism bilan bog'langan sanoq sistemani inersial desak, ikkinchisi bilan bog'langan sanoq sistemani inersial deb bo'lmaydi. Qachon har ikkalasini inersial deyish mumkin? Bu savolga

2. Interval vaqtsimon bo'lganda ikkinchi voqeа konusining ichida sodir bo'ladi. Agar  $t > 0$  bo'lsa, konusning yuqori kovagidagi ( $C$ ) nuqtalar to'plami ( $A$ ) voqeaga nisbatan mutloq kelajakni beradi.  $t < 0$  bo'lsa, pastki kovakdagи nuqtalar ( $E$ ) to'plami mutloq o'tmishga to'g'ri keladi.

mbox3. Nihoyat konusdan tashqaridagi ( $D$ ) nuqtalar uchun interval fazosimon bo'ladi va ular  $A$  voqeaga nisbatan mutloq uzoqlashgan deyiladi. Chunki,  $A$  va  $D$  voqealarni yorug'lik signali bilan bog'lash mumkin emas.

javob raketada o'tkaziladigan tajriba aniqligi bilan bog'liq. Bunday noinersiallik natijasida yo'l qo'yiladigan xatolik tajriba aniqligidan kichik bo'lishi kerak. Demak, har qanday jism bilan bog'langan sanoq sistemani ma'lum aniqlikda inersial deyish mumkin ekan.

Intervalning vaqtsimon, yorug'liksimon va fazosimonlarga bo'linishi bir qator muhim natijalarga olib keladi.

Vaqtsimon intervalni "*xususiy vaqt*" deb atash mumkin. Bunday deb atashning ma'nosini ochish uchun birorta inersial ( $K$ ) sanoq sistemasida turib ixtiyoriy harakatlanayotgan soatni kuzatamiz. Soat bilan bog'langan sanoq sistema ( $K'$ ) umuman olganda inersial emas, lekin yuqoridagi ma'noda har bir oniy vaqt momentida uni inersial deb qarash mumkin. Harakatdagi soatning  $dt'$  farq bilan ketma-ket ikkita ko'rsatishi ikkita voqeа bo'lsin. Bu voqealar  $K'$  sanoq sistemada bir nuqtada sodir bo'ladi va ular orasidagi interval vaqtsimon bo'lib, quyidagiga teng bo'ladi:

$$dS = c \ dt'. \quad (1.14)$$

Bundan

$$dt' = \frac{dS}{c}. \quad (1.15)$$

$K$  sistemada tinch turgan soat bo'yicha bu ikki voqeа orasidagi vaqt  $dt$  ga teng. Harakatdagi soat  $dt$  vaqt ichida tinch turgan kuzatuvchiga nisbatan  $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$  masofaga ko'chadi. Bularga asosan intervalni  $K$  sanoq sistemasida yozamiz:

$$dS = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}. \quad (1.16)$$

Endi (1.14) – (1.16) ifodalardan foydalanib,  $K$  va  $K'$  sistemalardagi soatlarining ko'rsatishlarini bog'lovchi tenglamani hosil qilamiz:

$$dt' = \frac{dS}{c} = dt \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2 c^2}} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (1.17)$$

bu yerda  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ ,  $v$  - harakatdagi soatning tezligi.

Ifoda (1.17) ni integrallash natijasida tinch turgan soat bo'yicha  $t_2 - t_1$  vaqt o'tganda, harakatdagi soat bo'yicha o'tgan vaqtini topamiz:

$$t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (1.18)$$

Shunday qilib, tinch turgan soat bo'yicha  $t_2 - t_1$  vaqt o'tganda, harakatdagi soat bo'yicha  $t'_2 - t'_1$  vaqt o'tadi.

*Harakatdagi jism bilan bog'langan soat bo'yicha hisoblangan vaqt "xususiy vaqt" deyiladi.*

Endi xususiy vaqt masalasini har ikkala sanoq sistema inersial bo'lган holda ko'rib chiqamiz.  $K$  inersial sanoq sistemadagi soatga nisbatan boshqa soat to'g'ri chiziqli tekis harakat qilayotgan bo'lsin. Bu holda (1.17) ga asosan  $K$  sistemadagi kuzatuvchi uchun  $K'$  sistemadagi soat orqada qoladi. Harakat nisbiy bo'lganligi sababli  $K'$  sistemadagi kuzatuvchi uchun  $K$  dagi soat harakatda bo'ladi va u orqada qoladi. Yuzaki qarashda ichki qarama-qarshilik bordek ko'rindi.

Qarama – qarshilikning paydo bo'lishiga  $K$  va  $K'$  sanoq sistemalarining bir-biridan farqlash mumkin emasligidadir. Masalan, harakatdagi  $K'$  sistemadagi soatning orqada qolishini ko'rsatish uchun  $K$  sistemada  $K'$  ning harakat yo'nali shida bir-biridan biror masofada turgan ikkita soat olamiz.  $K'$  dagi soat birinchi soatning yonidan o'tish vaqtida har ikkala soatning ko'rsatishi bir xil bo'lsin.  $K'$  dagi soat ma'lum vaqtdan keyin  $K$  dagi ikkinchi soatning yonidan o'tadi. Bu paytda soatlarning ko'rsatishi turlicha bo'lib,  $K'$  dagi orqada qolganini ko'ramiz. Endi holatni o'zgartiramiz, ya'ni  $K$  ga bitta,  $K'$  ga esa ikkita soat joylashtiramiz va yuqorida faraziy tajribani qaytaramiz. Bu holda  $K$  dagi soat orqada qolganini aniqlaymiz.

Shunday qilib, soatlarning yurishini solishtirish uchun birinchi sanoq sistemada bir nechta, boshqasida esa bitta soat kerak bo'lar ekan. Shuning uchun bu jarayon ikkala sanoq sistema uchun simmetrik emas. Xulosa: doimo turli soatlar bilan taqqoslanayotgan soat orqada qoladi.

Inersial sanoq sistemadagi ikkita soatdan biri tinch tursin, ikkinchisi berk trayektoriya bo'yicha harakat qilib boshlang'ich holatga qaytib kelganda tinch turgan soatga nisbatan harakatdagi soat orqada qolgan bo'ladi. Berk trayektoriya bo'ylab harakat qilayotgan soat bilan bog'langan sanoq sistema inersial bo'laolmaydi. Shu sababli teskari fikr to'g'ri bo'lmaydi. Chunki tabiat qonunlari faqat inersial sanoq sistemalarida bir xil bo'ladi. Bunga "vaqt" yoki "egizaklar" paradoksi deyiladi.

## 1.4 Lorentz almashtirishlari

Yer sirtidan 10 - 30 km balandlikda kosmik nurlar atmosferadagi kislorod, azot va boshqa elementlarning atomlarini tinimsiz bombardimon qilish natijasida zaryadlangan zarrachalar va neytral  $\pi$  - mezonlar hosil bo'ladi. Bunday  $\pi$ -mezonlardan bittasing Yer tomon harakatini kuzataylik. U bilan bog'langan sanoq sistemada (raketa sistemasi yoki  $r$ -sistema deb ataymiz) mezonning o'rtacha yashash vaqtı  $2.55 \cdot 10^{-8}$ s. Shu vaqtدا u  $\mu$ -mezon va neytrinoga parchalanadi.  $r$ -sistemada mezonning tug'ilish (birinchi voqeя) vaqtini va koordinatasini mos ravishda  $t' = 0$ ,  $x' = 0$  deb qabul qilamiz. Uning parchalanish (ikkinchi voqeя) vaqtı va koordinatasi  $t' = t_\pi$ ,  $x' = 0$  ga teng bo'lsin. Yerdagi kuzatuvchi (laboratoriya sistemasi yoki  $l$ -sistema) uchun  $\pi$ -mezon qancha vaqt yashaydi va qanday masofani bosib o'tadi? Bunday savollarni istalgan boshqa bir juft voqeя uchun berish mumkin. Bu savolga javob oddiy bo'lib - masofa va vaqt intervali bilan aniqlanadi. Lekin, bunday javob real masofalar va real vaqlarda berilmaganligi uchun bizni qanoatlantirmaydi, tajriba natijalari bilan solishtirishning imkoniy yo'q. Shuning uchun javob sharoitni hisobga olgan holda berilishi kerak.

Birorta voqeanning  $r$ -sistemadagi ( $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ,  $t'$ ) koordinatasi va vaqt bilan shu voqeanning  $l$ -sistemadagi ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$ ) koordinata va vaqtı orasida bog'lanishni topish, ya'ni almashtirish formulalarini aniqlash kerak. Bunday almashtirishlarni aniqlash juda sodda bo'lib, quyidagi to'rtta shartga asoslanadi:

1. Fazo va vaqtning xossalari saqlanishi uchun almashtirish formulalari chiziqli bo'lishi kerak.
2. Almashtirish koeffitsiyentlari qanday voqeя ko'rileyotganligiga bog'liq bo'lmasligi kerak.
3. Almashtirish koeffitsiyentlari  $r$ -sistemaga nisbatan tinch turgan nuqtaning  $l$ -sistemada  $x$  o'qining musbat yo'nalishida "raketa" tezligiga teng bo'lgan tezlik bilan harakatlanishini ta'minlashi kerak.
4. Almashtirish intervalning invariantligini saqlashi kerak.

Soddalik uchun har ikkala sanoq sistemaning koordinata o'qlari mos ravishda bir-biriga parallel va  $r$ -sistema  $l$ -sistemaga nisbatan  $Ox$  o'qining musbat yo'nalishida  $V$  tezlik bilan harakatlanayotgan holni

ko'rib chiqamiz. Yuqoridagi prinsiplarni avval  $\pi$ -mezonning parchalanish jarayoniga tatbiq qilamiz. Bu holda  $\pi$ -mezon bilan bog'langan sistema  $r$ -sistema vazifasini o'taydi. Ikki voqealarning intervalning kvadrati

$$c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2 = c^2 t'^2 = c^2 t_\pi^2. \quad (1.19)$$

Bu ifodani sanoq sistemalarning nisbiy tezligi

$$V = \frac{x}{t}, \quad x = Vt \quad (1.20)$$

orqali qayta yozamiz:

$$c^2 t^2 - V^2 t^2 = c^2 t'^2 = c^2 t_\pi^2. \quad (1.21)$$

Bu tengliklardan  $l$  - sistemada  $\pi$  - mezonning yashash vaqtini topamiz:

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{t_\pi}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (1.22)$$

bu yerda  $\beta = V/c$ . (1.20) dan foydalanib

$$x = \frac{Vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.23)$$

ni hosil qilamiz. (1.22) – (1.23) ifodalar biz qidirayotgan almashtirishlarning xususiy holini beradi.

Endi  $\pi$ -mezonning tug'ilishi  $r$ -sistemaning koordinata boshi va  $t' = 0$  momentda emas, balki ixtiyoriy ( $x'$ ,  $t'$ ) da sodir bo'lsin. Bu hol uchun (1.22) – (1.23) almashtirish formulalarini yuqoridagi shartlarning birinchisiga asosan quyidagi ko'rinishda yozish kerak:

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} + Ax', \quad x = \frac{Vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} + Bx'. \quad (1.24)$$

Bu almashtirishlar orqali intervalning invariantligining matematik ifodasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$c^2 \left( \frac{t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} + Ax' \right)^2 - \left( \frac{Vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} + Bx' \right)^2 = c^2 t'^2 - x'^2.$$

Yuqoridagi tenglik barcha ( $x'$ ,  $t'$ ) uchun o'rini bo'lish shartidan, bu tenglikning o'ng va chap tomonlarida  $x'^2$ ,  $t'^2$  va  $x't'$  ishtirok etgan hadlar mos ravishda bir-biriga teng bo'lishi kerak. Bu shartlardan noma'lum koeffitsientlar  $A$  va  $B$  ni topamiz:

$$A = \frac{\beta}{c\sqrt{1-\beta^2}}, \quad B = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Bu ifodalarni (1.24) qo'yish natijasida qidirilayotgan almashtirishlarni aniqlaymiz:

$$t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z'. \quad (1.25)$$

Ushbu ifodalar voqealarning  $l$ -sistemadagi koordinatalarini  $r$ - sistemadagi koordinatalari orqali aniqlab beradi va *Lorenz almashtirishlari* deb ataladi. Bu yerda harakat  $x$  o'qiga parallel bo'lganligi uchun  $y = y'$  va  $z = z'$  bo'lishini inobatga oldik.

Teskari almashtirish formulalarini olish uchun (1.25) da  $(t, x) \rightarrow (t', x')$  va  $(V \rightarrow -V)$  almashtirishlarni bajarish kifoya qiladi:

$$t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (1.26)$$

Sanoq sistemalarning nisbiy harakat tezligi  $V \ll c$  bo'lganda Lorentz almashtirishlari Galiley almashtirishlariga o'tishini (1.25) va (1.26) formulalardan ko'rish qiyin emas.

$l$ - va  $r$ - sistemalarning nisbiy harakati ixtiyoriy yo'nalishda bo'lgan hol uchun Lorentz almashtirishlarini umumlashtiramiz. Buning uchun radius-vektorning harakat va unga perpendikular bo'lgan yo'nalishlarga proeksiyalarini ( $r_{||}$ ,  $r_{\perp}$ ) kiritamiz. Radius vektorning harakat yo'nalishiga perpendikular bo'lgan tashkil etuvchisi bir sanoq sistemadan ikkinchisiga o'tganda o'zgarmaydi. Uning harakat yo'nalishiga proeksiyasi esa  $x$  kabi almashadi:

$$t = \frac{t' + Vr'_{||}/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad r_{||} = \frac{r'_{||} + Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad r_{\perp} = r'_{\perp}. \quad (1.27)$$

Lorentz almashtirishlarini keltirib chiqarishning yuqoridagidan farq qiladigan boshqa yo'llari ham mavjud. Masalan,  $xOy$  tekisligida o'qlarni birorta  $\theta$  burchakga burib yangi koordinatalarga o'tish mumkun.

Eski koordinatalardan yangisiga o'tish formulalari matematika kurslaridan ma'lum. Bir inersial sanoq sistemasidan ikkinchisiga o'tish formulalarini aniqlash uchun,  $tOx$  tekisligida o'qlarni burish yangi koordinata sistemasiga o'tishga ekvivalent ekanligidan foydalaniladi. Bu holda burish burchagi o'qlarni oddiy burishdan farqli ravishda, mavhum bo'ladi va sanoq sistemalarining nisbiy tezligiga bog'liq bo'ladi. Bunday yo'l bilan almashtirish formulalarini topsak yana (1.25) natijani olamiz.

Galiley almashtirishlaridan farqli ravishda Lorentz almashtirishlari nokommutativlik xossasiga ega, ya'ni ikkita ketma-ket Lorentz almashtirishlarining natijasi ular qanday ketma – ketlikda bajarilishiga bog'liq. Sanoq sistemalarining harakat tezliklari parallel bo'lgan hol bundan istisnodir.

## 1.5 Lorentz almashtirishlaridan kelib chiqadigan xulosalar

Nisbiylik nazariyasiga fazo va vaqt xossalari to'g'risidagi odatdag'i tasavvurlardan tubdan farq qiluvchi xulosalarga olib keladi. Buni "Nisbiylik nazariyasida vaqt" mavzusida vaqt misolida ko'rib chiqdik. Vaqt va fazo nisbiy ekanligini Lorentz almashtirishlaridan ham ko'rish mumkin. Jismning o'lchami va ikki fizik hodisa orasidagi vaqt turli sanoq sistemalarda mutloq xarakterga ega emas.

Birinchi navbatda fazoviy uzunlikni ko'rib chiqamiz. Jism  $K'$  sanoq sistemasida tinch turgan bo'lsin va  $K$  sanoq sistemadagi kuzatuvchiga nisbatan  $x$  o'qi bo'ylab  $K'$  bilan birga  $V$  tezlik bilan harakatlanayotgan bo'lsin. Bu jismni bundan buyon *masshtab* deb ataymiz. Masshtabni deformatsiyalovchi hech qanday kuch yo'q deb qaraymiz.

$K'$  sistemada masshtabning koordinatalari  $x'_1$  va  $x'_2$  bo'lsin.  $x'$  o'qi bo'ylab uning uzunligini  $l_0 = x'_2 - x'_1$  bilan belgilaymiz va masshtabning  $x u s u s i y$  uzunligi deb ataymiz. Uning uzunligini  $K$  sanoq sistemaga nisbatan hisoblashda uchlarining koordinatalarini bir vaqtida o'lchash kerak. Turli vaqtarda aniqlangan koordinatalar farqi masshtab uzunligini bermaydi. Aniq  $t$  vaqtida masshtabning  $K$  sistemaga nisbatan koordinatalari  $x_1$  va  $x_2$  bo'lsin. Ikkala sanoq sistemasida koordinatalar orasidagi bog'lanishni (1.26) almashtirishning ikkinchisidan foydalanib topamiz:

$$x'_1 = \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x'_2 = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.28)$$

Bu ifodalarning ikkinchisidan biringchisini ayirib quyidagini hosil qilamiz:

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.29)$$

Bu yerda  $l = x_2 - x_1$  masshtabning  $K$  sistemadagi uzunligi. Natijada masshtabning  $K$  va  $K'$  sistemalardagi uzunliklari orasidagi bog'lanishni quyidagi korinishda yozish mumkin:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (1.30)$$

Bungan  $V$  tezlik bilan harakatlanayotgan masshtabning uzunligi uning xususiy uzunligiga nisbatan  $1/\sqrt{1 - \beta^2}$  marta qisqarishini ko'ramiz. Shunday qilib, ikki nuqta orasidagi masofa sanoq sistemasining tezligiga bog'liq ekan. Masshtabning bunday qisqarishi *Lorentz qisqarishi* deyiladi. Jism faqat  $x$  o'qi bo'ylab harakatlanayotganligi uchun  $y$  va  $z$  o'qlari bo'yicha uning uzunligi o'zgarmaydi. Shuning uchun harakatdagi jismning hajmi uning tinch turgan holdagi hajmi bilan (1.30) ko'rinishda bo'langan bo'ladi, ya'ni

$$V = V_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (1.31)$$

Shunday qilib, jismning uzunligi va hajmi nisbiy bo'lib, qanday sanoq sistemaga nisbatan olinayotganligi ko'rsatilishi kerak. Biz yuqorida  $K'$  sanoq sistema  $x$  o'qi bo'ylab harakat qiladi deb oldik. Harakat istalgan yo'nalishda bo'lganda ham yuqoridagi natijalarni olamiz.  $K$  va  $K'$  sanoq sistemalari teng huquqli bo'lganligi uchun jism  $K$  sistemaga nisbatan tinch turgan bo'lsa, masshtabning bu sistemadagi uzunligi xususiy bo'ladi.

Harakat yo'nalishida uzunlikning qisqarishi yoki jismning siqilishi kinematik xarakterga ega bo'lib, jismning deformatsiyalanishiga olib keladigan hech qanday ichki kuchlanishlar paydo bo'lmaydi. Bu ma'noda nisbiylik nazariyasida deformatsiyalanmaydigan qattiq jismlar to'g'risida gap yuritish mumkin.

Ikki voqealarning orasidagi vaqt intervali to'g'risidagi tasavvur uzunlik singari fundamental ravishda o'zgarganligini §1.3 da ko'rib chiqqan edik.

(1.30) va (1.16) formulalarga asosan uzunlikning va vaqt intervalining qisqarishi jismning tezligi  $c$  ga yaqin bo'lganda sezildi. Shu sababli nisbiylik nazariyasini yaratilishidan avval kundalik hayotda va

fizik tajribalarda kichik tezliklar bilan bog'liq bo'lgan hodisalar kuzatilganligi uchun Nyuton mexanikasi qonunlari katta aniqlikda o'rinli bo'lib kelgan. Zaryadlangan zarrachalarni yorug'lik tezligiga yaqin tezlik-largacha tezlatuvchi qurilmalar paydo bo'lgandan keyin katta tezliklar bilan ish ko'rishga to'g'ri kelgan. Bunday tezliklarda Nyuton qonunlari bajarilmay qoladi.

Tinch turgan kuzatuvchiga nisbatan harakatdagi jismlar uzunligi va vaqtning qisqarishi realmi yoki bizning nazarimizda shundaymi? Bu savolga javob berishdan oldin fazo va vaqt to'g'risidagi eski tasavvurlardan holi bo'lish kerak. Sanoq sistemalar teng huquqli bo'lganligi uchun harakat va tinch holat qanday nisbiy bo'lsa, jism uzunligi qisqargan deyish shunday nisbiydir.

## 1.6 Nisbiylik nazariyasida tezliklarni va burchaklarni almashtirish

Lorentz almashtirishlaridan foydalanib, moddiy nuqtaning birorta sanoq sistemasidagi tezligi bilan uning ikkinchi sanoq sistemasidagi tezligi orasidagi bog'lanishni topamiz. Ilgaridek  $K'$  sistema  $K$  sistemaga nisbatan  $x$  o'qi bo'ylab  $V$  tezlik bilan harakatlanayotgan bo'lsin. Moddiy nuqtaning  $K'$  va  $K$  sistemalarga nisbatan tezligini mos ravishda  $\mathbf{v}'$ ,  $\mathbf{v}$  bilan belgilaymiz. Ularning koordinata o'qlariga proeksiyalari quyidagicha aniqlanadi:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'}; \quad (1.32)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (1.33)$$

Tezliklar orasidagi bog'lanishni topish uchun (1.25) almashtirish formulalarini diffensiallaymiz:

$$dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dx = \frac{dx' + V dt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz'. \quad (1.34)$$

Bu ifodalarning oxirgi uchtasining birinchisiga nisbatini olamiz va (1.32) –(1.34) ni hisobga olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}. \quad (1.35)$$

Bu formulalar nisbiylik nazariyasida tezliklarning almashtirish qonunini aniqlaydi. Ular kichik tezliklarda klassik mexanikadagi tezliklarni qo'shish formulalasi (1.2) ga o'tadi. Haqiqatan ham  $V$ ,  $v'_x \ll c$  bo'lganda

$$1 + \frac{v'_x V}{c^2} \approx 1, \quad \sqrt{1 - \beta^2} \approx 1$$

munosabatlar o'rinni bo'ladi. Bundan (1.35) ifoda (1.2) ga o'tishi ko'rish qiyin emas.

Tezliklarni almashtirish formulalarini  $V/c$  ning darajalari bo'yicha qatorga yoyib, uning birinchi tartibli hadlari bilan chegaralansak, almashtirish formulalari quyidagi ko'rinishni oladi:

$$v_x = v'_x + V \left( 1 - \frac{v'^2}{c^2} \right), \quad v_y = v'_y \left( 1 - \frac{v'_x V}{c^2} \right), \quad v_z = v'_z \left( 1 - \frac{v'_x V}{c^2} \right).$$

Bularni birlshtirib vektor ko'rinishda yozish mumkin:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{V} \mathbf{v}') \mathbf{v}'. \quad (1.36)$$

Bu ifodada tezliklar  $\mathbf{V}$  va  $\mathbf{v}'$  nosimmetrik qatnashishi Lorentz almashtirshlari nokommunitativligining natijasidir.

$K'$  sanoq sistemada moddiy nuqtaning tezligi  $x'$  o'qiga parallel bo'lsa, ya'ni  $v'_x = v'$ ,  $v'_y = v'_z = 0$ . U holda:

$$v_x = v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v' V}{c^2}}, \quad v_y = v_z = 0. \quad (1.37)$$

Bu ifoda nisbiylik nazariyasida parallel tezliklarni qo'shish formulasini beradi. Eynshteyn nisbiylik prinsipidan kelib chiquvchu yorug'lik tezligining maksimal ekanligi (1.35) va (1.37) ifodalardan yaqqol ko'rilib turibdi. Birorta sanoq sistemada  $v' = c$  bo'lsin deb faraz qilamiz. Bu tezlik ixtiyoriy boshqa sanoq sistemada  $c$  ga teng bo'ladi:

$$v = \frac{c + V}{1 + \frac{c V}{c^2}} = c. \quad (1.38)$$

Agar biror sanoq sistemada  $v' < c$  bo'lsa, uning tezligi ixtiyoriy boshqa sanoq sistemada yorug'lik tezligidan kichikligicha qoladi. Haqiqatan

ham  $K'$  sistemada moddiy nuqtaning tezligi  $v' = c - \delta$  va sanoq sistemaning tezligi  $V = c - \varepsilon$  ( $\delta > 0, \varepsilon > 0$ ) bo'lsa, (1.37) dan  $v < c$  ekanligini ko'rish mumkin. Shunday qilib, har biri yorug'lik tezligidan kichik bo'lgan ikkita tezlikning yig'indisi har doim yorug'lik tezligidan kichik bo'ladi.

Tezlikni almashtirish formulalari (1.35) yordamida burchaklarni almashtirish formulasini topish mumkin.  $K$  va  $K'$  sistemalarning koordinata o'qlari mos ravishda parallel bo'lsin.  $K'$  sanoq sistemada moddiy nuqta  $xOy$  tekisligida  $x'$  o'qi bilan  $\theta'$  burchak hosil qilib  $v'$  tezlik bilan harakatlanayotgan bo'lsin, u holda  $K$  sistemada ham harakat  $xOy$  tekisligida sodir bo'ladi. Tezliklarning poeksiyalarini burchaklar orqali yozamiz:  $v'_x = v' \cos \theta'$ ,  $v'_y = v' \sin \theta'$ ;  $v_x = v \cos \theta$ ,  $v_y = v \sin \theta$ .

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_y}{v_x}$$

va tezliklarni almashtirish formulalaridan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{c \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sin \theta'}{c \cos \theta' + V}. \quad (1.39)$$

Bu formula nisbiylik nazariyasida burchaklarni almashtirish qonunini beradi.

Burchaklarni almashtirish formulasini yorug'lik uchun tatbiq qilamiz. Bu holda  $v = v' = c$  ekanligini hisobga olib, (1.35) almashtirishlarning ikkinchisidan quyidagini hosil qilamiz:

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c} \cos \theta'} \sin \theta'. \quad (1.40)$$

Agar  $K$  va  $K'$  sanoq sistemalarining nisbiy tezligi  $V \ll c$  bo'lsa, ikkala sanoq sistemadagi kuzatuvchi uchun yorug'lik manbayining ko'rinish burchaklari orasidagi farq  $\Delta\theta = \theta' - \theta \ll 1$  bo'ladi. Bu shartga ko'ra (1.40) dan quyidagini topamiz:

$$\Delta\theta = \frac{V}{c} \sin \theta'. \quad (1.41)$$

Bu ifoda yorug'lik aberratsiyasi burchagini aniqlovchi formuladir.<sup>6</sup>

<sup>6</sup>Yorug'lik aberratsiyasi - yorug'lik tezligining chekliligi va kuzatuvchining yoritgichga nisbatan Yer bilan birga harakatlanishi tufayli undan kelayotgan yorug'lik nuri yo'naliishing o'zgarishi.

## 1.7 To‘rt o‘lchovli vektor va tenzorlar

Ushbu paragrafda vektor va tenzorlar haqida qisqacha ma’lumotlarni aksariyat hollarda isbotsiz keltiramiz. Quyida keltirilgan umumiylarakterga ega bo‘lgan ba’zi ta’rif, formula va qoidalarni R.X.Mallin “Maydon nazariyasi”<sup>7</sup> kitobidan olindi. Kengroq ma’lumotlarni shu kitobdan yoki vektor va tenzor analizga bag‘ishlangan boshqa kitoblardan topish mumkin.

$N$  o‘lchamli fazoda ikki koordinatalar sistemasi orasidagi to‘g‘ri va teskari almashtirish berilgan bo‘lsin:

$$x'^i = x^i(x^1, x^2, \dots, x^N), \quad (1.42)$$

$$x^i = x^i(x'^1, x'^2, \dots, x'^N). \quad (1.43)$$

Bu yerda  $x'^i(x^1, x^2, \dots, x^N)$  va  $x^i(x'^1, x'^2, \dots, x'^N)$  funksiyalar bir qiymatli, uzluksiz, va kerakli marta differensiallanuvchi funksiyalardir. To‘g‘ri va teskari almashtirish yakobianlari nolga teng bo‘lmagan funksiyalardir.

To‘g‘ri va teskari almashtirish formulalari (1.42) va (1.43) ning differensiallarini yozamiz.<sup>8</sup>

$$dx'^i = \sum_j \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j \equiv \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j, \quad (1.44)$$

$$dx^i = \sum_j \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} dx'^j \equiv \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} dx'^j. \quad (1.45)$$

To‘g‘ri almashtirishning  $\partial x'^j / \partial x^i$  koeffitsientlari bilan teskari almashtirishning  $\partial x^j / \partial x'^i$  koeffitsientlari orasida quyidagicha bog‘lanish mavjud:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^j}{\partial x^k} = \delta_k^i, \quad \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x'^k} = \delta_k^i.$$

Agar  $\{x^1, x^2, \dots, x^N\}$  sistemasida  $N$  ta  $\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$  kattaliklar berilgan bo‘lib, koordinatalar (1.42) formula bo‘yicha almashtirganda bu kattaliklar  $\{a'_1, a'_2, \dots, a'_N\}$  kattaliklarga

$$a'_i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} a_j \equiv \Lambda_j^i a_j \quad (1.46)$$

<sup>7</sup>Р.Х.Маллин Майдон назарияси, Т.-Ўқитувчи, 1963.

<sup>8</sup>Yozishni soddalashtirish maqsadida takrorlanuvchi - s o q o v indekslar ishtirok etganda yig‘indi belgisini yozmaymiz, lekin ular bo‘yicha yig‘indi olinadi.

formula bo'yicha almashtirilsa, shu  $N$  ta kattaliklar to'plami *kovariant* vektor deyiladi, kattaliklarning o'zi esa uning komponentalari deb ataladi.  $N$  o'lchovli fazoda aniqlangan skalar funksiyaning xususiy hosilalarining to'plami  $a_i = \partial\varphi/\partial x^i$  (skalar funksiyaning gradienti) kovariant vektorga misol bo'ladi. Tegishli almashtirishni bajarib, bunga ishonch hosil qilamiz:

$$a'_i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} a_j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^j} \delta^i_j = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^j}.$$

Agar  $\{x^1, x^2, \dots, x^N\}$  sistemasida  $N$  ta  $\{a^1, a^2, \dots, a^N\}$  kattaliklar berilgan bo'lsin, koordinatalarni (1.43) formula bo'yicha almashtirilganda bu kattaliklar  $\{a'^1, a'^2, \dots, a'^N\}$  kattaliklarga

$$a'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} a^j \equiv \Lambda^i_j a^j \quad (1.47)$$

formula bo'yicha almashtirilsa, shu  $N$  ta kattaliklar to'plami *kontravariant* vektor deyiladi, kattaliklarning o'zi esa uning komponentalari deb ataladi. (1.44) va (1.47) dan ko'ramizki, koordinatalarning differensiallari qanday almashtirish qonuniga bo'ysunsa, kontravariant vektorning komponentalari ham o'sha almashtirish qonuniga bo'ysunadi. Demak, koordinatalarning differensiallari kontravariant vektor bo'lar ekan. Xususiy holda sistema koordinatalarini almashtirish formulalari chiziqli bo'lganda koordinatalar to'plami ularning differensiallarining to'plami kabi kontravariant vektorni tashkil qiladi.

Kovariant va kontravariant vektorlarni bir - biridan indekslarni yozish usuli bilan farqlaymiz. Kovariant vektor indekslari o'ng yonining pastiga yoziladi (masalan  $a_i, b_i$  va hokazo), kontravariant vektor indekslari esa o'ng yonining tepasiga yoziladi (masalan  $a^i, b^i$  va hokazo). Uch o'lchovli (Evklid) fazoda dekart koordinatalari sistemasida kontravariant va kovariant vektorlar orasida farq yo'q.

Agar  $\{ct, x, y, z\}$  kattaliklarni to'rt o'lchovli sistemada nuqtaning (dunyo nuqtasi) koordinatalari deb qarasak, ularning to'plami yuqorida vektorlarga berilgan ta'riflarga asosan (Lorentz almashtirishlari chiziqli bo'lganligi uchun) kontravariant vektor bo'ladi. Uning komponentalarni

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

ko'rinishda belgilanadi. Bu kattaliklar to'plami 4-radius-vektor deb ataladi. Koordinata boshida va  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  dunyo nuqtasida sodir

bo'lgan ikki voqealarda orasidagi interval

$$(x^i)^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \quad (1.48)$$

invariant bo'lib, to'rt o'lchovli koordinatalar sistemasining ixtiyoriy chiziqli burishlarida, xususan Lorentz almashtirishlarida, o'zgarmaydi. Shuning uchun (1.48) ni 4-radius-vektor kvadratining ta'rifi deb qabil qilingan.

Berilgan to'rtta kattalik ( $A^0, A^1, A^2, A^3$ ) koordinatalar sistemasi almashtirilganda 4-radius-vektor kabi almashtirilsa, bu kattaliklar to'plami to'rt o'lchovli kontravariant vektor yoki qisqacha kontravariant 4-vektor deyiladi. Kattaliklar esa uning komponentalarini tashkil qiladi va ular uchun Lorentz almashtirishlari quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$A^0 = \frac{A'^0 + \frac{V}{c} A'^1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad A^1 = \frac{A'^1 + \frac{V}{c} A'^0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad A^2 = A'^2, \quad A^3 = A'^3. \quad (1.49)$$

Bu qoida bo'yicha almashinadigan vektor - Lorentz almashtirishlariga nisbatan vektordir. 4-vektoring kvadrati (1.48) singari quyidagicha aniqlanadi:

$$(A^i)^2 = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2. \quad (1.50)$$

$\{A^1, A^2, A^3\}$  4-vektoring fazoviy (uch o'lchovli) komponentalari deyiladi va uch o'lchovli fazoda koordinata o'qlarini burishga nisbatan 3-vektordir.  $A^0$  esa vaqt komponentasi bo'lib, yuqoridagi burishlarga nisbatan 3-skalyardir. Shu ma'noda 4-vektorni ( $A^0, A$ ) ko'rinishda yozish mumkin.

Kontravariant vektor bilan bir qatorda komponentalari 4-skalyar (1.50) ning hisilalari ( $A_j = \partial(A^i)^2 / \partial A^j$ ) bilan aniqlangan kovariant vektor kiritamiz. Bu vektoring komponentalari kontravariant vektoring komponentalari bilan quyidagicha bog'langan:

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3. \quad (1.51)$$

Bu belgilashlarda 4-vektoring kvadrati

$$A^i A_i = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3. \quad (1.52)$$

Bu kattalik interval singari musbat (vaqtsimon), manfiy (fazosimon) va nolga teng (yorug'liksimon) bo'lishi mumkin.

4-vektorning kvadrati singari ikkita 4-vektorning sakalar ko'paytmasini aniqlaymiz:

$$A^i B_i = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3. \quad (1.53)$$

Ikki vektoring skalyar ko'paytmasi 4-skalyar bo'lib, Lorentz almashtirishlariga nisbatan invariantdir. (1.51) ifodadan kontravariant va kovariant 4-vektorlar orasida sodda bog'lanish borligini ko'ramiz. Bu bog'lanishni qoida sifatida ta'riflanadi: Fazoviy indekslarni (1, 2, 3) yuqoriga ko'tarishda yoki pastga tushirishda 4-vektor komponentalarining ishorasi o'zgaradi. Bunday amal 0 indeks bilan bog'liq bo'lganda vektor komponentasining ishorasi o'zgarmaydi.

Kovariant vektorlar uchun Lorentz almashtirishlarini quyida keltiramiz:

$$A_0 = \frac{A'_0 - \frac{V}{c} A'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad A_1 = \frac{A'_1 - \frac{V}{c} A'_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad A_2 = A'_2, \quad A_3 = A'_3. \quad (1.54)$$

Tenzor tushunchasini kiritishda kovariant va kontravariant vektor komponentalarini almashtirish qonunlari asos qilib olinadi. To'rt o'l-chovli fazoda  $T^{ij}$  ko'rinishda berilgan 16 ta kattaliklar koordinatalar sistemasi almashtirilganda ikkita kontravariant 4-vektor komponentalarining ko'paytmasi singari almashtirilsa, bu kattaliklar to'plami 2-rangli kontravariant 4-tenzor deyiladi, kattaliklarning o'zi esa uning komponentalari deb ataladi. Kovariant  $T_{ij}$  va aralash  $T^i{}_j$  4-tenzorlarga kontravariant 4-tenzor kabi ta'rif beriladi. Aralash tenzorlarda  $T^i{}_j$  va  $T_j{}^i$  larni bir-biridan farqlash lozim. Indeksmani yuqoriga ko'tarishda yoki pastga tushirishda vektorlar uchun ta'riflangan qoida bu yerda ham o'rindir. Masalan:

$$A^{00} = A_{00}, \quad A^{01} = -A_{01}, \quad A^{12} = A_{12}, \dots,$$

$$A^0{}_0 = A_{00}, \quad A^0{}_1 = -A^{01}, \quad A^2{}_3 = -A_{23}, \dots,$$

Tenzor ta'rifiga ko'ra 1-rangli tenzor - vektor, 0-rangli tenzor esa skalyar kattalikdir. Yuqori rangli tenzorlarning ta'rifi 2-rangli tenzoring ta'rifiga o'xshaydi.

Tenzor indekslarining o'rinlarini almashtirish natijasida yana tenzor hosil bo'ladi. Indekslardan ixtiyoriy ikkitasining o'rnini almashtirish natijasida mos komponentalarining son qiymati va ishoralari o'zgarmaydigan tenzor shu ikki indeksga nisbatan simmetrik deyiladi. Masalan 3-rangli tenzor uchun  $T^{ijk} = T^{ikj}$  bo'lsa, u ( $j, k$ ) indekslarga

nisbatan simmetrikdir. 2-rangli tenzor simmetrik bo'lsa,  $T^{ij} = T^{ji}$  shart o'rini bo'ladi. Ikkinci rangli simmetrik 4-tenzorning mustaqil komponentalarining soni o'nta bo'ladi.

Indekslaridan ixtiyoriy ikkitasining o'rnini almashtirish natijasida mos komponentalarining soni qiymati o'zgarmasdan, faqat ishoralari teskariga o'zgarsa, tenzor shu ikki indeksga nisbatan antisimmetrik deyiladi. Masalan 3-ranrli tenzor uchun  $T^{ijk} = -T^{ikj}$  bo'lsa, u ( $j, k$ ) indekslarga nisbatan antisimmetrikdir. 2-rangli tenzor antisimmetrik bo'lsa,  $T^{ij} = -T^{ji}$  shart o'rini bo'ladi. Bunday tenzorning diagonal elementlari nolga teng bo'ladi. Shuning uchun mustaqil komponentalarining soni oltitadir.

Simmetrik yoki antisimmetrik bo'lмаган tenzor asimmetrik deyiladi. Lekin ikkinchi rangli har qanday tenzordan simmetrik va antisimmetrik tenzor hosil qilish mumkin. Haqiqatan ham berilgan ixtiyoriy  $T_{ij}$  tenzordan yangi tenzor tuzamiz:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} (T_{ij} + T_{ji}). \quad (1.55)$$

Bu tenzor indekslarining o'rnini almashtirishga nisbatan simmetrikdir. Endi o'sha  $T_{ij}$  tenzordan yana boshqa tenzor tuzaylik:

$$A_{ij} = \frac{1}{2} (T_{ij} - T_{ji}). \quad (1.56)$$

Bu tenzor esa indekslarining o'rnini almashtirishga nisbatan antisimmetrikdir. (1.55) va (1.56) ifodalardan quyidagini hosil qilamiz:

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij}. \quad (1.57)$$

Demak, ikkinchi rangli har qanday tenzorni simmetrik va antisimmetrik qismlarga ajratish mumkin ekan.

Tenzorlarning simmetriya xossasi invariantlik xususiyatiga ega: biron koordinatalar sistemasida tenzor simmetrik yoki antisimmetrik bo'lsa, u bunday xossasini har qanday sistemada saqlab qoladi.

## 1.8 To'rt o'lchovli tezlik va tezlanish

Oldingi paragraf natijalariga asoslanib ikkita muhim to'rt o'lchovli vektorlarni - 4-tezlik va 4-tezlanishi aniqlaymiz. Klassik fizikada barcha sanoq sistemalar uchun tezlikning ta'rifi bir xil bo'lib, radius-vektor dan vaqt bo'yicha olingan hosila ko'rinishida yoziladi. Barcha inersial

sanoq sistemalarda vaqt birday o'tganligi sababli hech qanday muammo paydo bo'lmayan. Nisbiylik nazariyasida vaqt klassik fizikadagidek invariant emas. Turli sanoq sistemalarda vaqt turlicha o'tadi. Shuning uchun bu qoidani to'g'ridan to'g'ri tatbiq qilib bo'lmaydi. Klassikadagi tezlik ta'rifini to'rt o'lchovli tezlik ta'rifi sifatida qabul qilish uchun 4-radius-vektordan hosilani invariant "vaqt" bo'yicha olish kerak. Bu invariantni shunday tanlashimiz kerakki,  $v \ll c$  bo'lganda 4-tezlikning fazoviy komponentalari oddiy tezlikka o'tishi kerak. Bunday skalar sifatida intervalning yorug'lik tezligiga nisbatini olamiz.

Yuqoridagi fikrlarga asosan kontravariant 4-tezlikni quyidagicha aniqlaymiz:

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} ,$$

bu yerda

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{(dt)^2}} dt = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \text{inv} . \quad (1.58)$$

Natijada kontravariant 4-tezlik komponentalari uchun quyidagilarni hosil qilamiz:

$$u^0 = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dt}{dt} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} , \quad (1.59)$$

$$u^1 = \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dt}{dt} = \frac{v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} , \quad (1.60)$$

$$u^2 = \frac{dy}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dt}{dt} = \frac{v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} , \quad (1.61)$$

$$u^3 = \frac{dz}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dt}{dt} = \frac{v_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad (1.62)$$

Bu yerda  $v$  – moddiy nuqtaning oddiy uch o'lchovli tezligi. Moddiy nuqta tezligi  $v \ll c$  bo'lganda  $u^1 \approx v_x$ ,  $u^2 \approx v_y$ ,  $u^3 \approx v_z$  bo'ladi, ya'ni yuqoridagi talab bajariladi. Kovariant 4-tezlik vektori indekslarni pastga tushurish qoidasiga asosan topiladi.

4-tezlik kvadrati, ya'ni o'z o'ziga skalar ko'paytmasi (1.59)–(1.62) ifodalarga asosan

$$u^i u_i = c^2 . \quad (1.63)$$

Bu kattalik musbat bo'lganligi uchun 4-tezlik vaqtsimon vektor bo'ladi. Bu xossa moddiy nuqtalar tezligi yorug'lik tezligidan katta bo'laolmasligini ko'rsatadi.

To'rt o'lchovli tezlik singari 4-tezlanishni aniqlaymiz:

$$w^i = \frac{d^2 u^i}{d\tau^2} = \frac{du^i}{d\tau} \quad (1.64)$$

yoki komponentalarda

$$w^0 = \frac{(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{c \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2}, \quad (1.65)$$

$$w^1 = \frac{\dot{v}_x}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{v_x (\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2}, \quad (1.66)$$

$$w^2 = \frac{\dot{v}_y}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{v_y (\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2}, \quad (1.67)$$

$$w^3 = \frac{\dot{v}_z}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{v_z (\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2}. \quad (1.68)$$

Xususan,  $v \ll c$  bo'lganda  $w^1 = \dot{v}_x$ ,  $w^2 = \dot{v}_y$  va  $w^3 = \dot{v}_z$ . Bu yerda  $\mathbf{v}$  va  $\dot{\mathbf{v}} = d\mathbf{v}/dt$  mos ravishda uch o'lchovli tezlik va tezlanish.

To'rt o'lcholi fazoda 4-tezlik va 4-tezlanish bir-biriga ortogonal, ya'ni  $w^i u_i = 0$ . Buni (1.63) ifodadan  $\tau$  bo'yicha hosila olib isbotlash mumkin.

## 1.9 1-bobga oid masala va savollar

1. Laboratoriya sanoq sistemasida bir joyda sodir bo'lgan ikki voqealorasi-dagi vaqt  $3\text{ s}$  ga teng:
  - (a) Raketa sanoq sistemasida bu ikki voqealorasi-dagi vaqt  $5\text{ sek}$  bo'lsa, bu sanoq sistemada voqealar orasidagi fazoviy masofa nimaga teng?
  - (b) Laboratoriya sanoq sistemasiga nisbatan raketaning tezligi nimaga teng?
2. 4-o'lchovli hajm elementi  $d\Omega$  bir inersial sanoq sistemasidan ikkinchisiga o'tganda qanday almashadi?

3. Bir inersial sanoq sistemasidan ikkinchisiga o'tganda 4-o'lchovli simmetrik tenzor  $S^{ik}$  qanday qonuniyat bilan almashadi?
4. Bir inersial sanoq sistemasidan ikkinchisiga o'tganda 4-o'lchovli antisimmetrik tenzor  $A^{ik}$  qanday qonuniyat bilan almashadi?
5. Ixtiyoriy 2-rangli tenzor  $T^{ik}$  ni simmetrik ( $S^{ik} = S^{ki}$ ) va antisimmetrik ( $A^{ik} = -A^{ki}$ ) tenzorlar yig'indisi ko'rinishida tasvirlang. Bunday tasvir yagona ekanligiga ishonch hosil qiling.
6. Simmetrik tenzorning antisimmetrik tenzorga ko'paytmasi doimo nolga teng bo'lishini isbotlang.
7.  $K'$  sanoq sistema  $K$  sanoq sistemasiga nisbatan  $Ox$  o'qi bo'ylab  $V$  tezlik bilan harakatlanayotgan bo'lsin.  $K'$  da  $(x'_0, y'_0, z'_0)$  nuqtada tinch turgan soat  $t'_0$  vaqtini ko'rsatayotganda  $K$  dagi  $(x_0, y_0, z_0)$  nuqtada turgan soatning oldidan o'tadi. Bunda  $K$  dagi soat  $t_0$  ni ko'rsatayotgan bo'lsin. Shu hol uchun Lorentz almashtirishlarini yozing.
8. Inersial sanoq sistema  $K$  ga nisbatan  $K'$  sistema  $V$  tezlik bilan harakatlanmoqda. Har bir sistemaning koordinata boshida turgan soatlar ustma - ust tushganda bir xil  $t = t' = 0$  vaqtini ko'rsatgan. Keyingi vaqt-larda har bir sistemada huddu shunday xossalni dunyo nuqtalari qanday koordinatalarga ega bo'ladi, ya'ni har bir sistemaning qaysi nuqtasida turgan soatlar  $t = t'$  vaqtini ko'rsatadi? Shu nuqtaning harakat qonuni aniqlang.
9.  $K'$  sanoq sistemaning  $K$  ga nismatan tezligi  $\mathbf{V}$  ning yo'nalishini ixtiyoriy deb 4-radius-vektor uchun Lorentz almashtirishlarini yozing. (1.27) formulani umumlashtiring.)
10.  $K'$  sanoq sistemasining  $K$  ga nisbatan tezligi  $\mathbf{V}$  ning yo'nalishini ixtiyoriy deb 4-vektor  $A^i = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (\varphi, \mathbf{A})$  uchun Lorentz almashtirishlarini yozing.
11. Inertsial sanoq sistema  $K$  ga nisbatan xuddi shunday  $K'$  sistema ixtiyoriy yo'nalishda  $\mathbf{V}$  tezlik bilan harakatlanmoqda. Shu hol uchun tezliklarni qo'shish formulasini keltirib chiqaring.
12. Vaqtini o'lchanish uchun xususiy uzunligi  $l_0$  bo'lgan sterjen uchlariga o'rnatilgan ikkita ko'zgulardan foydalaniladi (yorug'lik soati). Bunda bir davr deb birinchi ko'zgulardan chiqqan yorug'lik ikkinchi ko'zgudan qaytib yana birinchi ko'zguga yetib kelishi uchun ketgan vaqtga aytildi. Yorug'lik tezligi to'g'risidagi postulatdan foqdalanib, tinch turgan va harakatdagi yorug'lik soatlari bo'yicha o'lchanigan davrlar bir-biri bilan qanday bog'langanligini aniqlang. Soddalik uchun sterjen harakat yo'nalishi bo'ylab joylashgan deb oling.
13. Tinch turgan sanoq sistemada "Poezd" ( $A'B'$ ) ning uzunligi  $l_0 = 8,64 \cdot 10^8 km$  bo'lsin. U shunday uzunlikka ega bo'lgan "platforma" ( $AB$ ) oldidan  $V = 240000 km/s$  tezlik bilan o'tmoqda. "Poezd"ning boshi ( $B'$ ) da va oxiri ( $A'$ ) da o'zaro sinxronlashgan ikkita bir xil soat bor. "Platforma"ning boshi ( $B$ ) da va oxiri ( $A$ ) da ham xuddi shunday soatlar

bo'lsin. "Poezd"ning boshi "platforma"ning oxiri bilan tenglashganda ustma – ust tushgan soatlar 12 soat 00 min ko'rsatsa, quyidagi savol-larga javob bering:

- (a) bu vaqtida qandaydir sanoq sistemadagi barcha soatlar 12 : 00 ni ko'rsatadi deb ta'kidlash mumkinmi;
  - (b) "poezd"ning oxiri "platforma"ning boshi bilan tenglashganda soat-lardan har birining ko'rsatishi nimaga teng?
  - (c) poezdning boshi platformaning oxiri bilan tenglashganda soatlar-ning ko'rsatishi nimaga teng?
14. Tinch holatdagi uzunliklari  $l_0$  bo'lgan ikkita chizg'ich bitta umumiy to'g'ri chiziqa parallel holda bir-biriga qarab o'zgarmas tezlik bilan harakatlanmoqda. Ulardan biridagi kuzatuvchi chizg'ichlarning o'ng va chap uchlarining bir-biriga to'g'ri kelishi orasida o'tgan vaqt  $\Delta t$  ga teng ekanligini aniqladi. Bu holda ularning nisbiy tezligi nimaga teng? Har bir chizg'ichdagi kuzatuvchiga nisbatan ularning uchlari qanday tartibda bir-biriga to'g'ri keladi? Laboratoriya sistemasidagi kuzatuvchi uchun qanday bo'ladi?
15. 14-masalada chizg'ichlarning har biri boshqa sanoq sistemaga nisbatan bir-biriga qarama-qarshi yo'nalishda o'zgarmas  $V$  tezlik bilan harakatlanmoqda. Bu holda ulardan biridagi kuzatuvchiga nisbatan ikkin-chisining uzunligi nimaga teng?
16. Ikkita elektronlar dastasi laboratoriya sistemasiga nisbatan  $v = 0, 9 \cdot c$  tezliklar bilan bir-biriga qarab harakatlanmoqda. a) laboratoriya, b) elektron dastalaridan biri bilan bog'langan sanoq sistemaga nisbatan ularning nisbiy tezligi  $V$  nimaga teng? Natijani tahlil qiling.
17. Quyidagi tenglikni isbotlang:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1 - v'^2/c^2} \cdot \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v' V/c^2}$$

bu yerda  $v$  va  $v'$  moddiy nuqtaning mos ravishda  $K$  va  $K'$  sistemalar-dagi tezliklari.  $V$  -  $K'$  sistemaning  $K$  sistemaga nisbatan tezligi.

18. Quyidagi tenglikni isbotlang:

$$v = \frac{\sqrt{(v' + V)^2 - [v' V]^2/c^2}}{1 + v' V/c^2},$$

bu yerda  $v$  va  $v'$  – moddiy nuqtaning mos ravishda  $K$  va  $K'$  sistemalardagi tezliklari.  $V$  -  $K'$  sistemaning  $K$  sistemaga nisbatan tezligi.

19. 4-tezlanish vektori "fazo" simon ekanligini ko'rsating.
20. Yorug'lik dastasi birorta inersial sanoq sistemada  $d\Omega$  fazoviy burchak hosil qiladi. Bu burchak boshqa sistemada nimaga teng?
21. Maxsus nisbiylik nazariyasiga qachon va kim tomonidan asos solingan?

22. Eynshteyn nisbiylik prinsipini ta'riflang.
23. Yorug'lik tezligi qanday xossalarga ega?
24. Maykelson-Morli va Kennedi-Torndayk tajribalari nima bilan farq qiladi? Bu tajribalardan kelib chiqadigan asosiy xulosalar nimalardan iborat?
25. Nisbiylik nazariyasida intervalga ta'rif bering. Uni klassifikatsiyalang.
26. Birorta sanoq sistemada ikki voqeа bir vaqtida sodir bo'lsa, interval qanday bo'ladi.
27. Xususiy vaqtga ta'rif bering. U qanday xossalarga ega?
28. Lorentz almashtirishlari ( $x, i ct$ ) tekisligida o'qlarni  $\psi$  burchakka bursishga ekvivalent ekanligini ko'rsating.
29. Lorentz almashtirishlaridan qanday xulosalar kelib chiqadi?
30. 4-tezlikning kvadrati  $c^2$  teng bo'lishi, u qanday vektor ekanligini bildiradi?

## 2-bob

# Relyativistik mexanika

Oldingi bobda ko'rib chiqilgan nisbiylik nazariyasining umumiy prinsiplari moddiy nuqta mexanikasiga tatbiq qilindi. Moddiy nuqta yoki zarracha tushunchalaridan birday foydalanamiz. Yorug'lik tezligiga yaqin tezliklar bilan harakatlanuvchi zarrachalar mexanikasi *relyativistik mexanika* deyiladi. Ushbu kitob doirasida nisbiylik nazariysi nuqtai nazaridan mexanika qonunlarining barchasini qayta ko'rib chiqishning imkoniyati yo'q. Shuning uchun relyativistik zarrachalarga nisbiylik nazariyasini tatbiq qilish qanday prunsipial o'zgarishlarga olib kelishini o'rganish bilan chegaralanamiz. Masalan, Nyuton inersiya qonuni nisbiylik nazariyasida ham o'rinni bo'lib, barcha inersial sanoq sistemalarda bajariladi. Galiley almashtirishlariga nisbatan invariant bo'lgan Nyuton ikkinchi qonuni Lorentz almashtirishlariga nisbatan invariant emas. Mexanikaning bizga ma'lum bo'lgan boshqa qonunlari ham Lorentz almashtirishlariga nisbatan invariant emas. Shu sababli bizning asosiy maqsadimiz mexanika qonunlarini relyativistik invariant ko'rinishda yozish va ba'zi muhim deb hisoblangan masalalarni relyativistik niqtayi nazaridan ko'rib chiqishdir.

### 2.1 Erkin moddiy nuqtaning Lagranj funksiyasi

Relyativistik mexanikani o'rganishda har qanday ko'rinishdagi harakat qonunlarini o'rganishda universal bo'lgan variatsion prinsip - eng qisqa ta'sir prinsipini asos qilib olinadi. Bu prinsipga asosan:

*Har qanday sistema uchun A va B dunyo nuqtalari orasida olingan shunday integral mavjudki, haqiqiy harakat uchun u minimumga ega, variatsiyasi esa nolga teng.* Bu integral ta'sir integrali deb ataladi.

Tashqi kuchlar ta'sirida bo'limgan erkin moddiy nuqta uchun ta'sir integralini aniqlaymiz. Bunda nisbiylik prinsipidan kelib chiqadigan quyidagi umumiy qoidalarni asos qilib olamiz:

1. Ta'sir integrali sanoq sistemalarga bog'liq bo'lmanan invariant - skalyar kattalik bo'lishi kerak;
2. Birinchi qoidaga asosan integral ostidagi funksiya ham invariant bo'lishi kerak;
3. Integral bir karrali bo'lganligi uchun, uning ostida birinchi taribili differensial turishi kerak.

Bu talablarga javob beruvchi vaqt va fazoning birjinslilagini va fazoning izotropligi aks ettiruvchi bitta kattalik bizga ma'lum, u ham bo'lsa, intervalning diffensialidir. Shunday qilib, yuqoridagi fikrlarni hisobga olib erkin moddiy nuqta uchun ta'sir integralini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin

$$S = -\alpha \int_a^b ds \quad (2.1)$$

Bu yerda  $\alpha$  proporsionallik koefitsiyenti bo'lib, uning ma'nosi keyin ochiladi. Integral moddiy nuqtaning  $t_1$  va  $t_2$  vaqt momentidagi ikkita holatini aniqlovchi  $a$  va  $b$  voqealar orasidagi haqiqiy harakatga mos keluvchi dunyo chizig'i bo'yicha olinadi. Birinchidan, har ikkala voqealarning moddiy nuqta bilan bog'langanligi uchun ular orasidagi interval vaqt simon, ya'ni musbat bo'ladi. Ikkinchidan, integral 4-fazodagi to'g'ri chiziq bo'yicha olinganligi uchun u minimumga ega bo'lmaydi aksincha maksimal qiymatga ega bo'ladi. Shuning uchun integral oldidagi minus ishorasi ta'sir integralining minimumga ega bo'lishini ta'minlab beradi.

Ta'sir integrali (2.1) ni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$S = -\alpha \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt. \quad (2.2)$$

Bu yerda  $\mathcal{L}$  lagranj funksiyasi deyiladi. Interval uchun (1.16) ifodadan foydalanib ta'sir integralini

$$S = -\alpha c \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt. \quad (2.3)$$

ko'rinishda yozamiz.  $v$  moddiy nuqtaning tezligi. (2.2) va (2.3) ifodalarni taqqoslab Lagranj funksiyasi uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$\mathcal{L} = -\alpha \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (2.4)$$

Endi proporsionallik koeffitsiyenti  $\alpha$  ning ma'nosini ochamiz. Moddiy nuqtaning tezliginni  $v \ll c$  deb faraz qilamiz. Bu holda (2.4) bilan aniqlangan Lagranj funksiyasi klassik mexanikadagi Lagranj funksiyasiga o'tishi kerak. (2.4) ifodani  $v^2/c^2$  ning darajalari bo'yicha qatorga soyib  $v^2$  ga proporsional had bilan chegaralanamiz:

$$\mathcal{L} \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c}. \quad (2.5)$$

Bu yerda birinchi had o'zgarmas bo'lganligi uchun uni mexanika kursidan bizga ma'lum bo'lgan Lagranj funksiyasining xossasiga binoan tushirib qoldiramiz. Ikkinci hadni klassik mexanikadagi erkin moddiy nuqtaning Lagranj funksiyasi

$$\mathcal{L}_{kl} = \frac{mv^2}{2} \quad (2.6)$$

bilan taqqoslab  $\alpha = mc$  ekanligini aniqlaymiz.

Shunday qilib, relyativistik erkin zarrachaning ta'sir integrali

$$S = -mc \int_a^b ds = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt, \quad (2.7)$$

Lagranj funksiyasi

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2.8)$$

ifodalar bilan aniqlanishini topdik.

## 2.2 Erkin moddiy nuqtaning energiya va impulsi

Ma'lumki, Lagranj funksiyasidan tezlik komponentalari bo'yicha olingan hosila impulsning mos komponentalariga teng bo'ladi. Shu qoidaga ko'ra (2.8) dan tegishli hosilalarni olib, relyativistik zarrachaning impulsini topamiz:

$$p_x = \frac{mv_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad p_y = \frac{mv_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad p_z = \frac{mv_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2.9)$$

yoki vektor ko'rinishida

$$\mathbf{p} = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.10)$$

Lagranj funksiyasi (2.8) va impuls ifodasidan foydalananib erkin moddiy nuqtaning energiyasini aniqlaymiz:

$$\mathcal{E} = \mathbf{p}v - \mathcal{L} = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.11)$$

Bu munosabat juda muhim bo'lib, relyativistik zarrachaning tezligi nolga teng bo'lganda ham uning energiyasi noldan farqli va musbat bo'lishini ko'rsatadi, ya'ni

$$\mathcal{E}_0 = mc^2. \quad (2.12)$$

Bu kattalik zarrachaning tinch holatdagi energiyasi deyiladi va fundamental ma'noga ega. Demak, (2.11) zarrachaning tinch holatdagi va harakat bilan bog'liq bo'lgan kinetik energiyalaridan tashkil topgan ekan.

Sistemaning harakat qonunlarini o'rghanishda Lagranj funksiyasi bilan bir qatorda Gamilton funksiyasidan ham foydalaniadi. Konservativ sistemalar uchun Gamilton funksiyasi energiyaga teng. Odatda, Gamilton funksiyasi impuls orqali yoziladi. Shuning uchun (2.9) yoki (2.10) ifodalardan tezlikni impuls orqali ifodalaymiz:

$$v^2 = \frac{p^2 c^2}{m^2 c^2 + p^2}. \quad (2.13)$$

Bu ifodani (2.11) ga qo'yib Gamilton funksiyasi uchun quyidagi ifodani topamiz:

$$\mathcal{H} = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (2.14)$$

Zarrachaning tezligi yorug'lik tezligidan juda kichik bo'lganda (2.10) va (2.11) klassik mexanikadagi impuls va energiya ifodasiga o'tishi kerak. Haqiqatan ham  $c \rightarrow \infty$  da bu ifodalar quyidagi ko'rinishni qabul qiladi:

$$\mathbf{p} = mv, \quad (2.15)$$

$$\mathcal{E} = mc^2 + \frac{mv^2}{2}. \quad (2.16)$$

Bu yerda (2.15) klassik zarrachaning impulsiga teng, (2.16) esa klassik zarrachaning kinetik energiyasidan  $mc^2$  bilan farq qiladi. Bu yana bir marta relyativistik zarrachaning energiyasi ikki qismdan iborat ekanligini ko'rsatadi.

Shu vaqtgacha bitta zarrachani ko'rish bilan chegaralanib keldik. Ammo uning elementarligi (ichki tuzilishi) to'g'risida gapirganimiz yo'q. Shu sababli yuqoridaq barcha gaplar zarrachalar sistemasi uchun ham o'rinni bo'ladi. Faqat bu holda tezlik zarrachalar sistemasining bir butun harakat tezligi va massasi esa to'liq massaga teng deb olishimiz kerak. Nisbiylik nazariyasida erkin jism energiyasi, klassik fizikadagidan farqli ravishda aniq qiymatga ega va musbat bo'ladi. Klassik fizikada energiya uchun hisob boshi ixtiyoriy bo'lganligi sababli u musbat yoki manfiy bo'lishi mumkin edi.

Relyativistik erkin zarracha impulsi va energiyasi orasidagi bog'lanishni (2.10)–(2.11) ifodalarga asosan quyidagi ko'rinishda yozildi:

$$p = \frac{\mathcal{E}v}{c^2}. \quad (2.17)$$

Zarrachaning tezligi  $v \rightarrow c$  da (2.10)–(2.11) ga asosan uning impulsi va energiyasi cheksizga intiladi. Ammo (2.17) bog'lanish bu holda ham ma'noga ega bo'ladi. Masalan, yorug'lik tezligi bilan harakatlanuvchi massasi nolga teng bo'lgan zarrachalar (foton) uchun (2.17) quyidagi ko'rinishga o'tadi:

$$p = \frac{\mathcal{E}}{c}. \quad (2.18)$$

Massasi noldan farqli bo'lgan jism yorug'lik tezligiga juda yaqin tezlik bilan harakatlanayotgan (*ultrarelyativistik*) zarrachalar uchun ham (2.18) taqriban to'g'ri bo'ladi. Chunki, bu holda uning tinch holatdagi energiyasi harakat bilan bog'liq bo'lgan energiyadan juda kichik bo'ladi.

Variatsion prinsip orqali zarrachaning energiya va impulsini to'rt o'lchovli ko'rinishda aniqlaymiz. Buning uchun ta'sir integrali (2.7) ni variatsiyalashda  $ds = \sqrt{dx_i dx_i}$ ,  $\delta(ds) = \frac{dx_i}{ds} \delta(dx^i)$  hisobga olamiz:

$$\delta S = -mc \int_a^b \frac{dx_i}{ds} \delta(dx^i) = -mc \int_a^b \frac{dx_i}{c d\tau} d(\delta x^i) = -m \int_a^b u_i \delta(dx^i). \quad (2.19)$$

Bu yerda  $u_i$  4-tezlik. (2.19) ni bo'laklab integrallaymiz:

$$\delta S = -mu_i \delta x^i \Big|_a^b + m \int_a^b \frac{du_i}{ds} \delta x^i \, ds = 0. \quad (2.20)$$

Eng qisqa ta'sir prinsipiaga asosan zarraning boshlang'ich va oxirgi nuqtalardagi holati o'zgarmas bo'lgan ( $\delta x^i(a) = \delta x^i(b) = 0$ ) trayektoriyalar solishtiriladi. Bunga asosan (2.20) dagi birinchi had nolga teng. Demak, variatsiya nolga teng bo'lishi uchun

$$m \frac{du_i}{ds} = 0. \quad (2.21)$$

Bundan erkin zarrachaning tezligi to'rt o'lchovli ko'rinishda ham o'zgarmas ekanligi kelib chiqdi. (2.21) erkin zarrachaning harakat tenglamasining to'rt o'lchovli ko'rinishini beradi.

Energiya va impulsni to'rt o'lchovli ko'rinishda yozish uchun (2.20) da masalan, yuqori chegarada  $\delta x^i$  nolga teng emas deb olamiz. Bu holda ta'sir integralining variatsiyasi nolga teng bo'lmadan koordinataning funksiyasi bo'lib qoladi:

$$\delta S = -mu_i \delta x^i \Big|_a^b = -mu_i \delta x^i. \quad (2.22)$$

Bu yerda yuqori chegara o'zgaruvchi bo'lganligi uchun, natija  $b$  nuqtaga tegishli ekanligini yozish shart emas.

Ta'sir integrali singari uning variatsiyasi ham invariant - skalyar kattalik bo'lganligi uchun (2.22) ifodaning o'ng tomoni ham skalyar bo'lishi kerak, ya'ni ikki 4-vektorning skalyar ko'paytmasiga teng bo'lishi kerak.  $\delta x^i$  4-vektor bo'lganligi uchun

$$p^i = mu^i \quad (2.23)$$

ham to'rt o'lchovli vektor bo'ladi. (1.59)-(1.62) va (2.11) ifodalarni inobatga olsak, bu vektorning vaqt komponentasi energiyani yorug'lik tezligiga nisbatiga, qolgan uchtasi esa uch o'lchovli impulsiga teng ekanligini aniqlaymiz.  $p^i$  kontravariant 4-impuls deyladi:

$$p^i = \left( \frac{\mathcal{E}}{c}, p \right). \quad (2.24)$$

Shunday qilib, relyativistik mexanikada zarrachaning energiyasi va impulsi bitta 4-vektorning komponentalari ekan. To'rt o'lchovli fazoda aniqlangan har qanday 4-vektor uchun yozilgan (1.49) Lorentz almashtirishlariga asosan energiya va impuls uchun almashtirish formulalarini yozamiz:

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}' + V p'_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad p_x = \frac{p'_x + \frac{V}{c^2} \mathcal{E}'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z. \quad (2.25)$$

Erkin zarracha 4-impulsining kvadrati  $p^i p_i = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2$  invariant kattalikdir.

Kuchning oddiy ta'rifiga o'xshash 4-kuch vektorini kiritamiz:

$$\mathcal{F}^i = \frac{dp^i}{d\tau} = m \frac{du^i}{d\tau} = mw^i. \quad (2.26)$$

Bu yerda  $w^i$  4-tezlanish vektori. (1.65) - (1.68) formulalardan foydalanib 4-kuch vektorining komponentalarini yozamiz:

$$\mathcal{F}^0 = \frac{1}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{\mathbf{F}\mathbf{v}}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2.27)$$

$$\mathcal{F}^1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dp_x}{dt} = \frac{F_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2.28)$$

$$\mathcal{F}^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dp_y}{dt} = \frac{F_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2.29)$$

$$\mathcal{F}^3 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dp_z}{dt} = \frac{F_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.30)$$

Bu vektorning vaqt komponentasi (2.27) kuchning bajargan ishi bilan bog'liq.  $\mathbf{F} = dp/dt$  oddiy uch o'lchovli kuch. 4-kuchning komponentalarini birlashtirib yozish mimkin:

$$\mathcal{F}^i = \left( \frac{\mathbf{F}\mathbf{v}}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad (2.31)$$

Kuch masalasi ustida yana to'xtalib o'tamiz. Relyativistik impuls ifodasi (2.10) tezlikning moduliga va yo'nalishiga bog'liq bo'lganligi

uchun kuch ham ikki qismdan iborat bo'ladi. Tezlik faqat yo'nalishi bo'yicha o'zgaradi deb faraz qilamiz. Bu holda kuch

$$f_1 = \frac{dp}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dv}{dt}. \quad (2.32)$$

Tezlikning faqat kattaligi o'zgarayotgan bo'lsa, kuch

$$f_2 = \frac{dp}{dt} = \frac{m}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3}} \frac{dv}{dt}. \quad (2.33)$$

Agar tezlikning ham yo'nalishi, ham kattaligi vaqtga bog'liq bo'lsa, kuch quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{aligned} f &= \frac{d}{dt} \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{c^2} \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ &= \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{c^2} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{c^2} (fv). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Bu yerda (2.11) va (2.27) ifodalarni inobatga oldik. (2.34) ifodadan foydalanib klassik ma'nodagi tezlanish  $\mathbf{a} = dv/dt$  ni kuch orqali ifodalash mumkin:

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left( f - \frac{v}{c^2} (fv) \right). \quad (2.35)$$

Agar  $v \ll c$  bo'lsa,  $f_1 = f_2 = F = dp/dt$ ,  $\mathbf{a} = F/m$ .

### 2.3 Zarrachalar sistemasining mexanikasi

Shu vaqtga qadar bitta zarracha masalasini ko'rib chiqish bilan cheklandik. O'zaro ta'sirlashuvchi elementar zarrachalardan tashkil topgan relyativistik sistema uchun mexanika qonunlarini o'rganish juda murakkabdir. Ammo, ba'zi sodda hollarda zarrachalar sistemasi uchun bir qator umumiy qonunlarni aniqlash mumkin.

Masalan, zarrachalar sistemasida sodir bo'ladigan ichki jarayonlarni va uning fazoviy o'lchamlarini e'tiborga olmasdan bir butun holdagi harakatini o'rghanish mumkin. Bunda sistemani bitta zarracha bilan almashtirish kerak bo'ladi. Bu holda (2.17) va (2.12) kabi sistemaning energiyasi  $\mathcal{E}$ , impulsi  $\mathbf{P}$  va  $M$  massasi orasidagi bog'lanishlarni yozish mumkin:

$$\mathbf{P} = \frac{\mathcal{E} \mathbf{V}}{c^2}, \quad \mathcal{E} = Mc^2. \quad (2.36)$$

Bu yerda  $V$  sistemaning bir butun holdagi harakat tezligi.

Umumiy holda zarrachalar sistemasining energiya va impulsini alohida olingan zarrachalarning mos kattaliklari orqali yoki energiya va impuls orasidagi umumiy munosabatni aniqlab bo'lmaydi. Bu yerda asosiy muammo zarrachalarning o'zaro ta'sir energiyasini hisobga olish bilan bog'liqdir. Shu sababli ushbu kitobda zarrachalar sistemasining harakatini:

1. O'zaro ta'sirlashmaydigan relyativistik zarrachalar sistemasi;
2. Bir biridan yetarlicha katta masofalardagi relyativistik zarrachalar sistemasi;
3. Kuchsiz elektromagnit maydon ta'sirida bo'lgan zarrachalar sistemasi kabi sodda modellar misolida o'rghanamiz.

*O'zaro ta'sirlashmaydigan zarrachalar sistemasi* uchun energiya va impuls additivlik xossasiga ega:

$$\mathcal{E} = \sum_{a=1}^N \mathcal{E}_a = \sum_{a=1}^N \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}}, \quad (2.37)$$

$$\mathbf{P} = \sum_{a=1}^N \mathbf{p}_a = \sum_{a=1}^N \frac{m_a \mathbf{v}_a}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}}. \quad (2.38)$$

Bu yerda  $a$ -zarrachalarga tegishli indeks,  $N$  zarrachalar soni. Zarrachalar o'zaro va tashqi maydon bilan ta'sirlashmaganligi uchun har bir zarrachaning tezligi o'zgarmas bo'ladi. Bundan har bir zarracha va sistemaning energiya va impulsi o'zgarmas bog'lishi kelib chiqadi

Sistema energiyasi va impulsi ifodalaridagi har bir had alohida olingan zarrachaning energiya va impulsi 4-vektorni tashkil qiladi. 4-vektorlarning yig'indisi yana 4-vektorni hosil qilishini hisobga olsak,

sistemaning to'liq 4-impulsini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$P^i = \sum_{a=1}^N p_a^i. \quad (2.39)$$

Bu yerda  $p_a^i$  va  $P^i$  mos ravishda alohida olingan zarracha va zarrachalar sistemasining 4-impulsi.

Sistema 4-impulsining o'z – o'ziga skalyar ko'paytiramiz:

$$P^i P_i = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \mathbf{P}^2 = M^2 c^2. \quad (2.40)$$

Bu kattalik birinchidan, invariant, ikkinchidan sistema berk bo'lganligi uchun uning ichki tarkibiga bog'liq bo'lmaydi. Shuning uchun berk sistemadagi zarrachalarning o'zaro ta'sirlashishlari bu kattalikka ta'sir qilmaydi. Ya'ni

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \mathbf{P}^2 = \frac{(\mathcal{E}^*)^2}{c^2} - (\mathbf{P}^*)^2 = M^2 c^2. \quad (2.41)$$

Bu yerda  $\mathcal{E}$ ,  $\mathbf{P}$  va  $\mathcal{E}^*$ ,  $\mathbf{P}^*$  mos ravishda sistemada zarrachalarning to'qnashishiga qadar va to'qnashgandan keyingi energiya hamda impulsi.

Relyativistik zarrachalar mexanikasiga xos bo'lgan yana bir masala ni ko'rib chiqamiz. Zarrachalar sistemasining qandaydir  $K$  sanoq sistemasida impulsi  $\mathbf{P}$  va energiyasi  $\mathcal{E}$  bo'lsin. Shunday sanoq sistemasini ko'rsatish mumkinki, unda zarrachalar sistemasining impulsi nolga teng bo'lsin. Buni shartli ravishda "*inersiya markazi*" yoki qisqacha im-sanoq sistema deb ataladi.  $K$  sanoq sistemaga nisbatan uning tezligi  $V^{(i.m)}$  bo'lsin. Soddalik uchun bu tezlikning yo'naliishi  $K$  sistemaning  $X$  o'qiga parallel deb olinadi. Bu holda 4-impuls komponentalari uchun Lorentz almashtirishlari quyidagicha yoziladi:

$$\mathcal{E}^{(i.m)} = \frac{\mathcal{E} - V^{(i.m)} P_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (2.42)$$

$$P_x^{(i.m)} = 0 = \frac{P_x - \frac{V^{(i.m)}}{c^2} \mathcal{E}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (2.43)$$

$$P_y^{(i.m)} = P_y = 0, \quad P_z^{(i.m)} = P_z = 0. \quad (2.44)$$

Bu yerda  $\beta = V^{(i.m)}/c$ . Yuqoridagi almashtirish formulalarining ikkinchisidan

$$V^{(i.m)} = P_x c^2 / \mathcal{E} \quad (2.45)$$

kelib chqadi. Agar  $im$ -sanoq sistemaning tezligining yo‘nalishi  $K$  sistemaga nisbatan ixtiyorli bo‘lsa, (2.45) quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$V^{(i.m)} = P c^2 / \mathcal{E} \quad (2.46)$$

Nisbiylik nazariyasida klassik mexanikadan farqli o‘larоq inersiya markazi tezligini inersiya markazi radius-vektoridan vaqt bo‘yicha hosila ko‘rinishida yozish mumkin emas. Haqiqatan ham (2.46) ni hech qanday kattalikning vaqt bo‘yicha hosilasi ko‘rinishida yozib bo‘lmaydi.

(2.41) ifodani  $im$ -sanoq sistemasida yozib, yana bir muhim xulosaga kelamiz:

$$\left( \frac{\mathcal{E}^{(i.m)}}{c} \right)^2 - (P^{(i.m)})^2 = M^2 c^2 \quad (2.47)$$

Inersiya markazi sanoq sistemasida to‘liq impuls nolga teng bo‘lganligi uchun  $\mathcal{E}^{(i.m)} = Mc^2$ , ikkinchi tomondan  $\mathcal{E}^{(i.m)} = \sum \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - \beta_a^2}}$ . Bu ifodalarni taqqoslab

$$M = \sum \frac{m_a}{\sqrt{1 - \beta_a^2}} \quad (2.48)$$

hosil qilamiz. Bundan  $M \neq \sum m_a$ , ya’ni sistemaning to‘liq massasi alohida olingan zarrachalar massalarining yig‘indisiga teng emasligi kelib chiqadi. Shunday qilib, massa saqlanmaydigan kattalik ekan. Zarrachalar sistemasi to‘g‘risida jiddiy farazlar qilmasdan boshqa ma’lumotlarni olib bo‘lmaydi.

Klassik mexanikada yopiq sistemalarda vaqt va fazoning bir jinsligini aks ettiruvchi energiya va impulsning saqlanish qonuni bilan bir qatorda fazoning izotropligini aks ettiruvchi impuls momentining ham saqlanish qonuni mavjud. Impuls momenti vektor kattalik bo‘lib, quyidagicha aniqlanadi:

$$M = \sum_a [r_a p_a]. \quad (2.49)$$

Bu yerda  $r_a$  va  $p_a$  zarrachaning radius-vektori va impulsi. Yig‘indi sistemani tashkil qiluvchi barcha zarrachalar bo‘yicha hisoblanadi.

Nisbiylik nazariyasida impuls momenti tushunchasini kiritamiz. Buning uchun 4-fazoda koordinata o'qlarini cheksiz kichik burchakka buramiz. Zarrachalarning 4-fazodagi koordinatasining o'zgarishi<sup>1</sup>

$$x'^i - x^i = \delta x^i = x_k \delta \Psi^{ki}. \quad (2.50)$$

Bu yerda  $\delta \Psi^{ki} - i$  va  $k$  o'qlarning burilish "burchagini" aniqlovchi cheksiz kichik kattaliklar bo'lib, antisimetrik tenzorni tashkil qiladi. Oxirgi tasdiqni isbotlash uchun 4-radius-vektorning kvadrati o'qlarni burishga nisbatan invariant ekanligidan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} x^i x_i &= x'^i x'_i = (x^i + x_k \delta \Psi^{ki})(x_i + x^k \delta \Psi_{ki}) = \\ &x^i x_i + 2x_i x_k \delta \Psi^{ki} + x^k x_k \delta \Psi^{ki} \delta \Psi_{ki}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Bu yerda oxirgi had ikkinchi tartibli cheksiz kichik miqdor bo'lganligi uchun hisobga olmaymiz. Shunday qilib, (2.51) tenlik o'rinali bo'lishi uchun

$$x_i x_k \delta \Psi^{ki} = 0 \quad (2.52)$$

nolga teng bo'lishi kerak. Simmetrik tenzoring antisimetrik tenzorga ko'paytmasi doimo nolga tengligidan (1.6-masalaga qarang) va  $x_i x_k$  simmetrik tenzor bo'lganlidan  $\delta \Psi_{ki} = -\delta \Psi_{ik}$  antisimetrik tenzor ekanligi kelib chiqadi. Bu xossasi indekslardan birini ko'tarishda ham saqlanadi:  $\delta \Psi^k{}_i = -\delta \Psi_i{}^k$ . Shunday qilib, bu tenzoring 6 o'zaro bog'liq bo'limgan elementlari bo'lganligi uchun 4-fazoda o'qlarning oltita kombinatsiyasi bilan bog'langan burishlar bo'ladi:  $\{0,1; 0,2; 0,3\}$  - psevdo burilishlar va  $\{1,2; 1,3; 2,3\}$  - haqiqiy burilishlar<sup>2</sup>.

O'qlarni burishda ta'sir integralining o'zgarishi (2.22) ga asosan quyidagicha yoziladi:

$$\delta S = \sum p_i \delta x^i = \sum p_i x_k \delta \Psi^{ki} = \delta \Psi^{ki} \sum p_i x_k = \delta \Psi_{ki} \sum p^i x^k. \quad (2.53)$$

Bu yerda  $\delta \Psi_{ki}$  sistemadagi barcha zarrachalar uchun bir xil bo'lganligi sababli yig'indidan tashqariga chiqardik. Bu tenzoring antisimetrikligidan foydalansak, (2.53) ni ikkita antisimetrik tenzorlarning ko'paytmasi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\delta S = \frac{1}{2} \delta \Psi_{ki} \sum (p^i x^k - p^k x^i). \quad (2.54)$$

<sup>1</sup>To'rt o'lchovli kattaliklarda zarrachalarga tegishli indekslarni yozmaymiz. Bu indekslarni zarur bo'lganda uch o'lchovli kattaliklar uchun tiklaymiz.

<sup>2</sup>Maydonlarning kvant nazariyasida psevdo burilishlar ichki moment (spin) momenti, haqiqiy burilishlar esa orbital moment bilan bog'langanligini ko'rish mumkin.

Sistema zarrachalarining 4-radius-vektori va 4-impulsi orqali aniqlanuvchi antisimmetrik tenzor kiritamiz:

$$M^{ik} = \sum (p^i x^k - p^k x^i). \quad (2.55)$$

Bu 4-impuls momenti tenzori deb ataladi. Bu tenzorni komponentalarda yozib chiqamiz:

$$M^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & M_x & M_y & M_z \\ -M_x & 0 & M_z & -M_y \\ -M_y & -M_z & 0 & M_x \\ -M_z & M_y & -M_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

yoki shartli ravishda ikki vektoring to‘plami sifatida yozish mumkin:

$$M^{ik} = (\mathcal{M}, -\mathbf{M}). \quad (2.57)$$

Bu yerda  $\mathbf{M}$  – (2.49) formula bilan aniqlanadi va uch o‘lchovli fazoda zarrachalar sistemasining impuls momentini beradi.  $\mathcal{M}$  esa (2.55) ga asosan quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\mathcal{M} = c \sum_a \left( t \mathbf{p}_a - \frac{\mathbf{r}_a \mathcal{E}_a}{c^2} \right). \quad (2.58)$$

Bu ifodadan bevosita vaqt bo‘yicha hosila olib, saqlanuvchi kattalik ekanligini ko‘rish mumkin.

Berk sistemalarda to‘liq energiya saqlanishidan foydalanib (2.58) ifodanini quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$\frac{\sum r_a \mathcal{E}_a}{\sum \mathcal{E}_a} - c^2 t \frac{\sum \mathbf{p}_a}{\sum \mathcal{E}_a} = \text{const}. \quad (2.59)$$

Bu yerga birinchi had

$$R = \frac{\sum r_a \mathcal{E}_a}{\sum \mathcal{E}_a}. \quad (2.60)$$

Birorta fizik kattalikning markazini aniqlash ta’rifiga asosan (2.60) sistemaning “energiya” markazini aniqlashi kerak, lekin bunday tushunchaning ma’nosi yo‘q. Boshqa tomondan zarrachalarning tezliklari yorug‘lik tezligidan juda kichik bo‘lganda  $\mathcal{E}_a \approx m_a c^2$  bo‘lganligi uchun bu ifoda klassik ma’noda inersiya markazi radius-vektoriga teng bo‘ladi.

Umuman olganda (2.60) ifoda bilan aniqlangan kattalik inersiya marmazi radius-vektorining relyativistik ta'rifi bo'ladi. Bu radius-vektor bilan aniqlangan nuqta

$$V = c^2 \frac{\sum p_a}{\sum \mathcal{E}_a} \quad (2.61)$$

o'zgarmas tezlik bilan harakat qiladi.

Yuqorida (51- betga qarang) ta'kidlaganimizdek (2.60) dan vaqt bo'yicha olingan hosila sistemaning inersiya markazining tezligiga teng bo'lmaydi. Bundan tashqari,  $\mathbf{R}$  hech qanday 4-vektorning komponentalari bo'la olmaydi. Shu sababli bir sanoq sistemasidan ikkinchisiga o'tganda uning o'zgarishi Lorentz almashtirishlari bilan aniqlanmaydi.

## 2.4 Relyativistik zarrachalarning parchalanishi

Zarrachalarning to'qnashish, sochilish va yemirilish masalalari elementar zarrachalar fizikasida, qattiq jism fizikasida, plazmada va boshqa bir qator masalalarda muhim ahamiyatga ega. Bu yerda yuqoridagi masalalarni klassik nuqtai nazardan o'rjanamiz.

Birinchi navbatda zarrachalarning tashqi ta'sirsiz o'z-o'zidan (spontan) parchalanish masalasini ko'rib chiqamiz. Zarrachalarning o'z - o'zidan parchalanishi mikro dunyoga xos bo'lib klassik fizikada kuza-tilmaydi. Bu hodisa kvant mexanika qonunlari o'rinli bo'lgan mikro dunyoda, ya'ni elementar zarrachalar yadro fizikasida muhim ahamiyat kasb etadi. Bu masala va keyingi mavzuda ko'rib chiqiladigan relyativistik zarrachalarning elastik to'qnashishi masalasi mikro dunyo qonunlari asosida kvant fizikada to'la o'rjaniladi. Bu yerda relyativistik zarracha qandaydir sabab bilan o'z - o'zidan parchalanadi deb faraz qilamiz va bu masalani klassik mexanika doirasida ko'rib chiqamiz. Bu o'z navbatida ushbu masalani kvant mexanikada o'rjanishga zamin yaratadi.

Boshlang'ich vaqtida tinch turgan massasi  $M$  bo'lgan zarracha o'z-o'zidan massalari  $m_1$  va  $m_2$  bo'lgan ikkita zarrachaga parchalansin. Bu jarayon uchun energiya va impulsning saqlanish qonunlarini yozamiz:

$$Mc^2 = \mathcal{E}_{10} + \mathcal{E}_{20}, \quad \mathbf{p}_{10} + \mathbf{p}_{20} = 0. \quad (2.62)$$

Bu yerda  $\mathcal{E}_{10}$ ,  $\mathbf{p}_{10}$  va  $\mathcal{E}_{20}$ ,  $\mathbf{p}_{20}$  parchalanish natijasida hosil bo'lgan zarrachalarning energiya va impulsları.  $\mathcal{E}_{i0}$  zarrachaning tinch holatdagi

va kinetik energiyalardan tashkil topganligini va kinetik energiya noldan katta ekanligini hisobga olsak,

$$\mathcal{E}_{10} > m_1 c^2, \quad \mathcal{E}_{20} > m_2 c^2. \quad (2.63)$$

Bu ifoda va energiyaning saqlanish qonunidan

$$M > m_1 + m_2 \quad (2.64)$$

ekanligi kelib chiqadi. Shunday qilib, zarracha o'z-o'zidan parchalanishi uchun (2.64) shart bajarilishi kerak ekan. Aks holda ushbu parchalanishga nisbatan boshlang'ich zarracha barqaror bo'ladi. Bu holda zarracha parchalanishi uchun tashqaridan unga ta'sir qilish kerak. Bu misolda massa saqlanmaydigan kattalik ekanligiga yana bir marta ishonch yosil qildik. Bu holat ikki zarrachaning birlashish (sintez reaksiysi) jarayonlarida ham o'rinni bo'ladi.

Hosilaviy zarrachalarning impuls va energiyalari uchun quyidagi tengliklarni yozamiz:

$$p_{10}^2 = p_{20}^2, \quad \mathcal{E}_{10}^2 = p_{10}^2 c^2 + m_1^2 c^4, \quad \mathcal{E}_{20}^2 = p_{10}^2 c^2 + m_2^2 c^4. \quad (2.65)$$

Ushbu ifodalardan va (2.62) dan hosilaviy zarrachalarning energiyalarini massalar orqali aniqlaymiz:

$$\mathcal{E}_{10} = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} c^2, \quad \mathcal{E}_{20} = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M} c^2. \quad (2.66)$$

Yuqorida ta'kidlaganimizdek, zarrachaning parchalanishi yadro fizikasida muhim ahamiyat kasb etadi. Shuning uchun olingan umumiy natijalarni yadrolarning barqarorlik shartini klassik nuqtai nazardan topishga tatbiq qilamiz. Protonlar soni  $Z$ , neytronlar soni  $A - Z$  ( $Z$  - atom nomeri,  $A$  - massa yoki nuklonlar soni) bo'lgan yadroni ko'rib chiqamiz. Yadroda proton va neytronlar katta kinetik energiyaga ega, ammo ular orasidagi kuchli tortishish (yadro) kuchlari yadroning barqarorligini ta'minlaydi. Shunday yadrolar mavjudki, ular o'z-o'zidan parchalanadi. Bunday yadrolar radioaktiv deyiladi. Yadroning tinch holatdagi energiyasi ( $Mc^2$ ) uni tashkil qilgan zarchalarning tinch holatdagi energiyasi  $\sum m_a c^2$  va ichki harakat energiyalarining yig'indisidan iborat bo'ladi. Yadro barqaror bo'lishi uchun

$$Mc^2 < \sum m_a c^2 \quad (2.67)$$

shart bajarilishi kerak.

$$\Delta mc^2 = \sum m_a c^2 - Mc^2 \quad (2.68)$$

bog'lanish energiyasi deyiladi. Agar bog'lanish energiyasi musbat bo'lsa, yadro barqaror bo'ladi. Aks holda yadro barqaror bo'lmaydi va u o'z-o'zidan bo'laklarga parchalanib ketadi.

Bog'lanish energiyasi bilan bir qatorda yadroning barqarorlik shartini defekt massa

$$\Delta m = \sum m_a - M \quad (2.69)$$

orqali ham aniqlash mumkin. Defekt massa musbat bo'lganda yadro barqaror bo'ladi, manfiy bo'lsa, yadro barqaror bo'lmaydi.

Biz yadrolarning barqarorligini klassik fizika nuqtai nazaridan ko'rib chiqdik. Umuman olganda, yadroning barqarorligini aniqlash uchun yuqorida olingan shartlar yetarli emas. Bu masala ancha murakkab bo'lib, kvant fizikada u o'zining yechimini topadi.

Zarrachalarning o'z - oz'idan parchalanishidan tashqari boshqa jarayonlar ham mavjud. Bunday jarayonlarga zarrachalarning ichki holatini o'zgarishiga olib keluvchi noelastik to'qnashishlar misol bo'la oladi. Bunday jarayonlarda yangi zarrachalar tug'ilishi (parchalanish reaksiyasi) yoki bir nechta boshlang'ich zarrachalar qo'shilishi (sintez reaksiyasi) mumkin.

Laboratoriya sistemasida massasi  $m_1$  va energiyasi  $\mathcal{E}_1$  bo'lgan birinchi zarracha tinch turgan  $m_2$  massali zarracha bilan to'qnashish masalasini ko'rib chiqamiz. Zarrachalarning boshlang'ich momentdagi to'liq energiyasi  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 + m_2 c^2$ , to'liq impulsi esa  $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1$  ifodalar bilan aniqlanadi. Ikkala zarrachani bir butun murakkab sistema deb qaraymiz. Ma'lumki, bunday sistemaning tezligi (2.61) ifoda bilan aniqlanadi:

$$V = \frac{c\mathbf{P}}{\mathcal{E}} = \frac{cp_1}{\mathcal{E}_1 + m_2 c^2}. \quad (2.70)$$

Bu kattalik to'qnashuvchi ikkita zarracha inersiya markazining  $l$ - sistemaga nisbatan tezligiga teng.

Sistemaning umumiy massasini (2.47) ifoda yordamida topamiz:

$$M^2 = \frac{1}{c^4} (\mathcal{E}_1 + m_2 c^2)^2 - \frac{(\mathcal{E}_1^2 - m_1^2 c^4)}{c^4} = m_1^2 + m_2^2 + \frac{2m_2 \mathcal{E}_1}{c^2} > m_1^2 + m_2^2. \quad (2.71)$$

Bu yerda massani qaysi sanoq sistemada turib hisoblashning farqi yo'qligidan foydalandik. Sistemaning massasi alohida olingan zarrachalar massalarining yig'indisidan katta ekan. Demak, bunday sistema bar-qaror bo'lmaydi. Haqiqatan ham bu ikkita zarrachani bir butun sistema deb qaraganimiz bilan to'qnashuvdan yetarlicha oldingi va keyingi vaqtlarda ular bir-biri bilan ta'sirlashmaydigan erkin zarrachalardir.

## 2.5 Relyativistik zarrachalarning elastik to‘qnashishi

Klassik fizika doirasida ikki zarrachaning elastik to‘qnashish masalasini ko‘rib chiqamiz. Zarrachalarning massalari  $m_1$  va  $m_2$  bo‘lsin. Ularning energiya va impulsini to‘qnashishgacha  $p_1, \mathcal{E}_1, p_2, \mathcal{E}_2$  va to‘qnashishdan keyin  $p'_1, \mathcal{E}'_1, p'_2, \mathcal{E}'_2$  bilan belgilaymiz.

Bu jarayon uchun energiya va impulsning saqlanish qonunlari to'rt o'lchovli ko'rinishda quyidagicha yoziladi:

$$p_1^i + p_2^i = p_1'^i + p_2'^i. \quad (2.72)$$

yoki uch o'lchovli ko'rinishda quyidagicha yozish mumkin:

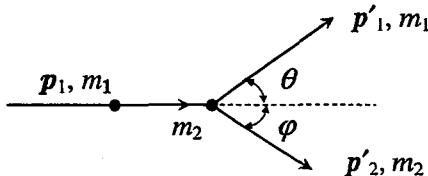
$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2, \quad (2.73)$$

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2. \quad (2.74)$$

Energiya va impulsning saqlanish qonunlari to‘qnashish jarayonini ifodalovchi barcha kattaliklarni topish uchun yetarli.

*l*-sistemada uchib kelayotgan bиринчи zarracha tinch turgan ik-kinchi zarracha ( $p_2 = 0$ ,  $\mathcal{E}_2 = m_2 c^2$ ) bilan to'qnashish masalasini ko'rib chiqamiz (2.1-rasm).

Ikkinchizarrachaning to'qna-shishdan keyingi energiyasini ikkala zarrachaning to'qnashishgacha bo'l-gan energiyalari va uning to'qnash-gandan keyingi uchish burchagi  $\varphi$  orqali topamiz. Buning uchun avval yordamchi ifodalarni hosil qilamiz. Saqlanish qonuni (2.72) ni quyidagi ko'rinishlarda yozib olamiz:



2.1-rasm: Ikki zarrachaning elastik to'qnashish diagrammasi.

$$p_1'^i = p_1^i + p_2^i + p_2'^i. \quad (2.75)$$

Bu 4-vektorni o'z - o'ziga skalyar ko'paytiramiz. Bunda

$$p_1^i p_{1i} = p_1'^i p_{1i}' = m_1 c^2, \quad p_2^i p_{2i} = p_2'^i p_{2i}' = m_2 c^2,$$

$$p_1^i p_{2i} = \frac{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}{c^2} - p_1 p_2 = \mathcal{E}_1 m_2, \quad p_2^i p_{2i}' = \frac{\mathcal{E}_2 \mathcal{E}_2'}{c^2} - p_2 p_2' = \mathcal{E}_2' m_2,$$

$$p_1^i p_{2i}' = \frac{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2'}{c^2} - p_1 p_2' = \frac{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2'}{c^2} - p_1 p_2' \cos \varphi,$$

ekanligini inobatga olib quyidagini hosil qilamiz:

$$-(\mathcal{E}_1 + m_2 c^2)(\mathcal{E}_2' - m_2 c^2) + c^2 p_1 p_2' \cos \varphi = 0. \quad (2.76)$$

Bu yerda impuls modullarini energiya va massalar orqali yozamiz:

$$p_1 c = \frac{1}{c} \sqrt{\mathcal{E}_1^2 - m_1^2 c^4}, \quad p_2' c = \frac{1}{c} \sqrt{\mathcal{E}_2'^2 - m_2^2 c^4}.$$

Bu ifodalarni (2.76) ga qo'yamiz va hosil bo'lgan tenglamani  $\mathcal{E}_2'$  ga nisbatan yechib quyidagini olamiz:

$$\Delta \mathcal{E}_2' = \frac{2m_2 c^2 (\mathcal{E}_1^2 - m_1^2 c^4) \cos^2 \varphi}{(\mathcal{E}_1 + m_2 c^2)^2 - (\mathcal{E}_1^2 - m_1^2 c^4) \cos^2 \varphi}. \quad (2.77)$$

Bu yerda  $\Delta \mathcal{E}_2' = \mathcal{E}_2' - m_2 c^2$  ikkinchi zarrachaning to'qnashish natijasida olgan energiyasi. Zarrachalarning pesh to'qnashishida, ya'ni  $\varphi = 0$  yoki  $\pi$  bo'lganda  $\Delta \mathcal{E}_2'$  maksimumga erishadi. Bu hol uchun (2.77) ifodani birinchi zarrachaning impulsi orqali yozamiz:

$$(\Delta \mathcal{E}_2')^{max} = \frac{2p_1^2 c^2}{\left( \sqrt{p_1^2 c^2 + m_1^2 c^4} + m_2 c^2 \right)^2 - p_1^2 c^2} m_2 c^2. \quad (2.78)$$

Shunga o'xshash  $\mathcal{E}_1'$  uchun ifodani topish mumkin. Bu ifoda juda katta bo'lganligi uchun bu yerda keltirmaymiz.

Endi olingan natijalarni xususiy hollarda ko'rib chiqamiz:

1. Uchib kelayotgan birinchi zarracha og'ir, tinch turgan ikkinchi zarracha esa yengil bo'lsin. Bundan tashqari, tushayotgan zarrachaning tezligi g'oyatda katta bo'lsin. Ya'ni  $m_1 \gg m_2$  va  $p_1 c \gg m_1 c^2$ . Bu holda (2.78) dan quyidagini hosil qilamiz:

$$(\Delta \mathcal{E}_2')^{max} = \frac{2p_1^2}{2m_2 c p_1 + m_1^2 c^2} m_2 c^2. \quad (2.79)$$

Tushayotgan zarrachaning impulsi g'oyatda katta ekanligini (2.79) da inobatga olsak, ya'ni  $p_1 \gg \frac{m_1^2 c^2}{m_2 c} = \frac{m_1}{m_2} m_1 c$  shart bajarilsa, ikkinchi zarrachaga berilgan maksimal energiya birinchi zarrachaning energiyasi ga taxminan teng bo'ladi:

$$(\Delta\mathcal{E}'_2)^{\max} \approx p_1 c. \quad (2.80)$$

2. Uchib kelayotgan birinchi zarracha yengil, tinch turgan ikkinchi zarracha esa og'ir bo'lsin. Bundan tashqari, tushayotgan zarrachaning tezligi g'oyatda katta bo'lsin. Ya'ni  $m_2 \gg m_1$  va  $p_1 c \gg m_1 c^2$ . Bu holda (2.78) dan quyidagini olamiz:

$$(\Delta\mathcal{E}'_2)^{\max} = \frac{2p_1^2}{2m_2 c p_1 + m_2^2 c^2} m_2 c^2. \quad (2.81)$$

Agar  $p_1 c \gg m_2 c^2$  o'rini ekanligini hisobga olsak:

$$(\Delta\mathcal{E}'_2)^{\max} \approx p_1 c. \quad (2.82)$$

Yuqoridagi natijalardan, relyativistik mexanikada katta impulsiga ega bo'lgan zarrachalarning elastik sochilish qonunlari norelyativistik mexanikadagidan jiddiy farq qilishini ko'rish mumkin. Tushayotgan zarrachaning impulsi juda katta bo'lganda massalar nisbati qanday bo'lishidan qat'iy nazar tushayotgan zarrachaning energiyasi boshlang'ich vaqtida tinch turgan zarrachaga butunlay uzatiladi. Norelyativistik mexanikada esa bunday jarayonda energiyaning kichik qismi uzatilishini eslatib o'tamiz.

Yuqoridagi kabi boshqa xususiy hollarni ham ko'rib chiqish mumkin. Xusan,  $p_1 c \ll m_1 c^2$  va  $p_2 c \ll m_2 c^2$  bo'lgan hol uchun (2.78) formuladan ikkinchi zarrachaga uzatilgan energiya norelyativistik mexanikadagi bilan bir xil ekanligini aniqlaymiz:

$$(\Delta\mathcal{E}'_2)^{\max} \approx 4\mu\mathcal{E}_1. \quad (2.83)$$

Bu yerda  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  keltirilgan massa.

3. Olingan natijalarni foton uchun tatbiq etamiz. Bu holda uchib kelayotgan zarrachaning massasi nolga teng va uning boshlang'ich energiyasi  $\mathcal{E} = p_1 c$ . Ikkinci zarracha olgan energiyani topish uchun (2.78)

ifodada  $m_1 = 0$  deb olish kifoyadir. Birinchi zarrachaning to'qnashgandan keyingi energiyasi bu holda sodda ko'rinish oladi:

$$\mathcal{E}'_1 = \frac{p_1 c}{p_1 c(1 - \cos \theta_1) + m_2 c^2} m_2 c^2. \quad (2.84)$$

Sochilishning umumiy nazariyasini *im*-sanoq sistemasida ko'rib chiqamiz. Bu holda har ikkala zarrachaning impulslari kattalik jihatidan teng va qarama-qarshi yo'nalgan bo'ladi, ya'ni  $p_{10} = -p_{20} = p_0$ . Bu yerda indekc "0" kattaliklar *im*-sanoq sistemasiga tegishli ekanligini ko'rsatadi. Energiya va impulsning saqlanish qonunlariga ko'ra zarrachalar to'qnashgandan keyin impulsarning modullari o'zgarmaydi, faqat yo'nalichlari o'zgaradi. To'qnashgandan keyin impulsarning buriish burchagi  $\chi$  sochilish burchagi deyiladi. Bu burchak sochilish nazariyasida muhim rol o'ynaydi va sochilishni to'liq aniqlab beradi.

Inersiya markazi sanoq sistemasida zarrachalarning sochilgandan keyingi energiyalarini sochilish burchagi orqali topamiz. Buning uchun saqlanish qonuni (2.72) ni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$p_2'^i = p_2^i + p_1^i - p_1'^i. \quad (2.85)$$

Ushbu 4-vektorning kvadratga oshiramiz. Bunda har bir had ikki 4-vektorlarning skalyar ko'paytmasi bo'lganligi uchun invariant bo'ladi. Shu sababli uni qaysi sanoq sistemada ochining farqi y'oq.  $p_1^i p_1'^i$  ni *im*-sistemada, qolganlarini *l*-sitemada ochamiz. Bir qator sodda amallarni bajarib, sochilgandan keyin zarrachalar energiyasining o'zgarishi uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$\Delta \mathcal{E}'_2 = -\Delta \mathcal{E}'_1 = \frac{m_2(\mathcal{E}_1^2 - m_1^2 c^4)}{m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2m_2 \mathcal{E}_1} (1 - \cos \chi). \quad (2.86)$$

Bundan ko'rini turibdiki, shochilishda zarrachalar energiya almashishi  $\chi = \pi$  da maksimum bo'ladi:

$$\Delta \mathcal{E}'_{2 \ max} = -\Delta \mathcal{E}'_{1 \ min} = \frac{2m_2(\mathcal{E}_1^2 - m_1^2 c^4)}{m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2m_2 \mathcal{E}_1}. \quad (2.87)$$

Birinchi zarrachaning to'qnashishgacha va undan keyingi kinetik energiyalarining nisbati

$$\frac{\mathcal{E}'_{1 \ min} - m_1 c^2}{\mathcal{E}_1 - m_1 c^2} = \frac{(m_1 - m_2)^2 c^2}{m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2m_2 \mathcal{E}_1}. \quad (2.88)$$

Kinetik energiyalarning nisbati boshlang'ich energiyaga bog'liq ekan. Zarrachaning tezligi kichik bo'lsa, ( $\mathcal{E}_1 \approx m_1 c^2 + m_1 v^2/2$ ), (2.88) faqat massalarga bog'liq bo'lgan o'zgarmasga intiladi:  $\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2$ . Bu katalik klassik natija bilan mos tushadi.

Zarrachaning energiyasi katta bo'lganda ( $\mathcal{E}_1 \gg m_1 c^2$ ) (2.88) nisbat nolga intiladi. Bu holda energiya o'zgarmasga intilishini ko'rsatish mungkin:

$$\mathcal{E}'_1 = \frac{(m_1^2 + m_2^2)c^2}{2m_2}. \quad (2.89)$$

Natijalarni xususiy hollarda ko'rilsa, yuqoridagi natijalar tasdiqlanadi.

## 2.6 2-bobga oid masala va savollar

1. Relyativistik zarrachaning impulsini energiyasi orqali ifodalang.
2. Relyativistik zarrachaning tezligini impulsi orqali ifodalang.
3. Massasi  $m$  bo'lgan zarrachaning energiyasi  $\mathcal{E}$  ga teng. Shu zarrachaning tezligini toping. Norelyativistik va ultrarelyativistik hollarni alohida ko'rib chiqing.
4. Zarrachaning kinetik energiyasini tezlik va impuls orqali mos ravishda  $v^4/c^4$  va  $p^4/m^4c^4$  aniqlikda taqribiy ifodalang.
5. Elektronning energiyasi a) elektron lampada  $300\text{ eV}$ , b) sinxrotronda  $300\text{ MeV}$ , c) protonniki sinxrosiklotronda  $680\text{ MeV}$ , d) sinxrofazotronda  $1\text{ GeV}$  bo'lsa, bu zarrachalarning tezliklari nimaga teng?
6.  $K'$  sanoq sistema  $K$  sanoq sistemaga nisbatan  $V$  tezlik bilan harakatlanmoqda.  $m$  massali zarracha  $K'$  sistemada  $\mathcal{E}'$  energiyaga ega, uning tezligi  $v'$  esa  $V$  bilan  $\theta'$  burchak hosil qiladi.  $K$  sistemada zarrachaning impulsi va  $V$  orasidagi burchak  $\theta$  ni toping.  $K$  sistemada zarrachaning energiyasini  $\mathcal{E}'$ ,  $\theta'$  yoki  $v'$ ,  $\theta'$  orqali ifodalang. Xususan, ultrarelyativistik ( $\mathcal{E}' \gg mc^2$ ,  $V \approx c$ ) holni ko'ring. Burchaklar qanday shartni qanoatlantirganda  $\operatorname{tg} \theta' \approx [\operatorname{tg}(\theta/2)]/\gamma$  taqribiy formuladan foydalanish mumkin?
7. Ta'sir integrali (2.7) ni variatsiyalab erkin zarrachaning harakat tenglamasini keltirib chiqaring va natijani (2.20) bilan taqqoslang. Ta'sir integralida Lagranj funksiyasi (2.8) bilan aniqlangan.
8. Uch o'lchovli impulslar fazosida hajm elementi  $d^3p$  bir inersial sanoq sistemasidan ikkinchisiga o'tganda  $d^3p\mathcal{E}' = d^3p'\mathcal{E}$ . ko'rinishdagi qonuniyat bilan almashishini ko'rsating.
9. Laboratoriya sistemasida  $V(V||x)$  tezlik bilan harkatlanayotgan zarracha ikkita zarrachaga parchalanadi. Hosilaviy zarrachalarning harakat yo'nalishlari bilan  $V$  orasidagi burchaklarni ularning energiyalari orqali ifodalang.

10. 9-masalani ikkita  $\gamma$  kvantga parchalanuvchi  $\pi^0$  mezonga tatbiq qiling.
11. Qandaydirdir zarracha  $m_1, m_2$  massali zarrachalarga parchalanadi. Tajribadan hosil bo'lgan zarrachalar impulslarining kattaligi  $p_1, p_2$  va ularning harakat yo'nalishlari orasidagi burchak  $\theta$  ma'lum bo'lsin. Boshlang'ich zarrachaning massasini aniqlang. Natijani  $\pi \rightarrow \mu + \nu$  sxema bo'yicha parchalangan zaryadlangan  $\pi$ -mezon uchun tatbiq qiling.  $\pi$ -mezon parchalanishga qadar tinch turgan va parchalanishdan so'ng  $\mu$ -mezonning impulsi  $p_\mu = 29,8 \text{ MeV}$ .  $m_\mu = 105,7 \text{ MeV}$ ,  $m_\nu = 0$ .
12. Masasi  $m$  va impulsi  $p$  bo'lgan zarrachaning parchalanishi natijasida hosil bo'lgan ikki zarrachalardan birining massasi  $m_1$ , impulsi  $p_1$  va uchib chiqish burchagi  $\theta_1$  ma'lum bo'lsa, ikkinchi zarrachaning massasi nimaga teng bo'ladi?
13. Massasi  $m_1$  va tezligi  $v$  bo'lgan zarracha tinch turgan massasi  $m_2$  bo'lgan ikkinchi zarracha bilan to'qnashish natijasida yutiladi. Hosil bo'lgan zarrachaning massasini va tezligini toping.
14. Tinch turgan  $m_0$  massali zarracha  $m_1$  va  $m_2$  massali zarrachalarga parchalanadi. Hosil bo'lgan zarrachalarning kinetik energiyasini hisoblang.
15. Laboratoriya sanoq sistemasida tinch turgan  $M$  massali zarrachaga energiyasi  $\mathcal{E}$  va massasi  $m$  bo'lgan zarracha elastik uriladi. Laboratoriya sanoq sistemaga nisbatan zarrachalar sistemasining inersiya markazining tezligini toping.
16. Massasi  $m$  va kinetik energiyasi  $T_0$  bo'lgan zarracha tinch turgan xuddi shunday massali ikkinchi zarrachada sochiladi. Sochilgan zarrachaning kinetik energiyasi  $T_0$  ni va sochilish burchagi  $\theta_1$  orqali ifodalang.
17. Laboratoriya sanoq sistemasida  $m_1$  massali va  $\mathcal{E}_1$  energiyali zarracha tinch turgan  $m_2$  massali zarrachada elastik sochiladi.  $\theta$  va  $\varphi$  sochilish burchaklarini zarrachalarning energiyalari orqali yozing.
18. Laboratoriya sanoq sistemasida  $m_1$  massali va  $\mathcal{E}_1$  energiyali zarracha tinch turgan  $m_2$  massali zarrachada elastik sochiladi. Birinchi zarrachaning sochilgan keyingi energiyasini toping. (§2.5 qarang.)
19. Fazo va vaqt qanday xossalarga ega.
20. Erkin moddiy nuqta uchun ta'sir integrali qanday prinsiplarga asoslanib yoziladi?
21. Nisbiylik nazariyasida erkin moddiy nuqtaning ta'sir integralini yozing.
22. Nisbiylik nazariyasida erkin moddiy nuqtaning Lagranj funksiyasini yozing.
23. Qanday shart bajarilganda nisbiylik nazariyasidagi erkin moddiy nuqtaning Lagranj funksiyasi klassik mexanikadaagi ko'rinishni oladi.
24. Nisbiylik nazariyasida erkin moddiy nuqtaning energiyasi va impulsi ifodalarini yozing.  $v \ll c$  bolgan holni analiz qiliing.
25. 4-impuls vektori bir inersial sanoq sistemasidan ikkinchisiga o'tganda qanday formula bilan almasadi?

### 3-bob

## Elektromagnit maydondagi zaryad

### 3.1 Nisbiylik nazariyasida zaryad va zarrachalar

Zamonaviy tasavvurlarga ko'ra kichik energiyalarda zarrachalar ikki turga bo'linadi. Birinchi turdagilar ichki tarkibi namoyon bo'lmaydigan elektron, proton - elementar zarrachalar bo'lsa, ikkinchi turdagilari shu elementar zarrachalardan tashkil topgan murakkab sistemalar - atomlar, ionlar, molekulalar bo'lib, mikroskopik zarrachalar deyiladi. Har ikkala turdagizi zarrachalarni bundan keyin zarrachalar deb ataymiz. Juda katta sondagi zarrachalar to'plami makroskopik sistema deyiladi.

Zarrachalarning muhim xarakteristikalaridan biri ular orasidagi o'zaro ta'sirdir. Ular masofada turib bir birlari bilan ta'sirlashadi. Hozirgi vaqtida zarrachalar orasidagi o'zaro ta'sirning bir necha ko'rinishlari mavjud bo'lib, ular zarrachalarning ma'lum bir xarakteristikasi bilan bog'langan. Ushbu kitobda biz faqat elektromagnit ta'sir bilan bog'liq bo'lgan masalalarni o'rganamiz. Bu ta'sir zarrachalarning zaryad deb ataluvchi xarakteristikasi bilan bog'liq.

Zaryadning ikkita muhim xususiyati bor. Birinchisi, zaryadlangan barcha elementar zarrachalarning zaryadi absolyut qiymati birday bo'lib, ishorasi bilan farq qiladi. CGSE birliklar sistemasida  $e = 4.77 \times 10^{-10} g^{1/2} sm^{3/2} s^{-1}$ . Ikkinchisi, fundamental ahamiyatga ega bo'lgan zaryadning barcha hollarda saqlanish qonunidir. Bu qonun saqlanish qonunlari ichida eng fundamentali hisoblanadi. Mikroskopik elektrodinamikada zaryadlangan zarrachalar soni uncha katta bo'lmagan sistemalarning xossalari o'rganiladi.

Klassik mexanikadan ma'lumki, zarrachalarning ta'sirlashishi oniy vaqtidagi ular orasidagi masofaga bog'liq bo'lgan o'zaro ta'sir potensiali  $U(|r_2 - r_1|)$  bilan aniqlanadi. Maydon fizik hodisa - o'zaro ta'sirni o'rganishning bir vositasi hisoblangan. O'zaro ta'sirning uzatilish tezligi chekli bo'lganligi sababli nisbiylik nazariyasida holat tubdan o'zgaradi. Zarrachaga ta'sir etayotgan kuch uning shu vaqtidagi fazodagi

o'rni bilan aniqlanmaydi, chunki bir zarrachaning fazodagi holatining o'zgarishi ikkinchi zarrachada qandaydir chekli vaqtidan so'ng ma'lum bo'ladi. Bunga ko'ra bir-biridan ma'lum masofada turgan zarrachalar bevosita ta'sirlashmasdan fizik real maydon orqali ta'sirlashadi deb hisoblashimiz kerak. Maydon fizik reallikka aylanadi. Shunday qilib, zarrachalarning ta'sirlashishi quyidagicha amalga oshadi: Bir zaryadlangan zarracha o'z atrofida maydon hosil qiladi va maydon o'z navbatida ikkinchi zaryadlangan zarracha bilan ta'sirlashadi.

Klassik mexanika har qanday sharoitda deformatsiyalanmaydigan mutloq qattiq jism tushunchasini kiritish mumkin edi. Nisbiylik nazariyasida bunday tushunchani kiritib bo'lmaydi. Chunki turli sanoq sistemadagi kuzatuvchilar uchun jismning o'lchamlari turlicha bo'ladi. Shuning uchun nisbiylik nazariyasida mutloq qattiq jism tushunchasi faqat ko'rيلayotgan sanoq sistema uchun o'rinli bo'ladi. Boshqa sanoq sistemadagi kuzatuvchi uchun bu jism endi boshqa qattiq jismga o'tadi. Buni quyidagi misolda ko'rish mumkin.

Doiraviy diskning o'z o'qi atrofida aylanishini ko'rib chiqamiz. Uni mutloq qattiq jism deb faraz qilamiz. Disk bilan bog'langan sanoq sistema albatta inersial bo'lmaydi. Diskni faraziy kichik bo'laklarga ajratamiz. Har bir bo'lak uchun u bilan bog'langan sanoq sistemani kiritish mumkin. Bu sanoq sistemaga nisbatan diskning bo'lagi berilgan vaqt momentida tinch turgan bo'ladi. Bunga ko'ra diskning har bir bo'lagi bilan bog'langan sanoq sistema inersial bo'la oladi. Ammo ular bir-biridan farq qiladi. Diskning ma'lum bir radiusi bo'ylab joylashgan bo'laklarni kuzataylik. Bu bo'laklarning radial uzunliklari aylanayotgan va tinch turgan disk uchun bir xil bo'ladi. Chunki, bo'laklarning tezligi radiusga perpendikulyar bo'lganligi uchun radial yo'nalishida Lorentz qisqarishi bo'lmaydi. Shu vaqtida disk aylanasi bo'ylab joylashgan bo'laklarning aylana bo'ylab uzunliklari Lorentz qisqarishiga duchor bo'ladi. Disk markazidan turli masofalardagi aylanalar uzunliklarining mos radiuslarga nisbatlari turlicha bo'lib,  $2\pi$  ga teng bo'lmay qoladi. Boshqacha aytganda disk aylanish natijasida deformatsiyalanmoqda. Klassik mexanika nuqtai nazaridan u deformatsiyalanmasligi kerak edi. Yuqoridagi kabi bir qator misollarni keltirish mumkin. Bu misoldan ko'rinib turibdiki, maxsus nisbiylik nazariyasida mutloq qattiq jism tushunchasini kiritib bo'lmaydi. Shu sababli klassik nisbiylik nazariyasida real o'lchamga ega bo'lgan jism o'lchamsiz nuqta bilan almashtiriladi.

### 3.2 Elektromagnit maydondagi zaryad uchun ta'sir integrali

Tashqi elektromagnit maydonga kiritilgan zaryad uchun ta'sir integrali ikki qismdan iborat bo'ladi. Birinchisi, faqat zaryadga tegishli bo'lib (2.7) ifoda bilan aniqlanadi. Ikkinchisi esa maydonning zaryadga ta'sirini ifodalab, ularning xarakteristikalari bilan aniqlanadi. Bu yerda, zaryad va maydon bir sistemaning ikki tashkil etuvchilari bo'lib, zaryad hosil qiladigan maydon va tashqi maydonni hosil qilgan qandaydir zaryadlarning mavjudligi e'tiborga olinmaydi. Aks holda masala ancha murakkablashib ketadi. Biz qabul qilayotgan holat kuchsiz maydonlar va kichik zaryadlar uchun juda yaxshi yaqinlashish hisoblanadi. Buning to'g'riliгини nazariy va tajriba natijalarini umumlashtirish yo'li bilan olingan tenglamalar bir xil bo'lishini tasdiqlaydi.

Tajribalardan ma'lumki, elektromagnit maydonga kiritilgan zarra-cha elektr zaryad deb ataladigan bitta kattalik e bilan tafsiflanadi. Bu kattalik musbat, manfiy va hatto nolga teng bo'lishi mumkin. Maydon vektor xususiyatga ega bo'lganligi uchun koordinata va vaqtning funksiyasi bo'lgan 4-vektor bilan tafsiflanishi kerak. Bu vektor  $A_i$  bilan belgilanadi va 4-potensial deb ataladi. Ta'sir integrali skalyar, demak, integral ostida skalyar kattalik turishi kerak. 4-potensial  $A_i$  va bizga shu vaqtga qadar ma'lum bo'lgan yagona – 4-radius-vektor yordamida  $A_i dx^i$  ko'rinishdagi yagona skalyar kattalikni hosil qilish mumkin.<sup>1</sup> Yuqoridagi fikrlarni e'tiborga olib ta'sir integralini quyidagi-cha yozamiz:

$$S = -mc \int_a^b ds - \frac{e}{c} \int_a^b A_i dx^i. \quad (3.1)$$

Bu yerda ikkinchi hadda  $1/c$  ko'paytmaning yozilishi yuzaki qaraganda potensialning o'lchov birligi boshqa kattaliklar bilan mutanosib bo'lishi uchun kiritilgan deb tushinish mumkin. Bu maqsadda boshqa tezlikni ham yozish mumkin edi. Bu koeffitsient fundamental ma'noga ega ekan-

<sup>1</sup>Ta'sir integrali bunday ko'rinishda tanlash kuchsiz maydonlar uchun o'rinci bo'lib, harakat tenglamalarining chiziqli bo'lishini ta'minlab beradi. Kuchli maydonlar elektrodinamikasi zamonaviy fizikada mustaqil yo'nalish bo'lib, alohida o'rganishni talab qiladi. Bu mulohazani maydon uchun ta'sir integralini aniqlashda ham e'tiborga olamiz. Kitobning makroskopik elektrodinamika qismida kuchli maydonlar bilan bog'liq masala ustida qisqacha to'xtalib o'tamiz.

ligini - elektromagnit ta'sirning uzatilish tezligiga teng ekanligi keyinroq ochiladi. (3.1) ifodada integral  $a$  va  $b$  dunyo nuqtalaridan o'tuvchi va haqiqiy harakatga mos keluvchi dunyo chizig'i bo'ylab olinadi.

4-potensial  $A^i$  aniqlanishiga ko'ra 4-vektordir. Uning fazoviy tashkil etuvchilari  $A = A_x, A_y, A_z$  maydonning vektor potensiali deyiladi va oddiy vektorni tashkil qildi. Vaqt tashkil etuvchisi  $A^0 = \varphi$  skalyar potensial deyiladi. Shunday qilib, 4-potensialni

$$A^i = (\varphi, \mathbf{A}) \quad (3.2)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bunga asosan (3.1) uch o'lchovli ko'rinishda yozamiz:

$$\mathcal{S} = \int_a^b \left( -mc ds + \frac{e}{c} \mathbf{A} dr - e\varphi dt \right).$$

Bu yerda (2.7) ni hisobga olsak, integral chegaralari  $a$  va  $b$  dunyo nuqtalariga mos keluvchi vaqtlar bilan almashadi:

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \left( -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - e\varphi \right) dt. \quad (3.3)$$

Integral ostidagi ifoda

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - e\varphi \quad (3.4)$$

eletromagnit maydonda zaryadning harakatini aniqlovchi Lagranj funksiyasini beradi. (3.4) dagi birinchi had (2.8) bilan mos tushadi. Qolgan ikkita had esa zaryadning maydon bilan ta'sirlashishini aniqlaydi.

Lagranj funksiyasidan tezlik bo'yicha hosila olamiz:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} = \mathbf{P}. \quad (3.5)$$

Bu yerda  $\mathbf{P}$  - zarrachaning umumlashgan impulsi,  $\mathbf{p}$  - zarrachaning oddiy impulsi.  $e\mathbf{A}/c$  to'g'risida keyinroq fikr yuritiladi.

Maydonga kiritilgan zaryadning energiyasini yozamiz:

$$\mathcal{E} = v \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} - \mathcal{L} = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi. \quad (3.6)$$

Maydonga kiritilgan zaryadning Gamilton funksiyasi

$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} + e\varphi = \sqrt{m^2 c^4 + \left(P - \frac{e}{c} A\right)^2} + e\varphi. \quad (3.7)$$

Yuqorida aniqlangan kattaliklarni kichik tezliklar uchun ko'rib chiqamiz. Bu holda Langranj funksiyasi quyidagi ko'rinishga o'tadi:

$$\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c} Av - e\varphi. \quad (3.8)$$

Bu yerda  $mc^2$  hadni Langranj funksiyaning xossasiga binoan tushirib qoldirdik.

**Impuls**

$$p = mv = P - \frac{e}{c} A, \quad (3.9)$$

Gamilton funksiyasi

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left( P - \frac{e}{c} A \right)^2 + e\varphi. \quad (3.10)$$

Bu ifodalar elektromagnit maydonda harakatlanayotgan klassik zarra-channing Lagranj funksiyasi, impulsi va Gamilton funksiyasi ifodalari bilan mos tushadi.

### 3.3 Elektromagnit maydondagi zaryad harakat tenglamasi. Lorentz kuchi

Lagranj funksiyasi ma'lum bo'lgandan keyin elektromagnit maydonga kiritilgan zaryadning harakat tenglamasini olishga kirishamiz. Buning uchun birinchi navbatda Lagranj tenglamasini yozamiz:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r}, \quad (3.11)$$

bu yerda Lagranj funksiyasi (3.4) ifoda bilan aniqlanadi.

Lagranj tenglamasidagi hisoblarmani hisoblaymiz:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \frac{e}{c} \operatorname{grad} Av - e \operatorname{grad} \varphi. \quad (3.12)$$

Birinchi hadni ilovada keltirilgan (A.101) formula yordamida hisoblab (3.12) ni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \frac{e}{c}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{A} + \frac{e}{c}[\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{A}] - e \operatorname{grad} \varphi. \quad (3.13)$$

Lagranj tenglamasining chap tomoni umumlashgan impulsdan olingan vaqt bo'yicha to'liq hosila ekanligini hisobga olsak, (3.11) quyidagi ko'rinishni qabul qiladi:

$$\frac{d}{dt} \left( \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) = \frac{e}{c}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{A} + \frac{e}{c}[\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{A}] - e \operatorname{grad} \varphi. \quad (3.14)$$

Bu yerda  $\mathbf{A}$  koordinata va vaqtning funksiyasi bo'lganligi uchun undan vaqt bo'yicha olingan to'liq hosila ikki qismdan iborat bo'ladi (ilovada keltirilgan (A.73) formulaga qarang), ya'ni

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{A}. \quad (3.15)$$

Bu ifodani (3.14) ga qo'yish natijasida quyidagini hoslil qilamiz:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - e \operatorname{grad} \varphi + \frac{e}{c}[\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{A}]. \quad (3.16)$$

Bu aniqlanishi lozim bo'lgan tenglama bo'lib, elektromagnit maydonda zaryadning harakat tenglamasini beradi. Tenglanamaning chap tomonida impulsdan vaqt bo'yicha hosila turibdi demak, o'ng tomonidagi ifoda maydon tomonidan zaryadga ta'sir etuvchi kuchni beradi. Tenglama (3.16) dan ko'rinish turibdiki, maydonga kiritilgan zaryadga ta'sir etuvchi kuch tabiatidan ikki xil ekan, birinchisi

$$\mathbf{F}_E = -\frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - e \operatorname{grad} \varphi \quad (3.17)$$

faqat qutb vektorlardan tashkil topgan. Ikkinchisi esa

$$\mathbf{F}_H = \frac{e}{c}[\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{A}] \quad (3.18)$$

bir tomonidan zaryadning tezligiga bog'liq va unga perpendikulyar bo'lsa, ikkinchi tomonidan bu kuch ifodasiga psevdo (aksial) vektor rot  $\mathbf{A}$  kiradi. Bunday ajralishda chuqr ma'no bo'lib, maydon ikki xil tabiatga ega ekanligi ko'rsatadi.

Haqiqatan ham, (3.17) ni *elektr maydon* tomonidan zaryadga ta'sir etuvchi kuch deb qarash mumkin. U holda

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi \quad (3.19)$$

birlik zaryadga ta'sir etuvchi kuch bo'lib, *elektr maydon kuchlanganligi* deb ataladi.

Bu fikrni davom ettirsak (3.18) *magnit maydon* tomonidan zaryadga ta'sir etayotgan kuch bo'ladi

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (3.20)$$

esa *magnit maydon kuchlanganligi* deyiladi.

Endi elektromagnit maydonda zaryadning harakat tenglamasini qu'yidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\frac{dp}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}] . \quad (3.21)$$

Bu tenglamaning o'ng tomonidagi ifoda *Lorens* kuchi deyiladi. Zaryadga elektr maydon tomonidan ta'sir etuvchi kuch maydon kuchlanganligi bo'ylab yo'nalgan. Magnit maydon tomonidan ta'sir etuvchi kuch esa magnit maydon kuchlanganligi va zaryadning tezligiga perpendikulyar yo'nalgan.

Magnit maydonda zaryadga ta'sir etuvchi kuch uning harakat yo'nali shiga perpendikulyar bo'lganligi uchun bu maydonda zaryadni ko'chirishda bajargan ish nolga teng. Demak, zaryadni ko'chirishda bajarilgan ish faqat elektr maydon bilan aniqlanadi. Vaqt birligida bajarilgan ish (kinetik energiyaning vaqt birligida o'zgarishi) tezlikni Lorentz kuchiga skalyar ko'paytmasi bilan aniqlanishidan foydalanamiz va  $(\mathbf{v}[\mathbf{v}\mathbf{H}]) = 0$  ekanligini hisobga olib, (3.21) dan quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{d\mathcal{E}_{kin}}{dt} = ev\mathbf{E} . \quad (3.22)$$

Klassik mexanikada harakat tenglamalari vaqt inversiyasiga ( $t \rightarrow -t$ ) nisbatan invariantdir. Ya'ni, kelajak bilan o'tmis farqlanmaydi. Mexanika qonunlarini klassik nuqtai nazaridan o'rganamizmi yoki nisbiylik nazariyasi yordamida o'rganamizmi farqi yo'q. Eng muhimmi u tabiat qonunlarini aks ettirishi kerak. Shu sababli nisbiylik nazariyasida

ham zaryadning harakat tenglamasi vaqt inversiyasiga nisbatan invariant bo'lishi kerak. Bu holat qanday xulosalarga olib kelishini ko'rib chiqamiz. Haqiqatan ham,  $t \rightarrow -t$  almashtirish natijasida elektromagnit maydonda zaryadning harakat tenglamasi (3.21) o'zgarmay qolishi uchun

$$t \rightarrow -t, \quad \varphi \rightarrow \varphi, \quad E \rightarrow E, \quad A \rightarrow -A, \quad H \rightarrow -H \quad (3.23)$$

almashtirishlar o'rini bo'lishi kerakligi kelib chiqadi. Shunday qilib elektr maydonda qandaydir harakat o'rini bo'lsa, unga teskari harakat ham o'rini bo'ladi. Magnit maydonda esa teskari harakat mumkin emas. Teskari harakat bo'lishi uchun magnit maydonning yo'nalishini teskariga almashtirish lozim bo'ladi.

Zaryadning harakat tenglamasini norelyativistik hol uchun yoza-miz. Buning uchun (3.21) da  $p$  ni  $mv$  bilan almashtirish yetarlidir.

$$m \frac{dv}{dt} = eE + \frac{e}{c}[vH]. \quad (3.24)$$

Bu tenglama norelyativistik nazariyadan ma'lum bo'lgan elektromagnit maydonda zaryadning harakat tenglamasidir.

Endi zaryadning harakat tenglamasining to'rt o'lchovli ko'rinishini hosil qilamiz. Buning uchun ta'sir integralining to'rt o'lchovli ko'rinishi (3.1) ni variatsiyalaymiz:

$$\delta S = \delta \int_a^b \left( -me ds - \frac{e}{c} A_i dx^i \right) = 0. \quad (3.25)$$

Bu yerda  $ds = \sqrt{dx_i dx^i}$  ni hisobga olib, uning variatsiyasini

$$\delta ds = \delta \sqrt{dx_i dx^i} = \frac{1}{2ds} \left( \delta dx_i dx^i + dx_i \delta dx^i \right) = \frac{dx_i \delta dx^i}{ds}$$

ko'rinishda yozamiz. Skalyar ko'paytmada soqov indekslarni bir vaqtda ko'tarib-tushirishda natija o'zgarmasligidan foydalandik. (3.25) dagi ikkinchi hadining variatsiyasi ko'paytmaning variatsiyasiga teng. Bularni inobatga olib (3.25) ifodani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\delta S = - \int_a^b \left( -mc \frac{dx_i \delta dx^i}{ds} - \frac{e}{c} A_i \delta dx^i - \frac{e}{c} \delta A_i dx^i \right) = 0. \quad (3.26)$$

Bu yerda  $dx_i/ds = u_i/c$ ,  $u_i$  - 4-tezlik. Yuqoridagi ifodaning birinchi va ikkinchi hadlarini bo'laklab integrallaymiz va  $\delta x^i(a) = \delta x^i(b) = 0$ ,  $\delta A^i(a) = \delta A^i(b) = 0$  ekanligin hisobga olib quyidagini hosil qilamiz:

$$-\int_a^b \left( m du_i \delta x^i + \frac{e}{c} dA_i \delta x^i - \frac{e}{c} \delta A_i dx^i \right) = 0 . \quad (3.27)$$

$A_i$  ning variatsiyasini va differensialini

$$\delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^k, \quad dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} dx^k.$$

ko'rinishda yozib olamiz. Bunga asosan (3.27) ni qayta yozamiz:

$$-\int_a^b \left( m du_i \delta x^i + \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} dx^k_i \delta x^i - \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^k dx^i \right) = 0 . \quad (3.28)$$

Birinchi hadda  $du_i = (du_i/d\tau)d\tau$ , ukkinchi va uchinchi  $dx^{k(i)} = u^{k(i)}d\tau$  deb yozamiz, bundan tashqari uchinchi hadda  $i$  va  $k$  larning o'rnini almashtiramiz:

$$\frac{1}{c} \int_a^b \left[ m \frac{du_i}{d\tau} - \frac{e}{c} \left( \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) u^k \right] ds \delta x^i = 0 , \quad (3.29)$$

bu yerda  $ds = cd\tau$ . Integral chegaralari "a" va "b" ixtiyoriy va bu dunyo nuqtalarida  $\delta x^k = 0$  bo'lganligi uchun (3.29) da integral ostidagi ifoda nolga teng bo'lishi kerak, ya'ni

$$m \frac{du_i}{d\tau} = \frac{e}{c} \left( \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) u^k . \quad (3.30)$$

Belgilash kiritamiz:

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} . \quad (3.31)$$

Ikkinchli rangli antisimmetrik 4-tenzor  $F_{ik}$  elektromagnit maydon 4-tenzori deyiladi. Bu tenzor orqali zaryadning harakat tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$m \frac{du_i}{d\tau} = F_{ik} u^k . \quad (3.32)$$

Bu zaryadning harakat tenglamasining to'rt o'lchovli ko'rinishidir.

Tenzor  $F_{ik}$  ning alohida elementlarining qanday fizik kattaliklarga to'g'ri kelishini aniqlash uchun  $A^i = (\varphi, A_x, A_y, A_z)$  dan va elektr va magnit maydon kuchlanganliklarining ta'riflari (3.19)-(3.20) dan foy-dalanamiz. Misol uchun  $F_{ik}$  ning bir necha elementlarini hisoblaymiz:

$$F_{01} = \frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = E_x, \quad F_{02} = E_y, \quad F_{03} = E_z;$$

$$F_{21} = \frac{\partial A_1}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^1} = -\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial x} = H_z, \quad F_{13} = H_y, \quad F_{32} = H_x.$$

Elektromagnit maydon tenzorining antisimmetrikligidan foydalanib uning qolgan elementlarini aniqlash mumkin. Endi tenzorni  $i$ -indeks qatorning,  $k$ -indeks esa ustunning tartib raqamini ko'rsatuvchi matritsa ko'rinishida yozamiz:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

$F^{ik}$  ni yozishda indekslarni ko'tarish va tushirish qoidasidan foydalandik. Bu tenzorni shartli ravishda ikki vektorning to'plami sifatida yozish mumkin:

$$F_{ik} = \{E, H\}, \quad F^{ik} = \{-E, H\}. \quad (3.34)$$

Shunday qilib, elektr va magnit maydon kuchlanganliklari bitta 4-tenzorning komponentalari ekan. Bu tenzorga elektr va magnit maydon kuchlanganliklari teng huquqli asosda kiradi.

Uch o'lchovli belgilashlarda (3.32) ning uchta fazoviy ( $i = 1, 2, 3$ ) tashkil etuvchilari (3.21) tenglamaga aynan o'tishiga oson ishonch hosil qilish mumkin. Uning  $i = 0$  tashkil etuvchisi bajarilgan ish tenglamasi (3.22) bilan aynandir. Bu tenglama zaryadning harakat tenglamasidan keltirib chiqarish mumkin. (3.32) tenglamaning har ikkala tomonini  $u^i$  ko'paytirib to'rtta tenglamadan uchtasi o'zarboq'liq emasligini ko'rish mumkin. Bu masala 69 - betda ko'rilgan. Haqiqatan ham,

$$m u^i \frac{du_i}{d\tau} = F_{ik} u^i u^k. \quad (3.35)$$

tenglamaning har ikkala tomoni nolga teng. Chap tomonining nolga tengligi 4-tezlikni 4-tezlanishga ko'paytmasi nolga tengligidan, o'ng tomoni esa  $F_{ik}$  antisimmetrik tenzorni  $u^i u^k$  simmetrik tenzorga ko'paytmasi nolga tengligidan kelib chiqadi.

### 3.4 Maydon kattaliklari uchun Lorentz almashtirishlari

Bir inersial sanoq sistemasidan ikkinchisiga o'tganda maydon kattaliklari - elektromagnit maydon potensiallari va kuchlanganliklari qanday almashishini ko'rib chiqamiz.

Avvalgidek,  $K$  va  $K'$  sanoq sistemalardagi dekart koordinata o'qlari mos ravishda bir-biriga parallel va  $K'$  sistema  $K$  ga nisbatan  $x$  o'qi bo'ylab  $V$  tezlik bilan harakatlanayotgan bo'lsin. Bu holda elektromagnit maydon potensiallari  $A_i = (\varphi, \mathbf{A})$  4-vektorni tashkil qilganligi sabali ular uchun Lorentz almashtirishlari (1.49) ga asosan quyidagicha yoziladi:

$$\varphi = \frac{\varphi' + \frac{V}{c} A'_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad A_x = \frac{A'_x + \frac{V}{c} \varphi'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad A_y = A'_y, \quad A_z = A'_z. \quad (3.36)$$

Elektromagnit maydon kuchlanganliklari uchun almashtirish formulalarini 4-masala natijasidan foydalanib yozamiz. Elektr maydon uchun:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c} H'_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c} H'_y}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.37)$$

va magnit maydon uchun:

$$H_x = H'_x, \quad H_y = \frac{H'_y - \frac{V}{c} E'_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad H_z = \frac{H'_z + \frac{V}{c} E'_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3.38)$$

Shunday qilib, maydon "toza elektr" ( $\mathbf{H} = 0$ ) yoki "toza magnit" ( $\mathbf{E} = 0$ ) xarakteriga ega deyish nisbiy bo'lib, qaysi sanoq sistemaga nisbatan ekanligini albatta gapishtirish kerak. Masalan, biror sanoq sistemaga nisbatan maydon toza elektr bo'lsa, (3.38) ga ko'ra bu sistemaga nisbatan  $x$  o'qi bo'ylab  $V$  tezlik bilan harakatlanayotgan sanoq sistemada elektr maydon bilan bir qatorda magnit maydon ham namoyon

bo'ladi. Shunga o'xshash biror sanoq sistemada maydon toza magnit bo'lsa, sistemalarda magnit maydon bilan bir qatorda elektr maydon ham namoyon bo'ladi. Shuning uchun fizik reallikni elektr yoki magnit maydonga tegishli deyishning ma'nosi yo'q. Fizik reallik 4-tenzor  $F^{ik}$  bilan aniqlanadi. (3.37) va (3.38) formulalarda  $c \rightarrow \infty$  maydon birorta sistemaga nisbatan toza elektr (magnit) bo'lsa, boshqa barcha sistemalarda ham u elektr (magnit) bo'ladi. Bu fizik reallikka zid. Demak, elektrodinamikada faqat  $V \ll c$  deb ko'rish mumkin, ammo  $c \rightarrow \infty$  mumkin emas.

Bir sonoq sistemaning ikkinchisiga nisbatan tezligi yorug'lik tezligidan juda kichik deb, almashtirish formulalari (3.37)–(3.38) ni qatorga yoyamiz. Qatorda  $V/c$  birinchi darajalari bilan chegaralanib quyidagini hosil qilamiz:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = E'_y + \frac{V}{c} H'_z, \quad E_z = E'_z - \frac{V}{c} H'_y, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}' + \frac{1}{c} [\mathbf{H}' \mathbf{V}], \quad (3.39)$$

$$H_x = H'_x, \quad H_y = H'_y - \frac{V}{c} E'_z, \quad H_z = H'_z + \frac{V}{c} E'_y, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}' - \frac{1}{c} [\mathbf{E}' \mathbf{V}]. \quad (3.40)$$

Bu almashtirish formulalaridah hatto juda kichik tezliklarda ham maydonni toza elektr (magnit) xususiyatga ega deb bo'lmashigi ko'rinish turibdi.

(3.37)–(3.38) ga teskari almashtirish formulalarini olish uchun  $V \rightarrow -V$  ga va shtrixning o'rni almashtiriladi. Maydon kuchlanganliklari uchun Lorentz almashtirishlarini sanoq sistemalarning nisbiy harakati ixtiyoriy yo'naliishda bo'lgan hol uchun (3.37)–(3.38) ni umumlshtirib vektor ko'rinishda yozish mumkin:

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E}', \quad \mathbf{E}_{\perp} = \frac{\mathbf{E}'_{\perp} + \frac{1}{c} [\mathbf{H}' \mathbf{V}]}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (3.41)$$

$$\mathbf{H}_{\parallel} = \mathbf{H}', \quad \mathbf{H}_{\perp} = \frac{\mathbf{H}'_{\perp} - \frac{1}{c} [\mathbf{E}' \mathbf{V}]}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3.42)$$

Bu yerda  $\mathbf{E}_{\parallel}$ ,  $\mathbf{H}_{\parallel}$  maydon kuchlanganliklarining sanoq sistemalarning nisbiy harakat tezligi yo'naliishiga parallel va  $\mathbf{E}_{\perp}$ ,  $\mathbf{H}_{\perp}$  esa perpendikulay tashkil enuvchilarini.

Almashtirish formulalari (3.37)–(3.38) dan ya'na bir muhim xulosha kelib chiqadi. Agar birorta sanoq sistemada maydon toza elektr

(magnit) bo'lsa, boshqa barcha sanoq sistemalarda elektr va magnit maydon o'zaro perpendikulyar bo'ladi. Masalan,  $E' = 0$  bo'lsin, bu holda almashtirish formulalari quyidagi ko'rinishga o'tadi:

$$E_x = 0, \quad E_y = \frac{\frac{V}{c} H'_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad E_z = \frac{-\frac{V}{c} H'_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (3.43)$$

$$H_x = H'_x, \quad H_y = \frac{H'_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad H_z = \frac{H'_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3.44)$$

Bu ifodalarning ikkinchisidan  $H'_y$  va  $H'_z$  topib birinchisiga qo'yamiz:

$$E_x = 0, \quad E_y = -\frac{V}{c} H_z, \quad E_z = \frac{V}{c} H_y, \quad E = -\frac{1}{c} [VH]. \quad (3.45)$$

Huddi shunga o'xshash  $H' = 0$  bo'lgan hol uchun quyidagini yozish mumkin:

$$H_x = 0, \quad H_y = \frac{V}{c} E_z, \quad H_z = -\frac{V}{c} E_y, \quad H = \frac{1}{c} [VE]. \quad (3.46)$$

Shunday qilib, har ikkala holda  $K'$  sistemada elektr va magnit maydon kuchlanganliklari bir-biriga perpendikulyar ekan.

Bu masalani boshqa tomondan ko'rib chiqamiz. Elektr va magnit maydon kuchlanganliklari antisimetrik 4-tenzor  $F^{ik}$  bilan aniqlanganligi uchun ulardan bir inersial sanoq sistemadan ikkinchisiga o'tganda Lorentz almashtirishlariga nisbatan invariant bo'lgan kattaliklarni hosil qilish mumkin. Bu invariantlar quyidagicha aniqlanadi:<sup>2</sup>

$$I_1 = F^{ik} F_{ik} = \text{inv}, \quad I_2 = e^{iklm} F_{ik} F_{lm} = \text{inv}. \quad (3.47)$$

Bu yerda  $e^{iklm}$  barcha indekslari bo'yicha to'la antisimetrik birlik tenzor. Bevosita hisoblashlarga ko'ra

$$I_1 = 2(H^2 - E^2) = \text{inv}, \quad I_2 = -8(EH) = \text{inv}. \quad (3.48)$$

Bu yerda  $I_1$  haqiqiy skalyar,  $I_2$  psevdo skalyardir. Chunki uch o'lchovli fazodagi inversiya operatsiyasiga nisbatan  $I_1$  invariant qoladi,  $I_2$  ning ishorasini o'zgaradi.

---

<sup>2</sup>Ikkinchi invariantni  $I_2 = \sqrt{F^{ik} F^{lm} F_{ik} F_{lm}}$  ko'rinishda ham yozish mumkin.

Bu invariantlar maydonning mutloq xarakteristikalari bo'lib, quyidagi xulosalarga olib keladi:

1. "Elektromagnit maydon nolga teng" ( $I_1 = I_2 = 0$ ) yoki elektr va magnit maydon kattalik jihatdan bir-biriga teng va o'zaro perpendikulyar ( $I_1 = I_2 = 0$ ) degan tasdiqlar invariantlar maydonning mutloq xarakteristikasi ekanligiga misol bo'ladi. Haqiqatan ham bu holda barcha inersial sanoq sistemalarda bu tasdiq o'rini bo'ladi.

2. Agar birorta inersial sanoq sistemada elektr va magnit maydon o'zaro perpendikulyar, ya'ni ( $EH = 0$ ) ( $I_2 = 0$ ) bo'lsa, ular barcha inersial sanoq sistemalarda perpendikulyar bo'ladi. Bu holat hatto (3.39)–(3.40) ga ko'ra  $V \ll c$  da ham o'rini bo'ladi.

3. Agar birorta sanoq sistemada elektr va magnit maydon bir-biriga teng bo'lsa, ya'ni  $H = E$  ( $I_1 = 0$ ) bo'lsa, ular barcha inersial sanoq sistemalarda bir-biriga teng bo'ladi.

4. Agar birorta inersial sanoq sistemada  $I_2 = 0$  va  $I_1 > 0$  ( $|H| > |E|$ ) bo'lsa, barcha sistemalarda bu tengsizlik o'rini bo'ladi. Bu holda shunday sanoq sistemani ko'rsatish mumkinki, unga nisbatan maydon toza magnit bo'ladi. Shunga o'xshash  $I_2 = 0$  va  $I_1 < 0$  ( $|H| < |E|$ ) bo'lsa, shunday sanoq sistemani ko'rsatish mumkinki, unga nisbatan maydon toza elektr bo'ladi.

5. Invariantlarning berilgan qiymatlarini qanoatlantiruvchi elektr va magnit maydonning ixtiyoriy boshqa qiymatiga Lorentz almashtirishlari orqali erishish mumkin. Xususan, shunday sanoq sistemani topish mumkinki unga nisbatan elektr va magnit maydonlar shu nuqtada bir-biriga parallel bo'ladi. Bu sistemada  $EH = EH$ . Quyidagi tenglamalardan

$$H^2 - E^2 = H_0^2 - E_0^2, \quad EH = E_0 H_0$$

aniqlanishi lozim bo'lgan maydonni topish mumkin. Bu yerda  $E_0$  va  $H_0$  boshlang'ich sistemada maydon kuchlanganliklari.

### 3.5 Maydonning kalibrovka invariantligi

Zaryadning harakat tenglamasi (3.21) da ishtirot etayotgan maydon kuchlanganliklari zaryadga ta'sir etayotgan kuchlar orqali aniqlanadi. Elektromagnit maydon potensiallari (3.19) va (3.20) harakat tenglamalarda bevosita ishtirot etmaganligi uchun ularni tajribalardan tiklab

bo'lmaydi. Demak, ular tajribalarda o'lchanmaydigan yordamchi kattaliklar ekan. Shu sababli maydon kuchlanganliklarining (3.19) va (3.20) ko'rinishidagi ta'rifida potensiallar uchun ixtiyoriylik mavjud bo'lishi kerak.

Ixtiyoriylik darajasi qanday ekanligini ko'rib chiqamiz. Silliq ixtiyoriy funksiya  $\psi(r, t)$  yordamida vektor potensialni quyidagicha almashtiramiz:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \psi(r, t). \quad (3.49)$$

Bu almashtirishni magnit maydon ta'rifi bo'lgan (3.20) tenglamaga tatbiq qilamiz:

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{A}' - \operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi(r, t) = \operatorname{rot} \mathbf{A}' = \mathbf{H}'. \quad (3.50)$$

Bu yerda  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi(r, t) \equiv 0$  ekanligini hisobga olidi. (3.50) ga ko'ra (3.49) almashtirishga nisbatan magnit maydon kuchlanganligi invariant ekan.

Endi (3.49) almashtirishni (3.19) ga tatbiq qilamiz:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial \operatorname{grad} \psi}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi = \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \operatorname{grad} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \varphi \right). \end{aligned}$$

Agar skalyar potensial

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (3.51)$$

ko'rinishda almashtirilsa, elektr maydon kuchlanganligi ham o'zgarmasligi ko'rinadi:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi' = \mathbf{E}'. \quad (3.52)$$

Shunday qilib, vektor va skalyar potensiallarning ixtiyoriylik ko'lamni mos  $\psi(r, t)$  funksianing gradiyenti va vaqt bo'yicha olingan hosilasi belgilanar ekan. O'zgarmas elektr maydon uchun  $\psi(r, t)$  funksiya o'zgarmasga teng bo'ladi. O'zgarmas magnit maydon uchun esa vektor potensialga koordinataga bog'liq bo'lмаган о'згармас векторни qo'shish mumkin.

Umumiy holda (3.49) va (3.51) almashtirish formulalari bilan bog‘langan ( $A$ ,  $\varphi$ ) va ( $A'$ ,  $\varphi'$ ) potensiallar bilan aniqlangan maydon kuchlanganliklari bir-biriga aynan tengdir.

Almashtirishlar (3.49) va (3.51) ga nisbatan elektr va magnit maydon kuchlanganliklarining o‘zgarmasligi *kalibrovka* yoki *gradient invariantlik* deyiladi. Yordamchi funksiya  $\psi(r, t)$  kalibrovkalovchi funksiya deb ataladi. Bu funksiyani tanlash orqali turli kalibrovkalarga erishiladi. Amalda qanday kalibrovkalardan foydalaniladi degan savolga keyinroq qaytiladi.

Mavzuning oxirida potensialarni almashtirish formulalari (3.49) va (3.51) ni to‘rt o‘lchovli ko‘rinishini keltiramiz:

$$A'_k = A_k - \frac{\partial \psi}{\partial x^k} . \quad (3.53)$$

### 3.6 Tekis harakatlanayotgan zaryad maydoni

Maydon uchun almashtirish formulalarining tatbiqi sifatida relativistik tezlik bilan tekis harakatlanayotgan zaryad maydonini aniqlaymiz. Zaryad bilan harakatlanayotgan  $K'$  sanoq sistemada magnit maydon nolga teng ( $A' = 0$ ). Bu sistemada tinch turgan nuqtaviy zaryadning maydon potensiali

$$\varphi' = \frac{e}{r'} . \quad (3.54)$$

formula bilan aniqlanadi. Almashtirish formulalari (3.36) ga asosan laboratoriya sanoq sistemasida

$$\varphi = \frac{\varphi'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{e}{r' \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} . \quad (3.55)$$

Endi radius-vektor  $r'$  ni Lorentz almashtirishlari yordamida  $x, y, z$  orqali ifodalaymiz:

$$r' = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} = \sqrt{\left( \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)^2 + (y)^2 + (z)^2} . \quad (3.56)$$

Bu ifodadagi asimmetriya harakat  $x$  o'qi bo'ylab bo'layotgani bilan bog'liq. Bunga asosan

$$\varphi = \frac{e}{\sqrt{(x-vt)^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)}} . \quad (3.57)$$

Agar  $x = vt$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  nuqta  $t$  momentda zaryadning koordinatalarini aniqlasa, zaryaddan kuzatish nuqtasi  $(x, y, z)$  ga o'tkazilgan radius-vektorni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$r = i(x-vt) + jy + kz \quad (3.58)$$

va

$$r = \sqrt{(x-vt)^2 + y^2 + z^2} . \quad (3.59)$$

Endi masalani qutb koordinatalarida ko'ramiz:

$$x - vt = r \cos \psi, \quad \sqrt{y^2 + z^2} = r \sin \psi$$

potensial ifodasi (3.57) ni bu koordinatalarda yozamiz:

$$\varphi = \frac{e}{r \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \psi}} . \quad (3.60)$$

Endi almashtirish formulalari (3.36) ga asosan laboratoriya sanoq sistemasida vektor potensialni topamiz:

$$A_x = \frac{\beta \varphi'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \beta \varphi = \frac{ev}{cr \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \psi}}, \quad A_y = 0, \quad A_z = 0 . \quad (3.61)$$

Bu natijani ixtiyoriy yo'naliш uchun umumlashtirib, (3.61) ni vektor ko'rinishda yozish mumkin:

$$\mathbf{A} = \frac{v\varphi}{c} . \quad (3.62)$$

Potentsiallar uchun olingan (3.57) va (3.62) ifodalarga asosan elektr va magnit maydon kuchlanganliklarini (3.19) va (3.20) formulalar yordamida hisoblaymiz. Bunda vaqt bo'yicha hosilani  $x$  bo'yicha hosila bilan almashtirish mumkin, ya'ni

$$\frac{\partial}{\partial t} = -v \frac{\partial}{\partial x}.$$

Hisoblash ishlarini amalga oshirib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$E_x = \frac{e(x - vt)(1 - \beta^2)}{[(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)]^{3/2}}, \quad (3.63)$$

$$E_y = \frac{ey(1 - \beta^2)}{[(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)]^{3/2}}, \quad (3.64)$$

$$E_z = \frac{ez(1 - \beta^2)}{[(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)]^{3/2}}. \quad (3.65)$$

Yoki vektor ko'rinishda

$$\mathbf{E} = \frac{er(1 - \beta^2)}{[(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)]^{3/2}} = \frac{er(1 - \beta^2)}{r^3(1 - \beta^2 \sin^2 \psi)^{3/2}}. \quad (3.66)$$

Bu ifoda va (3.57) dan ko'rinx turibdiki, tinch turgan zaryad maydonidan farqli ravishda tekis harakatdagi zaryadning elektr maydoni sferik simmetriyaga ega emas. Zaryaddan kuzatish nuqtasigacha bo'l-gan masofa  $r$  o'zgarmas bo'lganda,  $\psi$  burchak  $-\pi$  dan  $\pi$  gacha o'zgar-ganda elektr maydon kuchlanganligi eng kichik qiymati ( $\psi = 0; -\pi; \pi$ )

$$E_{\parallel} = \frac{e}{r^3}(1 - \beta^2) \quad (3.67)$$

dan eng katta qiymati ( $\psi = -\pi/2; \pi/2$ )

$$E_{\perp} = \frac{e}{r^3} \frac{1}{1 - \beta^2} \quad (3.68)$$

gacha ortadi. Tezlik ortganda  $E_{\parallel}$  kamayadi,  $E_{\perp}$  esa ortadi.

Olingan natijalarni boshqacha talqin qilish mumkin. Skalyar po-tensial  $x$  o'qi bo'ylab  $v$  tezlik bilan harakatlanuvchi ellipsoid

$$(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2) = \text{const}$$

sirtida o'zgarmas qiymatga ega. Bu sirt zaryad harakati yo'nali shida sferani  $1 : \sqrt{1 - \beta^2}$  marta siqish natijasida hosil bo'ladi. Zaryadning tezligi yorug'lik tezligiga yaqinlashganda (3.66) ifodaning maxraji  $\psi = \pi/2$  atrofida burchakning tor intervalida nolga yaqin bo'ladi. Shu in-tervalni baholaymiz:

$$1 - \beta^2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \pm \frac{\Delta\psi}{2} \right) \approx 0.$$

Bundan  $v \rightarrow c$  da elektr maydon noldan farqli soha kengligi

$$\Delta\psi \approx \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

ifoda bilan aniqlanishini topamiz.

Magnit maydon uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$H = \frac{e[rv]}{c[(x-vt)^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)]^{3/2}} = \frac{1}{c}[vE] . \quad (3.69)$$

Xususan  $v \ll c$  bo'lsa,

$$E = \frac{er}{r^3}, \quad H = \frac{e[rv]}{c r^3} . \quad (3.70)$$

### 3.7 Elektr maydonda zaryadning harakati

Zaryadlangan zarrachaning o'zgarmas bir jinsli elektr maydondagi harakatini o'rGANISHDAN boshlaymiz. Bu holda uning harakat tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\frac{dp}{dt} = eE . \quad (3.71)$$

Maydon yo'nalishini  $Ox$  o'qi bilan mos tushadi deb olamiz. Harakat albatta tekislikda sodir bo'ladi. Bu tekislik sifatida  $xOy$  tekisligini tanlaymiz. Bu holda (3.71) tenglamaning o'qlarga proeksiyalarini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\frac{dp_x}{dt} = eE , \quad \frac{dp_y}{dt} = 0 . \quad (3.72)$$

Bu tenglamalarni bir marta integrallaymiz:

$$p_x = eEt + p_{0x} , \quad p_y = p_{0y} . \quad (3.73)$$

Bu yerda  $p_{0x}$  va  $p_{0y}$  zarrachaning boshlang'ich impulsining mos o'qlarga proeksiyalar. Boshlang'ich vaqtida  $p_{0x} = 0$  va  $p_{0y} = p_0$  deb olamiz. Bu bilan masalaning umumiyligiga putur yetmaydi, ammo masala ancha soddalashadi.

Harakat tenglamalari (3.73) ni ikkinchi marta integrallash uchun tezlik, kinetik energiya va impuls orasidagi bog'lanish (2.17) dan foy-dalanamiz. Bu bog'lanishga asosan

$$v_x = \frac{p_x c^2}{\mathcal{E}} \quad \text{yoki} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{c^2 e E t}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}} . \quad (3.74)$$

Bu yerda

$$\mathcal{E} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_0^2 + (ceEt)^2} = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}$$

Huddi shunga o'xshash (3.73) dagi ikkinchi tenglamani qayta yozamiz:

$$v_y = \frac{p_y c^2}{\mathcal{E}} \quad \text{yoki} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{p_0 c^2}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}} . \quad (3.75)$$

(3.74) va (3.75) tenglamalarni integrallaymiz:

$$x = \frac{1}{eE} \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2} + C_1 , \quad (3.76)$$

$$y = \frac{p_0 c}{eE} \operatorname{Arsh} \frac{ceEt}{\mathcal{E}_0^2} + C_2 . \quad (3.77)$$

Integrallash doimiylari  $C_1$  va  $C_2$  lar boshlang'ich shartlardan topiladi. Masalan, boshlang'ich vaqtida zaryad koordinata boshida turibdi deb olsak,  $C_1 = -\mathcal{E}_0/eE$  va  $C_2 = 0$ ,  $\mathcal{E}_0$  zaryadning boshlang'ich energiyasi. Bularni hisobga olamiz va (3.76) - (3.77) tenglamalardan vaqtini yo'qotib, zaryadning harakat trayektoriyasi uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$x = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \left( \operatorname{ch} \frac{eEy}{p_0 c} - 1 \right) . \quad (3.78)$$

Bu ifoda ko'ndalang elektr maydonda ( $E \perp p_0$ ) zaryad zanjir chizig'i bo'ylab harakat qilishini ko'rsatadi. Agar zaryadning tezligi  $v \ll c$  bo'lsa, (3.78) norelyativistik holga o'tadi:

$$x \approx \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{eEy}{p_0 c} \right)^2 - 1 \right) = \frac{meE}{2p_0^2} y^2 = \frac{eE}{2mv_0^2} y^2 \quad (3.79)$$

ya'ni zaryad parabola bo'ylab harakat qiladi. Bu bizga nazariy mexanika kursidan yaxshi tanish bo'lgan natijadir.

*Masala.* Bo'ylama bir jinsli elektr maydonda zaryadning harakatini o'rGANing.

*Yechish:* Elektr maydonni  $x$  o'qi bo'ylab yo'naltiramiz. Boshlang'ich shartlar quyidagi ko'rinishda bo'lsin:

$$p_{0x} = 0, \quad p_{0y} = 0, \quad p_{0z} = 0, \quad \mathcal{E}_0 = mc^2.$$

Harakat tenglamasini bir marta integrallaymiz:

$$p_x = eEt, \quad p_y = 0, \quad p_z = 0.$$

Relyativistik zarrachaning tezligi va impulsi orasidagi bog'lanish (2.10) dan foydalaniib yuqoridagi tenglamani

$$v_x = c \left( \frac{eEt}{mc} \right) / \sqrt{1 + \left( \frac{eEt}{mc} \right)^2}$$

ko'rinishda yozib olamiz. Bu tenglama relyativistik zarrachaning tekis tezlanuvchan harakat qonunini beradi. Nisbiylik nazariyasida tekis tezlanuvchan harakatni tushinish uchun turli vaqtarda zarracha bilan bog'langan  $K'$ ,  $K''$ ,  $K'''$ , ... sanoq sistemalarini kiritamiz. Har bir vaqt momentida zarracha bilan bog'langan bu sanoq sistemalarda uning tezligi nolga teng. Shuning uchun 4-tezlanish uchun  $w'_t = 0$  va masalaning shartiga ko'ra  $w' = w'_x = f'_x/m = eE/m$ ,  $w'_y = w'_z = 0$  ((2.25) formulaga qarang). 4-tezlanish uchun Lorentz almashtirishlariidan foydalansak, tinch turgan sanoq sistemaga nisbatan tezlanishning  $x$  o'qiga proeksiyasi

$$w = \frac{w'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{eE}{m\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Ikkinchi tomondan (1.66) formulaga asosan

$$w = \frac{\dot{v}}{1 - v^2/c^2} + \frac{v^2 \dot{v}}{c^2 (1 - v^2/c^2)^2}.$$

Yuqoridagi ikki ifodani solishtirib quyidagi tenglamani topamiz:

$$\dot{v} = \frac{eE}{m} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}, \quad v = \dot{x}.$$

Bu tenglamani ikki marta integrallab, bo'ylama elektr maydonda zaryadning tekis tezlanuvchan harakat qonumini aniqlaymiz:

$$x - x_0 = \frac{mc^2}{eE} \sqrt{1 + \left(\frac{eE}{mc} t\right)^2}.$$

Bu giperbola tenglamasıdır. Shuning uchun ko'pincha relyativistik mexanikada o'zgarmas elektr maydonda zaryadning harakati klassikadagi parabolikdan farqli ravishda giperbolik deyiladi.

### 3.8 Magnit maydonda zaryadning harakati

O'zgarmas va bir jinsli magnit maydonda zaryadning harakatini ko'rib chiqamiz. Bu holda zaryadning harakat tenglamasi (3.21) quyidaǵi ko'rinishni oladi:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{e}{c} [vH]. \quad (3.80)$$

Magnit maydonda zaryadni ko'chirishda bajarilgan ish nolga teng bo'lganligi uchun energiya saqlanadi, ya'ni  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 = \text{const}$ . Bu holda relyativistik zarrachaning tezligi, impulsi va energiyasi orasidagi

$$p = \frac{v\mathcal{E}_0}{c^2}$$

bog'lanishni inobatga olsak (3.80) tenglamada impulsni tezlik orqali ifodalash mumkin:

$$\frac{\mathcal{E}_0}{c^2} \frac{dv}{dt} = \frac{e}{c} [vH]. \quad (3.81)$$

Magnit maydonni  $z$  o'qi bo'ylab yo'naltirsak, (3.81) tenglama komponentalarda quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{ecH}{\mathcal{E}} v_y, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{ecH}{\mathcal{E}} v_x, \quad \frac{dv_z}{dt} = 0. \quad (3.82)$$

Birinchi ikki tenglama  $v_x$  va  $v_y$  ga nisbatan birinchi tartibli, chiziqli va bir jinsli differensial tenglamalar sistemasi bo'lib, uning yechimi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} \equiv v_x(t) &= v_{0\perp} \cos(\omega t + \alpha), \\ \frac{dy(t)}{dt} \equiv v_y(t) &= -v_{0\perp} \sin(\omega t + \alpha). \end{aligned} \quad (3.83)$$

Bu yerda  $v_{0\perp} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  tezlikning magnit maydonga perpendikulyar tashkil etuvchisi bo'lib,  $xy$  tekisligida kattalik jihatdan o'zgarmaydi.  $\alpha$  boshlang'ich faza.

Harakat trayektoriyasini topish uchun (3.83) tenglamalarni integrallaymiz:

$$\begin{aligned} x(t) - x_0 &= R \sin(\omega t + \alpha), \\ y(t) - y_0 &= R \cos(\omega t + \alpha), \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= R^2. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Bu yerda

$$R = \frac{v_{0\perp}}{\omega} = \frac{v_{0\perp} \mathcal{E}_0}{e c H} = \frac{c p}{e H}, \quad (3.85)$$

$p$  impulsning  $xy$  tekisligiga proeksiyasi.

Shunday qilib, zaryad magnit maydonda unga perpendikulyar tekislikda moduli jihatda o'zgarmas bo'lgan  $v_{0\perp}$  tezlik bilan  $R$  radiusli aylana bo'ylab harakat qilishini aniqladik. Aylanish chastotasi

$$\omega = \frac{e c H}{\mathcal{E}_0} \quad (3.86)$$

ifoda bilan aniqlanadi va *siklotron* chastota deyiladi. Agar  $v \ll c$  bo'lsa,  $\mathcal{E} \approx mc^2$  va (3.86) quyidagi ko'rinishga o'tadi:

$$\omega \approx \frac{e H}{mc}. \quad (3.87)$$

Siklotronda zaryadlangan zarrachalarni tezlatish uchun magnit va elektr maydondan foydalaniлади. Tezlatgich ikki qismidan iborat bo'ladi. Birinchi qismida tezlatgich kamerasiga kirgan zaryadlar elektr maydonda tezlatiladi. Bundan keyin ular siklotronning yarim aylanadan iborat bo'lgan qismida magnit maydon ta'sirida tezligini o'zgartirmasdan burib beriladi. Burilgan zarracha ikkinchi elektr maydonda tezlatiladi. Yana magnit maydonga kiradi va h.k.z. Boshlangich vaqtarda zarrachalarning tezligi kichik bo'lganda elektr maydonning chastotasi (3.87) bilan aniqlanadi. Bunda maydon chastotasi energiyaga bog'liq bo'lmaydi. Uning tezligi relyativistikka yaqinlashganda chastota (3.86) bilan aniqlanadi.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>Siklotronning ishslash prinsiplari bilan to'la tanishish ushbu darslik doirasiga kirmaydi. U bilan kengroq tanishish uchun maxsus adabiyotlarga murojaat qiling.

Endi (3.82) tenglamalarning uchinchisini integrallaymiz:

$$z - z_0 = v_{0\parallel} t, \quad (3.88)$$

bu yerda  $v_{0\parallel}$  boshlang'ich tezlikning magnit maydonga parallel tashkil etuvchisi.

Olingan natijalarни umumlashtirib (3.84) va (3.88) ga ko'ra quyidagi xulosaga kelamiz:

Bir jinsli o'zgarmas magnit maydonda zaryad o'qi magnit maydon yo'nalishi bilan mos keluvchi vint chizig'i bo'ylab harakatlanadi. Hususan ( $v_{0\parallel} = 0$ ) bo'lsa, harakat trayektoriyasi aylanadan iborat bo'ladi.

### 3.9 3-bobga oid masala va savollar

- Zaryadlangan zarrachaning tezlanishini uning tezligi, elektr va magnit maydon kuchlanganligi orqali ifodalang.
- Bir jinsli elektr maydon uchun  $\varphi = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}$  tenglik o'rini bo'lishini ko'rsating.
- Bir jinsli magnit maydon uchun  $\mathbf{A} = [\mathbf{H}r]/2$  tenglik o'rini bo'lishini ko'rsating.
- Berilgan  $K$  sanoq sistemada bir jinsli elektromagnit maydon kuchlanganliklari uchun  $[\mathbf{EH}] \neq 0$  shart o'rini bo'lsin. Ular o'zaro parallel ( $\mathbf{E}' \parallel \mathbf{H}'$ ) bo'ladigan barcha inersial ( $K'$ ) sanoq sistemalarni toping.
- Berilgan  $K$  sanoq sistemada bir jinsli elektromagnit maydon quyidagi xossalardan biriga ega bo'ladigan barcha inersial sanoq sistemalarni toping.
  - Maydon kuchlanganliklaridan biri nolga teng ( $\mathbf{E}' = 0$  yoki  $\mathbf{H}' = 0$ );
  - Maydon kuchlanganliklari o'zaro perpendikulyar ( $\mathbf{E}' \perp \mathbf{H}'$ );
  - Maydon kuchlanganliklarining absolyut qiymatlari teng ( $\mathbf{E}' = \mathbf{H}'$ );
  - Maydon kuchlanganliklarining ikkalasi nolga teng ( $\mathbf{E}' = \mathbf{H}' = 0$ ).
- Ta'sir integrali (3.3) ni variatsiyalashda integralning yuqori chegarasi erkin o'zgaradi deb, umumlashgan 4-impuls

$$\mathbf{P}^i = \left( \frac{\mathcal{E}_{kin} + e\varphi}{c}, \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)$$

ifoda bilan aniqlanishini ko'rsating.

- Zaryadlangan zarracha yassi magnit maydonda ( $A_x = A_y = 0$  va  $A_z = A_z(x, y)$ ) harakatlanganda

$$\frac{mv_z}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{e}{c} A_z = \text{const}$$

bo'lishini ko'rsating. Ko'rsatma: Bu kattalik umumlashgan impulsning  $z$  o'qiga proeksiyasi ekanligidan foydalaning.

8. Zaryadlangan zarracha o'q simmetriyasiga ega bo'lgan magnit maydonda ( $A_r = A_z = 0$  va  $A_\psi = A_\psi(r, z)$ ) harakatlanganda

$$\frac{mr^2\dot{\psi}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{e}{c}rA_\psi = \text{const}$$

bo'lishini ko'rsating. Ko'rsatma: Bu kattalik silindrik koordinata sistemasida umumlashgan impulsning  $\psi$  o'qiga proeksiyasi ekanligidan foydalaning.

9. O'zgarmas bir jinsli ko'ndalang magnit maydonda ( $H$ ) harakatlanayotgan zaryadlangan relyativistik zarrachaga ( $m, e$ ) qo'shimcha qarshilik kuchi ( $F = -\eta v$ ) ta'sir qilmoqda. Zaryadning harakat tryektoriyasini aniqlang.
10. Zaryadlari  $e_1$  va  $e_2$  bo'lgan zarrachalar  $x$  o'qiga parallel holda o'zgarmas  $v$  tezlik bilan harakatlanmoqda. Laboratoriya sanoq sistemasida zarrachalarning o'zaro ta'sirlashish kuchini toping. Xususan, ultrarelativistik holni ko'rib chiqing. Topilgan kuch  $F = -e_2 \text{ grad } \psi$  formula bilan aniqlanishi mumkinligini ko'rsating.  $\psi = e_1/\gamma^2 r$ ,  $r = |r_2 - r_1|$ ,  $r_1, r_2$  zaryadlangan zarrachalarga o'tkazilgan radius-vektorlar.
11. Zaryadi  $e$  va massasi  $m$  bo'lgan zarracha ixtiyoriy tezlik bilan o'zgarmas bir jinsli elektr maydonda harakatlanadi. Boshlangich momentda zarrachaning impulsi  $p_0$  va u koordinata boshida bo'lsin. Zarrachaning koordinatalarini, vaqt  $t$  ni va energiyasini laboratoriya sistemasida uning xususiy vaqt  $\tau$  ning funksiyasi sifatida aniqlang.  $\tau$  ni yo'qotib, uch o'lchovli koordinatalarni vaqt  $t$  orqali yozing.
12. Massasi  $m$ , zaryadi  $e$  va boshlang'ich energiyasi  $\mathcal{E}$  bo'lgan relyativistik zarracha harakatiga qarshilik ko'rsatuvchi bir jinsli elektr maydonga kiritilganda qanday masofada to'xtaydi?
13. Zaryadlangan relyativistik zarracha o'zaro parallel bo'lgan bir jinsli elektr ( $E = (0, 0, E)$ ) va magnit ( $H = (0, 0, H)$ ) maydonda harakatlanadi. Boshlang'ich vaqtida uning impulsi  $p_0 = (p_{0x}, 0, p_{0z})$ . Zarracha impulsining tashkil etuvchilarini va energiyasini uning xususiy vaqt  $\tau$  ga bog'lanishini toping. Zarracha traektoriyasining koordinata o'qlariga proeksiyalarini kompyuter yordamida chizing.
14. Zaryadi  $e$  bo'lgan  $m$  massali norelativistik zarracha skalyar potensiali  $\varphi = k(x^2 - y^2)$  bo'lgan ikki o'lchamli elektrostatik maydondan o'tadi,  $k = \text{const} > 0$  (zaryadlangan zarrachalarni fokuslovchi linza). Zarracha boshlang'ich vaqtidagi koordinatasi  $(x_0, y_0, z_0)$ , tezligi  $v_0 = v_{0z}$ . Zarrachaning harakat qonunini aniqlang.
15. Elektromagnit maydondagi zaryadlangan relyativistik zarrachaning harakat tenglamasini silindrik koordinatalarda yozing.

16. Radiuslari  $R_1$ ,  $R_2$ , ( $R_1 < R_2$ ) bo'lgan silindrik kondensator qoplamlari orasidagi potensiallar farqi  $V$ . Qoplamlar orasida kuchlanganligi silindr o'qiga parallel bo'lgan aksial magnit maydon ( $H$ ) bor. Katod vazifasini bajaruvchi ichki qoplamadan boshlang'ich tezligi nolga teng bo'lgan elektronlar chiqadi. Magnit maydon ta'sirida elektronlarning traektoriyasi buriladi. Qoplamlar orasida magnit maydon oqimi  $\Phi_c$  qanday bo'lganda, elektronlar anod vazifasini bajaruvchi ikkinchi qoplamaqa yetib borolmaydi.
17. Bir jinsli magnit maydonda harakatlanayotgan zaryadlangan zarracha-ga magnit maydonga perpendikulyar yo'nalishda nomagnit xususiyatiga ega bo'lgan qo'shimcha  $F$  kuch ta'sir qiladi. Qo'shimcha kuch ta'sirida yuzaga kelgan ko'ndalang dreyf tezeligini aniqlang.
18. Chiziqli zichlik  $\chi$  bilan tekis zaryadlangan ip laboratoriya sanoq sistemasiда o'zining uzunligi bo'ylab  $v$  tezlik bilan ko'chmoqda. Ipdan  $r$  masofada joylashgan nuqtaviy zaryad aynan shunday tezlik bilan ipga parallel yo'nalishda harakatlanadi. Zaryadga ip tomonidan ta'sir etuvchi kuchni toping.
19. Zaryad qanday xususiyatlarga ega?
20. Nisbiylik nazariyasida absolyut qattiq jism tushunchasini kiritib bo'lmasligini tushuntiring.
21. Elektromagnit maydondagi zaryad uchun ta'sir integrali nimalarga asosan yozildi?
22. Elektromagnit maydondagi zaryad uchun ta'sir integralini 3- va 4 - o'lchovli ko'rinishda yozing.
23. Elektromagnit maydondagi zaryad uchun Lagranj funksiyasini yozing.  $v \ll c$  holni ko'rib chiqing.
24. Elektromagnit maydondagi zaryad uchun Gamilton funksiyasini yozing.  $p \ll mc$  holni ko'rib chiqing.
25. Maydonda harakatlanayotgan zaryad harakat tenglamasini yozing.
26. Zaryadga ta'sir etuvchi Lorentz kuchi qanday qismlardan iborat?
27. Elektr va magnit maydon nazariyaga qanday yo'sinda kiritiladi?
28. Zaryadni ko'chirishda faqat elektr maydon ish bajaradi. Sababini tu-shuntiring.
29. Elektromagnit maydon tenzorini yozing. U qanday xossalarga ega?
30. Zaryadning harakat tenglamasini 4-o'lchovli ko'rinishda yozing. Elektromagnit maydon tenzorining ko'rinishidan foydalanib, uni 3-o'lchovli ko'rinishga o'tkazing.
31. Maydon potensiallari uchun to'g'ri va teskari Lorentz almashtirish formulalarini yozing.
32. Maydon kuchlanganliklari uchun Lorentz almashtirishlarini yozing.

## 4-bob

# Elektrodinamikaning asosiy tenglamalari

### 4.1 Maksvell–Lorentz tenglamalarining birinchi jufti

Elektromagnit maydon qonunlarini aniqlovchi asosiy tenglamalarni aniqlashga kirishamiz. Vektor analiz kursidan ma'lumki, birorta vektorning divergensiyasi va rotor ma'lum bo'lsa, u aniqlangan hisoblanadi. 3.3 paragrafda biz elektr va magnit maydonga matematik ta'rif bergan edik, ya'ni

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Bu ifodalarning birinchisidan rotor olamiz:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{A}}{\partial t}.$$

O'ng tomondagi birinchi had aynan nolga tengligini hisobga olib elektr maydonni aniqlovchi quyidagi tenglamani olamiz:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (4.1)$$

Bu yerda  $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$  ni hisobga oldik. Bu tenglamadan quyidagi xulosa kelib chiqadi:

*Vaqt bo'yicha o'zgaruvchi magnit maydon uyurmali elektr maydonni yuzaga keltirib chiqaradi.*

Endi magnit maydonni aniqlovchi birinchi tenglamani hosil qilamiz. Buning uchun magnit maydon kuchlanganligidan divergensiya olamiz va  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv 0$  ekanligini hisobga olib quyidagini hosil qilamiz:

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (4.2)$$

Bu tenglama *magnit maydonni hosil qiluvchi manba – magnit zaryadlari yo'qligini ko'rsatadi*. (4.1) va (4.2) – Maksvell–Lorentz tenglamalarining birinchi jufti deyiladi.

Bu tenglamalar hali elektr va magnit maydonni to'liq aniqlamaydi. Birinchidan, yuqorida ta'kidlaganimizdek  $\operatorname{div} \mathbf{E}$  va  $\operatorname{rot} \mathbf{H}$  larni aniqlovchi tenglamalar yo'q, ikkinchidan, (4.1) tenglamada magnit maydonning vaqt bo'yicha o'zgarishi ishtirok etmoqda. Shu vaqtida elektr maydonning vaqt bo'yicha o'zgarishi yuqoridagi tenglamalarda yo'q. Bu masalaga keyinroq qaytamiz.

Endi Maksvell-Lorentz tenglamalarining birinchi juftining integral ko'rinishi hosil qilamiz. Buning uchun (4.2) tenglamaning har ikkala tomonini ixtiyoriy  $V$  hajm bo'yicha integrallaymiz:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{H} dV = 0. \quad (4.3)$$

Bu tenglamaga Ostrogradskiy-Gauss formulasi (A.88) ni tatbiq qilamiz:

$$\oint_S \mathbf{H} dS = 0. \quad (4.4)$$

Vektordan birorta sirt bo'yicha integral ( $\int A dS$ ) shu sirt bo'yicha vektorning *oqimi* deyiladi. (4.4) tenglamaga asosan istalgan berk sirt bo'yicha magnit maydon oqimi nolga tengligi kelib chiqadi. Bunday xossaga ega bo'lgan maydon toza uyurmali deyiladi. Shunday qilib, *magnit maydon uyurmali bo'lib kuch chiziqlari berk chiziqlardan iborat va yopiq sirt bo'yicha uning oqimi nolga teng*.

(4.1) tenglamaning har ikkala tomonini ixtiyoriy  $S$  sirt bo'yicha integrallaymiz:

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{E} dS = - \int_S \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} dS. \quad (4.5)$$

Bu tenglamaning chap tomoniga Stoks formulasi (A.88) ni tatbiq qilamiz:

$$\oint_l \mathbf{E} dl = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{H} dS. \quad (4.6)$$

Bu yerda integrallash sirti vaqt o'tishi bilan o'zgarmaydi deb, vaqt bo'yicha hosila bilan integralning o'rni almashtirildi. Chap tomondag'i integral  $S$  sirtni tortib turuvchi berk kontur bo'yicha olinadi. Berk kontur bo'yicha integral shu vektorning *sirkulyatsiyasi* deyiladi. Elektr

maydon sirkulyatsiyasi shu konturdagi elektr yurutuvchi kuch (EYuK) deyiladi. Shunday qilib: *Konturdagi elektr yurutuvchi kuch shu kontur tortib turgan sirtdan o'tayotgan magnit oqimining vaqt bo'yicha o'zgarishiga teskari ishora bilan proporsional ekan.*

Bu qonun *elektromagnit induksiya* yoki Faradey induksiya qonuni deyiladi. (4.4) va (4.5) Maksvell–Lorentz birinchi juft tenglamalarining integral ko'rinishini beradi.

Maksvell–Lorentz tenglamalarining birinchi jufti (4.1) ni va (4.2) ni elektromagnit maydon tensori (3.33) dan foydalanib to'rt o'lchovli ko'rinishda ham yozish mumkin. Misol sifatida (4.1) tenglamaning  $x$  o'qiga proeksiyasini to'rt o'lchovli belgilashlarda yozamiz:

$$\operatorname{rot}_x \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \quad \text{yoki} \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0.$$

Bu tenglamani  $E_y = -F_{20}$ ,  $E_z = F_{03}$ ,  $H_x = F_{32}$  va  $y = x^2$ ,  $z = x^3$ ,  $ct = x^0$  ekanligini hisobga olib qayta yozamiz:

$$\frac{\partial F_{03}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{20}}{\partial x^3} + \frac{\partial F_{32}}{\partial x^0} = 0. \quad (4.7)$$

Shunga o'xshash (4.1) tenglamaning  $y$  va  $z$  o'qiga proeksiyalarini va (4.2) tenglamani to'rt o'lchovli belgilashlarda yozamiz:

$$\frac{\partial F_{01}}{\partial x^3} + \frac{\partial F_{30}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x^0} = 0, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial F_{02}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{10}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{21}}{\partial x^0} = 0, \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial F_{32}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{21}}{\partial x^3} = 0. \quad (4.10)$$

(4.7)–(4.10) tenglamalarni umumlashtirib Maksvell–Lorentz tenglamalarining birinchi juftini to'rt o'lchovli ko'rinishda yozish mumkin:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0. \quad (4.11)$$

Bunda har bir had uchinchi rangli antisimetrik tensor bo'lganligi uchun (4.11) ga bitta to'rt o'lchovli vektorni mos keltirish mumkin

$$e^{iklm} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} = 0. \quad (4.12)$$

## 4.2 Zaryadning saqlanish qonuni

Yuqorida ta'kidlaganimizdek (§ 3.1) nisbiylik nazariyasida real o'l-chamlarga ega bo'lgan jism o'lchamsiz nuqta bilan almashtiriladi. Shu sababli zaryadni ham o'lchamsiz deb ko'risimiz kerak. Zaryad fazoda tabiatan diskret taqsimlangan bo'ladi. Ammo, matematik qulaylik uchun biz zaryadning fazodagi real uzlukli taqsimlanishini uzlaksiz taqsimot bilan almashtiramiz. Zaryadlar egallagan sohaning cheksiz kichik  $dV$  hajmida cheksiz kichik  $de$  zaryad joylashgan deb, quyidagi ifodani yozamiz:

$$de(r, t) = \rho(r, t)dV.$$

Bu yerda

$$\rho(r, t) = de(r, t)/dV$$

uzlaksiz taqsimlangan zaryadlar zichligi. Agar zaryadlar harakatsiz bo'lsa, uning zichligi ( $\rho = \rho(r)$ ) faqat koordinataning funksiyasi bo'ladi. Zaryadlar harakatda bo'lsa, u yana vaqtga ham bog'liq bo'ladi ( $\rho = \rho(r, t)$ ).

Zaryad uzlukli taqsimlanganda, u turgan nuqtada zichligi cheksizga, boshqa nuqtalarda esa nolga teng. Berilgan sohadagi to'liq zaryad

$$e = \int de = \int \rho dV = \sum e_a. \quad (4.13)$$

tenglik bilan ifodalanishini e'tiborga olib uzlukli taqsimlangan zaryad zichligini quyidagi ko'rinishda ta'riflaymiz:

$$\rho(r) = \sum e_a \delta(r - r_a). \quad (4.14)$$

Bu yerda  $\delta(r - r_a)$  uch o'lchovli delta funksiya ( ilova qarang),  $r_a$  - zaryad turgan nuqtaga o'tkazilgan radius-vektor, yig'indi ko'rila-yotgan sohadagi barcha nuqtaviy zaryadlar bo'yicha olinadi. Zaryadlar uzlukli taqsimlangan hol uchun zaryad zichligi kabi tok zichligini ham  $\delta$ -funksiya orqali kiritamiz:

$$j(r) = \sum e_a v_a \delta(r - r_a), \quad I = \int j(r) dS, \quad I = \sum e_a v_a. \quad (4.15)$$

Bu yerda  $I$  elektr toki, yoki qisqacha tok deyiladi. Shunday qilib, zaryadlar fazoda qanday (uzlaksiz yoki uzlukli) taqsimlanishidan qat'iy nazар zaryad va tok zichligi tushunchasini kiritish mumkin ekan.

Harakatdagi zaryadlar joylashgan sohada ixtiyoriy  $S$  sirt<sup>1</sup> bilan o'ralgan  $V$  hajmdagi  $e(t) = \int \rho(r, t)dV$  zaryadning vaqt bo'yicha o'zgarishi

$$\frac{\partial e(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho(r, t)dV. \quad (4.16)$$

Bu kattalik manfiy bo'lsa,  $S$  soha ichida zaryadlar kamayashini ko'rsatadi, musbat bo'lsa, ortishini bildiradi. Elektr zaryadlar yo'q bo'lib ketmaydi yoki yangidan paydo bo'lmasligini hisobga olsak, ko'rيلayotgan sohada zaryad miqdorining o'zgarishi  $S$  sirtni zaryadlar kesib o'tishini, ya'ni zaryadlar oqimi - elektr toki mavjudligini ko'rsatadi. Agarda ko'rيلayotgan sohada zaryadlar kamayayotgan bo'lsa, (zaryadlar  $S$  sirtidan tashqariga chiqib ketmoqda), tok

$$\oint j(r, t) dS \quad (4.17)$$

musbat bo'ladi. Teskari holda tok manfiy bo'ladi. Bu kattalik sirtdan vaqt birligida o'tayotgan zaryad miqdoriga teng bo'lganligi uchun (4.16) va (4.17) ifodalarni ishoralarini inobatga olib tenglashtiramiz:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho(r, t)dV = - \oint j(r, t) dS. \quad (4.18)$$

Bu tenglama zaryadning saqlanish qonunini ifodalaydi: *Zaryad boridan yo'q bo'lmaydi va yo'qdan paydo bo'lmaydi, faqat bir sohadan boshqa sohaga ko'chib o'tishi mumkin.*

Ostrogradskiy-Gauss teoremasiga (ilova A.88) asosan (4.18) tenglamaning o'ng tomonidagi berk sirt bo'yicha integraldan hajm bo'yicha integralga o'tamiz:

$$\int \frac{\partial \rho(r, t)}{\partial t} dV = - \int \operatorname{div} j(r, t) dV. \quad (4.19)$$

Bu yerda hajm bo'yicha integral bilan vaqt bo'yicha hosilaning o'rnini almashtirdik. Integrallash hajmi ixtiyoriy bo'lganligi uchun (4.19) tenglamaning o'ng va chap tomonlaridagi integral ostidagi ifodalar bir-biriga teng bo'lishi kerak:

$$\frac{\partial \rho(r, t)}{\partial t} + \operatorname{div} j(r, t) = 0. \quad (4.20)$$

---

<sup>1</sup>Hozircha  $S$  sirt harakatlanmaydi va vaqt o'tishi bilan uning shakli o'zgarmaydi deb hisoblaymiz. Bu masalaga makroskopik elektrodinamikada qaytamiz.

Bu tenglama zaryadning saqlanish qonuni (4.18) ning differensial ko'ri-nishi bo'lib, uzluksizlik tenglamasi deyiladi.<sup>2</sup>

Zarrachaning zaryadi o'zining tabiatiga ko'ra invariant kattalik bo'-lib, sanoq sistemaga bog'liq emas. Uning zichligi esa invariant emas, ammo  $de = \rho dV$  hajm elementi  $dV$  dagi zaryad bo'lganligi uchun invariant bo'ladi. Bu tenglikning har ikkala tomonini  $dx^i$  4-radius-vektorga ko'paytiramiz:

$$dedx^i = \rho dV dx^i = \rho dV dt \frac{dx^i}{dt}. \quad (4.21)$$

Bu tenglikning chap tomoni 4-vektor, o'ng tomonidagi  $dV dt$  invariant bo'lganligi uchun kattalik  $\rho \frac{dx^i}{dt}$  4-vektorni tashkil qiladi. Uni  $j^i$  bilan belgilab 4-tok zichligi deb ataymiz:

$$j^i = \rho \frac{dx^i}{dt}, \quad j^i = (c\rho, \rho v_x, \rho v_y, \rho v_z) = (c\rho, \rho v) = (c\rho, j). \quad (4.22)$$

4-tok zichligining uchta fazoviy tashkil etuvchisi bizga ma'lum bo'lgan uch o'lchovli tok zichligi  $j = v\rho$  ni beradi, vaqt tashkil etuvchi esa  $c\rho$  ga teng.

Uzluksizlik tenglamasini 4-tok zichligidan olingan 4-divergensiya ko'rinishida yozish mumkin:

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0. \quad (4.23)$$

### 4.3 Elektromagnit maydon uchun ta'sir integrali

Nisbiylik nazariyasida erkin zarracha uchun ta'sir integrali  $S_e$  (2.7) ifoda bilan aniqlanadi. Zarrachalar sistemasi uchun uni quyidagi ko'ri-nishda yozamiz:

$$S_e = - \sum mc \int ds. \quad (4.24)$$

---

<sup>2</sup>Zaryadning saqlanish qonunini saqlanuvchi dinamik kattaliklar uchun tatbiq qilish mumkin. Bunda quyidagi "lug'at"dan foydalanish kerak bo'ladi:  $\rho(r, t)$  - zaryad zichligi - saqlanuvchi kattalik zichligi;  $j(r, t)$  - tok (zaryadlar oqimi) zichligi - saqlanuvchi kattalik oqimining zichligi.

Bitta zaryadlangan zarrachaning elektromagnit maydon bilan ta'siri aniqlovchi ta'sir integrali  $\mathcal{S}_{ef}$  (3.3) bilan aniqlanadi. Bu ifodani zaryadlar sistemasi uchun yozamiz:

$$\mathcal{S}_{ef} = - \sum \frac{e}{c} \int A_i dx^i. \quad (4.25)$$

Bu ikkala ifodada yig'indi ko'rileyotgan sohadagi barcha zaryadlar bo'yicha olinadi. Qulaylik uchun zaryadlarning tartib raqamini ko'rsatuvchi indekslar yozilmadi. (4.25) ifodani uzluksiz taqsimlangan zaryadlar uchun yozamiz. Bunda oldingi mavzu natijalaridan foydalanamiz:

$$\mathcal{S}_{ef} = -\frac{1}{c} \int \rho dV \int A_i dx^i = -\frac{1}{c} \int \rho \frac{dx^i}{dt} A_i dV dt \quad (4.26)$$

yoki 4-tok zichligi orqali quyidagi ko'rinishda yozish mumkin

$$\mathcal{S}_{ef} = -\frac{1}{c^2} \int j^i A_i dV d(ct) = -\frac{1}{c^2} \int j^i A_i d\Omega. \quad (4.27)$$

Bu yerda  $d\Omega = dV cdt$  4-o'lchovli hajm elementi.

Zaryad va maydondan tashkil topgan sistemani to'liq aniqlash uchun yuqoridaq ikki ta'sir integraliga maydonni aniqlovchi ta'sir integrali  $\mathcal{S}_f$  ni qo'shish kerak. Ya'ni

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_e + \mathcal{S}_{ef} + \mathcal{S}_f. \quad (4.28)$$

Maydon uchun ta'sir integralini umumiyligi prinsiplar asosida yozamiz. Birinchidan, ta'sir integrali ostidagi kattalik faqat elektromagnit maydonga tegishli bo'lib, maydonni yagona tarzda aniqlanishi, ikkinchidan, maydon uchun yoziladigan tenglamalarning chiziqliliginini ta'minlashi va nihoyat u invariant bo'lishi kerak. Bularning har birini alohida va shu bilan biga bir-biriga bog'liq holda ko'rib chiqamiz.

Agar ta'sir integralini yozishda maydon potensiallari bevosita ishtirot etsa, turli kolibrovka bilan aniqlangan potensiallar orqali yozilgan ta'sir integrali turlicha bo'lib, maydonni yagona tarzda aniqlamaydi. Bunga asosan ta'sir integrali ifodasida faqat elektromagnit maydon kuchlaganliklari ishtirot etadi.

Elektromagnit maydonni aniqlovchi tenglamalarning chiziqli bo'lishi, elektromagnit maydon superpozitsiya prinsipiga bo'ysunishini ta'minlab beradi. Bu prinsipga ko'ra, zaryadlar sistemasi hosil qilayotgan

maydon, alohida olingan zaryadlar hosil qilayotgan maydonlar yig'indi-siga teng bolishi kerak:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_N = \sum \mathbf{E}_a,$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \dots + \mathbf{H}_N = \sum \mathbf{H}_a.$$

Agar zaryadlar uzlusiz taqsimlangan bo'lsa, yig'indi integral bilan almashtiriladi. Bu prinsip o'rinni bo'lishi, maydonni aniqlovchi tenglamalar *chiziqli* bo'lishini ta'minlab beradi. Haqiqatan ham matematikadan ma'lumki, chiziqli differensial tenglamalarning o'zaro bog'liq bo'lman gan yechimlarining yig'indisi yana shu tenglamaning yechimi bo'ladi. Bu qoida fizikadagi superpozitsiya prinsipining aynan o'zidir. Maydon uchun tenglamalar ta'sir integralini variatsiyalash yo'li bilan olinadi. Bunda variatsiyalanayotgan o'zgaruvchining darajasi bittaga kamayadi. Demak, ta'sir integralida maydon kuchlanganliklarining ikkinchi dara-jalari ishtirok etishi lozim.

Ta'sir integrali barcha inersial sanoq sistemalarda elektromagnit qonunlarini birday ifodalanishini ta'minlash uchun integral ostida elektromagnit maydon kuchlanganliklaridan tuzilgan invariant kattalik yotishi kerak.

Yuqoridagi talablarni qanoatlantiruvchi invariant kattalik - haqiqiy skalyar yagona tarzda  $F^{ik}F_{ik}$  korinishda bo'lishi kelib chiqadi. Yuqoridagi mulohazalarни birlashtirsak elektromagnit maydonni aniqlovchi ta'sir integrali

$$S_f = \lambda \int F^{ik}F_{ik}dVdt \quad (4.29)$$

ko'rinishga ega bo'lishi aniq bo'lib qoladi. Bu yerda hajm bo'yicha integral butun fazo bo'yicha, vaqt boyicha integral esa berilgan ikki vaqt momentlari oralig'ida olinadi.  $\lambda$  qandaydir o'zgarmas kattalik. Integral ostida  $F^{ik}F_{ik} = 2(H^2 - E^2)$  turibdi. Elektromagnit maydon tenzorining ta'rifi (3.31) ga ko'ra  $E^2$  ning tarkibida  $(\partial A / \partial t)^2$  ifoda ishtirok etadi. Bu kattalik, shu bilan birga, ta'sir interaliga  $E^2$  musbat ishora bilan kirishi kerak. Aks holda  $S_f$  minimumga ega bo'lmaydi. Chunki,  $A$  ning vaqt bo'yicha o'zgarishini istagancha katta qilib olish mumkin. Demak,  $\lambda < 0$  bo'lishi kerak.  $\lambda$  ning son qiymati birliklar sistemasi tanlashga bog'liq bo'lib, xususan Gauss birliklar sistemasida  $\lambda = -1/16\pi$ . Nihoyat, maydonni aniqlovchi ta'sir integrali quyidagi

ko'rinishda yozamiz:

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c} \int F^{ik} F_{ik} d\Omega. \quad (4.30)$$

Endi zaryadlar va maydonni bir butun holda aniqlaydigan ta'sir integralini yozishimiz mumkin

$$\mathcal{S} = - \sum mc \int ds - \frac{1}{c^2} \int j^i A_i d\Omega - \frac{1}{16\pi c} \int F^{ik} F_{ik} d\Omega. \quad (4.31)$$

Elektromagnit maydonga kiritilgan zaryadning harakat tenglamasini olishda zaryad tashqi maydonga ta'sir qilmaydigan darajada kichik bo'lishi talab qilingan edi. Endi ta'sir integrali (4.31) da zaryad bu ma'noda kichik bo'lishi shart emas. Shu sababli (4.31) ga kirgan  $A_i$  va  $F_{ik}$  haqiqiy maydonni aks ettiradi.

#### 4.4 Maksvell–Lorentz tenglamalarining ikkinchi jufti

Elektr va magnit maydon kuchlanganligi uchun yana ikkita tenglmani odatdagidek variatsion prinsip asosida olamiz. Bunda variatsiyalanuvchi umumlashgan koordinata sifatida ta'sir integrali (4.31) da maydon potensiallarini olamiz. Ularni zaryadlar zichligi  $\rho(\mathbf{r}, t)$  va tok zichligi  $j(\mathbf{r}, t)$  bilan to'liq aniqlangan deb hisoblaymiz. Ta'sir integrali (4.31) ning bиринчи hadida maydon kattaliklari ishtirok etmaydi, shuning uchun uning variatsiyasi nolga teng. Ikkinchi hadda  $j^i(r, t)$  variatsiyalanmaydi. Bularni hisobga olib, ta'sir integralining variatsiyasini yozamiz:

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int \left[ \frac{1}{c} j^i \delta A_i + \frac{1}{8\pi} F^{ik} \delta F_{ik} \right] d\Omega = 0. \quad (4.32)$$

Bu yerda  $F^{ik} \delta F_{ik} \equiv F_{ik} \delta F^{ik}$  ekanligi hisobga olindi. Elektromagnit maydon tensori potensiallar orqali (3.31) ifoda bilan aniqlanishini hisobga olib quyidagini yozamiz:

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int \left[ \frac{1}{c} j^i \delta A_i + \frac{1}{8\pi} F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} \delta A_k - \frac{1}{8\pi} F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_i \right] d\Omega. \quad (4.33)$$

Ikkinci hadda  $\{i, k\} \rightarrow \{k, i\}$  almashtiramiz va  $F^{ki} = -F^{ik}$  hisobga olib (4.33) ni qayta yozamiz:

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int \left[ \frac{1}{c} j^i \delta A_i - \frac{1}{4\pi} F^{ik} \frac{\partial \delta A_i}{\partial x^k} \right] d\Omega. \quad (4.34)$$

Ikkinci integralni  $x^k$  koordinata bo'yicha bo'laklab integrallaymiz:

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int \left[ \frac{1}{c} j^i + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \right] \delta A_i d\Omega - \frac{1}{4\pi c} \int F^{ik} \delta A_i dS_k. \quad (4.35)$$

Bu yerda

$$\frac{1}{4\pi c} \int F^{ik} \delta A_i dS_k$$

to'rt o'lchovli fazoda  $S_k$  giper sirt bo'yicha integral bo'lib, uning qiyamatlari  $x^k$  bo'yicha chegarada olinadi. Agar  $x^k \Rightarrow x, y, z$  bo'lsa, chegara cheksizda yotadi. Maydon cheksizda nolga intiladi. Agar  $x^k = ct$  bo'lsa, chegara boshlang'ich va oxirgi vaqt momentlari bo'lib, unda variatsiya  $\delta A_i$  nolga teng. Demak, (4.35) dagi oxirgi had nolga teng ekan. Natijada quyidagini olamiz:

$$\frac{1}{c} \int \left[ \frac{1}{c} j^i + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \right] \delta A_i d\Omega = 0. \quad (4.36)$$

Bu yerda  $\delta A_i$  variatsion prinsipga ko'ra aynan nolga teng emas, integral nolga teng bo'lishi uchun faqat qavs ichidagi ifoda nolga teng bo'lishi mumkin, ya'ni

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i. \quad (4.37)$$

Bu tenglamani komponentalarda yozamiz.  $i = 1$ :

$$\frac{\partial F^{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^3} = -\frac{4\pi}{c} j^1. \quad (4.38)$$

Yoki uch o'lchovli belgilashlarda

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c} j_x. \quad (4.39)$$

Qolgan ikkita ( $i = 2, 3$ ) tenglama bilan bu tenglamani birlashtirib bitta vektor tenglama ko'inishda yozamiz:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (4.40)$$

$i = 0$  hol uchun quyidagi tenglamani olamiz:

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho. \quad (4.41)$$

Tenglamalar (4.40)–(4.41) Maksvell–Lorentz tenglamalarining ikkinchi juftini tashkil qiladi, (4.37) esa bu tenglamalarning to'rt o'lchovli ko'inishini beradi.

Bu tenglamalarni integral ko'inishda yozamiz. Buning uchun avval (4.41)-tenglamani ixtiyoriy hajm bo'yicha integrallaymiz va chap tomoniga Ostrogradskiy–Gauss teoremasini qo'llaymiz:

$$\oint \mathbf{E} dS = 4\pi e, \quad e = \int \rho dV, \quad (4.42)$$

$e$  sirt o'rabi turgan sohadagi to'liq elektr zaryadi. Bu tenglama eletrodinamikada Gauss teoremasi deb yuritiladi: *Yopiq sirt bo'yicha elektr maydon oqimi, shu sirt bilan chegaralangan sohadagi to'liq zaryad miqdoriga proporsional bo'lib, ularning joylashishiga bog'liq emas.* Proporsionallik koeffitsienti gauss birliklar sistemasida  $4\pi$  ga teng.

Maksvell tajriba natijalarini tartibga solib ularni matematik tenglamalar ko'inishida yozganda (4.40)-tenglamada oxirgi had bo'lмаган. Shu hol uchun uni ixtiyoriy sirt bo'yicha integrallaymiz va chap tomoniga Stoks formulasini qo'llaymiz:

$$\oint \mathbf{H} dl = \frac{4\pi}{c} I, \quad I = \int \mathbf{j} dS. \quad (4.43)$$

Bu tenglamaga ko'ra uyurmali magnit maydonni elektr toki hosil qilishi va unuig sirkulyatsiyasi kontur tortib turgan sirdan oqayotgan tok kuchi  $I$  ga proporsionalligi kelib chiqadi. Ushbu ta'rif Ersted qonuni deyiladi. Proporsionallik koeffitsienti gauss birliklar sistemasida  $4\pi/c$  ga teng.

Maksvellning fikricha tabiat qonunlari, xususan elektr va magnetizm qonunlari simmetriyaga ega bo'lishi va tugallangan shaklda yozilishi kerak. Ya'ni, tenglamalarda elektr va magnit maydon teng huquqli

asosda ishtirok etishi kerak. Tajriba natijalarini umumlashtirib yozilgan tenglamalarda magnit maydon kuchlanganligining vaqt bo'yicha hosilasi ishtirok etadi (4.1), elektr maydon kuchlanganligining vaqt bo'yicha hosilasi esa ishtirok etmaydi. Bu holat o'sha davrda (4.40) tenglamaga oxirgi hadni "qo'l"da qo'shib qo'yish bilan hal qilindi. Bu tenglamaning integral ko'rinishini yozamiz:

$$\oint \mathbf{H} dl = \frac{4\pi}{c} I + \frac{4\pi}{c} I_s, \quad I_s = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} dS. \quad (4.44)$$

Bu yerda  $I_s$  siljish toki deyiladi. Uning zichligi

$$\mathbf{j}_s = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (4.45)$$

Siljish toki bevosita zaryadlarning harakati bilan bog'liq emas. Bunday hadning tenglamalarda bo'lishini XIX asrning o'rtalarida tajribalarda kuzatish mumkin emas edi. Chunki o'sha davrda elektr maydonning o'zgarish chastotasi kichik bo'lib, uning o'zgarishi bilan bog'liq bo'lgan siljish tokini payqash imkonini bermas edi. Faqat 1888 yilda Gers elektromagnit to'lqinlarning mavjudligini tajribada ko'rsatish bilan siljish tokining realligini isbotladi.

Bu yerda shuni ta'kidlash lozimki, nisbiylik nazariyasiga va umumiyligi prinsiplarga asoslangan nazariyada siljish toki tenglamalarda o'zo'zidan paydo bo'ldi.

Shunday qilib, berk kontur bo'yicha magnit maydon sirkulyatsiyasi shu kontur tortib turgan sirtdan oqayotgan haqiqiy (zaryadlarning harakati bilan bog'liq bo'lgan tok) va siljish toklarining yig'indisini  $4\pi/c$  ga ko'paytmasiga teng. Bu qonun boshqacha qilib ta'riflanadi: *Uyurmali magnit maydonni haqiqiy tok bilan bir vaqtida o'zgaruvchi elektr maydon vujudga keltiradi.*

## 4.5 Elektromagnit maydon energiyasining saqlanish qonuni

Maksvell-Lorentz tenglamalaridan kelib chiqadigan birinchi muhim xulosa - elektromagnit maydon energiyaga ega ekanligidir. Elektromagnit maydon energiyasini topish uchun zaryadlar va maydondan iborat bo'lgan yopiq sistemani ko'ramiz. Zaryadlarga ta'sir etuvchi kuchlarning  $V$  hajmda va vaqt birligida bajargan ishini topamiz. Zaryadlar

uzluksiz taqsimlangan deb bu ishni yozamiz:

$$\frac{dW}{dt} = \int (\mathbf{F}\mathbf{v}) dV = \int \rho \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \right) \mathbf{v} dV . \quad (4.46)$$

Bu yerda

$$\mathbf{F} = \rho \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \right) \quad (4.47)$$

birlik hajmdagi zaryadga ta'sir etuvchi Lorentz kuchi. Magnit maydon bajargan ish nolga teng bo'lganligi uchun

$$\frac{dW}{dt} = \int \rho \mathbf{v} \mathbf{E} dV = \int \mathbf{j} \mathbf{E} dV . \quad (4.48)$$

Maksvell-Lorentz tenglamalaridan foydalanib bajarilgan ish ifodasining ko'rinishini o'zgartiramiz. (4.40) tenglamadan tok zichligini maydon kuchlanganliklari orqali ifodalab (4.48) ni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\int \mathbf{j} \mathbf{E} dV = \frac{c}{4\pi} \int \mathbf{E} \left( \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) dV . \quad (4.49)$$

Bu tenglamani elektr va magnit maydon bo'yicha simmetrik ko'rinishga keltiramiz. Bining uchun (4.1) tenglamadan foydalanamiz:

$$\int \mathbf{j} \mathbf{E} dV = \frac{c}{4\pi} \int \mathbf{E} \left( \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) dV - \frac{c}{4\pi} \int \mathbf{H} \left( \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) dV . \quad (4.50)$$

Bu yerda o'xshash hadlarni guruhlarga birlashtiramiz:

$$\frac{c}{4\pi} \int (\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E}) dV = - \frac{c}{4\pi} \int \operatorname{div} [\mathbf{EH}] dV = - \frac{c}{4\pi} \oint [\mathbf{EH}] dS ,$$

$$\frac{1}{4\pi} \int \left( \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) dV = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi} dV .$$

Bu ifodalarni hisobga olib (4.50) tenglamani qayta yozamiz:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi} dV = - \int \mathbf{j} \mathbf{E} dV - \frac{c}{4\pi} \oint [\mathbf{EH}] dS , \quad (4.51)$$

Olingan tenglamani tahlil qilamiz. Integrallash hajmini cheksizga intiltiramiz. Bunda o'ng tomondagi ikkinchi hadda integrallash sirti

cheksizda yotadi. Agar elektr va magnit maydon kuchlanganliklari cheksizda  $1/r$  dan tezroq nolga intilsa integral nolga teng bo'ladi. Shu integralni baholaymiz:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \oint [EH] dS \sim \lim_{r \rightarrow \infty} EH \oint dS \sim \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^{2+2\alpha}} r^2 \sim \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^{2\alpha}} \rightarrow 0.$$

Natijada quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV = - \int jE dV . \quad (4.52)$$

Bu tenglamaning o'ng tomonida zaryadlar ustida vaqt birligida bajargan ish turibdi. Ish energiyaning o'zgarishi hisobiga bajarilishini inobatga olsak, chap tomonida vaqt birligida energiyaning o'zgarishi turishi kerak. (4.52) ning chap tomoni faqat maydon kuchlanganliklariiga bog'liq bo'lganligi uchun zaryadlarning o'zaro joylashishiga bog'liq emas. Shuning uchun u zaryadlarning o'zaro ta'sir potensial energiyasi bo'la olmaydi. Fazoning zaryadlardan holi bo'lgan sohasida ham noldan faqrlidir. Bu fikrlargan

$$U = \int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV \quad (4.53)$$

elektromagnit maydon energiyasi,

$$U_0 = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \quad (4.54)$$

esa uning zichligi ekanligi kelib chiqadi.

Ikkinci tomondan ma'lumki, zaryadlar ustida bajarilgan ish ularning kinetik energiyasining o'zgarishiga teng. Bitta zaryad uchun yozilgan (3.22) tenglamani zaryadlar sistemasi uchun yozamiz:

$$\frac{d}{dt} \sum \mathcal{E}_{kin} = \sum evE \Rightarrow \frac{d}{dt} \int \mathcal{E}_{kin} dV = \int jE dV . \quad (4.55)$$

Bu natijani (4.52) tenglamaga qo'yib, quyidagi ajoyib natijani olamiz:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left( \frac{E^2 + H^2}{8\pi} + \mathcal{E}_{kin} \right) dV = 0 \quad (4.56)$$

yoki

$$\int \left( \frac{E^2 + H^2}{8\pi} + \mathcal{E}_{kin} \right) dV = \text{const.} \quad (4.57)$$

*Shunday qilib, maydon va zaryadlardan tashkil topgan yopiq sistemaning to'liq energiyasi saqlanar ekan.*

Yana (4.51) tenglamaga qaytamiz. Ko'rileyotgan sohada bajarilgan ish nolga teng bo'lsin deb faraz qilamiz. Bu holda (4.51) tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV = -\frac{c}{4\pi} \oint [EH] dS. \quad (4.58)$$

Bu tenglamaning o'ng tomoniga Ostrogradskiy-Gauss teoremasini qo'l-laymiz va integrallash hajmi ixtiyoriy ekanligini hisobga olib

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2 + H^2}{8\pi} + \frac{c}{4\pi} \operatorname{div}[EH] = 0 \quad (4.59)$$

tenglamani hosil qilamiz. Belgilash kiritamiz:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [EH]. \quad (4.60)$$

Bu belgilashda (4.59) uzlusizlik tenglamasi ekanligi yaqqol ko'rindi:

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0. \quad (4.61)$$

Zaryadning saqlanish qonuni mavzusida ta'kidlaganimizdek uzlusizlik tenglamasi saqlanish qonunini ifodalaydi. Bu yerda  $U_0$  - saqlanuvchi kattalikning zichligi - elektromagnit maydon energiyasining zichligi,  $\mathbf{S}$  - saqlanuvchi kattalik oqimining zichligi - elektromagnit maydon energiyasi oqimining zichligi bo'lib *Poynting vektori* deyiladi. Shunday qilib, umumiy holda

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -Q - \Sigma, \quad (4.62)$$

elektromagnit maydon energiyasining saqlanish qonuni bo'lib quyidagi-cha ta'riflanadi: *Elektromagnit maydon energiyasining o'zgarishi zaryadlar ustida bajarilgan ish bilan ko'rileyotgan hajmni o'rabi turgan sirtdan o'tayotgan energiya oqimining yig'indisiga teskari ishora bilan teng.*

$Q = \int jE dV$  sistema zaryadlari ustida vaqt birligida bajarilgan ish,  $\Sigma = \oint \mathbf{S} d\mathbf{S}$  sistemani o'rab turuvchi yopiq sirtdan vaqt birligida oqib chiqadigan energiya miqdori. Bu qoidani umumiy ko'rinishda ta'riflangan energiyaning saqlanish qonuni bilan taqqoslasak, energiya oqimi yangi ko'rinishdagi energiyani nurlanish energiyasi ekanligini ko'ramiz. Bu masalani ushbu kitobning 8- bobida batafsil muhokama qilamiz.

Nihoyat elektromagnit maydon energiyasining saqlanish qonunini differensial ko'rinishini keltiramiz:

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} = -jE - \operatorname{div} \mathbf{S}. \quad (4.63)$$

Shunday qilib, elektromagnit maydon energiyaga ega ekanligini isbotladik.

## 4.6 Maydon potensiallari uchun tenglamalar

Elektromagnit maydon potensiallari uchun tenglamalarni keltirib chiqaramiz. Buning uchun elektr va magnit maydon kuchlanganliklari ning potensiallar orqali ifodalarini

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Maksvell-Lorentz tenglamalaridan (4.40) ga qo'yamiz:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right).$$

Bu yerda  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$  ni hisobga olib, yuqoridagi tenglamani qayta yozamiz:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \operatorname{grad} \left( \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \quad (4.64)$$

Shunday hisoblarni (4.41) tenglama ustida bajaramiz:

$$\Delta \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = -4\pi \rho. \quad (4.65)$$

(4.64) va (4.65) elektromagnit maydon potensiallari  $\mathbf{A}$ ,  $\varphi$  uchun aniqlanishi lozim bo'lgan tenglamalar sistemasini beradi.

Bu tenglamalar o'zaro bo'lganligi uchun ulardan foydalanish noqulayliklar tug'diradi. Ma'lumki, potensiallarni tanlashda ma'lum darrajada ixtiyoriylik mavjud (maydonning kalibrovka invariantligi). Ixtiyoriylik ko'lami (3.49) va (3.51) almashtirishlar bilan aniqlanishi bizga ma'lum. U yerdagi potensiallarni kalibrovkalovchi  $\psi(r, t)$  funksiyani shunday tanlaymizki, natijada qiyidagi shart bajarilsin:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 . \quad (4.66)$$

Maydon potensiallari uchun yozilgan bu differensial munosabat *Lorens sharti*, unga mos kelgan kalibrovka esa - *Lorens kalibrovkasi* deyiladi. Shu shartga asosan (4.64) va (4.65) tenglamalar

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} , \quad (4.67)$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho . \quad (4.68)$$

ko'rinishga o'tadi. Bu tenglamalarning har biri *Dalamber tenglamasıdır*.

Elektromagnit maydon potensiallari uchun topilgan tenglamalar Maksvell-Lorentz tenglamalariga butunlay ekvivalent. Uzluksizlik tenglamasini qanoatlantiruvchi zaryad zichligi  $\rho(r, t)$  va tok zichligi  $\mathbf{j}(r, t)$  berilganda (4.67) va (4.68) tenglamalarni integrallab vektor va skalyar potensiallarni aniqlash mumkin. Maydon kuchlanganliklari esa (3.19) va (3.20) ifodalar bilan aniqlanadi.

Ba'zi masalalarni o'rganishda Lorens kalibrovkasidan boshqa kalibrovkadan foydalanish qulay bo'ladi. Masalan, Lorens shartining o'rniiga

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad (4.69)$$

shartni olish mumkin. Vektor potensial bo'ysunuvchi bu differensial munosabat *Kulon sharti* va bu bilan bog'langan kalibrovka *Kulon kalibrovkasi* deyiladi. Bu holda (4.64) va (4.65) tenglamalar quyidagicha yoziladi:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} , \quad (4.70)$$

$$\Delta \varphi = -4\pi\rho . \quad (4.71)$$

Ko'ramizki, bu kalibrovkada skalyar potensial elektrostatik maydon potensiali kabi aniqlanadi. Lorenz yoki Kulon kalibrovkasiga bo'ysungan potensiallar yordamida topilgan maydon kuchlanganliklari  $\mathbf{E}$  va  $\mathbf{H}$  bir xil bo'ladi.

Maydon potensiallarini aniqlovchi Dalamber tenglamalarining to'rt o'lchovli ko'rinishda yozish uchun Maksvell-Lorentz tenglamalarining ikkinchi juftining 4-o'lchovli ko'rinishi (4.37) ni potensiallar orqali yoza-miz:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial A^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_k} \right) = -\frac{4\pi}{c} j^i . \quad (4.72)$$

Bu yerda birunchi hadni Lorenz shartining to'rt o'lchovli shakli

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0 . \quad (4.73)$$

bilan taqqoslab, u nolga teng ekanligini ko'ramiz. Natijada quyidagi tenglama hosil bo'ladi:

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} = \frac{4\pi}{c} j^i . \quad (4.74)$$

Bu potensiallar uchun (4.67) va (4.68) tenglamalarning to'rt o'lchovli ko'rinishini beradi.

## 4.7 4-bobga oid masala va savollar

1. Maksvell-Lorentz tenglamalari (4.1) va (4.40) uchun (4.2) hamda (4.41) tenglamalar universal boshlang'ich shart deb qarash mumkinligini ko'r-sating.
2. Maksvell-Lorentz tenglamalarining ikkinchi juftidan zaryadning saqlanish qonunini ifodalovchi uzluksizlik tenglamasini hosil qiling.
3. Faqat Maksvell-Lorentz tenglamalaridan foydalanib elektromagnit maydon energiyasining saqlanish qonunini topoing.
4. Elektr va magnit maydon kuchlanganliklarining uchta fazoviy Furye amplitudalari

$$\mathbf{E}_k(t) = \int \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad \mathbf{H}_k(t) = \int \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}$$

uchun Maksvell-Lorentz tenglamalarini yozing.

5. Elektr va magnit maydon kuchlanganliklarining Furye amplitudalari

$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) = \int \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t} dt, \quad \mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}) = \int \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t} dt$$

uchun Maksvell-Lorentz tenglamalarini yozing.

6. Birlik yuzadan chekli vaqt ichida elektromagnit maydon g'ayloni oqib o'tgan bo'lsin. Shu maydon energiyasi oqimi  $S$  ning spektral zicnligi  $S_\omega$  ni elektr  $\mathbf{E}_\omega$  va magnit  $\mathbf{H}_\omega$  maydon Furye garmonikalari orqali ifodalang.  $S_\omega$  quyidagi normirovka sharti bilan aniqlangan:

$$\Sigma = \int_0^\infty S_\omega d\omega = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty [\mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{H}(t)] dt.$$

7. Saqlanish qonunlari (4.62), (4.63) o'rini bo'lishini ta'minlovchi, ammo (4.60) dan farq qiluvchi elektromagnit maydon energiyasi oqimining zichligi  $S$  ni yana qanday aniqlash mumkin?
8. Dalamber tenglamalarini va Lorenz shartini potensiallarning Furye komponentalari uchun yozing.
9. Lorenz shartining bajarilishini ta'minlovchi kalibrlovchi funksiya  $\psi(r, t)$  bir jinsli Dalamber tenglamasini qanoatlantirishini ko'rsating.
10. Maksvell-Lorentz tenglamalarining birinchi juftining differentesial va integral ko'rinishlarini yozing.
11. Maksvell-Lorentz tenglamalarining birinchi juftiga ta'rif bering.
12. Maksvell-Lorentz tenglamalarining birinchi juftining 4-o'lchovli ko'rinishini yozing.
13. Maksvell-Lorentz tenglamalarining birinchi juftining 4-o'lchovli ko'rinishidan 3-o'lchovli ko'rinishga o'ting.
14. Nuqtaviy zaryadlar sistemasining zichligi qanday yoziladi?
15. Nuqtaviy zaryadlarning tok zichligi qanday yoziladi?
16. Uzlusizlik tenglamasini yozing va ta'riflang.
17. Uzlusizlik tenglamasining 4-o'lchovli ko'rinishini yozing.
18. 4-tok zichligi qanday taskhil etuvchilarga ega?
19. Maydon bilan zaryadlarning o'zaro ta'sirini aniqlovchi ta'sir integrali 4-tok zichligi orqali qanday yoziladi?
20. Elektromagnit maydon uchun ta'sir integralini yozing va bunday yozilishining sababini tushuntiring.
21. Maksvell-Lorentz tenglamalarining ikkinchi juftining 4-o'lchovli ko'rinishini yozing.
22. Maksvell-Lorentz tenglamalarining ikkinchi juftining 4-o'lchovli ko'rinishidan 3-o'lchovli ko'rinishdagi tenglamalarni hosil qiling.

23. Gauss teoremasini ta'riflang.
24. Maksvell elektrodinamikaning asosiy tenglamalarida tajribalarda kuza-tilmagan qanday had bo'lishini bashorat qilgan?
25. Elektromagnit maydon energiyasining saqlanish qonunini ta'riflang.
26. Elektromagnit maydon energiyasi oqimini qanday tushunasiz?
27. Elektromagnit maydon impulsining saqlanish qonunini ta'riflang.
28. Elektromagnit maydon impulsining zichligi Poynting vektori bilan qan-day bog'langan?
29. Lorenz shartini (kalibrovkasi) yozing.
30. Elektromagnit maydon potensiallari uchun Dalamber tenglamalarini yozing.

## 5-bob

# Elektrostatika

### 5.1 Elektrostatik maydon

Harakatsiz zaryadlar hosil qilayotgan maydonga *elektrostatik maydon* deyiladi. Zaryadlar harakatsiz bo'lganligi uchun ko'rيلayotgan sis temada tok nolga teng va maydon kuchlanganliklarining vaqt bo'yicha o'zgarishlari ham nolga teng bo'ladi. Bu holda Maksvell-Lorentz teng lamalari quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (5.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (5.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad (5.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho. \quad (5.4)$$

Ikkinci va uchinchi tenglamalardan

$$\mathbf{H} = 0, \quad (5.5)$$

ya'ni harakatsiz zaryadlar hech qanday magnit maydon hosil qilmasligi kelib chiqadi. Bu holda elektr maydon

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi \quad (5.6)$$

ifoda bilan aniqlanadi. Bu ifodani (5.1) tenglamaga qo'ysak u aynan qanoatlanadi. (5.4) tenglamaga qo'yish natijasida quyidagi tenglamani olamiz:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \quad (5.7)$$

Bu tenglamaga *P u a s s o n* tenglamasi deyiladi. Zaryadlar yo'q bo'lgan fazoda  $\rho = 0$ , ya'ni bo'shliqda (5.7) tenglama Laplas tenglamasiga o'tadi:

$$\Delta\varphi = 0. \quad (5.8)$$

Bu tenglamaga asosan elektr maydon na maksimumga, na minimumga ega. Haqiqatan ham,  $\varphi$  ekstremumga ega bo'lishi uchun uning koordinatalar bo'yicha birinchi tartibli hosilalari nolga teng bo'lishi, ikkinchi tartibli hosilalari  $\partial^2\varphi/\partial x^2$ ,  $\partial^2\varphi/\partial y^2$  va  $\partial^2\varphi/\partial z^2$  ishoralari bir xil bo'lishi kerak. Bunday bo'lishi mumkin emas, aks holda (5.8) tenglama qanoatlanmaydi.

Tinch turgan zaryadlar hosil qilgan elektr maydon uyurmasiz boilib, uning kuch chiziqlari zaryadlarda boshlanib zaryadlarda tugaydi. Ma'lumki, elektr maydon kuch chiziqlari musbat zaryadlarda boshlanadi va manfiy zaryadlarda tugaydi deb shartli ravishda qabul qilin-gan.

Elektrostatikaning asosiy masalasi zaryadlar taqsimoti  $\rho(\mathbf{r})$  berilganda maydon potensiali  $\varphi(\mathbf{r})$  va kuchlanganligi  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  larni topishdan iboratdir. Buning uchun Puasson tenglamasini berilgan chegaraviy shasrtlar bilan yechish kerak. Xususan, cheksiz fazodagi masala uchun potensial kamida  $1/r^2$  kabi nolga intilishi kerak. Demak, Puasson tenglamasining yechimi

$$r \rightarrow \infty \quad \text{da} \quad \varphi \rightarrow 0 \quad (5.9)$$

shartni qanoatlantirishi kerak. Bu shartni qanoatlantiruvchi Puasson tenglasining yechimini umumiy holda yozish mumkin. Quyida bu yechimi isbotsiz keltiramiz:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (5.10)$$

Bu yerda  $\mathbf{r}$  va  $\mathbf{r}'$  mos ravishda koordinata boshidan kuzatish nuqtasiga va  $dV'$  hajm elementidagi zaryadga o'tkazilgan radius-vektorlar,  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  zaryaddan kuzatish nuqtasigacha bo'lgan masofa. Umuman olganda Puasson tenglamasining (5.10) korinishdagi yechimi uch karrali integralni hisoblashni talab qiladi. Bunday integralni hisoblash ko'p hollarda qiyinchliklar tug'diradi. Ba'zan uni to'g'ridan-to'g'ri hisoblab bo'lmaydi. Bunday hollarda masalani yechishning taqrifiyo yo'llari qidiriladi, yoki maxsus metodlar ishlab chiqiladi.

Zaryadlar hajm, sirt va chiziq bo'yicha taqsimlangan hol uchun Puasson tenlamasining yechimini quyida ko'rinishda yoziladi:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int \frac{\sigma(\mathbf{r}') dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int \frac{\chi(\mathbf{r}') dl'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (5.11)$$

Bu yerda  $\rho(\mathbf{r}')$ ,  $\sigma(\mathbf{r}')$  va  $\chi(\mathbf{r}')$  mos ravishda zaryadlarning hajmiy, sirtiy va chiziqli zichligi. Zaryadlar qanday taqsimlanganligiga qarab (5.11) ifodada mos had elektr maydonga hissa qo'shadi.

## 5.2 Kulon qonuni

Oldingi mavzuda olingan natijalarni nuqtaviy zaryadlar sistemasi uchun tatbiq qilamiz. Shu bilan birga Kulon qonunini aniqlaymiz.  $N$  ta nuqtaviy zaryayadlardan tashkil topgan sistemaning maydonini aniqlaymiz. Uning zichligi

$$\rho(\mathbf{r}') = \sum_{a=1}^N e_a \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_a) \quad (5.12)$$

ko'rinishda yozamiz. Bu yerda  $\mathbf{r}_a$  zaryad  $e_a$  turgan nuqtaga o'tkazilgan radius-vektor. Bu ifodani (5.10) ga qo'yib, nuqtaviy zaryadlarning maydon potensialini topamiz:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum e_a \int \frac{\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_a) dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum \frac{e_a}{R_a}. \quad (5.13)$$

Bu yerda  $R_a = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|$  zaryad  $e_a$  dan kuzatish nuqtasigacha bo'lgan masofa. Endi potensialni bitta zaryad uchun yozamiz:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{e}{R}. \quad (5.14)$$

$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ . Maydon kuchlanganligini aniqlaymiz:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r}) = \frac{e}{R^3} \mathbf{R}. \quad (5.15)$$

Nuqtaviy zaryad hosil qilayotgan maydonga kiritilgan sinov zaryadi  $e_0$  ga ta'sir etuvchi kuch

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = e_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{e_0 e}{R^3} \mathbf{R}. \quad (5.16)$$

Bu bizga ma'lum bo'lgan Kulon qonunini beradi.

Zaryadlar sistemasining elektrostatik maydonini aniqlash uchun (5.13) dan gradient olamiz:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum \frac{e_a}{R_a^3} \mathbf{R}_a. \quad (5.17)$$

### 5.3 Multipol momentlar

Zaryadlar soni katta bo'lganda (5.13) va (5.17) ifodalar katta sondagi hadlar yig'indisidan iborat bo'ladi va amalda ulardan foydalanib bo'lmay qoladi. Bunday hollarda masalani taqrifiy yechish lozimligini 5.1 - mavzuda ta'kidlagan edik. Zaryadlar soni katta bo'lgan sistemalar maydonini o'rganishda kuzatish nuqtasi yetarlicha uzoq masofada deb qarasak, (5.13) va (5.17) ifodalarni soddalashtirish mumkin bo'ladi.

Kuzatish nuqtasi yetarlicha uzoqda joylashgan bo'lsin ( $|r| \gg L$ ). Bu yerda  $L$  zaryadlar egallagan sohaning chiziqli o'lchami. Koordinata boshini zaryadlar egallagan sohaga joylashtirsak,  $\max |r'| \leq L$  va yuqoridagi shartga asosasan

$$|r| \gg |r'|. \quad (5.18)$$

Demak, elektrostatik maydon kuchlanganligi va potensialini aniqlovchi (5.13), (5.17) ifodalarda kichik parametr  $|r_a|/|r| \ll 1$  (zaryadlar uzuksiz taqsimlangan holda  $|r'|/|r| \ll 1$ ) istirok etmoqda. Bunday hollarda masalani taqrifiy yechish uchun kichik parametrning darajalari bo'yicha ifodalar qatorga yoyiladi. Qatorda talab qilinayotgan aniqlikni ta'minlab beruvchi hadlar saqlab qolinadi. Aniqlik darajasi berilmagan bo'lgan hollarda qatordagi hadlar masala ma'nosidan kelib chiqib o'rganiladi.

Avval nuqtaviy zaryadlar mydonini yetarlicha uzoq masofalarda o'rganamiz.<sup>1</sup> (5.13) ifodadagi bitta hadni qator ko'rinishda yozamiz:

$$\frac{1}{|r - r_a|} = \frac{1}{r} - \sum_{\alpha} x_{a\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} x_{a\alpha} x_{a\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \frac{1}{r} + \dots . \quad (5.19)$$

Bu yerda  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ ,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ . (5.19) qatorni (5.13) ifodaga qo'yib, quyidagini topamiz:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{r} \sum e_a - \sum_{\alpha} \left( \sum_a e_a x_{a\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \frac{1}{r} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \left( \sum_a e_a x_{a\alpha} x_{a\beta} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \frac{1}{r} + \dots = \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Zaryadlar uzuksiz taqsimlanganda, ularga tegishli koordinatalarni  $r' = \{x', y', z'\}$  nuqtaviy bo'lganda  $r_a = \{x_a, y_a, z_a\}$  bilan belgilaymiz.

$$= \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots . \quad (5.20)$$

Hosil bo'lgan hadlarni har birini ko'rib chiqamiz. Birinchi had - kichik parametr bo'yicha nolinchi yaqinlashishda maydon potensialini beradi:

$$\varphi_0 = \frac{1}{r} \sum e_a = \frac{e}{r}. \quad (5.21)$$

Bundan ko'rinish turibdiki,  $\varphi_0$  zaryadi sistemaning to'liq zaryadiga teng bo'lgan va koordinata boshiga joylashtirilgan bitta nuqtaviy zaryadning maydon potensialiga teng ekan. Maydon zaryadlar taqsimotiga bog'liq emas ekan. Shunday qilib, zaryadlar sistemasining elektr maydon kuchlanganligi bu yaqinlashishda bitta nuqtaviy zaryadning maydon kuchlanganligiga teng bo'ladi:

$$E = -\text{grad} \left( \frac{e}{r} \right) = \frac{er}{r^3}. \quad (5.22)$$

Bu yaqinlashishda maydon potensiali va kuchlanganligi sferik simmetriyaga ega.

Sistema elektroneytral bo'lsa, ( $\sum e_a = 0$ ), nolinchi yaqinlashishda maydon potensiali va kuchlanganligi nolga teng bo'ladi va qator (5.20) ikkinchi haddan boshlanadi.

### 5.3.1 Dipol momenti

Ifoda (5.20) dagi ikkinchi hadni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\varphi_1 = - \sum_{\alpha} \left( \sum_a e_a x_{a\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \frac{1}{r} = - \left( \sum_a e_a r_a \right) \text{grad} \frac{1}{r} = \frac{rd}{r^3}. \quad (5.23)$$

Bu yerda

$$d = \sum_a e_a r_a \quad (5.24)$$

zaryadlar sistemasining elektr momenti yoki elektr dipol momenti, qisqacha *dipol* momenti deb ataladi. Zaryadlarning taqsimoti uzlusiz bo'lganda

$$d = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV' \quad (5.25)$$

Yetarlicha uzoq masofalarda birinchi yaqinlashishda maydon potensiali (5.23) zaryadlar sistemasining dipol momenti bilan to'liq aniqlanganligi uchun uni “*dipol*” yaqinlashishi deb ataymiz. Bu yaqinlashishda maydon kuchlanganligi

$$E = -\operatorname{grad} \left( \frac{dr}{r^3} \right) = \frac{3r(rd) - dr^2}{r^5} = \frac{3n(nd) - d}{r^3}. \quad (5.26)$$

Bu yerda  $n$  kuzatish nuqtasiga o'tkazilgan radius-vektor yo'nalishidagi birlik vektor. (5.26) dan ko'rinish turibdiki, dipol yaqinlashishda maydon asimmetriyaga ega. Agar  $z$  o'qining yo'nalishini dipol momentining yo'nalishi bilan mos tushadigan qilib olsak, qutb koordinatalarida

$$\varphi = \frac{d}{r^2} \cos \theta, \quad (5.27)$$

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{2d}{r^3} \cos \theta, \quad \text{radial tashkil etuvchi} \quad (5.28)$$

$$E_\theta = -\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{d}{r^3} \sin \theta. \quad \text{tangensial tashkil etuvchi} \quad (5.29)$$

Dipol momentining xossasini ko'rib chiqamiz. Koordinata boshini  $O$  nuqtadan  $O'$  ( $\overrightarrow{OO'} = l$ ) nuqtaga ko'chirishda dipol momenti qanday o'zgarishini ko'rib chiqamiz:

$$d = \sum_a e_a r_a = \sum_a e_a (r'_a + l) == d' + l \sum_a e_a. \quad (5.30)$$

Bu yerda  $r_a = r'_a + l$ ,  $d'$  - zaryadlar sistemasining  $O'$  nuqtaga nisbatan dipol momenti. Shunday qilib, zaryadlar sistemasining dipol momenti koordinata boshini qayerda olishga bog'liq ekan. Xususan, zaryadlar sistemasi elektroneytral bo'lganda uning dipol momenti koordinata boshini ko'chirishga bog'liq bo'lmaydi. Bu xossa dipol momentini hisoblashlarda qulayliklar tug'diradi.

Miqdorlari teng ishoralari qarama-qarshi bo'lgan ikkita nuqtaviy zaryaddan tashkil topgan sistema elementar dipol yoki qisqacha *dipol* deyiladi. Uning momenti

$$d = e_1 r_1 + e_2 r_2 = e_1 (r_1 - r_2). \quad (5.31)$$

Elektroneytral zaryadlar sistemasiga “*katta*” dipol deb qarash mumkin. Buning uchun zaryalarni musbar (+) va manfiy (-) ga ajratib dipol momentini hisoblaymiz:

$$\mathbf{d} = \sum_a e_a^+ \mathbf{r}_a^+ + \sum_a e_a^- \mathbf{r}_a^- = \mathbf{R}^+ \sum_a e_a^+ + \mathbf{R}^- \sum_a e_a^- . \quad (5.32)$$

Bu yerda  $\mathbf{R}^+$  musbat va  $\mathbf{R}^-$  manfiy zaryadlarning “zaryadlar markazlari” bo‘lib quyidagicha aniqlanadi:

$$\mathbf{R}^+ = \frac{\sum_a e_a^+ \mathbf{r}_a^+}{\sum_a e_a^+}, \quad \mathbf{R}^- = \frac{\sum_a e_a^- \mathbf{r}_a^-}{\sum_a e_a^-} . \quad (5.33)$$

Agar sistema elektroneytral bo‘lsa, ( $\sum_a e_a^+ = -\sum_a e_a^- = e$ ),

$$\mathbf{d} = e(\mathbf{R}^+ - \mathbf{R}^-) . \quad (5.34)$$

Bu ifodani (5.31) bilan taqqoslab, haqiqatan ham elektroneytral sistemi “*katta elementar*” dipol deb qarash mumkinligiga ishonch hosil qilamiz.

### 5.3.2 Kvadrupol momenti

Shunday elektroneytral sistamalar borki, ularning dipol momenti nolga teng bo‘ladi. Masalan, dipol momentlari qiymat jihatdan bir-biriga teng va qarama-qarshi yo‘nalgan ikki sistemani bir-biriga cheksiz yaqin joylashtirsak, ularning umumiy dipol momenti nolga teng bo‘ladi. Bu holda zaryadlar sistemasining maydoni (5.20) qatorda  $\varphi_2$  had bilan aniqlanadi. Umuman olganda bu had zaryadlar sistemasining simmetriya xossalari o‘rganishda muhim ahamiyat kasb etadi. Shu had bilan bog‘langan maydonni ko‘rib chiqamiz:

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \left( \sum_a e_a x_{a\alpha} x_{a\beta} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{r} . \quad (5.35)$$

Bu yerda ( $e_a x_{a\alpha} x_{a\beta}$ ) lar ikkinchi rangli tenzor elementlarini beradi. Ularning to‘plami zaryadlar sistemasining kvadrupol momenti tenzori deyiladi:

$$D_{\alpha\beta} = \sum_a e_a x_{a\alpha} x_{a\beta} . \quad (5.36)$$

Bunda potensial

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} D_{\alpha \beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{r} \quad (5.37)$$

ko'inishga o'tadi. Bu ifodadan foydalanib kvadrupol tenzorining ko'rinishini o'zgartiramiz. Kvadrupol momenti tenzori ifodasidan  $\sum r_a^2 \delta_{\alpha \beta} / 3$  kattalikni ayiramiz. Buning natijasida potensial  $\varphi_2$  o'garmaydi. Haqiqatan ham,  $\alpha \neq \beta$  bo'lsa, qo'shimcha had nolga teng bo'ladi.  $\alpha = \beta$  bo'lganda esa

$$\frac{r_a^2}{3} \sum_{\alpha=\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{r} = \frac{r_a^2}{3} \Delta \left( \frac{1}{r} \right) = 0$$

chunki  $1/r$  Laplas tenglamasining fundamental yechimidir. Bu qo'shimcha bilan (5.36) ni quyidagi ko'inishda yozish mumkin ekan:

$$D_{\alpha \beta} = \frac{1}{3} \sum_a e_a \left( 3x_{a\alpha} x_{a\beta} - r_a^2 \delta_{\alpha \beta} \right) . \quad (5.38)$$

Bu kattalikni yana kvadrupol momenti tenzori deb ataymiz. Agar zaryadlar uzlusiz taqsimlangan bo'lsa, (5.38) da yig'indidan integralga o'tish kerak, ya'ni

$$D_{\alpha \beta} = \frac{1}{3} \int \rho \left( 3x'_\alpha x'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha \beta} \right) dV' . \quad (5.39)$$

Kvadrupol momenti tenzorining ta'riflari (5.36)-(5.39) dan ko'ramizki, u simmetrik ekan:

$$D_{\alpha \beta} = D_{\beta \alpha} , \quad (5.40)$$

Shu tenzorning elementlarini (5.38) ga muvofiq yozamiz:

$$D_{\alpha \beta} = \begin{pmatrix} \sum \frac{e_a}{3} \left( 3x_a^2 - r_a^2 \right) & \sum e_a x_a y_a & \sum e_a x_a z_a \\ \sum e_a x_a y_a & \sum \frac{e_a}{3} \left( 3y_a^2 - r_a^2 \right) & \sum e_a y_a z_a \\ \sum e_a x_a z_a & \sum e_a y_a z_a & \sum \frac{e_a}{3} \left( 3z_a^2 - r_a^2 \right) \end{pmatrix} . \quad (5.41)$$

Bu tenzorning to'qqizta elementidan faqat oltitasi oz'aro bo'g'lanmagan. Shu bilan birga diogonal elementlarining yig'indisi nolga teng

$$D_{\alpha \alpha} = D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = 0 . \quad (5.42)$$

bo'lganligi uchun uning o'zaro bog'lanmagan elementlarining soni yana bittaga kamayadi.

Ma'lumki, har qanday simmetrik tenzorni koordinata o'qlarini burish bilan dioganal ko'rinishga (asosiy o'qlarga) keltirish mumkin. Ya'ni,

$$D_{xx} = D_1 = \sum \frac{e_a}{3} (3x_a^2 - r_a^2), \quad (5.43)$$

$$D_{yy} = D_2 = \sum \frac{e_a}{3} (3y_a^2 - r_a^2), \quad (5.44)$$

$$D_{zz} = D_3 = \sum \frac{e_a}{3} (3z_a^2 - r_a^2). \quad (5.45)$$

Agar zaryadlar taqsimoti sferik simmetriyaga ega bo'lsin. U vaqtida

$$D_1 = D_2 = D_3. \quad (5.46)$$

demak, (5.42) ga asosan

$$D_1 = D_2 = D_3 = 0. \quad (5.47)$$

Sferik simmetriyaga ega bo'lgan zaryadlar sistemasining kvadrupol momenti nolga teng ekan.

Zaryadlar sistemasi silindrik simmetriyaga ega bo'lsin. Ya'ni, birorta o'qqa (masalan, z o'qiga) nisbatan zaryadlar simmetrik taqsimlangan bo'lsin. U vaqtida

$$D_1 = D_2 \neq D_3 : \quad (5.48)$$

Endi  $D_3 = D$  deb belgilasak, (5.48) ga asosan

$$D_1 = D_2 = -D/2. \quad (5.49)$$

Shunday qilib, silindrik simmetriyaga ega bo'lgan zaryadlar sistemasining kvadrupol momenti tenzori bitta kattalik  $D$  bilan xarakterlanadi. Bu kattalikning ishorasi kvadrupol momentining ishorasi deb yuritiladi.

Masalan, kvadrupol momentining ishorasi musbat ( $D > 0$ ) bo'lsin, u holda (5.48) ga asosan

$$2D > D_1 + D_2.$$

Bunda zaryadlar  $z$  o'qi bo'ylab cho'zilib taqsimlangan bo'ladi (rotor). Agar  $D < 0$  bo'lsa, zaryadlar  $z$  o'qi bo'ylab siqilib taqsimlangan bo'ladi (disk).

Bir komponentali momentga ega bo'lgan kvadrupolning potensiali ni (5.37) va (5.49) ga muvofiq aniqlaymiz:

$$\varphi_2 = \frac{D}{4} \left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{1}{r} = \frac{D}{4} \left( \frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right). \quad (5.50)$$

Simmetriya o'qi ( $z$  o'qi) bilan kuzatish nuqtasining radius-vektori  $r$  orasidagi burchak  $\theta$  bilan belgilansa:  $\cos \theta = z/r$ ,

$$\varphi_2 = \frac{3D}{4r^3} (3 \cos^2 \theta - 1). \quad (5.51)$$

Bu formula tatbiqiy ahamiyatga ega, masalan, atom yadrosining shakli o'r ganilganda uning kvadrupol momentini bilish g'oyat muhimdir. Atom yadrosining kvadrupol momentga ega bo'lishi, uning shakli sferadan farq qilishini bildiradi.

Yuqoridagilarga o'xshash (5.20) ifodadagi keyingi hadlarni ko'rishni davom ettirsak, yanada yuqori tartib momentlarni hosil qilamiz. Shunday qilib ko'rdikki, bir-biriga nisbatan biror masofaga siljitelgan ikkita qarama-qarshi ishorali zaryadlar sistemasi dipolni hosil qiladi. Bir-biriga nisbatan biror masofaga siljitelgan qarama-qarshi yo'nalishga ega bo'lgan ikkita dipol kvadrupolni hosil qiladi. Bir-biriga nisbatan biror masofaga siljitelgan va mos ravishda qarama-qarshi bo'lgan ikkita kvadrupol sistema *oktupol* ni hosil qiladi. Bu yerda keltirilgan ayrim sistemalar  $n$ -tartibli multipol deb ataluvchi sistemaning xususiy hol-laridir. Zaryad - nolinchchi tartibli multipol, dipol - birinchi tartinli multipol, kvadrupol - ikkinchi tartibli multipol va hokazo. Bu fikrlarni umumlashtirib quyidagi xulosaga kelamiz. Bir-biriga nisbatan biror masofaga siljitelgan va mos zaryadlari qarama-qarshi bo'lgan ikkita  $n$ -tartibli multipol sistema ( $n+1$ )-tartibli multipolni hosil qiladi. Bularga asosan  $n$ -tartibli multipolni zaryadlar soni  $2^n$  bo'ladi.

Nolinchi, dipol va kvadrupol yaqinlashishlarda olingan natijalarga ko'ra kuzatish nuqtasi cheksizga intilganda elektrostatik maydon potensiali va kuchlanganligi mos ravishda

$$\varphi_0 \sim r^{-1}, \quad E_0 \sim r^{-2}; \quad (5.52)$$

$$\varphi_1 \sim r^{-2}, \quad E_1 \sim r^{-3}; \quad (5.53)$$

$$\varphi_2 \sim r^{-3}, \quad E_2 \sim r^{-4}; \quad (5.54)$$

$$\varphi_n \sim r^{-n}, \quad = \quad E_n \sim r^{-(n+1)}. \quad (5.55)$$

tarzda nolga intiladi.

## 5.4 Elektrostatik maydon energiyasi

Madomiki, tinch turgan zaryadlar atrofida magnit maydon hosil bo'lmash ekan, bunday zaryadlar hosil qiladigan maydon energiyasi faqat elektr maydon energiyasiga teng bo'ladi. Elektrostatik maydon energiyasi (4.53) ga muvofiq quyidagicha yoziladi:

$$U_E = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV. \quad (5.56)$$

Bu energiyani uch xil talqin qilish mumkin.

Zaryadlar sistemasi bir necha bo'laklardan iborat bo'lsin deb faraz qilamiz. Har bir qism hosil qilgan maydonlar yig'indisi superpozitsiya prinsipiga asosan umumiy maydonga teng bo'ladi. Ya'ni,

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i. \quad (5.57)$$

U vaqtida (5.56) ga muvofiq

$$U_E = \frac{1}{8\pi} \sum_{ij} \int \mathbf{E}_i \mathbf{E}_j dV \quad (5.58)$$

yoki

$$U_E = \sum_{ij} U_E^{(ij)}. \quad (5.59)$$

Bu yerda

$$U_E^{(ij)} = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E}_i \mathbf{E}_j dV. \quad (5.60)$$

Agar  $i = j$  bo'lsa,

$$U_E^{(ii)} = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E}_i^2 dV. \quad (5.61)$$

Bu energiya  $i$ - maydonning xususiy energiyasi deyiladi.  $i \neq j$  bo'lganda

$$U_E^{(ij)} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i \neq j} \int \mathbf{E}_i \mathbf{E}_j \, dV. \quad (5.62)$$

Bu  $i$ - va  $j$ - maydonlarning o'zaro ta'sir energiyasini aniqlaydi. (5.62) ifodani yozishda  $\mathbf{E}_i \mathbf{E}_j = \mathbf{E}_j \mathbf{E}_i$  ekanligini hisobga oldik.

Yuqoridagilardan ayonki xususiy energiya doimo musbat bo'ladi. O'zaro ta'sir energiyaning ishorasi esa  $\mathbf{E}_i$  va  $\mathbf{E}_j$  maydonlar orasidagi burchakka bog'liq bo'lib, musbat yoki manfiy bo'lishi mumkin.

Shunday qilib, (5.56) bilan aniqlangan elektrostatik maydon energiyasi, (5.59) ga muvofiq, xususiy va o'zaro ta'sir energiyalarning yig'inidisidan iboratdir.

Endi elektrostatik maydon energiyasining boshqacha talqinini ko'rib chiqamiz. Elektrostatik maydon uchun

$$\mathbf{E} = - \operatorname{grad} \varphi. \quad (5.63)$$

Bunga asosan (5.56) ni quyidagicha yozamiz:

$$U_E = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \mathbf{E} \, dV = - \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \operatorname{grad} \varphi \, dV. \quad (5.64)$$

Ma'lumki,

$$\varphi \operatorname{div} \mathbf{E} = - \operatorname{div}(\varphi \mathbf{E}) + \mathbf{E} \operatorname{grad} \varphi.$$

bunga muvofiq (5.64) ni qayta yozamiz:

$$U_E = \frac{1}{8\pi} \int \varphi \operatorname{div} \mathbf{E} \, dV - \frac{1}{8\pi} \int \operatorname{div}(\varphi \mathbf{E}) \, dV. \quad (5.65)$$

Ikkinci integralga Ostrogradskiy-Gauss teoremasini qo'llaymiz va hajm bo'yicha integraldan yopiq sirt bo'yicha integralga o'tamiz:

$$\int \operatorname{div}(\varphi \mathbf{E}) \, dV = \oint \varphi \mathbf{E} \, dS.$$

Bu yerda yopiq sirt bo'yicha integral nolga teng bo'lishini ko'rsatish mumkin. Hajm bo'yicha integral butun fazo bo'yicha olinganligi uchun integrallash sirti cheksizda yotadi. Bunda sirt bo'yicha integral ostidagi funksiyalarning cheksizdag'i qiymatlari olinishi kerak. Ma'lumki,

$r \rightarrow \infty$  da elektrostatik maydon potensiali va kuchlanganligi quyidagi tarzda nolga intiladi:

$$\varphi \sim \frac{1}{r}, \quad E \sim \frac{1}{r^2}, \quad S \sim r^2.$$

Bularni e'tiborga olsak, yopiq sirt boyicha olingan integral haqiqatan ham nolga tenligiga ishonch hosil qilish mumkin.

Maksvell-Lorentz tenglamalariga ( $\operatorname{div} E = 4\pi\rho$ ) muvofiq (5.65) ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$U_E = \frac{1}{2} \int \varphi(r)\rho(r) dV. \quad (5.66)$$

Bu yerda potensial  $\varphi$  ning o'rniga (5.10) ifodani qo'yib, uni qayta yozamiz:

$$U_E = \frac{1}{2} \int \frac{\rho(r)\rho(r')}{|r - r'|} dV dV'. \quad (5.67)$$

Bu natijani nuqtaviy zaryadlar sistemasi uchun tatbiq qilamiz. Nuqtaviy zaryadlar uchun  $\rho(r) = \sum e_a \delta(r - r_a)$  ekanligini inobatga olsak, (5.66) dagi hajm bo'yicha integrallar oson hisoblanadi. Natijada

$$U_E = \frac{1}{2} \sum_a e_a \varphi(r_a). \quad (5.68)$$

Bu yerda  $\varphi(r_a)$  barcha nuqtaviy zaryadlarning "a" zaryad turgan nuqtada hosil qilayotgan maydon potensiali ekanligini inobatga olib, energiya uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$U_E = \frac{1}{2} \sum_{ab} \frac{e_a e_b}{r_{ab}}. \quad (5.69)$$

Bu ifoda bilan birga (5.67) zaryadlarning ta'sir energiyasini beradi.

Olingan natijani bitta zaryadlangan zarracha va u hosil qilayotgan maydon uchun tatbiq qilsak, zaryadlangan zarracha  $e\varphi/2$  ga teng bo'lган "xususiy" potensial energiyaga ega bo'lishi kelib chiqadi.  $\varphi$  zaryad turgan nuqtadagi maydon potensiali. Ikkinchini tomondan maxsus nisbiy nazariyasida zarrachani niqtaviy deb olish kerakligini bilamiz. Shu bilan birga nuqtaviy zaryad o'zi turgan nuqtada hosil qilayotgan

maydon potensiali cheksizga intiladi. Shunday qilib, biz o'rganayotgan klassik elektrodinamikaga asosan nuqtaviy zaryad cheksiz xususiy energiyaga va shu bilan birga cheksiz massaga ( $mc^2$ ) ega bo'lishi kelib chiqadi. Bunday fizikaga zid bo'lган natija klassik elektrodinamikaning asosiy prinsiplarining tatbiq qilish sohasi chegaralanganligini ko'rsatadi.

Elementar zarrachalarning bunday fizik ma'nosi bo'lмаган cheksiz xususiy energiyaga ega bo'lishi, zarrachaning nuqtaviy deb ko'rish bilan bog'liq. Bunga asosan mantiqiy va tugallangan nazariya sifatida elektrodinamika juda kichik masofalarda ichki qrama-qarshilikka ega ekan. Bunday kichik masofalarning tartibi nimaga teng? Bu savolga javob berishda ikkita narsaga e'tiborni qaratish kerak. Birinchisi, elektronning xususiy elektromagnit energiyasi uning tinch holatdagi energiyasi  $mc^2$  ga teng bo'lishi kerak. Ikkinchisi, elektron qandaydir chekli  $r_0$  radiusga ega deb qarasak (haqiqatda ham shunday), uning xususiy potensial energiyasi  $e\varphi_0 = e^2/r_0$  ga teng bo'lisi kelib chiqadi. Ikkala energiya bitta zarrachaga tegishli ekanini inobatga olib,  $r_0$  uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$r_0 \sim \frac{e^2}{mc^2} \simeq 2.8 \cdot 10^{-13} \text{ cm.} \quad (5.70)$$

Bu kattalik uzunlik o'lchov birligiga ega bo'lib, elektronning "*klassik radiusi*" deb ataladi va klassik elektrodinamikaning elektronga tatbiq qilish chegarasini aniqlaydi. Amalda klassik nazariya  $r_0$  dan ancha katta masofalarda o'rinli bo'lmay qoladi. Masalan, kvant effektlar

$$r_{kv} \sim \frac{\hbar}{mc} \simeq 3.9 \cdot 10^{-11} \text{ cm.} \quad (5.71)$$

masofalarda namoyon bo'la boshlaydi.

Elektrostatik maydon energiyasini yana bir talqinini ko'rib chiqamiz. Fazoning  $r_1$  nuqtasida  $e_1$  zaryad joylashtirilgan bo'lsin. Cheksizdag'i  $e_2$  zaryadni fazoning  $r_2$  nuqtasiga ko'chiramiz. Bunda birinchi zaryad hosil qilgan maydon tashqi kuchni hosil qiladi deb qarasak, ikkinchi zaryadni ko'chirishda shu kuchga qarshi bajarilgan ish

$$A_{12} = e_2[\varphi_1(r_2) - \varphi_1(\infty)] = e_2\varphi_1(r_2). \quad (5.72)$$

Birinchi zaryadning cheksizdag'i potensiali nolga teng. Ikkinci tomonidan birinchi zaryadning  $r_2$  nuqtadagi potensiali

$$\varphi_1(r_{12}) = \frac{e_1}{r_{12}}. \quad (5.73)$$

Natijada bajarilgan ish

$$A_{12} = \frac{e_1 e_2}{r_{12}}. \quad (5.74)$$

Endi  $e_1$  va  $e_2$  zaryadlar hosil qilayotgan maydonning  $r_3$  nuqtasiga cheksizdan  $e_3$  zaryadni ko'chiramiz. Bunda bajarilgan ish

$$A_{123} = \frac{e_1 e_3}{r_{13}} + \frac{e_2 e_3}{r_{23}}. \quad (5.75)$$

Bu jarayonni davom ettirib,  $N$  zaryaddan iborat bo'lgan sistemani hosil qilish uchun bajarilgan to'liq ish

$$A = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \frac{e_a e_b}{r_{ab}}. \quad (5.76)$$

Bu ifodaning o'ng tomoni (5.69) bilan bir xil. Shunday qilib, elektrostatik maydon energiyasi bir vaqtning o'zida zaryadlarning o'zaro ta'sir energiyasi hamda zaryadlarni cheksizdan ko'chirib kelishda bajarilgan ish deb qarash mumkin ekan.

## 5.5 Tashqi maydonning zaryadlar sistemasiga ta'siri

Tashqi elektrostatik maydondagi zaryadlar sistemasining energiyasini va unga ta'sir qilayotgan kuchlarni aniqlaymiz. Tashqi maydon potensiali  $\varphi$  va maydon kuchlanganligi  $\mathbf{E}$  bo'lsin. Bular bir-biri bilan bizga ma'lum bo'lgan  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$  ifoda bilan bog'langan. Tashqi maydonga kiritilgan zaryadlarning maydon kuchlanganligi  $\mathbf{E}'$  va potensiali  $\varphi'$  bo'lsin. Tashqi maydon bilan unga kiritilgan zaryadlarning o'zaro ta'sir energiyasi, (5.62) ga muvofiq ikki maydonning o'zaro ta'sir energiyasi sifatida yoziladi:

$$U = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \mathbf{E}' dV. \quad (5.77)$$

Bu energiyani yana quyidagicha yozish mumkin

$$U = -\frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E}' \text{grad } \varphi dV = \int \rho' \varphi dV = \sum e_a \varphi(r_a). \quad (5.78)$$

Bu ifodani hosil qilishda (5.66) va (5.68) larni olishdagi amallarni bajaridik. Bu yerda  $\varphi(r_a)$  tashqi maydonning  $e_a$  zaryad turgan nuqtadagi potensiali. Tashqi maydonga kiritilgan bitta nuqtaviy zaryadning energiyasini (5.78) ga muvofiq

$$U = e_0 \varphi(r_0). \quad (5.79)$$

Koordinata boshini zaryadlar egallagan sohaga joylashtirib (5.78) ifodani ko'rib chiqamiz. Zaryadlar egallagan soha yetarlicha kichik bolsin. Bu holda  $|r_a| \ll |r|$  shart o'rinli bo'ladi. Bu shart o'rinli bo'l-ganda tashqi maydonni zaryadlar egallagan sohada sekin o'zgaradi deb olish mumkin. Boshqa tomondan bu shart multipol momentlarni ko'r-ganimizdag'i shartning o'zidir. Demak, zaryadlar sistemasining tashqi maydondagi energiyasini aniqlovchi (5.78) ifodani  $r_a$  ning darajalari bo'yicha qatorga yoyish mumkin. Ya'ni

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \dots . \quad (5.80)$$

Bu yerda birinchi had

$$U_0 = \varphi_0 \sum e_a = e\varphi_0. \quad (5.81)$$

$\varphi_0 = \varphi(0)$  tashqi maydonning koordinata boshidagi potensiali. Bu ifodani (5.79) bilan solishtirib quyidagi xulosaga kelamiz. Zaryadlar sistemasining tashqi maydondagi energiyasi nolinchi yaqinlashishda, koordinata boshiga joylashtirilgan zaryadi sistemaning to'liq zaryadiga teng bo'lgan bitta nuqtaviy zaryadning energiyasiga tengligi kelib chiqadi.

Endi (5.80) qatordagi ikkinchi hadni ko'ramiz:

$$U_1 = \left( \frac{\partial \varphi(r_a)}{\partial r_a} \right)_{r_a=0} \sum e_a r_a = \text{grad } \varphi_0 \sum e_a r_a = d \text{grad } \varphi_0. \quad (5.82)$$

$E_0 = -\text{grad } \varphi_0$  tashqi maydonning koordinata boshidagi kuchlanganligi ekanligini e'tiborga olsak, (5.82) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$U_1 = -E_0 d. \quad (5.83)$$

Bunga ko'ra (5.80) qatordagi ikkinchi had maydon bilan zaryadlar sistemasining dipol yaqinlashishidagi o'zaro ta'sir energiyasini, ya'ni maydon bilan dipolning o'zaro ta'sir energiyasini beradi.

(5.80) qatordagi hadlarni tahlil qilishni davom ettirsaq, keyingi tartibdagi multipol yaqinlashishlardagi o'zaro ta'sir energiyalarini olamiz. Biz faqat ikkita had bilan kifoyalanib, maydon tomonidan zaryadlar sistemasiga ta'sir etayotgan kuchni yozamiz:

$$\mathbf{F} = -(\text{grad } U)_0 = \mathbf{E}_0 \sum e_a + \text{grad}(\mathbf{E}_0 \mathbf{d}). \quad (5.84)$$

Agar sistamaning to'liq zaryadi nolga teng bo'lsa, qator ikkinchi haddan boshlanadi:

$$\mathbf{F} = (\text{grad}(\mathbf{E}\mathbf{d}))_0. \quad (5.85)$$

Elektroneytral sistemalar uchun dipol monenti koordinataga bog'liq bo'limgan o'zgarmas vektor ekanligini nazarda olsak, (5.85) ning o'ng tomonini soddalashtirish mumkin. Haqiqatan,

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{E}\mathbf{d}) = d_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + d_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + d_z \frac{\partial E_z}{\partial x}.$$

Lekin  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$  ekanligini inobatga olib, quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:  $\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial z}$ . U vaqtida

$$F_x = d_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + d_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + d_z \frac{\partial E_x}{\partial z} = (\mathbf{d} \text{grad}) E_x.$$

Shunga o'xshash

$$F_y = (\mathbf{d} \text{grad}) E_y, \quad F_z = (\mathbf{d} \text{grad}) E_z.$$

Yuqorida olingan natijalarni umumlashtirsak,

$$\mathbf{F} = (\mathbf{d} \text{ grad}) \mathbf{E}_0 = (\mathbf{d} \nabla) \mathbf{E}_0 \quad (5.86)$$

hosil bo'ladi. Shunday qilib, bu yaqinlashishishda kuch maydon kuchlanganlididan olingan hosilalarning koordinata boshidagi qiymati bilan ifodalanishini topdik.

Agar tashqi maydon, uni hosil qilayotgan zaryadlar sistemasining dipol momenti  $\mathbf{d}_1$  bilan aniqlansa ( $\sum e_{1a} = 0$ ), ta'sir energiyasi uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$U_0 = e_2 \frac{d_1 R}{R^2}, \quad e_2 = \sum e_{2a}. \quad (5.87)$$

Bu yerda  $\mathbf{R}$  dipoldan zaryadga o'tkazilgan radius-vektor,  $e_2$  ikkinchi sistemaning to'liq zaryadi.

Birinchi sistema dipoldan ( $e_1 = 0$ ) tashkil topgan bo'lsa, va ikkinchi sistemaning maydonini ham dipol yaqinlashishida olsak ( $e_2 = 0$ ), ularning ta'sirlashish energiyasi

$$U_1 = \frac{(d_1 d_2) R^2 - 3(d_1 \mathbf{R})(d_2 \mathbf{R})}{R^5}. \quad (5.88)$$

Bu yerda  $d_2$  ikkinchi sistemaning dipol momenti,  $\mathbf{R}$  birinchi dipoldan ikkinchi dipolga o'tkazilgan radius-vektor.

Bu qatorni umuman olganda davom ettirish mumkin, ammo ifodalar juda kattalasib ketishini inobatga olib yuqoridagi natijalar bilan chegaralanamiz.

## 5.6 5-bobga oid masala va savollar

1. Hajmiy zichlik  $\rho$  bilan bir tekis zaryadlangan shar hosil qilayotgan maydon potensiali va kuchlangaligini shar ichidagi va tashqarisidagi ixtiyoriy nuqtalarda aniqlang. Shar radiusi  $R$ .
2. Hajmiy zichlik  $\rho$  bilan bir tekis zaryadlangan chesiz doiraviy silindr hosil qilayotgan maydon potensiali va kuchlangaligini silindr ichidagi va tashqarisidagi ixtiyoriy nuqtalarda aniqlang. Silindr radiusi  $R$ .
3. Chiziqli zichlik  $\chi$  bilan bir tekis zaydlangan cheksiz uzun ip hosil qilayotgan maydon potensiali va kuchlanganligini ipdan  $r$  masofadagi nuqtalarda aniqlang.
4.  $z$  o'qidagi  $-a < z < a$  kecmada  $e$  zaryad tekis taqsimlangan. Shu zaryad hosil qilayotgan maydon potensiali va kuchlanganligini aniqlang.
5. Oldingi masalada ko'rilgan bir tekis zaryadlangan kesma uchun ekvipotensial sirtning ko'rinishini toping.
6. Sirtiy zichlik  $\sigma$  bilan bir tekis zaryadlangan chesiz tekislik hosil qilayotgan maydon potensiali va kuchlanganligi shi sirtdan  $x$  masofadagi nuqtalarda aniqlang.
7. Ikkita parallel cheksiz tekisliklar orasidagi soha  $\rho$  hajmiy zichlik bilan bir tekis zaryadlangan. Tekisliklar orasidagi masofa  $2d$ . Tekisliklar o'rtasidan o'tuvchi tekislikka nisbatan  $x$  masofadagi nuqtalarda maydon kuchlanganligini aniqlang.
8. Cheksiz uzun silindrning sirti  $\chi$  zichlik bilan zaryadlangan. U hosil qilayotgan maydon potensiali va kuchlanganligini silindr o'qidan  $r$  masofadagi nuqtalarda aniqlang. Silindr radiusi  $R$ .

9. Radiuslari  $R_1$  va  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) bo'lgan konsentrik sferalar bilan chegaralangan soha  $\rho = \alpha/r^2$  hajmiy zichlik bilan zaryadlangan. Maydon potensialini va kuchlanganligini toping.  $\alpha = \text{const}$ .
10. Sirtiy zichlik  $\sigma$  bilan bir tekis zaryadlangan sferik sirt hosil qilayotgan maydon potensiali va kuchlanganligini sfera markazidan  $r$  masofadagi nuqtalarda aniqlang. Shar radiusi  $R$ .
11. Radiuslari  $R_1$  va  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) bo'lgan konsentrik sferalar bilan chegaralangan soha  $\rho = \alpha/r^2$  hajmiy zichlik bilan zaryadlangan. To'liq zaryadni, maydon potensialini va kuchlanganligini toping.  $\alpha = \text{const}$ .
12. Vodorod atomining asosiy holatida elektron  $\rho = -\frac{e}{\pi a^3} \exp(-2r/a)$  hajmiy zichlik bilan taqsimlangan deb qarash mumkin.  $a$  - Bor radiusi,  $r$  - yadroqacha bo'lgan masofa. Atom ichidagi maydon kuchlanganligini hisoblang. Atom yadrosining maydonini hisobga oling. Elektron zaryadi  $(-e)$ , yadro zaryadi  $(e)$ .
13.  $R$  radiusli doira bo'yicha  $e$  zaryad  $\sigma$  sirtiy zichlik bilan tekis taqsimlangan. Doira o'qi  $z$  ning ixtiyoriy nuqtasidagi maydonni aniqlang.
14. Radiusi  $R$  bo'lgan halqada  $e$  zaryad  $\chi$  chiziqli zichlik bilan tekis taqsimlangan. Halqa o'qi  $z$  ning ixtiyoriy nuqtasidagi maydon kuchlanganligini aniqlang.
15. Biri ikkinchisining ichida joylashgan va markazlari orasidagi masofa  $a$  bo'lgan ikki sferik sirtlar bilan chegaralangan soha  $\rho$  hajmiy zichlik bilan bir tekis zaryadlangan. Kichik sfera bilan chegaralangan bo'shliqdagi maydonni aniqlang. Shar radiuslari  $R$ ,  $R_1$  va  $R > R_1 + a$ .
16. Zaryad  $\rho(x, y, z) = \rho_0 \cos \alpha x \cos \beta y \cos \gamma z$  qonuniyat bilan fazoda cheksiz davriy panjara hosil qilib taqsimlangan. Maydon potensialini hisoblang.
17. Yarim o'qlari  $a$ ,  $b$ ,  $c$  bo'lgan va  $\rho$  hajmiy zichlik bilan bir tekis zaryadlangan ellipsoidning kvadrupol momentini uning markaziga nisbatan aniqlang.
18. Quyidagi zaryadlar sistemasining potensialini yetarlicha uzoq masofalarda aniqlang: a)  $e$ ,  $-2e$ ,  $e$  zaryadlar bir-biridan  $a$  masofada joylashgan (chiqli kvadrupol); b)  $\pm e$  zaryadlar tomoni  $a$  bo'lgan kvadratning uchlarida joylashgan, qo'shni zaryadlar qarama-qarshi ishoraga ega, bundan tashqari kvadrat markazida  $+e$  zaryad jolahsgan (yassi kvadrupol). Ko'rsatma: Kvadratning tomonlari  $Ox$ ,  $Oy$  o'qlariga parallel deb oling.
19. Elektrostatik maydon potensiali

$$\text{a)} \varphi = \begin{cases} a \ln \frac{R}{r} & r > R; \\ \frac{a}{2} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) & r < R. \end{cases} \quad \text{b)} \varphi = \begin{cases} \frac{e}{r} & r > R; \\ -\frac{e}{2R^3} r^2 + \frac{3e}{2a} & r < R. \end{cases}$$

- Shu maydonni hosil qilayotgan zaryadlar taqsimotini toping.  $R$  va  $a$  - o'zgarmas kattaliklar.
20. Radiusi  $R$  bo'lgan sfera sirti bo'yicha tekis taqsimlangan  $e$  zaryad hosil qilayotgan maydon energiyasini aniqlang.
  21. Radiusi  $R$  bo'lgan shar hajmi bo'yicha tekis taqsimlangan  $e$  zaryad hosil qilayotgan maydon energiyasini aniqlang.
  22. Vodorod atomi elektron bulutining atom yadrosi bilan ta'sirlashish energiyasini hisoblang. Elektron bulutda zaryadning taqsimoti 12- masalada keltirilgan.
  23. Bir biridan  $a$  ( $a > R_1 + R_2$ ) masofada joylashgan  $R_1$  va  $R_2$  radiusli sharlar mos ravishda  $e_1$  va  $e_2$  zaryadga ega. Sharlarning ta'sirlashish energiyasini va kuchini toping.
  24. Dipol momenti  $d$  bo'lgan dipoldan  $r$  masofada  $e$  zaryad joylashgan. Dipol va zaryadning o'zaro ta'sir energiyasini va kuchini aniqlang.
  25. Momenti  $d_1$  bo'lgan birinchi dipol koordinata boshida joylashgan, momenti  $d_2$  bo'lgan ikkinchi dipol esa radius-vektori  $r$  bo'lgan nuqtada joylashgan. Ikki dipolning ta'sir energiyasini va kuchini aniqlang. Quyidagi xususiy hollarni ko'ring:
    - a) dipol momentlari parallel va ularni birlashtiruvchi chiziqda yotadi;
    - b) dipol momentlari parallel va ularni birlashtiruvchi chiziqqa perpendikulyar;
    - c) dipol momentlari antiparallel va dipollarni birlashtiruvchi chiziqda yotadi;
    - d) dipol momentlari antiparallel va dipollarni birlashtiruvchi chiziqqa perpendikulyar;
  26. Qo'zg'almas nuqtaviy zaryad maydon kuchlanganligi va potensialini yassi to'lqinlar bo'yicha yoying va Furye tasvirlarni aniqlang.
  27. Elektrostatik maydonga ta'rif bering.
  28. Nuqtaviy zaryadlar sistemasining elektr maydon kuchlanganligi va potensialini yozing.
  29. Multipol momentlarini qanday tushunasiz?

## 6-bob

### O'zgarmas magnit maydon

#### 6.1 Statsionar tokning magnit maydoni

Fazoning berilgan nuqtasida vaqt o'tishi bilan o'zgarmaydigan toklar *statsionar toklar* deyiladi. Bu holda zaryad va tok zichligi vaqtga bog'liq bo'lmaydi, ya'ni

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = 0. \quad (6.1)$$

Bunday zaryad va toklar hosil qilgan maydon vaqtga bog'liq bo'lmaydi:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0. \quad (6.2)$$

Bu holda elektromagnit maydon statsionar bo'ladi.

Shunday qilib, statsionar elektromagnit maydon uchun Maksvell - Lorentz tenglamalari quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad (6.3)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (6.4)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (6.5)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho. \quad (6.6)$$

Bu tenglamalar o'zaro bog'lanmagan ikkita mustaqil tenglamalar sistemasidan iborat:

1. (6.3) bilan (6.6) tenglamalar zaryadlar hosil qilgan elektr maydonni ifodalaydi. Bu hol 5-bobda bat afsil ko'rilgan elektrostatik maydonni aniqlaydi.

2. (6.4) bilan (6.5) tenglamalar statsionar toklar magnit maydonini aniqlaydi. Elektrodinamikaning statsionar toklar magnit maydonini o'rganuvchi qismi *magnitostatika* deyiladi.

Ma'lumki, vektor potensial  $\mathbf{A}$  orqali magnit maydon quyidagicha aniqlanadi:

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (6.7)$$

Buni (6.4) tenglamaga qo'ysak, u aynan bajariladi. (6.5) tenglamaga qo'yish, quyidagi natijani beradi:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (6.8)$$

Maydonning kalibrovka invariantligidan foydalanib, vektor potensial uchun

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 \quad (6.9)$$

kalibrovkani tanlaymiz. Bu holda (6.8) tenglama

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (6.10)$$

ko'rinishni oladi. Bu tenglama vektor shaklda yozilgan Puasson tenglamasi bo'lib, uning yechimi:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (6.11)$$

Bu yerda  $\mathbf{r}$  va  $\mathbf{r}'$  mos ravishda koordinata boshidan kuzatish nuqtasiga va  $dV'$  hajm elementidagi elementar tokka o'tkazilgan radius-vektorlar.  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  elementar tokdan kuzatish nuqtasigacha o'tkazilgan radius-vektor.

Bevosita hisoblab (6.11) bilan aniqlangan vektor potensial (6.9) shartni qanoatlantirishini ko'rish mumkin:

$$\text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \text{div} \left( \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' = \frac{1}{c} \oint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 0.$$

Bu ifoda haqiqatan ham nolga teng. Chunki toklar egallagan hajm chekli va uni o'ragan sirtda, ya'ni integrallash sirtida toklar nolga teng.

Endi (6.11) dan foydalanib, (6.7) ga asosan, statsionar toklarning magnit maydon kuchlanganligini aniqlaymiz:

$$\mathbf{H} = \text{rot} \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}') \mathbf{R}]}{R^3} dV'. \quad (6.12)$$

Bu formula *Bio va Savar* qonunini aniqlaydi. Bu yerda (A.103) formuladan foydalandik.

Statsionar tok uchun (6.1) ga muvofiq, zaryadning saqlanish qonuni (4.20) quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\operatorname{div} \mathbf{j}(r) = 0 \quad (6.13)$$

yoki uzlusizlik tenglamsining integral ko‘rinishi (4.18) ga muvofiq quyidagicha yoziladi:

$$\oint \mathbf{j}(r, t) dS = 0. \quad (6.14)$$

Bundan ko‘rinib turibdiki, statsionar tokning yopiq sirt bo‘yicha oqimi nolga teng.

Tenglama (6.13) ga kora, statsionar tok zichligi uyurmali xarakterga ega, ya’ni tokni hosil qiluvchi zaryadlar yopiq naychalar bo‘ylab harakat qiladi. Bu naychalar zaryadlarning saqlanish qonuniga asosan bir-biri bilan kesishinaydi. Demak, zaryadlarning harakati davriy yoki kvazi davriy (davriyga juda yaqin) bo‘ladi. Naychalarning ko‘ndalang kesimini nolga intiltirsak, tokni - chiziqli toklardan tashkil topgan deb qarash mumkin. Bu holda,

$$jdV' = j(dSdl) = (jdS) dl = (jdS) dl = dIdl. \quad (6.15)$$

Endi zaryadlar fazoning chekli sohasida kvazistatsionar (statsionarga yaqin) harakatda bo‘lgan holni ko‘rib chiqamiz. Bu holda ko‘rila-yotgan sohada zaryadlar davriy yoki davriyga yaqin harakatda bo‘lishi mumkin. Davriy harakatda zaryadlar har davrdan so‘ng avvalgi holatidan aniq qaytadi. Davriyga yaqin harakatda esa bunday holat ro‘y bermaydi. Ammo zaryadlar yetarlicha katta vaqtdan keyin avvalgi holatlarga yaqin holatlardan o‘tishi mumkin. Bunga qo‘sishimcha ravishda zaryadlar sekin harakat qilayotgan bo‘lsin ( $v \ll c$ ) deb qaraymiz. Bu holda Maksvell–Lorentz tenglamalarida fazoviy koordinatalar bo‘yicha olingan hosilalarga nisbatan vaqt bo‘yicha hoslalar kichik bo‘ladi. Bu shartlar bajarilishi Maksvell–Lorentz tenglamalarda qanday o‘zgarish-larga olib kelishini aniqlash uchun hosilalarni baholaymiz. Vaqt bo‘yicha hosilalar uchun quyidagilarni yozish mumkin:

$$\left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right| \sim \frac{E}{T}, \quad \left| \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right| \sim \frac{H}{T}.$$

Bu yerda  $T$  maydon o'zgarishini aniqlovchi xarakterli vaqt. Harakat davriy bo'lganda  $T$  davrga teng bo'ladi.  $E$ ,  $H$  lar zaryadlar harakatlanayotgan sohada maydon kuchlanganliklarining absolyut qiymatlarining xarakterli o'rtachasi. Yuqoridagi baholash kattaliklarning tartibi uchun ma'noga ega.

Endi fazoviy koordinatalar bo'yicha hosilalarning (rot  $E$  va rot  $H$ ) tartibini baholaymiz. Real sistemalarda zaryadlar kvazistatsionar harakatda bo'lganda  $E$ ,  $H$  yetarlicha silliq funksiya bo'lib, fazoning bir nuqtasidan boshqasiga o'tganda sekin o'zgaradi. Sistemaning o'lchamini  $L$  bilan belgilasak, fazoviy hosilalar tartibini quyidagicha baholash mumkin:

$$\left| \frac{\partial E}{\partial x} \right| \sim \left| \frac{\partial E}{\partial y} \right| \sim \left| \frac{\partial E}{\partial z} \right| \sim \frac{E}{L}.$$

Bu yerda zaryadlarning taqsimoti va maydonning o'zgarishi turli yo'nashlarda turli bo'lishini e'tiborga olmadik.

Kvazistatsionarlik sharti Maksvell-Lorentz tenglamalarida mos koefitsientlari bilan vaqt bo'yicha hosilalar fazoviy hosilardan kichik bo'lishini talab qiladi, ya'ni

$$\left| \frac{\partial E_i}{\partial x_k} \right| \gg \frac{1}{c} \left| \frac{\partial H_i}{\partial t} \right|, \quad \left| \frac{\partial H_i}{\partial x_k} \right| \gg \frac{1}{c} \left| \frac{\partial E_i}{\partial t} \right|$$

yoki

$$\frac{H}{L} \gg \frac{1}{c} \frac{E}{T}, \quad \frac{H}{L} \gg \frac{1}{c} \frac{E}{T}. \quad (6.16)$$

Bu yerda fazoviy koordinatalar va vaqt bo'yicha hosilalarning tartibi bir xil bo'lgan taqdirda ham  $1/c$  koefitsient hisobiga (6.18) tengsizliklar bajariladi. Bu tengsizliklarni bir-biriga ko'paytirib tezlik uchun yuqorida qo'yilgan shartni hosil qilamiz:

$$T \gg \frac{L}{c}, \quad \rightarrow \quad c \gg \frac{L}{T} \approx v. \quad (6.17)$$

Bu yerda  $v \sim L/T$  sistema zaryadlarining xarakterli tezligi ma'nosiga ega. Shunday qilib, zaryadlarning kvazistatsionar harakatida ularning tezligi yorug'lik tezligidan juda kichik bo'lishi kerak ekan. Zaryadlarning harakati kichik deganda, uni shu ma'noda tushunish kerak.

Yuqoridagi shartlar bajarilganda maydon kvazistatsionar deyiladi. Bunday maydonlar uchun Maksvell-Lorentz tenglamalari (6.3)-(6.6)

bilan bir hil bo'ladi. Shunday qilib, yuqorida statcionar maydonlar uchun olingan natijalar kvazistatsionar maydonlar uchun ham o'rinli bo'ladi. Faqat bu holda maydon kattaliklarini ularning o'rtachalari bilan almashtirish kerak.

## 6.2 Magnit momenti

Kvazistatsionar harakatdagi zaryadlar sistemasining magnit maydonini yetarlicha uzoq masofalarda aniqlaymiz. Buning uchun koordinata boshini toklar egallagan sohaga joylashtiramiz va elektrostatik maydon potensialini multipollar bo'yicha qatorga yoyganimizdagi kabi yo'l tutamiz, ya'ni  $|r'| \ll |r|$  deb, vektor potensial (6.11) ni  $\mathbf{r}'$  ning darajalari bo'yicha qatorga yoyamiz:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 + \dots \quad (6.18)$$

Bu yerda birinchi had (nolinchı yaqinlashish)

$$\mathbf{A}_0 = \frac{1}{cr} \int \mathbf{j} dV'. \quad (6.19)$$

Bu integral (6.14) ga asosan nolga teng bo'ladi. Shu sababli (6.20) qator ikkinchi had bilan boshlanadi, ya'ni

$$\mathbf{A}_1 = -\frac{1}{c} \int \mathbf{j} \left( \mathbf{r}' \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) dV'. \quad (6.20)$$

Integral ostidagi ifodaning ko'rinishini o'zgartiramiz:

$$\mathbf{j} \left( \mathbf{r}' \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) \equiv \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{j} \left( \mathbf{r}' \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) - \mathbf{r}' \left( \mathbf{j} \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) \right\} +$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \mathbf{j} \left( \mathbf{r}' \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) + \mathbf{r}' \left( \mathbf{j} \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) \right\}.$$

Birinchi qavsnı uchta vektoring vektor ko'paytmasi ko'rinishida yozish mumkin:

$$\left\{ \mathbf{j} \left( \mathbf{r}' \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) - \mathbf{r}' \left( \mathbf{j} \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) \right\} = \left[ [\mathbf{r}' \mathbf{j}] \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right] = -\frac{[[\mathbf{r}' \mathbf{j}] \mathbf{r}]}{r^3}$$

Ikkinchi qavsni hisoblashda kvazistatsionar toklar alohida naychalardan oqayotgan toklar to‘plamidan tashkil topganligini va (6.15) ni inobatga olamiz. Bunda zaryadlar holatining o‘zgarishi  $dr$  va kontur elementi  $dl$  ekvivalent bo‘ladi. Bularga asosan ikkinchi qavsdan olingan integralni quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned} \int \left\{ j \left( r' \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) + r' \left( j \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) \right\} dV' = \\ \int dI \oint \left\{ dr' \left( r' \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) + r' \left( dr' \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) \right\} = \\ \int dI \oint d \left( r' \left( r' \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) \right) = 0, \end{aligned}$$

chunki to‘liq differensialdan berk kontur bo‘yicha olingan integral doimo nolga teng.

Shunday qilib, birinchi yaqinlashishda vektor potensialni quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$A_1 = \frac{1}{2cr^3} \int [[r'j]r] dV' = \frac{1}{r^3} [\mathbf{mr}] . \quad (6.21)$$

Bu yerda

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int [r'j] dV' \quad (6.22)$$

zaryadlar sistemasining *magnit momenti* deyiladi. Bu kattalik zaryadlar sistemasining xossalari - toklar taqsimotiga va ularning geometrik shakliga bogliq.

Vektor potensial ma’lum bo‘lgandan keyin magnit maydon kuchlanganligi oson topiladi. Magnit maydon kuchlanganligini topish uchun vektor potensialdan rotor olish kerak. Magnit momenti berilgan zaryadlar sistemasi uchun o‘zgarmas bo‘ladi. Shu sababli (A.100) ga muvofiq quyidagini yozish mumkin:

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \frac{[\mathbf{mr}]}{r^3} = \mathbf{m} \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} - (\mathbf{m} \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Bu yerda (A.98) ga asosan birinchi hadni nolga tengligini ko‘rsatish mumkin. Ikkinchi had uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$(\mathbf{m} \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3} (\mathbf{m} \nabla) \mathbf{r} + \mathbf{r} \left( \mathbf{m} \nabla \frac{1}{r^3} \right) = \frac{\mathbf{m}}{r^3} - \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{mr})}{r^5}.$$

Shunday qilib,

$$\mathbf{H} = \frac{3r(r\mathbf{m}) - \mathbf{m}r^2}{r^5} = \frac{3n(n\mathbf{m}) - \mathbf{m}}{r^3}. \quad (6.23)$$

Bu yerda  $n$  kuzatish nuqtasiga o'tkazilgan radius-vektor yo'nalishidagi birlik vektor.

Dipol yaqinlashishdagi elektr maydon kuchlanganligi ifodasi (5.26) bilan (6.23) ni taqqoslab, ularning ko'rinishi bir xil ekanligini ko'ramiz, farqi birida maydon dipol momenti bilan aniqlansa, ikkinchisida, magnit momenti bilan aniqlanadi. Ammo, magnit momenti dipol momentidan farqli ravishda koordinata boshini ko'chirishga bog'liq emas. Koordinata boshini  $O$  nuqtadan  $O'$  nuqtaga ko'chiramiz, ya'ni  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'' + \mathbf{a}$  almashtirishni bajaramiz. Yangi koordinata boshiga nisbatan magnit momentini hisoblaymiz:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{r}'' \mathbf{j}] dV'' = \frac{1}{2c} \int [(\mathbf{r}' - \mathbf{a}) \mathbf{j}] dV' = \mathbf{m} + \frac{1}{2c} \int [\mathbf{a} \mathbf{j}] dV'$$

Bu yerda ikkinchi had

$$\int [\mathbf{a} \mathbf{j}] dV'' = \left[ \mathbf{a}, \left( \int \mathbf{j} dV'' \right) \right] = 0.$$

Shunday qilib, magnit momenti koordinata boshini qayerda tanlashga bog'liq emasligini aniqladik.

### 6.3 Chiziqli tokning magnit momenti

Bio-Savar qonunini chiziqli toklarga tatbiq qilamiz. Chiziqli tokni ko'ndalang kesimi cheksiz kichik naychadan oqayotgan tok bilan almashtiramiz. Bu holda, (6.15) ni inobatga olib, (6.11) ning o'rniga chiziqli tokning magnit maydon vektor potensiali uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{I}{c} \int \frac{dl}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (6.24)$$

Shunga o'xshash magnit maydon kuchlanganligi ifodasi (6.12) ni chiziqli tok uchun yozamiz:

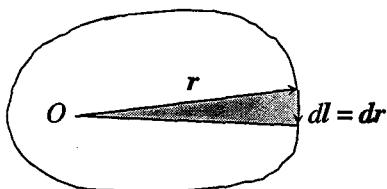
$$\mathbf{H} = \frac{I}{c} \oint \frac{[dlR]}{R^3}, \quad d\mathbf{H} = \frac{I}{c} \frac{[dlR]}{R^3}. \quad (6.25)$$

Bu yerda birinchi ifoda chiziqli tok, ikkinchi ifoda esa chiziqli tok elementi hosil qilayotgan magnit maydon kuchlanganligini aniqlaydi. Oxirgi ifodaga asosan, *chiziqli tok elementi hosil qilayotgan magnit maydonning yo'nalishi o'ng parma qoidasi bilan aniqlanadi*.

Endi magnit momentni chiziqli tok uchun yozamiz:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int [r\mathbf{j}] dV = \frac{I}{2c} \oint [rdl] = \frac{I}{2c} \oint [rdr]. \quad (6.26)$$

Bu yerda kontur elementi  $dl$  shu element uchlariga o'tkazilgan radiusvektorning differensiali  $dr$  bilan almashtirdik (6.1-rasm).



6.1-rasm:

(6.26) dagi oxirgi integralning son qiymati kontur bilan chegaralangan yuzaga teng, yo'nalishi esa yuzaga perpendikulyar bo'lib, o'ng parma qoidasiga muvofiq aniqlanadi. Shunday qilib,

$$\mathbf{m} = \frac{1}{c} ISn. \quad (6.27)$$

Tok konturi bilan chegaralangan sirtni bir-biriga ortogonal bo'lgan eg'ri chiziqlar bilan elementar yuzachalarga bo'lib chiqamiz. Chiziqlarning har biridan qarama-qarshi yo'nalishda  $I$  tok oqayotibdi deb faraz qilamiz. Bu yuzachalarni chegaralovchi konturdan oqayotgan tokning magnit momenti

$$dm = \frac{1}{c} I \mathbf{n} dS. \quad (6.28)$$

Bu ifodani (6.27) bilan taqqoslab, chiziqli  $I$  tokning magnit momenti sirtiy zichlik  $\mathbf{m}_0 = I \mathbf{n}/c$  bilan taqsimlanganligini ko'ramiz.

Dipol yaqinlashishida elektrostatik maydon kuchlanganlini va magnitodipol yaqinlashishida magnit maydon kuchlanganligini aniqlovchi (5.26) va (6.23) ifodalarining o'xshashligi, bu yaqinlashishda magnit maydonni ham elektr maydon kabi skalyar potensial bilan aniqlash mimkin degan fikrga olib keladi. Ya'ni

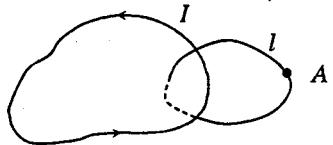
$$\varphi_m = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (6.29)$$

Bu yerda  $\varphi_m$  skalyar magnit potensial deyiladi. Magnit maydon kuchlanganligini

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \varphi_m \equiv -\nabla \varphi_m. \quad (6.30)$$

formula bilan hisoblab, ma'lum bo'lgan (6.23) ifodani olamiz. Elektrostatik maydon skalyar potensialidan farqli ravishda (magnit maydon kuchlanganligi psevdovektor bo'lganligi uchun) (6.29) bilan aniqlangan magnit maydon skalyar potensiali psevdoskalyar bo'ladi.

Magnit maydon kuchlanganligini (6.30) korinishda tasvirlash rot  $\mathbf{H} = 0$  bo'lishiga olib keladi. Bu tenglik (6.5) ga muvofiq fazoning faqat  $j = 0$  bo'lgan sohalari uchun o'rinni bo'ladi. Shu bilan birga (6.4) tenglamadan skalyar magnit potensial



6.2-rasm:

$$\Delta \varphi_m = 0. \quad (6.31)$$

Laplas tenglamasi qanoatlantirishi kerakligi kelib chiqadi. Bu tenglanaming yechimi  $j = 0$  va  $j \neq 0$  sohalar chegarasida o'zini qanday tutadi? Bu savolga javob olish uchun tok nolga teng bo'lgan sohada birorta nuqtani ( $A$ ) tanlaymiz. Bu nuqtada potensial  $\varphi_m(A)$  ga teng bo'lsin.

Shu nuqtadan o'tuvchi va tokni o'rabi olgan berk kontur olamiz (6.2-rasm). Shu kontur bir marta to'liq aylanib chiqilganda potensial  $\tilde{\varphi}_m(A)$  ni hisoblaymiz:

$$\tilde{\varphi}_m(A) = \varphi_m(A) + \oint d\varphi_m. \quad (6.32)$$

Agar potensial koordinataning bir qiymatli uzlusiz funksiyasi bo'lسا,  $\oint d\varphi_m = 0$  bo'lishi kerak. Haqiqatda esa

$$\oint d\varphi_m = \oint \nabla \varphi_m dl = - \oint \mathbf{H} dl = - \frac{4\pi}{c} I.$$

Shunday qilib,

$$\varphi_m(A) - \tilde{\varphi}_m(A) = \frac{4\pi}{c} I. \quad (6.33)$$

Bu munosabat  $\varphi_m(r)$  koordinataning bir qiymatli funksiyasi emasligini ko'rsatadi va tokli konturni o'ragan ixtiyoriy konturni aylanib chiqishda

$4\pi I/c$  orttirma oladi. Bu yerda  $I$  integrallash konturi tortib turgan sirdan o'tadigan to'liq tok. Shunday qilib,  $j = 0$  va  $j \neq 0$  sohalar chegarasida (6.33) shart bajarilishi kerak ekan. Bundan tashqari, potensialning hosilalarining uzlusizligini ta'minlovchi chegaraviy shartlarni ham hisobga olish kerak. Bunday shartlar ustida ushbu kitobning makroskopik elektrodinamika qismida bat afsil to'xtalamiz.

## 6.4 Magnit va impuls momentlari orasidagi bog'lanish

Bu masalani ko'rish uchun zaryardlar sistemasi nuqtaviy zaryadlarlardan tashkil topgan deb qaraymiz. Bu holda magnit momenti (6.22) quyidagi ko'rinishga o'tadi:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum e_a [\mathbf{r}_a \mathbf{v}_a]. \quad (6.34)$$

Sistemaning impuls momenti esa

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{L}_a = \sum m_a [\mathbf{r}_a \mathbf{v}_a]. \quad (6.35)$$

Bu yerda  $m_a$ ,  $e_a$  mos ravishda zaryadlangan zarrachaning massasi va zaryadi. (6.34) va (6.35) ifodalarni taqqoslab, magnit va impuls momentlari orasidagi bog'lanishni topamiz:

$$\mathbf{m} = \sum \frac{e_a}{2m_a c} \mathbf{L}_a. \quad (6.36)$$

Agar zarrachalar bir xil, yoki hamma zarrachalar uchun  $\frac{e_a}{m_a} = \frac{e}{m}$ , ya'ni solishtirma zaryad bir xil bo'lsa, (6.36) quyidagicha yoziladi:

$$\mathbf{m} = \frac{e}{2mc} \mathbf{L}. \quad (6.37)$$

Bu natijani atomlarga tatbiq qilamiz. Atomda elektronlar yadro atrofida orbital harakatda bo'lganligi uchun  $\mathbf{m}$  elektronning orbital magnit momenti va  $\mathbf{L}$  orbital impuls momenti bo'ladi. Shunday qilib, atomlarning magnit va orbital momenlari bir-biriga proporsional ekan.

Elektronning zaryadi manfiy bo'lganligi uchun ularning yo'nalishlari qarama-qarshi bo'ladi.

Ta'sir qiluvchi tashqi maydon bo'lmasa, atomning magnit va u bilan bog'liq bo'lgan orbital mometlari saqlanadi. Atom kuchsiz tashqi magnit maydon ta'sirida bo'lsin deb faraz qilamiz. Bunday maydon ta'sirida har ikkala moment sekin o'zgaradi.

Magnit momenti  $\mathbf{m}$  bo'lgan sistemaga o'zgarmas va bir jinsli kuchsiz tashqi  $\mathbf{H}$  magnit maydon ta'sir qilayotgan bo'lsin. Bunda kuch momenti quyidagi tenglama bilan aniqlanadi:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{m}\mathbf{H}]. \quad (6.38)$$

Mexanikadan ma'lumki, kuch momenti impuls momentining vaqt bo'yicha hosilasiga teng:

$$\mathbf{K} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \quad (6.39)$$

Bu ikkala tenglikni solishtirib, (6.37) ga muvofiq quyidagi tenglamani yozish mumkin:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\omega_L \mathbf{L}]. \quad (6.40)$$

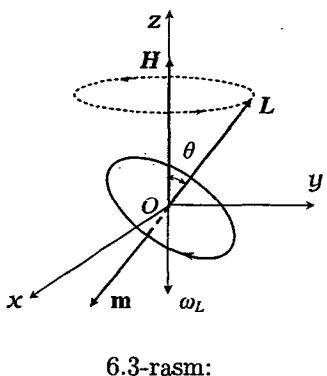
Bu yerda

$$\omega_L = -\frac{e\mathbf{H}}{2mc}. \quad (6.41)$$

(6.40)  $\mathbf{L}$  vektor uchun harakat tenglama bo'lib, unga ko'ra impuls momentining moduli ( $L = \text{const}$ ) saqlangan holda faqat uning yo'nalishi o'zgaradi. Shu sababli bu tenglamani impuls momenti yo'nalishidagi birlik vektor  $\mathbf{l}$  ( $\mathbf{L} = L\mathbf{l}$ ) uchun yozish mumkin:

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = [\omega_L \mathbf{l}]. \quad (6.42)$$

Bu tenglamaga asosan  $\mathbf{L}$  vektoring uchi magnit maydon kuchlanganligiga tik bo'lgan tekislikda  $\omega_L$  chastota bilan aylanadi. Tenglama (6.40) dan kelib chiqqan bu ikki xulosani birlashtirib teorema ko'rinishida ta'riflaymiz:



6.3-rasm:

*O'zgarmas bir jinsli magnit maydonda atom elektronlarining orbital momenti o'zinining son qiymatini va maydon yo'naliishi bilan hosil qilgan burchagini o'zgartirmasdan, maydon atrofida tekis aylanma harakatda bo'ladi.* Bu teorema *Larmor teoremasi*, hodisa esa *Larmor presessiyasi* deb ataladi.  
 $\omega_L = \frac{eH}{2mc}$  *Larmor chastotasi.*

Yoqoridagi fikrlar 6.3-rasmda tasvirlangan. Atom elektronlarining  $O$  yadro atrofida harakatlanib hosil qilgan toklari yassi chiziqli yopiq tok shaklida tasvirlangan.

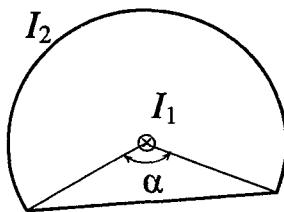
Endi tashqi maydon qanday ma'noda kuchsiz ekanligini ko'rib chiqamiz. Magnit maydon yo'qligida elektronlarning yadro atrofidagi aylanishinig xususiy chastotasi  $\omega_0$  ga nisbatan Larmor chastotasi juda kichik bo'lishini talab qilamiz:

$$\omega_L \ll \omega_0, \quad \rightarrow \quad H \ll \frac{2mc}{|e|} \omega_0.$$

Bu shart tashqi maydonning kichiklik darajasini aniqlaydi va atomlar bilan bog'liq bo'lgan tajribalarda doimo bajariladi.  $\omega_0$  atomda elektronning aylanish chastotasi. Larmor presessiyasi orqali diamagnitizm, Zeeman-effekti va shunga o'xshash hodisalarini tushuntirish mumkin.

## 6.5 6-bobga oid masala va savollar

1. Zichligi  $j(\mathbf{r}) = j_0 \cos(kr)$  qonuniyat bilan aniqlangan tok zaryadlarning statsionar taqsimotini ta'minlay oladimi?  $j_0$  va  $k$  o'zgarmas vektorlar.
2. Lorentz kuchi ifodasidan foydalanib,  $H$  magnit maydonda chiziqli tok elementi  $Idl$  ga ta'sir qiluvchi kuch  $dF = I[d\mathbf{l}H]/c$  ekanligini ko'rsating. Aniqlanishi lozim bo'lgan formula *Amper qonuni* deyiladi.
3. Cheksiz to'g'ri chiziqli tokning undan  $r$  masofadagi nuqtalarda magnit maydon kuchlanganligini va vektor potensialini aniqlang.
4. Radiusi  $R$  bo'lgan chesiz to'g'ri silindrning ko'ndalang kesimi bo'yicha tekis taqsimlangan  $I$  tokning magnit maydon kuchlanganligini va vektor potensialini uning  $r$  masofadagi nuqtalarda toping.



6.4-rasm:

5. Oldingi masalani ichi kovak silindr uchun yeching. Silindrning ichki va tashqi radiuslari mos ravishda  $a$  va  $b$  ( $a < b$ ). Tok zichligi  $j$ .
6. Radiusi  $b$  bo'lgan silindrik qoplamaning ichida unga koaksial  $a$  radiusli silindrik naycha bor. Qoplamadan va naychadan qarama-qarshi yo'nalishda ( $I_a = I_b = I$ ) oqayotgan toklarning magnit maydon kuchlanganligini Puasson tenglamasini integrallash yo'li bilan va magnitonstatika tenglamalarining integral ko'rinishidan foydalanib toping.
7. Cheksiz to'g'ri silindr sirtidan oqayotgan tekis taqsimlangan  $I$  tokning magnit maydon kuchlanganligini va potensialini uning o'qidan  $r$  masofadagi nuqtalarda toping.
8.  $R$  radiusli doiraviy  $I$  tokning magnit maydon kuchlanganligini doira o'qidagi ixtiyoriy  $z$  nuqtada toping.
9.  $R$  radiusli sharning hajmi bo'yicha e zaryad tekis taqsimlangan. Shar diametrlaridan birining atrofida  $\omega$  burchak tezlik bilan aylanishi natijasida hosil bo'lgan tokning magnit momentini aniqlang. Zaryad shar sirtda tekis taqsimlangan bo'lsa, tokning magnit momenti nimaga teng bo'ladi?
10. Zaryadlari  $e_1$ ,  $e_2$  va massalari  $m_1$ ,  $m_2$  bo'lgan sistemaning magnit momenti va impuls momentlari orasidagi bog'lanishni toping.
11. Tokli yassi konturning magnit momenti  $\mathbf{m} = ISn/c$  formula bilan aniqlanishini ko'rsating. Bu yerda  $I$  tok kuchi,  $S$  kontur bilan chegaralangan yuza,  $\mathbf{n}$  kontur tekisligiga perpendikulyar yo'nalishdagi birlik vektor.
12. Qarama – qarshi yo'nalgan ikkita parallel  $I$  to'g'ri toklar hosil qilgan vektor potensial va magnit maydonni toping. Toklar orasidagi masofa  $2a$ . *Ko'rsatma:* Toklar  $z$  o'qiga parallel,  $xOy$  tekisligida  $(+I)$  va  $(-I)$  toklarning koordinatalari mos ravishda  $(a, 0)$  va  $(-a, 0)$ .
13. Har biridan sirt zichligi  $i = \text{const}$  bo'lgan tok o'tayotgan ikkita parallel tekisliklar hosil qilgan magnit maydonni toping. Ikkita holni qarang:  
a) toklar bir xil yo'nalgan;  
b) toklar qarama-qarshi yo'nalgan.
14. Ikkita cheksiz uzunlikdagi parallel plastinalardan qarama-qarshi yo'nalishda bir xil toklar oqmoqda. Plastinalar kengligi  $a$ , ular orasidagi masofa  $b$ . Birlik uzunlikka to'g'ri keluvchi  $f$  ta'sir kuchini toping.

15.  $I_2$  tok o'tayotgan ramka  $2(\pi - \alpha)$  burchakli yoydan va uning uchlarini tutashtiruvchi vatardan iborat (6.4-rasm). Yoy radiusi  $a$ . Ramka te-kisligiga normal ravishda yoy aylanasi markazidan  $I_1$  to'g'ri tok o'tgan. Ramkaga ta'sir qiluvchi kuch momentini toping.
16. Statsionat toklarning magnit maydoni uchun Maksvell-Lorentz tengla-malarini yozing.
17. Qanday toklar statsionar deyiladi?
18. Statsionar toklarning vektor potensiali aniqlovchi Puasson tenglamasi-ning yechimi yozing.
19. Bio va Savar qonunini ta'riflang.
20. Magnit momenti nimaga teng?
21. Magnit momenti koordinata boshini tanlashga bog'liqmi?
22. Chiziqli o'tkazgich uchun Bio va Savar qonunini yozing.
23. Magnit maydon psevdo skalyari qanday ma'noga ega?
24. Magnit momenti va impuls momentlari orasidagi bog'lanishni (Larmor teoremasi) ta'riflang.

## 7-bob

### Vakuumda elektromagnit maydon

#### 7.1 To'lqin tenglamasi

Zaryadlardan ozod fazoda, ya'ni vakuumda elektromagnit maydonni korib chiqamiz. Bunda zaryad zichligi  $\rho = 0$  va tok zichligi  $j = 0$  bo'ganligi uchun (4.1), (4.2), (4.40) va (4.41) Maksvell-Lorentz tenglamalari quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (7.1)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (7.2)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (7.3)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 0. \quad (7.4)$$

Bu tenglamalarning notrivial (noldan farqli) yechimi bizni qiziqtiradi. Agar bunday maydon mavjud bo'lsa, u qanday xossalarga ega bo'ladi?

Vakuumda elektromagnit maydon o'zgarmas deb faraz qilamiz, ya'ni

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0$$

u vaqtida (7.1)–(7.4) tenglamalardan ko'ramizki

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{E} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{H} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0$$

bo'ladi. Ma'lumki, birorta vertor maydonning rotorini va divergensiyasini nolga teng bo'lsa, u aynan nolga teng bo'ladi. Demak,  $\mathbf{E} = 0$  va  $\mathbf{H} = 0$ . Shunday qilib, vakuumda vaqtga bog'liq bo'limgan maydon mavjud bo'lmas ekan. Vakuumda elektromagnit maydon mavjud bo'lishi uchun u albatta vaqtga bog'liq bo'lishi kerak.

Elektr va magnit maydon kuchlanganliklari uchun o'zaro bog'liq bo'limgan tenglamalarni hosil qilamiz. Buning uchun (7.1) tenglamaning har ikkala tomoniga rotor operatori bilan ta'sir qilamiz va (7.3)

tenglamadan foydalanib quyidagini hosil qilamiz:

$$\Delta H - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0. \quad (7.5)$$

Xuddi shu yo'l bilan  $E$  ushun quyidagi tenglamani yozamiz:

$$\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \quad (7.6)$$

Bu tenglamalar bizga ma'lum bo'lgan to'lqin tenglamalardir.

Zaryad va tok zichligi nolga tengligini inobatga olsak, potensiallar uchun olingan (4.67) va (4.68) Dalamber tenglamalari quyidagi ko'rnishni oladi:

$$\Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0, \quad (7.7)$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (7.8)$$

Bu yerda potensiallar Lorenz sharti (4.68) ni qanoatlantiradi, ya'ni

$$\operatorname{div} A + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (7.9)$$

Shunday qilib, vakuumda elektromagnit maydon kuchlanganliklari va potensiallar to'lqin tenglama bilan aniqlanishini topdik. Bu tenglamalarning yechimlari to'lqindan iborat bo'lganligi uchun vakuumda elektromagnit maydon ham to'lqindan iborat bo'ladi.

Agar  $E, H, A$  vektorlarning dekart koordinata o'qlariga tashkil etuvchilaridan ixtiyoriy birini yoki skalyar potensial  $\varphi$  ni  $f$  bilan belgilasak, ular uchun to'lqin tenglamani umumiy korinishda yozish mumkin:

$$\Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \quad (7.10)$$

## 7.2 Yassi elektromagnit to'lqinlar

Umumiyliga putir yetkazmagan holda masalani soddalashtiramiz, ya'ni elektromagnit maydon kattaliklari faqat  $x$  va  $t$  vaqtga bog'liq bo'lsin deb olamiz. Bu holda to'lqin tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial f}{\partial t^2} = 0. \quad (7.11)$$

Bu tenglama "Matematik fizika tenglamalari" kursidan ma'lum bo'lib, xususan torda to'lqin tarqalishini aniqlaydi. To'lqin tenglamaning bunday xossaga ega yechimini umumiy ko'rinishini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$f(x, t) = f_1 \left( t - \frac{x}{c} \right) + f_2 \left( t + \frac{x}{c} \right). \quad (7.12)$$

Birinchi had  $f_1$   $x$  o'qi bo'ylab, ikkinchi had  $f_2$  esa  $x$  o'qiga teckari yo'nalishda  $c$  tezlik bilan tarqaluvchi *yassi to'lqinni* ifodalaydi. Bu to'lqinlardan qaysi biri mavjud bo'lishi boshlang'ich shart bilan aniqlanadi. Masalan,  $f_2 = 0$  bo'lsin, u vaqtدا

$$f(x, t) = f_1 \left( t - \frac{x}{c} \right). \quad (7.13)$$

bo'ladi va faqat musbat yo'nalishda tarqaluvchi to'lqin qoladi. Shu holni batafsil ko'rib chiqamiz.

Shunday qilib, maydon kattaliklari sifatida qaralayotgan  $f(x, t)$  yassi to'lqin bo'lganligi uchun vakuumdagi elektromagnit maydon potensiallari ham yassi to'lqindan iborat bo'ladi, ya'ni

$$\varphi(x, t) = \varphi \left( t - \frac{x}{c} \right), \quad (7.14)$$

$$\mathbf{A}(x, t) = \mathbf{A} \left( t - \frac{x}{c} \right). \quad (7.15)$$

Skalar va vektor potensiallar ma'lum deb maydon kuchlanganliklarini aniqlaymiz. Hisoblashlarni soddalashtirish maqsadida potensiallarni tanlashdagi ixtiyoriylikdan yana bir marta foydalanamiz. Lorenz kalibrovkasida  $\varphi = 0$  deb olamiz. Bu holda kalibrovka sharti (7.9) quyidagicha yoziladi:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (7.16)$$

Bu shart  $\varphi = 0$  shart bilan birga Lorenz kalibrovkasining xususiy holi bo'ladi. Potensial biz ko'rayotgan holda faqat  $x$  koordinataga bog'liq ekanligini inobatga olsak, kalibrovka sharti (7.16) quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = 0, \quad \rightarrow \quad A_x = \text{const}. \quad (7.17)$$

Bu shartga muvofiq (7.11) tenglamadan quyidagilar kelib chiqadi:

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = 0, \quad \rightarrow \quad \frac{\partial A_x}{\partial t} = \text{const}.$$

Binobarin, vektor potensialdan vaqt bo'yicha olingan hosila elektr maydonni aniqlashini inobatga olsak,  $A_x \neq 0$  bo'lishi vakuumda o'zgarmas elektr maydon mavjudligini korsatadi. Bu mavzuda o'zgarmas maydonlar bizning qiziqish doiramizdan chetda bo'lganligi uchun bemalol  $A_x = 0$  deb olish mumkin. Shunday qilib, maydon kuchlanganliklarini aniqlash uchun  $A_y(x, t)$  va  $A_z(x, t)$  bilish biz ko'rayotgan holda yetarli bo'ladi.

Yuqorida yuritilgan mulohazalarga asosan elektr va magnit maydon kuchlanganliklari

$$E(x, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}(x, t)}{\partial t} \quad (7.18)$$

$$H(x, t) = \text{rot } \mathbf{A}(x, t). \quad (7.19)$$

munosabatlар bilan aniqlanishi kelib chiqadi. Bu tenglamalarning birin-chisidan,  $A_x = 0$  bo'lganligi uchun  $E_x = 0$  bo'adi. Qolgan ikkita tashkil etuvchisi  $E_y \neq 0$  va  $E_z \neq 0$ . Demak, vakuumda elektr maydon kuchlanganligi to'lqin tarqalish yo'nalishiga perpendikulyar ekan. (7.18) tenglamani quyidagi shaklda yozamiz:

$$E = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}, \quad \text{bu yerda} \quad \dot{\mathbf{A}} \equiv \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (7.20)$$

(7.19) ga asosan magnit maydon kuchlanganligini hisoblaymiz:

$$H = \text{rot } \mathbf{A} = [\nabla, \mathbf{A}] = \left[ \nabla \left( t - \frac{x}{c} \right), \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial (t - \frac{x}{c})} \right] = -\frac{1}{c} [n \dot{\mathbf{A}}]. \quad (7.21)$$

Bu yerda  $\mathbf{n}$   $x$  o‘qi yo‘nalishidagi, ya’ni to‘lqin tarqalish yo‘nalishidagi birlik vektor. (7.20) va (7.21) ifodalarni toqqoslab, elektr va magnit maydon kuchlanganliklari orasidagi bog‘lanishni topamiz:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{n}\mathbf{E}] . \quad (7.22)$$

Ifodalar (7.20)–(7.22) dan yassi to‘lqinda elektr va magnit maydon kuchlanganliklari to‘lqin tarqalish yo‘nalishiga perpendikulyar ekanligi ko‘rinib turibdi. Shu sababli vakuumda elektromagnit to‘lqin ko‘ndalang deb ataladi. Bundan tashqari (7.22) dan  $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$  kelib chiqadi. Gauss birliklar sistemasida  $|\mathbf{E}| = |\mathbf{H}|$ , ya’ni elektr va magnit maydon kuchlanganliklarining son qiymatlari bir xil, demak, to‘lqinning elektr maydon va magnit maydon energiyasi zichliklari bir-biriga teng bo‘ladi:

$$u = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi} = \frac{\mathbf{E}^2}{4\pi} = \frac{\mathbf{H}^2}{4\pi} . \quad (7.23)$$

To‘lqin energiyasi oqimining zichligi - Poynting vektori bu holda quyidagi ifoda bilan aniqlanadi:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}] = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}[\mathbf{n}\mathbf{E}]] = \frac{c}{4\pi} \{ \mathbf{n}\mathbf{E}^2 - \mathbf{E}(\mathbf{n}\mathbf{E}) \} = \frac{\mathbf{E}^2}{4\pi} \mathbf{cn} , \quad (7.24)$$

yoki (7.23) ga asosan

$$\mathbf{S} = cun . \quad (7.25)$$

Demak, energiya oqimi to‘lqin tarqalish yo‘nalishi bo‘yicha yo‘nalgan. Elektromagnit to‘lqin impulsining zichligi

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{S}}{c^2} = \frac{u}{c} \mathbf{n} . \quad (7.26)$$

E‘tibor bering, (7.21) dan boshlab koordinata  $x$  tenglamalarda oshkora ravishda ishtirok etmayapti. Demak, olingan natijalar uchun to‘lqin qaysi yo‘nalishda tarqalishining ahamiyati yo‘q. Shuning uchun to‘lqin tarqalish yo‘nalishidagi birlik vektor  $\mathbf{n}$  endi  $x$  o‘qidagi birlik vektor emas, balki, to‘lqinning tarqalishini ko‘rsatuvchi ixtiyoriy yo‘nalishdagi birlik vektor deb qarash mumkin. Bunga asosan yuqorida olingan formulalarda umimiy holga o‘tish uchun quyidagi almashtirishni bajarish kifoya qiladi:

$$t - \frac{x}{c} \rightarrow t - \frac{\mathbf{n}r}{c} \quad (7.27)$$

Hulosa qilib, quyidagilarni e'tirof etish mumkin: *Vakuumda elektromagnit maydon yassi, ko'ndalang to'lqin ekan. Elektr va magnit maydon kuchlanganliklari o'zaro perpendikulyar va modullari teng ekan.*

### 7.3 Monoxromatik elektromagnit to'lqinlar

Yassi to'lqinning muhim xususiy holi - monoxromatik to'lqinni ko'rib chiqamiz. Bu holda maydonni aniqlovchi barcha kattaliklar vaqt va fazoda garmonik qonuniyat bilan o'zgaradi. Vektor potensialni kompleks garmonik funksiya ko'rinishida yozamiz:<sup>1</sup>

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \exp \left\{ -i\omega \left( t - \frac{nr}{c} \right) \right\} = \mathbf{A}_0 \exp \{ i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t) \}. \quad (7.28)$$

Bu yerda  $\mathbf{A}_0$  - kompleks amplitudasi,  $\omega$  - siklik (davriy) chastotasi,  $(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})$  - to'lqin fazasi va

$$\mathbf{k} = \frac{\omega \mathbf{n}}{c} \quad (7.29)$$

to'lqin vektori deyiladi.

Endi vektor potensial (7.28) ni (7.20) va (7.21) ifodalarga qo'yib, yassi monoxromatik to'lqin elektr va magnit maydonini hisoblaymiz:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} = ik\mathbf{A} = \mathbf{E}_0 \exp \{ i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t) \}, \quad (7.30)$$

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{c} [\mathbf{n} \dot{\mathbf{A}}] = i[\mathbf{k} \mathbf{A}] = \mathbf{H}_0 \exp \{ i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t) \}. \quad (7.31)$$

Bu yerda  $|\mathbf{k}|$  to'lqin vektorining moduli bo'lib, to'lqin soni deyiladi ( $2\pi$  uzunlikda joylashgan to'lqinlar sonini ko'rsatadi).

Yassi monoxromatik elektromagnit to'lqinda maydon kuchlanganliklarining yo'nalishini vaqt va fazoda o'zgarishinni aniqlaymiz. Birinchi

<sup>1</sup>Bu yerda va bundan keyin qulaylik uchun monoxromatik to'lqinni kompleks funksiya ko'rinishida yozamiz. Fizik qattaliklar real vogelikni aks ettirganligi uchun ularning haqiqiy qismi ma'noga ega. Yana shuni ta'kidlash lozimki, monoxromatik to'lqinni bunday yozish funksiyalar ustida chiziqli operatsiyalar bajarilganda o'rinali bo'ladi.

navbatda elektr maydonni ko'rib chiqamiz. Elektr maydon kuchlanganligi (7.30) ning haqiqiy qismini koramiz:

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)] \} \quad (7.32)$$

Bu yerda  $\mathbf{E}_0$  qandaydir kompleks vektor.  $|\mathbf{E}_0|^2$  ham umiman olganda kompleks son bo'ladi. Uning argumentini  $-2\alpha$  deb olsak,

$$|\mathbf{E}_0|^2 = |\mathbf{E}_0|^2 e^{-2i\alpha}. \quad (7.33)$$

Bu ifodani quyidagi ko'rinishda ham yozish mumkin:

$$|\mathbf{E}_0|^2 = b^2 e^{-2i\alpha}. \quad (7.34)$$

Bu yerda  $b$  yana kompleks son bo'lib, uning kvadrati haqiqiy bo'ladi va  $b^2 = |\mathbf{E}_0|^2$ . Yangi kompleks son orqali (7.32) quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re} \{ b \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t - \alpha)] \}, \quad (7.35)$$

Yuqoridagi xossaga ega bo'lgan  $b$  vektorni haqiqiy va o'zaro perpendikulyar ikkita  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  vektorlar orqali yozish mumkin, ya'ni

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2, \quad b^2 = b_1^2 - b_2^2. \quad (7.36)$$

Koordinata o'qlarini shunday tanlaymizki, bunda to'lqin  $x$  o'qi bo'ylab tarqalsin va  $\mathbf{b}_1$  ning yo'nalishi  $y$  o'qi bilan mos tushsin. U holda  $\mathbf{b}_2$  ning yo'nalishi  $z$  o'qiga parallel yoki antiparallel bo'ladi. Bunga asosan (7.35) bilan ifodalangan elektr maydon kuchlanganligining  $y$  va  $z$  o'qlarga tashkil etuvchilarga ajratamiz:

$$E_y = b_1 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha), \quad (7.37)$$

$$E_z = \pm b_2 \sin(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha). \quad (7.38)$$

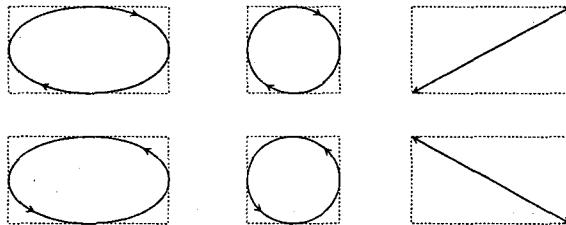
Bundan quyidagi tenglik hosil bo'ladi:

$$\frac{E_y^2}{b_1^2} + \frac{E_z^2}{b_2^2} = 1. \quad (7.39)$$

Bu tenglamadan ko'ramizki, elektr maydon kuchlanganligining uchi fazoning har bir aniq nuqtasida to'lqin tarqalish yo'nalishiga perpendikulyar tekislikda ellips chizib aylanadi. Bunday to'lqin *elliptik* qutblangan

deyiladi. Fazo va vaqtida  $E$  vektorning uchi to'lqin tarqalish yo'nalishini o'ragan vint chizig'i bo'ylab aylanadi. Vint bo'ylab aylanish yo'nalishi (7.38) ifodadagi  $b_2$  ning oldidagi ishora bilan aniqlanadi.

To'lqinning tarqalish yo'nalishiga qarab turgan kuzatuvchiga nisbatan  $E$  vektorning uchi soat strelkasi bo'yicha aylansa (musnat ishora) to'lqin *musbat spirallikka* (optikada chap qutblanish) ega deyiladi (7.1-rasm, yuqori qatordagi birinchi chizma). Aylanish soat strelkasiga qar-



7.1-rasm:

shi bo'lsa, to'lqin *manfiy spirallikka* (optikada o'ng qutblanish) ega deyiladi (7.1-rasm, pastki qatordagi birinchi chizma). Agar  $|E_y| = |E_z|$  bo'lsa, ellips doira shaklini oladi, to'lqin *doiraviy* qutblangan deyiladi (7.1-rasm, yuqori va pastki qatordagi ikkinchi chizma).

Agar  $E_y = 0$  yoki  $E_z = 0$  bo'lsa, to'lqin *chiziqli* qutblangan deyiladi (7.1-rasm, yuqori va pastki qatordagi uchinchi chizma).

Chiziqli qutblangan yassi monoxromatik elektromagnit to'lqinning elektr va magnit maydon kuchlanganliklari quyidagicha yoziladi:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp\{i(kr - wt)\}, \quad (7.40)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp\{i(kr - wt)\}. \quad (7.41)$$

Bu yerda  $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{H}_0$  o'zgarmas haqiqiy vektorlar.

Magnit maydon kuchlanganligining tebranish yo'nalishi (7.31) bilan aniqlanadi. Bunda magnit va elektr maydon kuchlanganligi vektorlarining tebranishlari o'zaro perpendikulyar yo'nalishlarda bo'lishini e'tiborga olish kerak.

Magnit maydon kuchlanganligi vektorining yo'nalishi *qutblanish yo'nalishi* deb atash qabul qilingan. Shuningdek, magnit maydon kuchlanganligi vektori bilan to'lqinning tarqalish yo'nalishi tashkil qilgan tekislik *qutblanish tekisligi* deb yuritiladi.

Agar to'lqindagi elektr va magnit maydon kuchlanganliklari vaqt va fazodagi o'zgarishi yuqoridagi qonuniyatlarning birortasiga ham bo'y-sunmasa to'lqin qutblanmagan deyiladi.

Endi monoxromatik to'lqin chastotasi manbaning harakat tezligiga qanday bog'langanligini ko'rib chiqamiz. Manba bilan bog'langan  $K_0$  sanoq sistemada  $\omega_0$  (xususiy) chastotali elektromagnit to'lqin tarqalayotgan bo'lsin. Kuzatuvchi turgan  $K$  sanoq sistemaga nisbatan  $K_0$  sistema  $x$  o'qi bo'ylab  $V$  tezlik bilan harakatlanayotgan deb olamiz.

To'lqin vektori va chastotasi ishtirokida komponentalari quyidagi-cha aniqlangan 4-vektor tuzamiz:

$$k^i = \left( \frac{\omega}{c}, k \right). \quad (7.42)$$

Bu kattaliklar haqiqatan ham 4-vektorni tashkil qilishini tekshirish uchun uning 4-radius-vektorga skalyar ko'paytmasini hosil qilamiz:

$$k^i x_i = \frac{\omega}{c} ct - k_x x - k_y y - k_z z = \omega t - kr. \quad (7.43)$$

Bu skalyar kattalik bo'lib, to'lqin fazasiga teng. To'lqin fazasi invariant kattalikdir, ya'ni bir inersial sanoq sistemadan ikkinchisiga o'tganda o'zgarmaydi.  $k^i$  4-to'lqin vektori deb ataladi.  $K$  sanoq sistmasidan  $K_0$  sistemaga otishda 4-to'lqin vektoring nolinchki komponentasi uchun almashtirish formulasini yozamiz:

$$k_{(0)}^0 = \frac{k^0 - \frac{V}{c} k^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (7.44)$$

Bu yerda

$$k_{(0)}^0 = \frac{\omega_0}{c}, \quad k^0 = \frac{\omega}{c}, \quad k^1 = k_x = \frac{\omega}{c} n_x = \frac{\omega}{c} \cos \theta, \quad (7.45)$$

$\theta$  kuzatuvchi turgan sanoq sistemada  $x$  o'qi bilan to'lqin tarqalish yo'naliishi orasidagi burchak. (7.45) ni inobatga olib (7.44) dan  $\omega$  ni topamiz:

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c} \cos \theta}. \quad (7.46)$$

Bu ifoda kuzatuchiga nisbatan harakat qilayotgan manbaning nurlanish chastotasini uning xususiy chastotasi  $\omega_0$ , kuzatuvchi turgan sanoq sistemada to'lqin tarqalish burchagi  $\theta$  va nisbiy tezlik  $V$  orqali topish imkoniyatini beradi.

Agar  $|\cos \theta| = 1$  bo'lsa, (7.46) ga ko'ra chastotaning tezlikga bog'lanishi *bo'ylama Doppler effekti* deyiladi. Bunda:

$$\cos \theta = +1 \text{ bo'lsa,}$$

$$\omega \approx \omega_0 \sqrt{1 + V/c}, \quad \omega > \omega_0 \quad (7.47)$$

manba kuzatuvchiga yaqinlashmoqda;

$$\cos \theta = -1 \text{ bo'lsa,}$$

$$\omega \approx \omega_0 \sqrt{1 - V/c}, \quad \omega < \omega_0 \quad (7.48)$$

manba kuzatuvchidan uzoqlashmoqda.

Agar  $|\cos \theta| \approx 0$  ( $\theta \approx \pi/2$ ) bo'lsa, (7.46) ga ko'ra chastotaning tezlikga bog'lanishi *ko'ndalang Doppler effekti* deyiladi. Bu holda:

$$\omega \approx \omega_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}, \quad \omega < \omega_0. \quad (7.49)$$

Bundan ko'rilib turibdiki, xususiy chastota doimo katta ekan.

Endi  $V/c \ll 1$  holni ko'rib chiqamiz. (7.46) ni  $V/c$  ning darajalari bo'yicha qatorga yoyamiz va unung birinchi darajasiga proporsional bo'lgan had bilan chegaralanib quyidagini olamiz:

$$\omega \approx \omega_0 \left( 1 + \frac{V}{c} \cos \theta \right). \quad (7.50)$$

Bu klassik fizikada ("Optika") olingen natijaning huddi o'zi. Faqat klassikada burchak barcha inersial sanoq sistemalarda birday bo'lib, invariant kattalik deb hisoblangan. Ko'ndalang Doppler effekti faqat relyativistik fizikaga xos bo'lib. Klassik fizikaga asoslanib bu qonuniyatni aniqlab bo'lmaydi.

Doppler effektini tajribalarda o'rganish mihim ahamiyatga ega. Chunki, chastotaning bir sanoq sistemasdan ikkinchisiga o'tishdagi o'zgarishi, vaqtning turli sanoq sistemalarda turlicha o'tishi bilan bevosita bog'langan. Doppler effektini yuqori aniqlikda o'rganish nisbiylik nazarayasining to'g'ri nazariya ekanligini isbotlaydi.

Bunday tajribani birinchi bo'lib 1938 yilda Ayvs amalga oshirgan. Bu tajribaning aniqligi uncha katta bo'lmasada, nisbiylik nazariyasini tajribada tasdiqlash borasida Maykelson va Morli tajribalariga teng-lashtirish mumkin.

Atom yadrosining  $\gamma$ -kvantlarni chiqarishidagi topilgan yangi hodisa

- Myossbauer effekti ochilgandan keyin Doppler effekti juda yuqori aniqlikda o'lchash imkoniyati tug'ldi. Bu effektini o'rganish birinchidan, bizning kursning doirasiga kirmaydi, ikkinchida uni o'rganish uchun boshqa darajadagi bilim (kvant mexanikasi) talab qilinadi.

## 7.4 7-bobga oid masalalar va savollar

1. Erkin fazoda skalyar potensial  $\varphi = 0$  deb, elektromagnit maydonni faqat vektor potensial  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  bilan aniqlash mumkinligini ko'rsating.
2. Erkin fazoda yassi monoxromatik to'lqinlar superpozitsiyasi  $\Psi(\mathbf{r}, t) = \int \psi(\mathbf{k}) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)] d\mathbf{k}$  to'lqin paket deyiladi. Qanday shart bajarilganda amplituda  $\psi(\mathbf{k})$  ning ko'rinishidan qa'tiy nazar  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  bir jinsli Dalamber tenglamasining yechimi bo'la oladi?
3.  $\xi = x - vt$ ,  $\eta = x + ct$  o'zgaruvchilar kiritish bilan bir o'lchamli to'lqin tenglama  $f(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$  ko'rinishdagi yechimga ega bo'lishini ko'rsating.  $f_1$ ,  $f_2$  lar ikki marta differensiallanuvchi ixtiyoriy funksiyalar.
4. Yassi monoxromatik to'lqinni

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)], \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]$$

kompleks funksiyalar orqali ifodalash mumkin. ( $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{H}_0$  - o'zgarmas kompleks vektorlar;  $\omega$ ,  $\mathbf{k}$  haqiqiy o'zgarmaslar.  $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$  to'lqin tar-qalish yo'nalishidagi birlik vektor.) Bu funksiyalarning haqiqiy qismi ma'noga ega bo'lishini nazarda tutib:

- (a) Chastota va to'lqin vektor  $\omega^2 = c^2 k^2$  dispersiya qonuni bilan bog'langanligini, amplitudalar  $\mathbf{H}_0 = [\mathbf{n}\mathbf{E}_0]$ ,  $\mathbf{E}_0 = -\mathbf{n}\mathbf{H}_0$  shartni qanoatlantirishini ko'rsating.
- (b) To'lqinning elektr yoki magnit maydonining qo'shni maksimumlari orasidagi masofa  $\lambda = 2\pi/k$  ekanligini ko'rsating.
- (c) Monoxromatik to'lqin komponentalari  $A(B) = A(\bar{B})_0(r) \exp(i\omega t)$  larning, kvadratik shakllari orqali ifodalanadigan energetik kat-taliklarning tebranish davri bo'yicha o'rttachasi quyidagi ifodalar orqali aniqlanishini ko'rsating:

$$\overline{A^2} = \overline{[\text{Re}(A)]^2} = |A|^2/2, \quad \overline{AB} = \overline{[\text{Re}(A) \text{Re}(B)]} = \text{Re}(AB^*)/2.$$

5. Chiziqli qutblangan ikkita monoxromatik to'lqinlar  $z$  o'qi bo'ylab tar-qalmoqda. Birinchi to'lqin  $y$ , ikkinchisi  $x$  o'qi bo'ylab qutblangan. Birinchi to'lqining amplitudasi  $A$  ikkinchisini  $B$ . Ularning fazalarining faqqi  $\psi$ .
  - (a) Natijaviy to'lqining qutblanishini  $A/B$  nisbatga bog'liq holda o'r-ganing.
  - (b)  $A=B$  deb natijaviy to'lqining qutblanishini  $\psi$  ga bog'liq holda o'r-ganing.
6. Musbat spirallikka ega bo'lgan doiraviy qutblangan elektromagnit to'lqinni yozing.
7. Manfiy spirallikka ega bo'lgan doiraviy qutblangan elektromagnit to'lqinni yozing.
8. Yo'nalishi, chastotasi va amplitudasi bir xil, ammo qarama-qarshi isho-rali spiralliklarga ega bo'lgan ikkita doiraviy qutblangan elektromagnit to'lqinlar superpozitsiyasida hosil bo'lgan elektromagnit to'lqining chiziqli qutblanishga ega ekanligini ko'rsating.
9. Chiziqli qutblangan elektromagnit to'lqinni qarama-qarsi spiralliklarga ega bo'lgan ikkita doiraviy qutblangan elektromagnit to'lqinlarga ajrating.
10. Doiraviy qutblangan elektromagnit to'lqin maydonida zaryadning harakatini aniqlang.
11. Erkin fazoda Makvell-Lorentz tenglamalarini yozing.
12. Maydon kuchlanganliklari va Lorenz sharti bajarilganda potensiallar qanday tenglamani qanoatlantiradi?
13. Qanday to'lqin yassi deyiladi? Yassi elektromagnit to'lqin qanday xossalarga ega?
14. Yassi elektromagnit to'lqin qanday xossalarga ega?
15. To'lqin impulsi va Poynting vektori orasida qanday bog'lanish bor?
16. Qanday to'lqin monoxromatik deyiladi?
17. To'lqining qutblanishi nimani bildiradi?
18. Qanday qutblanishlarni bilasiz?
19. Qutblanishda spirallik nimani bildiradi?
20. Doppler effektini tushuntiring.
21. Qanday holda ko'ndalang Doppler effekti namoyon bo'ladi?

## 8-bob

# Ixtiyoriy harakatdagi zaryadlar sistemasining maydoni

### 8.1 Kechikuvchi potensiallar

Yuqoridagi boblarda biz tinch turgan va statsionar harakatda bo'lgan zaryadlar sistemasi hosil qiladigan maydon hamda zaryadsiz fazodagi maydon xossalari bilan bog'liq bo'lgan bir qator masalalarni ko'rib chiqdik. Endi zaryadlar sistemasining harakati ixtiyoriy bo'lgan - umumiy holda masalani ko'rib chiqamiz.

Qandaydir hajmda ixtiyoriy harakatda bo'lgan zaryadlar sistemasi berilgan bo'lsin. Bu hajmda zaryadlarning taqsimoti va harakati vaqt va fazoda o'zgaruvchi zaryad zichligi  $\rho(\mathbf{r}, t)$  va tok zichligi  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  bilan aniqlansin. Shu zaryadlar sistemasining maydonini topish kerak. Bu masalani o'rghanishni Lorenz kalibrovkasida potensallar uchun yozilgan Dalamber tenglamalarining yechimlarini aniqlashdan boshlaymiz:

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -4\pi\rho(\mathbf{r}, t), \quad (8.1)$$

$$\Delta\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \quad (8.2)$$

Bu yerda yuqorida ta'kidlaganimizdek, potensiallar uchun Lorenz sharti

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (8.3)$$

o'rni.

Dalamber tenglamalari - xususiy hosilali evolyutsion (tenglamalarda vaqt bo'yich hosila bor) tenglama bo'lganligi sababli, uning yechimini aniqlash uchun  $\rho(\mathbf{r}, t)$  bilan  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  dan tashqari boshlang'ich va chegaraviy shartlar berilgan bo'lishi lozim. Elektromagnit maydonni topish masalasi quyidagicha qo'yilishi mumkin: Boshlang'ich vaqtga

qadar ( $t < 0$ ) zaryadlar tinch turibdi va  $t = 0$  momentdan boshlab zaryadlar ixtiyoriy qonuniyat bilan harakat qila boshlaydi deb faraz qilamiz. Bunda elektronnit maydonda boshlang'ich holatga nisbatan g'alayonga keladi deb qarash mumkin. Shu sababli (8.1) va (8.2) tenglamalarni aynan shu g'alayon uchun yozilgan deb qaraymiz. Bu holda maydonning o'zgarishi uchun javobgar bo'lgan zaryad va tok zichligi  $t > 0$  da ma'lum deb qaraladi.  $t \leq 0$  da esa  $\rho(\mathbf{r}, 0) = 0$ ,  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, 0) = 0$  deb olish kerak. Masalani bunday qo'yilishida boshlang'ich vaqtida  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, 0) = 0$  va  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, 0) = 0$  bo'ladi. Maydon kuchlanganliklari va potensiallar orasidagi bog'lanish (3.19)-(3.20) tenglamalariga asosan bu shartlar potensiallar uchun quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{r}, 0) &= 0, \\ \frac{\partial A(\mathbf{r}, 0)}{\partial t} &= 0, \\ \varphi(\mathbf{r}, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Chegaraviy shartlar:  $t > 0$  da kuzatish nuqtasi cheksiz uzoqlashganda potensiallar  $1/r$  dan tezroq nolga intilishi talab qilinadi.

Yuqorida qo'yilgan masalanani aniq matematik metodlar yordamida yechish mumkin. Ammo bu masalaning yechimini ancha qulay bo'lgan fizik usul yordamida topamiz. Bu usulning asosida chiziqli tenglamalar uchun o'rinci bo'lgan superpozitsiya prinsipi yotadi.

Zaryadlar egallagan sohani cheksiz kichik hajm elementlariga bo'lamiz. Shu cheksiz kichik hajm elementlaridan biridagi zaryadlar hosil qilayotgan maydonni aniqlaymiz. Ko'rيلayotgan zaryadlar sistemasining maydoni barcha cheksiz kichik hajm elementlaridagi zaryadlar maydonlarining superpozitsiyasiga (yig'indisiga) teng.

Cheksiz kichik hajm elementlaridan birini tanlab olamiz. Undagi zaryad  $de = \rho dV'$  bo'lsin. Faqat shu zaryad mavjud deb, uning maydonini  $dV'$  hajmdan tashqarida aniqlaymiz.  $dV'$  hajmdan tashqarida zaryadlar yo'q, demak, tok ham bo'lmaydi. Bu hol uchun (8.1) va (8.2) tenglamalar bir jinsli tenglamalarga o'tadi.

Avval skalyar potensial uchun tenglamaning yechimini aniqlaymiz:

$$\Delta\delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \delta\varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (8.5)$$

Cheksiz kichik hajm elementidagi zaryadning hajmdan tashqarida hosil qilayotgan maydoni sferik simmetriyaga ega bo'ladi, ya'ni u faqat zaryaddan kuzatish nuqtasigacha bo'lgan masofa  $R = |r - r'|$  ga va vaqtga bog'liq bo'ladi. Bu holda Laplas operatorini sferik koordinatalarda yozilishidan (A.117 qarang) foydalanib (8.5) ni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial \delta\varphi}{\partial R} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \delta\varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (8.6)$$

Bu yerda Laplas operatoning  $\theta$  va  $\psi$  bo'yicha hosilali qismlarining  $\delta\varphi$  ga ta'siri nolga teng bo'lishi inobatga olindi.

Yangi funksiya kiritamiz:

$$\delta\varphi(R, t) = \frac{\chi(R, t)}{R}. \quad (8.7)$$

Bu funksiyaga nisbatan (8.6) tenglama, bizga ma'lum bo'lgan to'lqin tenglamasiga o'tadi, ya'ni:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0. \quad (8.8)$$

Bu tenglamaning yechimini umumiy holda quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\chi(R, t) = \chi_1 \left( t - \frac{R}{c} \right) + \chi_2 \left( t + \frac{R}{c} \right). \quad (8.9)$$

Avval (8.5) tenglamaning (8.9) dagi birinchi had bilan bog'liq bo'lgan xususiy yechimini ko'rib chiqamiz, ya'ni:

$$\chi(R, t) = \chi_1 \left( t - \frac{R}{c} \right) \quad (8.10)$$

deb olamiz. U vaqtida

$$\delta\varphi(t) = \frac{\chi_1 \left( t - \frac{R}{c} \right)}{R}. \quad (8.11)$$

Shu vaqtgacha uncha murakkab bo'lмаган математик амалларни bajardik. Fizika nuqtai nazaridan masalaning eng muhim joyiga yetib keldik. (8.11) vaqt o'tishi ( $t > 0$ ) bilan zaryad turgan nuqtadan (markazdan)  $c$  tezlik bilan tarqaluvchi sferik to'lqinni ifodalaydi. Kuzatish

nuqtasi zaryad turgan nuqtaga cheksiz yaqin bo'lganda ( $R \rightarrow 0$ ,  $t - R/c \rightarrow t$ ) (8.11) quyidagi ko'rinishga o'tadi:

$$\delta\varphi(t) = \frac{\chi_1(t)}{R}. \quad (8.12)$$

Ikkinchi tomondan  $\delta\varphi$  nuqtaviy zaryad maydon potensialiga teng:

$$\delta\varphi(t) = \frac{\delta e(t)}{R} = \frac{\rho(t)dV'}{R}. \quad (8.13)$$

Oxirgi ikkita ifodani taqqoslab,

$$\chi_1(t) = \rho(t)dV'$$

ekanligini aniqlaymiz. Bundan tashqari, potensial  $t$  ning funksiyasi sifatida silliq funksiya bo'lganligi uchun

$$\chi_1\left(t - \frac{R}{c}\right) = \rho\left(t - \frac{R}{c}\right)dV'$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Shunday qilib,  $dV'$  hajm elementidagi zaryadlar hosil qilayotgan maydonning skalyar potensiali uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\delta\varphi(t) = \frac{\rho\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R}dV'. \quad (8.14)$$

Bu ifodadan ko'rámizki, kuzatish nuqtasida vaqtning  $t$  momentidagi potensial vaqtning oldingi  $\tau = t - R/c$  momentidagi zaryad zichligi bilan aniqlanadi. Zaryad turgan joyda vaqtning  $\tau$  momentida paydo bo'lgan maydon g'alayoni  $R$  masofani  $c$  tezlik bilan  $R/c$  vaqtida bosib o'tib, kuzatish nuqtasiga shuncha vaqtga kechikib yetib keladi. Shuning uchun (8.14) bilan aniqlangan potensial *kechukuvchi potensiallar* deyiladi.

Zaryadlar sistemasining maydon potensialini aniqlash uchun (8.14) ifodani ular egallagan soha bo'yicha integrallash lozim:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'. \quad (8.15)$$

Xuddi shunga o'xshash yo'l bilan vektor potensialni aniqlaymiz:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'. \quad (8.16)$$

Bu ifodalar yana kechikuvchi potensiallar deb ataladi. (8.15) va (8.16) ifodalarda  $dV'$  hajm elementiga tegishli zaryad va tok zichligi shu hajm elementi turgan nuqtaning koordinatasi  $\mathbf{r}'$  ning funksiyasi ekanligi inobatga olindi.

Endi (8.9) dagi ikkinchi had bilan bog'liq bo'lgan xususiy yechimni ko'rib chiqamiz. Bu holda Dalamber tenglamalarining yechimi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV', \quad (8.17)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'. \quad (8.18)$$

Bu ifodalarda zaryad va tok zichligining  $\tau^* = t + R/c$  vaqt momentidagi qiymatlari bilan  $t$  vaqt momentida potensiallar aniqlanadi. Bunday potensiallar *ilgarilovchi potensiallar* deyiladi. Ilgarilovchi potensiallar (8.4) boshlang'ich shartni qanoatlantirmaydi. Zaryad va toklar tegishli nuqtalarda paydo bo'lmasdan shu zaryadlar bilan bog'liq bo'lgan maydon yuzaga keladi. Bu hol esa sababiyat prinsipiga zid.<sup>1</sup> Demak, klassik fizikada ilgarilovchi potensiallar ma'noga ega emas. Ilgarilovchi potensialardan farqli ravishda kechikuvchi potensiallar sababiyat prinsipiga bo'ysunadi. Kechikuvchi potensiallar klassik elektrodinamikada, ayniqsa nurlanish masalasida muhim ahamiyat kasb etadi.

Kechikuvchi potensiallar uchun topilgan integral ifodalar ancha murakkab, chunki integral ostidgi funksiyaning integrallash o'zgaruvchisi  $\mathbf{r}'$  ga bog'lanishi chigal ko'rinishga ega. Faqat ayrim hollardagina masalani oxirigacha yechish imkoniyati bor. Keyingi mavzularda shunday hollardan ba'zilarini ko'rib chiqamiz.

---

<sup>1</sup>Sabab (zaryadlarning haraqati) oqibatdan (zaryadlarning harakati bilan bog'liq bo'lgan maydonning o'zgarishi) ilgari sodir bo'lishi kerak. Bu ta'rif sababiyat prinsipi deyiladi.

## 8.2 Nuqtaviy zaryad kechikuvchi potensiali

Harakat qonuni ixtiyoriy bo'lgan bitta nuqtaviy zaryad uchun kechikuvchi potensiallarni aniqlaymiz. Zaryadning trayektoriyasi  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t)$  va tezligi  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0(t)$  berilgan deb hisoblaymiz. Kechikuvchi potensiallarni aniqlashda asosiy muammo (8.15) va (8.16) ifodalardagi integrallarni hisoblash bilan bog'liq. Hatto bitta nuqtaviy zaryad uchun ham bu integrallarni hisoblash oddiy emas.

Masalani skalyar potensial misolida ko'rib chiqamiz. Zaryad nuqtaviy bo'lganligi uchun (8.15) integralni hisoblashda zaryad zichligini  $\delta$ -funksiya orqali quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) = \int \rho(\mathbf{r}', \tau) \delta\left[\tau - \left(t - \frac{R(\tau)}{c}\right)\right] d\tau. \quad (8.19)$$

Bu yerda  $R(\tau) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)|$   $\tau$  vaqt momentida zaryaddan kuzatish nuqtasigacha bo'lgan masofa. Zaryad nuqtaviy bo'lganligi uchun zaryad zichligining ikkinchi argumentida  $\mathbf{r}'$  ni  $\mathbf{r}_0(\tau)$  bilan almashtirdik. (8.19) ifodani hisobga olib (8.15) ifoda bilan aniqlangan kechikuvchi skalyar potensialni qayta yozamiz:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int dV' \int \rho(\mathbf{r}', \tau) \frac{\delta\left[\tau - \left(t - \frac{R(\tau)}{c}\right)\right]}{R(\tau)} d\tau. \quad (8.20)$$

Yangi o'zgaruvchi kiritamiz:

$$\eta = \tau + \frac{R(\tau)}{c}, \quad d\eta = d\tau + \frac{1}{c} \frac{dR(\tau)}{d\tau} d\tau = \left(1 + \frac{1}{c} \frac{dR(\tau)}{d\tau}\right) d\tau. \quad (8.21)$$

Zaryadning  $\tau$  vaqt momentidagi tezligi  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}(\tau)/d\tau = -d\mathbf{R}(\tau)/d\tau$  ni radius-vektor  $\mathbf{R}(\tau)$  yo'nalishiga proeksiyasini hisoblaymiz:

$$\left(v \frac{\mathbf{R}}{R}\right) = -\frac{1}{R} \left(\frac{d\mathbf{R}}{d\tau} \mathbf{R}\right) = -\frac{1}{2R} \frac{d\mathbf{R}^2}{d\tau} = -\frac{dR}{d\tau}. \quad (8.22)$$

Buni va (8.21) ni nazarda tutib, (8.20) ni yangi o'zgaruvchilarga nisbatan yozamiz:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = e \int \frac{\delta(\eta - t) d\eta}{R - \mathbf{v}\mathbf{R}/c}. \quad (8.23)$$

$\delta$ -funksiyaning xossasidan foydalanib oxirgi integralni hisoblaymiz va natijada quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\varphi(r, t) = \frac{e}{R - vR/c}. \quad (8.24)$$

Xuddi shunga o'xshash yo'l bilan vektor potensial uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$\mathbf{A}(r, t) = \frac{ev}{c(R - vR/c)}. \quad (8.25)$$

Bu yerda tezlik va radius-vektor  $\tau$  vaqt momentida olinadi.  $\tau$  o'z navbatida

$$\tau = t - \frac{R(\tau)}{c} \quad (8.26)$$

tenglamaning yechimi bilan aniqlanadi. (8.24) va (8.25) Lienar-Vixert potensiallari deb yuritiladi. Bu potensiallarda zaryadning tezligi (harakat qonuni) hech qanday shart bilan cheklanmaganligini yana bir marta eslatib o'tamiz.

Ixtiyoriy harakatdagi zaryadning elektromagnit maydonini aniqlaymiz. Buning uchun Lienar-Vixert potensiallarini quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\varphi(r, t) = \frac{e}{\lambda}, \quad (8.27)$$

$$\mathbf{A}(r, t) = \frac{ev}{c\lambda}, \quad (8.28)$$

$$\lambda = R - \frac{vR}{c}. \quad (8.29)$$

Bu yerda potensiallar  $t$  vaqt momentiga tegishli,  $v$  va  $R$ , demak,  $\lambda$  ham  $\tau$  vaqt momentiga tegishlidir. Sunday qilib (8.27) va (8.28) ning o'ng tomonlari vaqt va koordinataning murakkab funksiyasidir.

Maydon kuchlanganliklari potensiallar orqali bizga ma'lum bo'lgan

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (8.30)$$

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (8.31)$$

ifodalar bilan aniqlanadi. Bu yerda vaqt bo'yucha hosila kuzatish vaqtiga  $t$  va koordinata bo'icha hosila kuzatish nuqtasining koordinatalari bo'yicha olinadi.

Elektr maydon kuchlanganligini aniqlaymiz:

$$\mathbf{E} = -e \operatorname{grad} \frac{1}{\lambda} - \frac{e}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{v}}{\lambda} = \frac{e}{\lambda^2} \operatorname{grad} \lambda - \frac{e}{c^2 \lambda} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{e \mathbf{v}}{c^2 \lambda^2} \frac{\partial \lambda}{\partial t}. \quad (8.32)$$

Bu ifodada ishtirok etuvchi vaqt bo'yicha hosilani hisoblaymiz:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Bu yerdagi  $\frac{\partial \tau}{\partial t}$  ni aniqlash uchun (8.26) dan  $t$  bo'yicha hosila olamiz:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t}.$$

Bundan

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \left( 1 + \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial \tau} \right)^{-1}.$$

(8.22) ni inobatga olib bu ifodani qayta yozamiz:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \left( 1 - \frac{Rv}{cR} \right)^{-1} = \frac{R}{\lambda}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{R}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (8.33)$$

Bundan foydalanib, (8.32) dagi vaqt bo'yicha hosilali hadlarni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{R}{\lambda} \dot{\mathbf{v}}, \quad (8.34)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -\frac{R}{\lambda} \left( \frac{vR}{R} + \frac{\dot{v}R}{c} - \frac{v^2}{c} \right). \quad (8.35)$$

Bu yerda  $\dot{\mathbf{v}} \equiv \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau}$ .

Endi (8.32) dagi grad  $\lambda$  ni hisoblaymiz:

$$\operatorname{grad} \lambda = (\operatorname{grad} \lambda)_\tau + \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} \operatorname{grad} \tau,$$

$$(\operatorname{grad} \lambda)_\tau = \operatorname{grad}_R \left( R - \frac{vR}{c} \right) = \frac{R}{R} - \frac{v}{c},$$

bu yerda  $(\text{grad } \lambda)_\tau$  hisoblanganda  $\tau$  o'zgarmas deb olinish kerak. Shu sababli, bu had hisoblanganda gradient faqat  $R$  ga tegishlidir. Shunday qilib, (8.33) va (8.35) ga asosan

$$\text{grad } \lambda = \frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} + \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} \text{grad } \tau = \frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} - \left( \frac{\mathbf{v}\mathbf{R}}{R} + \frac{\dot{\mathbf{v}}\mathbf{R}}{c} - \frac{\mathbf{v}^2}{c} \right) \text{grad } \tau.$$

Yuqoridagilarga o'xshash  $\text{grad } \tau$  ni hisoblaymiz:

$$\text{grad } \tau = -\frac{1}{c} \cdot \frac{(\text{grad } R)_\tau}{1 + \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial \tau}} = -\frac{\mathbf{R}}{cR} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial \tau}} = -\frac{\mathbf{R}}{c \left( R - \frac{\mathbf{v}\mathbf{R}}{c} \right)} = -\frac{\mathbf{R}}{c\lambda}.$$

Nihoyat,

$$\text{grad } \lambda = \frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} + \left( \frac{\mathbf{v}\mathbf{R}}{R} + \frac{\dot{\mathbf{v}}\mathbf{R}}{c} - \frac{\mathbf{v}^2}{c} \right) \frac{\mathbf{R}}{c\lambda}. \quad (8.36)$$

(8.34)-(8.36) ifodalarni (8.32) ga qo'yib, elektr naydon kuchlanganligini ikki qismga ajratib yozamiz:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2. \quad (8.37)$$

Bu yerda

$$\mathbf{E}_1 = e \left( 1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2} \right) \left( \mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}\mathbf{R}}{c} \right) \left( R - \frac{\mathbf{v}\mathbf{R}}{c} \right)^{-3}, \quad (8.38)$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{e}{c^2} \left[ \mathbf{R} \left[ \mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}\mathbf{R}}{c}, \dot{\mathbf{v}} \right] \right] \left( R - \frac{\mathbf{v}\mathbf{R}}{c} \right)^{-3}. \quad (8.39)$$

Magnit maydon kuchlanganligini hisoblash uchun yuqoridagi kabi yo'l tutib, elektr maydon kuchlanganligi bilan quyidagicha bog'langanligini aniqlash mumkin:

$$H(t) = \frac{1}{R(\tau)} [\mathbf{R}(\tau) \mathbf{E}(t)]. \quad (8.40)$$

(8.38)-(8.40) ifodalarning o'ng tomonidagi kattaliklar  $\tau$ , elektr va magnit maydon kuchlanganliklari esa  $t$  vaqt momentida olinadi.  $t - \tau$  vaqt oralig'ida zaryadning harakati tufayli yuz beradigan maydonning o'zgarishi  $R(\tau)$  masofani  $c$  tezlik bilan bosib o'tadi. Bu vaqt ichida

zaryad boshqa joyga ko'chadi. Masalan, tekis harakatda zaryad  $v(t - \tau)$  masofaga ko'chadi. Shuni ta'kidlash lozimki, magnit va elektr maydon kuchlanganliklari hamma nuqtalarda bir-biriga perpendikulyar ekan.

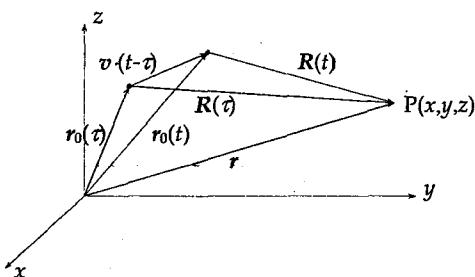
Ixtiyoriy harakat bajarayotgan nuqtaviy zaryadning elektr (magnit) maydonning (8.38) bilan aniqlanuvchi qismi faqat zaryadning tezligiga bog'liq. Shu sababli bu ifoda o'zgarmas tezlik bilan harakatlanayotgan relyativistik zaryadning elektr maydon kuchlanganligi (3.66) bilan mos tushishi kerak. Buni isbotlash uchun (8.38) ifodadaning o'ng tomonidagi hamma kattaliklarni  $t$  vaqt momentiga bog'liq holda yozish kerak bo'ladi. Buning uchun (8.38) ifodadagi har bir ko'paytuvchini ko'rib chiqamiz:

1. Tezlik o'zgarmas bo'lganligi uchun uni qaysi vaqtda olishning ahamiyati yo'q;

$$2. \mathbf{R}(\tau) - \frac{v\mathbf{R}(\tau)}{c} = \mathbf{R}(\tau) - \frac{vc(t-\tau)}{c} = \mathbf{R}(t), \quad (8.1\text{-rasmga qarang});$$

$$3. R(\tau) - \frac{vR(\tau)}{c} = \sqrt{R(t)^2 - \frac{1}{c^2}[vR(t)]^2} = R(t)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta(t)}.$$

Bu tenglikning har ikkala tomonini kvadratga oshiramiz va o'ng tomonidagi kattaliklarni  $t$  vaqtidan  $\tau$  vaqtga o'tkazamiz. Natijada bu tenglik o'rinali ekanligini ko'ramiz.



8.1-rasm:

Endi maydonni chegaraviy hollarda ko'rib chiqamiz:

1. Katta masfalarda ( $R \rightarrow \infty$ ):

$$E_1 \sim \frac{1}{R^2}, \quad (8.41)$$

$$E_2 \sim \frac{1}{R}. \quad (8.42)$$

Bu natijaga ko'ra katta masofalarda ikkinchi had sekin nolga intilganligi uchun, asosiy had bo'lib qoladi

2. Kichik tezliklarda ( $v \ll c$ ):

$$E_1 \approx \frac{eR}{R^3}, \quad (8.43)$$

$$E_2 \approx \frac{e}{c^2 R^3} [R[R\dot{v}]]. \quad (8.44)$$

Bu yerdagi birinchi ifoda sekin va harakatlanuvchi zaryadning maydoni bilan mos tushadi. Ikkinchi ifodaning ma'nosi nurlanish masalasini o'rghanishda ochiladi.

### 8.3 Ixtiyoriy harakatdagi zaryadlarning yetarlicha uzoq masofalardagi maydoni

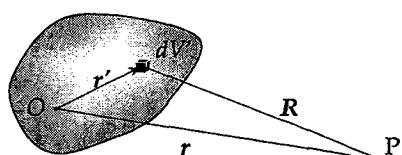
Kuzatish nuqtasi yetarlicha uzoq masofalarda deb, ixtiyoriy harakatdagi zaryadlardan tashkil topgan sistemaning elektromagnit maydonini aniqlaymiz. Koordinata boshini zaryadlar egallagan sohaga joylashtiramiz. Zaryadlar sistemasining chiziqli o'lchamlari  $L$  kuzatish nuqtasigacha (P) bo'lgan masofa  $r$  dan juda kichik bo'lsin. Bu holda koordinata boshidan  $dV'$  hajm elementiga o'tkazilgan radius-vektorning moduli  $r'$  ning eng katta qiymati  $L$  tartibida bo'lganligi uchun u ham  $r$  dan juda kichik bo'ladi (8.2-rasm). Bunga asosan kuzatish nuqtasi yetarlicha uzoqda joylashgan deganda

$$r' \leq L \ll r \quad (8.45)$$

shart o'rni bo'lishini ko'zda tutish kerak.

Shu bilan birga bu shart zaryadlar fazoning cheklangan sohasini egallagan deb olish kerakligini bildiradi.

Shart (8.45) bajarilgan deb (8.16) bilan aniqlangan kechikuvchi skalyar potensial  $\varphi(r, t)$  ni  $r'/r$  ning darajalari bo'yicha qatorga yoyamiz va hozircha  $1/r$  ga proporsional bo'lgan hadlar



8.2-rasm: .

bilan cheklanamiz. Ya'ni,

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r} \quad (8.46)$$

deb olamiz. Bu yaqinlashishda (8.16) quyidagi ko'rinishga o'tadi:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{r} \int \rho \left( \mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) dV'. \quad (8.47)$$

Bu yerda zaryad zichligidan olingan integral to'liq zaryadga teng bo'lmaydi. Kechikish vaqt turli  $dV'$  hajm elementlari uchun turlichay, demak, integrallashda turli vaqt larga tegishli bo'lgan zaryadlarning yig'indisi olinadi. Bu kattalik to'liq zaryadga teng bo'lmaydi.

Endi kechikish vaqtini  $r'/r$  ning darajalari bo'yicha qatorga yoyamiz:

$$\tau \approx t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{cr} = \tau_0 + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{cr}. \quad (8.48)$$

Bundan kechikish vaqt ikki qismga ajralgani ko'rinish turibdi. Birinchisi,  $r/c$  zaryadlar sistemasining hamma nuqtalari uchun bir xil bo'lganligi uchun umumiyo kechikish vaqt deb ataymiz. Ikkinchisi,  $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}/cr$  turli nuqtalar uchun turlichay bo'lib, xususiy kechikish vaqt deb ataladi.

Xususiy kechikish vaqtining umumiyo kechikish vaqtiga nisbati  $r'/r$  tartibida bo'lganligi uchun (8.47) dagi zaryad zichligini xususiy kechikish vaqtning darajalari bo'yicha qatorga yoyamiz:

$$\rho \left( \mathbf{r}', \tau_0 + \frac{|\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}|}{c} \right) = \rho(\mathbf{r}', \tau_0) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', \tau_0)}{\partial \tau_0} \cdot \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{cr} + \dots \quad (8.49)$$

Bunday qator ma'noga ega bo'lishi uchun, u yaqinlashuvchi bo'lishi kerak. Yaqinlashuvchi bo'lishi uchun  $n + 1$  - hadning  $n$  - hadga nisbati birdan juda kichik bo'lishi kerak. Shu nisbatni baholaymiz:

$$\frac{\frac{\partial \rho(\mathbf{r}', \tau_0)}{\partial \tau_0} \cdot \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{cr}}{\rho(\mathbf{r}', \tau_0)} \sim \frac{\rho}{T} \cdot \frac{L}{c} = \frac{L}{Tc} = \frac{v}{c} \ll 1. \quad (8.50)$$

Bu yerda  $T$  zaryad zichligining o'zgarishini aniqlovchi xarakterli vaqt,  $v = L/T$  zaryadlar harakatini ifodalovchi qandaydir tezlik. (8.50) ga

asosan (8.49) qator yaqinlashuvchi bo'lishi uchun  $v \ll c$  bo'lishi kerakligi kelib chiqadi. Shunday qilib, agar zaryadlarning harakat tezligi norelyativistik bo'lsa, (8.49) qator ma'no kasb etadi.

Endi (8.49) qatomni (8.47) ga qo'yib, skalyar potensial uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{r} \left( \int \rho(\mathbf{r}', \tau_0) dV' + \int \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', \tau_0)}{\partial \tau_0} \cdot \frac{\mathbf{r}' \mathbf{r}}{cr} dV' + \dots \right). \quad (8.51)$$

Bu ifodada (8.47) ga nisbatan jiddiy soddalashtirish amalga oshirildi. Zaryad zichligi sistemaning hamma nuqtalarida bir xil  $\tau_0$  vaqt momen-tida olinadi.

(8.51) dagi birinchi had juda sodda ma'noga ega. Zaryad zichligi bir vaqtda olinganligi uchun  $\int \rho(\mathbf{r}', \tau_0) dV'$  sistemaning to'liq zaryadiga teng va u bilan bog'liq bo'lган had koordinata boshiga turgan, zaryad miqdori sistemaning to'liq zaryadiga teng bo'lган, nuqtaviy zaryad ska-lyar potensialini beradi. Bu yaqinlashishda vektor potensial nolga teng bo'lishini ko'rish qiyin emas.

Elektroneytral sistema uchun birinchi had nolga teng bo'ladi. Bu holda (8.51) dagi ikkinchi had asosiy bo'lib qoladi. Bu hadda vaqt bo'yicha hosila bilan integrallash tartibini o'zgartiramiz:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{r} \left( \frac{r}{cr} \frac{\partial}{\partial \tau_0} \int \rho(\mathbf{r}', \tau_0) \mathbf{r}' dV' \right) = \frac{r \dot{d}(\tau_0)}{cr^2}. \quad (8.52)$$

Bu yerda

$$\dot{d}(\tau_0) \equiv \frac{\partial d(\tau_0)}{\partial \tau_0}, \quad d(\tau_0) = \int \rho(\mathbf{r}', \tau_0) \mathbf{r}' dV'. \quad (8.53)$$

$d(\tau_0)$  zaryadlar sistemasining  $\tau_0$  vaqt momentidagi dipol momenti.

Skalyar potensial kabi vektor potensialni ham aniqlash mumkin:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', \tau_0) dV' = \frac{\dot{d}(\tau_0)}{cr}. \quad (8.54)$$

Skalyar va vektor potensial sistemaning dipol momenti orqali aniqlanganligi uchun bu yaqinlashish dipol yaqinlashishi deb ataladi.

Dipol yaqinlashishda (8.52) va (8.54) ifodalar bilan aniqlangan potensiallar yordamida magnit va elektr maydon kuchlanganliklarini aniqlaymiz:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{cr} \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{rot} \ddot{\mathbf{d}}(\tau_0) = \\ &= \frac{1}{cr} [\operatorname{grad} \tau_0, \ddot{\mathbf{d}}(\tau_0)] = \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{A}} \mathbf{n}] = \frac{1}{c^2 r} [\ddot{\mathbf{d}} \mathbf{n}]. \end{aligned} \quad (8.55)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\mathbf{n}}{c} \dot{\varphi} - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{n}}{c} (\mathbf{n} \dot{\mathbf{A}}) - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} = \\ &= \frac{1}{c} \{ \mathbf{n} (\mathbf{n} \dot{\mathbf{A}}) - \dot{\mathbf{A}} \} = \frac{1}{c} [[\dot{\mathbf{A}} \mathbf{n}] \mathbf{n}] = \frac{1}{c} [[\ddot{\mathbf{d}} \mathbf{n}] \mathbf{n}], \end{aligned} \quad (8.56)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = [\mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \mathbf{n}] \quad |\mathbf{E}| = |\mathbf{H}|. \quad (8.57)$$

Vektor va skalyar potensial, elektr va magnit maydon kuchlanganliklari koordinata va vaqtga bog'lanishi

$$\varphi, |\mathbf{A}|, |\mathbf{H}|, |\mathbf{E}| \sim \frac{1}{r} f \left( t - \frac{r}{c} \right) \quad (8.58)$$

qonuniyat bilan aniqlanadi. Bunday bog'lanish amplitudasi  $1/r$  qonuniyat bilan kamayuvchi sferik to'lqingga xosdir. Demak, zaryadlari ixtiyoriy harakatda bo'lgan sistema  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$  yo'nalishda tarqalayotgan sferik elektromagnit to'lqin manbayi bo'ladi.

Bu xulosaga ko'ra (8.50) shartni boshqacha talqin qilish mumkin. Ya'ni, (8.50) dagi  $T$  ni to'lqin davri yoki  $1/T$  uning chastotasi deb qarash mumkin. Bu holda  $T_c$  to'lqin uzunligi bo'ladi. Bularga asosan  $v/c \ll 1$  shart  $L/\lambda \ll 1$  shart bilan teng huquqli ekanligini ko'ramiz. Shunday qilib, yuqoridagi natijalar o'rinni bo'lishi uchun sistemaning chiziqli o'lchami nurlanayotgan elektromagnit to'lqin uzunligiga nisbatan juda kichik bo'lishi kerak ekan.

Elektr va magnit maydon kuchlanganliklarining son qiymatlari o'zaro teng, yo'nalishlari esa bir-biriga perpendikulyar va elektromagnit to'lqinning tarqalish yo'nalishi bilan o'ng parma qoidasiga bo'y sunadi.

*Ixtiyoriy harakatdagi zaryadlar sistemasining dipol yaqinlashishdagi elektromagnit maydoni ko'ndalang sferik to'lqin, zaryadlar esa to'lqin manbasi ekan.*

## 8.4 Dipol nurlanishi

Yuqorida dipol yaqinlashishida maydon kuchlanganliklari uchun olingan natijalar asosida nurlanish intensibligini – nurlanish yo‘nalishiga perpendikulyar turgan birlik yuzadan birlik vaqtida o‘tuvchi elektromagnit maydon energiyasini hisoblaymiz.

Qutb o‘qi dipol momenti  $\vec{d}$  bo‘ylab yo‘nalgan sferik koordinatalar sistemasini  $r, \theta, \psi$  (8.3-rasm) kiritamiz. Magnit maydon kuchlanganligi  $\mathbf{H}$  ning yo‘nalishi kenglik chizig‘iga urunma bo‘ylab azimutal burchak  $\psi$  ning kamayish tomoniga yo‘nalgan  $[\mathbf{n}, \vec{d}]$  vektor bilan aniqlanadi. U sferik koordinatalar sistemasida quyidagi proeksiyalarga ega bo‘ladi:

$$H_r = 0, \quad H_\theta = 0, \quad H_\psi = \frac{\ddot{d}}{c^2 r} \sin \theta. \quad (8.59)$$

Elektr maydon kuchlanganligi  $\mathbf{E}$  ning proeksiyaları quyidagi ifodalar bilan aniqlanadi:

$$E_r = 0, \quad E_\theta = \frac{\ddot{d}}{c^2 r} \sin \theta, \quad E_\psi = 0. \quad (8.60)$$

Bu ifodalardan ko‘rinib turibdiki, maydon  $\theta = \pi/2$  tekislikda o‘zining eng katta qiymatiga erishib, qutb o‘qiga yaqinlashgan sari nolgacha kamayib boradi.

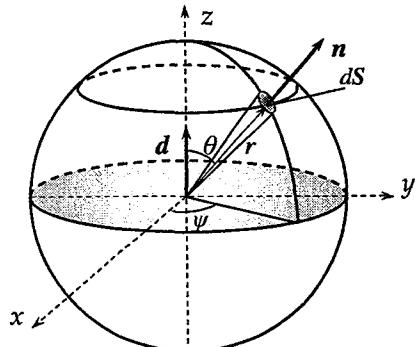
Nurlanayotgan sistemaning Poynting vektorini hisoblaymiz:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}] = \frac{c}{4\pi} \mathbf{H}^2 \mathbf{n} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}^2 \mathbf{n} = \frac{1}{4\pi c^3 r^2} [\ddot{d} \mathbf{n}]^2 \mathbf{n}. \quad (8.61)$$

Poynting vektori kuzatish nuqtasiga o‘tkazilgan radius-vektor bo‘yicha yo‘nalgan bo‘lib, moduli

$$|\mathbf{S}| = \frac{1}{4\pi c^3 r^2} \ddot{d}^2 \sin^2 \theta. \quad (8.62)$$

Poynting vektorining noldan farqli bo‘lishi va doimo nurlanish manbayidan tashqariga yo‘nalganligi, sistemadan elektrromagnit nurlanish energiyasi oqimi mavjudligini ko‘rsatadi. (8.62) nurlanish energiyasi oqimi



8.3-rasm: .

zichligining kuzatish nuqtasining fazoviy orientatsiyasiga bog'lanishini beradi. Energiya oqimining mavjudligi *nurlanish manbayi* (*nurlatgich*) va *nurlanish* tushunchalarini kiritish ma'noga ega ekanligini bildiradi.

Fazoviy burchak  $d\Omega$  ga tortilgan  $dS$  yuzadan birlik vaqtida oqib chiqadigan elektromagnit maydon energiyasini aniqlaymiz:

$$dI = \mathbf{S} dS = \frac{\ddot{d}^2}{4\pi c^3} \sin^3 \theta d\theta d\psi. \quad (8.63)$$

Nurlanishning to'liq intensivligi - nurlanish energiyasi to'liq oqimini topish uchun (8.63) ifodani barcha fazoviy burchaklar bo'yicha integrallash kerak

$$I = \int \mathbf{S} dS = \int \frac{c}{4\pi} H^2 dS = \frac{\ddot{d}^2}{4\pi c^3} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta. \quad (8.64)$$

Bu yerdagi integralarni hisoblab nurlanishning to'liq intensivligi uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$I(t) = \frac{2}{3} \frac{\ddot{d}^2(\tau_0)}{c^3}. \quad (8.65)$$

Ko'ramizki, dipol yaqinlashishda nurlanish intensivligi zaryadlar sistemasining dipol momentining vaqt bo'yicha ikkinchi tartibli hosilasining kvadratiga to'g'ri proporsionaldir. Kuzatish vaqt  $t$  dagi nurlanish intensivligi dipol momentining  $\tau_0$  vaqt momentdagи qiymati bilan aniqlanadi.

(8.65) formulani bitta zaryad uchun yozamiz:

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2}{c^3}. \quad (8.66)$$

$a$  tezlanish. Bu formuladan ko'rinish turibdiki, tezlanish bilan harakatlanayotgan zaryad nurlanar ekan.

Modomiki, nurlanish natijasida atrofga tarqaluvchi elektromagnit to'lqin energiya va impulsiga ega ekan, murlanuvchi zaryadlar sistemasi ning energiyasi va impulsi kamayadi. Xususan, sistema energiyasining vaqt bo'yicha o'zgarishi

$$\frac{dE}{dt} = -I. \quad (8.67)$$

Bu yerda “-” ishora nurlanish natijasida sistema energiyasining kamayishini bildiradi.

**Masala:** Muvozanat holatga qaytaruvchi (garmonik) tashqi kuch  $F = m\ddot{x} = -kx$  ta'sirida tebranma harakat qilayotgan massasi  $m$  bo'lgan zaryadning (garmonik ossilyator) nurlanisini ko'rib chiqamiz. Bu yerda  $k$  elastiklik koefitsienti. Agar  $\omega_0^2 = k/m$  deb olsak, zaryadning harakat tenglamasi

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (8.68)$$

bo'ladi. Bu tenglamaning yechimi

$$x(t) = x_0 \cos \omega t, \quad a(t) = -x_0 \omega_0^2 \cos \omega t. \quad (8.69)$$

Bularga ko'ra nurlanish  $\omega_0$  chastotada yuz berishini ko'ramiz, ya'ni nurlanish monoxromatik bo'ladi. Ossilyatorning to'liq energiyasi

$$\mathcal{E} = T + U = \frac{m\omega_0^2 x_0^2}{2}. \quad (8.70)$$

Endi bir davrdagi o'rtacha nurlanish intensivligini hisoblaymiz:

$$\bar{I} = \frac{2}{3} \frac{e^2 \overline{a^2}}{c^3} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T (a(t))^2 dt = \frac{1}{3} \frac{e^2 \omega_0^4 x_0^2}{c^3} = -\frac{d\mathcal{E}}{dt}. \quad (8.71)$$

Bu ifodani (8.70) bilan taqqoslab, ossilyator energiyasining o'zgarishini aniqlovchi tenglamani yozamiz:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\gamma \mathcal{E}, \quad \gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega_0^2}{c^3}. \quad (8.72)$$

Bu tenglaning yechimi

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-\gamma t}, \quad (8.73)$$

$$x_0 = x_0(0) e^{-\gamma t/2}. \quad (8.74)$$

Bu yerda  $\gamma$  so'nish koefitsienti deb ataladi,  $x_0$  tebranish amplitudasi. Ko'ramizki, nurlanish natijasida ossilyator energiyasining kamayishi, demak, tebranishning so'nishi ro'y beradi. Bu hodisa ossilyatorning *radiatsion so'nishi* deyiladi.

## 8.5 Nurlanish reaksiyasi

Tezlanish bilan harakatlanayotgan zaryad nurlanishini va energiya va impulsini yo'qota borishini aniqladik (8.73). Nurlanish hisobiga zaryad energiya va impulsini yo'qotishi harakat qonunining o'zgarishiga olib keladi. Buning natijasida nurlanish intensivligi o'zgara boradi. Demak, nurlanish maydoni nurlanayotgan zaryadning harakatiga teskari kuch bilan ta'sir qiladi. Bunday ta'sirga *nurlanish reaksiyasi* deyiladi. Bu holda kuchlar balansida reaksiya kuchini hisobga olish kerak. Nurlanish reaksiyasi tezlanish bilan harakatlanvchi zaryadlardan tashkil topgan sistemada ham mavjud.

Masalani bitta nuqtaviy zaryad misolida ko'rib chiqamiz. Zaryad davriy yoki davriyga juda yaqin harakatda bo'lsin deb faraz qilamiz. Davriy kuch ta'sirida zaryad davriy harakat qiladi. Agar reaksiya kuchini hisobga olsak, zaryadning harakati davriy bo'la olmaydi. Ammo, reaksiya kuchi tashqi kuchlardan yetarlicha kichik bo'lsa, qaysidir ma'noda zaryadning harakatini deyarli davriy deb ko'rish mumkin bo'ladi. Bu faraz to'g'ri ekanligiga keyinroq ishonch hosil qilamiz.

Zaryadga ta'sir etuvchi tashqi va reaksiya kuchi bajargan ishni  $t_1$  va  $t_2$  vaqt momentlari orasida hisoblaymiz. Harakat davriy yoki davriyga yaqin deb olganligimiz uchun boshlang'ich va oxirgi vaqt momentlarida sistemaning holati deyarli bir xil deb olamiz. Shu sababli reaksiya kuchini hisobga olmasak,  $(t_2 - t_1)$  vaqt oralig'ida bajarilgan ish nolga teng, ya'ni,

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} v dt = \Delta \mathcal{E} = 0.$$

Endi energiya balans tenglamasida reaksiya kuchini hisobga olamiz:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{F} + \mathbf{F}_s) v dt = \Delta \mathcal{E} + \Delta \mathcal{E}_1 \neq 0. \quad (8.75)$$

Bu yerda  $\mathbf{F}_s$  reaksiya kuchi bo'lib, uning bajargan ishi  $\Delta \mathcal{E}_1 \neq 0$ . Tashqi kuchning bajargan ishi nolga tengligini nazarda tutsak, zaryad energiya-

sining kamayishi faqat nurlanish hisobiga bo'lishi kelib chiqadi:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_s v dt = \Delta \mathcal{E}_1 = - \int_{t_1}^{t_2} I dt = - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \int_{t_1}^{t_2} a^2 dt. \quad (8.76)$$

O'ng tomondagi integralda  $a^2 = \dot{v}\dot{v}$  deb yozamiz va uni bo'laklab integrallaymiz:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_s v dt = - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} a v \Big|_{t_1}^{t_2} + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \int_{t_1}^{t_2} v \dot{a} dt. \quad (8.77)$$

$t_1$  va  $t_2$  vaqt momentlarida zaryadning mexanik holati bir xil ekanligini inobatga olsak, o'ng tomondagi birinchi haq nolga teng bo'ladi. Natijada (8.77) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_s v dt = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \int_{t_1}^{t_2} v \dot{a} dt. \quad (8.78)$$

Integral ostidagi ifodalarni tenglashtirib,

$$\mathbf{F}_s = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{\mathbf{a}}. \quad (8.79)$$

Shunday qilib, reaksiya kuchi zarrachaning tezlanishidan vaqt bo'yicha olingan hosilaga proporsional ekanligini ko'ramiz.

Reaksiya kuchi harakat yo'nalishiga teskari yo'nalganligi uchun mexanikadagi ishqalanish kuchiga qiyoslab, Lorentz ishqalanish kuchi deb ataymiz.

Yuqorida reaksiya kuchi asosiy kuchga nisbatan juda kichik deb faraz qilgan edik. Ammo bu shartdan oshkorra ravishda foydalanmadik. Shuning uchun olingan natija doimo to'g'ri bo'lishi kerak. Hozir teskari faraz nimaga olib kelishini ko'rib chiqamiz. Har ikkala kuchni hisobga olib zaryad uchun harakat tenglamani yozamiz:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_s \approx \mathbf{F}_s.$$

Bu yerda asosiy kuch reaksiya kuchiga nisbatan kichik degan farazdan foydalandik. Bu tenglamani (8.79) ga asosan quyidagi ko'rinishda yozish mumkin

$$m\mathbf{a} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{\mathbf{a}}$$

Bu differensial tenglamaning yechimi

$$a = a_0 \exp\left(\frac{3mc^3 t}{2e^2}\right).$$

Ko'ramizki, harakatga qarshilik ko'rsatuvchi kuch ta'sirida zaryadlan-gan zarrachaning tezlanishi ortmoqda. Bir tomondan nurlanish hiso-biga energiyasi kamaysa, ikkinchi tomondan, reaksiya kuchi ta'sirida uning energiyasi ortmoqda. Bunday qarama - qarshlikning paydo bo'lishi  $|F_s| \gg |F|$  shart o'rinsiz ekanligini ko'rsatadi. Shunday qilib,  $|F_s| \ll |F|$  shart o'rinishi bo'lishi kerak.

Bu shartning o'rinali bo'lish chegarasini aniqlaymiz. Buning uchun yana tashqi kuchni davriy deb olamiz. Reaksiya kuchi kichik bo'lganligi uchun harakatning davriyligiga deyarli ta'sir qilmaydi deb olamiz. Shu sababli  $|a| \approx \omega a$  deb quyidagilarni yozamiz:

$$|F_s| \approx \frac{2e^2 \omega}{3c^3 m} |ma| = \frac{2e^2 \omega}{3c^3 m} |F|. \quad (8.80)$$

Bu tenglikga ko'ra reaksiya kuchi tashqi kuchdan kichik bo'lish shartini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\frac{e^2 \omega}{c^3 m} \ll 1. \quad (8.81)$$

Bu shart fundamental ahamiyatga ega bo'lib, elektrostatika bobida ko'rganimizdek, klassik elektrodinamikaning tatbiq qilish chegarasini yana bir marta aniqlash imkoniyatini beradi. (8.81) shartni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\omega \ll \frac{mc^3}{e^2}. \quad (8.82)$$

Bu shartni klassik elektronga tatbiq qilsak, nurlanish chastotasi

$$\omega \ll 10^{24} s^{-1}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu shart barcha elektromagnit to'lqinlar uchun bajariladi. (8.82) ni to'lqin uzunligi uchun yozamiz ( $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ ):

$$\lambda \gg \frac{e^2}{mc^2} = r_0. \quad (8.83)$$

Bu yerda  $r_0 \sim 2,5 \cdot 10^{-13} sm$  elektronning klassik radiusi. Shunday qilib, klassik elektrodinamika nuqtai nazardan yuqorida nurlanish masalasida olingan natijalardan (8.83) shart bajarilganda foydalanish mumkinligi kelib chiqadi. Bir qator effektlar shuni ko'rsatadiki, klassik fizika  $r_0$  dan ancha katta ( $\Lambda = 2 \cdot 10^{-10} sm$  - Kompton to'lqin uzunligi) masofalarda o'rinni bo'lmay qoladi. Bunday masofalarda kvant effektlar namoyon bo'la boshlaydi.

Klassik elektrodinamikaning tatbiq qilish chegarasi amaldagidan farq qilishi klassik fizika orqali uning tatbiq qilash chegarasi baholanmoqda. Tatbiq qilish chegarasini aniqroq baholash uchun kvant fizikaga murojaat qilish kerak.

Mavzining yakunida nurlanish sababli zaryadlangan zarracha tezligining kamayish effektini kechikuvchi potensiallar o'z ichiga olganligini ta'kidlab o'tamiz. Bu masalani mustaqil ravishda o'rganishni o'quvchilarga taklif qilamiz (Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц Теория поля, М., Наука, 1967, 460C. § 65, § 75).

## 8.6 Nurlanish chizig'ning tabiiy kengligii

Zaryadlangan zarrachaga garmonik (muvozanat holatga qaytaruvchi) kuch  $F = -kx$  ta'sir qilganda uning nurlanishi  $\omega_0$  chastotada yuz berishini va nurlanish ossilyatorning radiatsion so'nishiga olib kelishini yuqorida ko'rdik. Endi nurlanish reaksiyasining nurlanish maydoniga ta'sirini o'rganamiz. Masalani reaksiya kuchini hisobga olib bir o'lchamli ossilyator modelida ko'rib chiqamiz. Bunda nurlanish reaksiyasini nurlanish chastotasiga jiddiy ta'sir qilishini aniqlaymiz.

Zaryadning harakat tenglamasini har ikkala kuchni e'tiborga olib yozamiz:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \frac{F_s}{m} = 0. \quad (8.84)$$

Bu yerda reaksiya kuchining o'rniga (8.79) ifodani qo'yamiz:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} \dot{a} = 0, \quad (8.85)$$

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$  zaryadning erkin tebranish chastotasi.

Reaksiya kuchi garmonik kuchdan juda kichik bo'lganligi uchun zaryadning tezlanishini erkin tebranma harakatdagi tezlanishga taqriban teng deb olish mumkin, u holda

$$a = \ddot{x} \simeq -\omega_0^2 x, \quad \dot{a} \simeq -\omega_0^2 \dot{x}. \quad (8.86)$$

Bunga asosan (8.85) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (8.87)$$

bu yerda

$$\gamma = \frac{2 e^2 \omega_0^2}{3 mc^3}, \quad \gamma \ll \omega_0. \quad (8.88)$$

Bunda yo'l qo'yilgan xatolik  $\gamma^2/\omega_0^2$  tartibida bo'ladi.

Tenglama (8.87) ning yechimi ko'rيلayotgan aniqlikda quyidagicha yozish mumkin:

$$x = x_0 e^{-\gamma t/2} e^{i\omega_0 t}. \quad (8.89)$$

Bu ifodadan ko'ramizki, nurlanish reaksiyasi ta'sirida ossilyatorning tebranish amplitudasi eksponensial ravishda kamaya boradi, ya'ni zar-yard so'nuvchi tebranma harakat bajaradi. So'nish koeffitsienti  $\gamma$  ga teng.

Ma'lumki, ossilyatorning nurlanish intensivligi zarrachaning tezlanishi bilan aniqlanadi. Shuning uchun (8.89) dan ikki marta vaqt bo'yicha hosila olib tezlanishni topamiz:

$$a = \ddot{x} = a_0 e^{-\gamma t/2} e^{i\omega_0 t}. \quad (8.90)$$

Bu yerda  $a_0$  o'zgarmas kattalik bo'lib, ko'rيلayotgan aniqlikda  $a_0 = -x_0 \omega_0^2$ .

So'nuvchi ossilyatorning tezlanishi vaqtning garmonik funksiyasi bo'limganligi uchun, nurlanish aniq chastotasiga ega bo'lmaydi. Aksincha, u  $0 \leq \omega < \infty$  oralig'idagi barcha chastotalarga nurlanadi. Demak, so'nuvchi ossilyatorning nurlanish spektri uzlusiz ekan.

Bunday holda nurlanish intensivligining chastotalar bo'yicha taqsimoti ( $\omega, \omega + d\omega$  chastotalar oralig'iga to'g'ri keluvchi nurlanish energiyasi) muhim kattalik hisoblanadi. Hozir so'nuvchi ossilyator uchun

ana shu kattalikni topishga kirishamiz. Barcha chastotalardagi nurlanishning to'liq energiyasi  $I_0$  quyidagicha aniqlanadi:

$$I_0 = \int_0^\infty I(\omega) d\omega. \quad (8.91)$$

Bu yerda  $I(\omega)$  spektral finksiya yoki nurlanish chizig'i deb yuritiladi.

Ikkinchini tomondan nurlanish to'liq energiyasi  $0 \leq t < \infty$  vaqt oraliq'idagi nurlanish energiyalarining yig'indisiga teng bo'ladi:

$$I_0 = \int_0^\infty I(t) dt = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \int_0^\infty a^2 dt. \quad (8.92)$$

$-\infty < t \leq 0$  vaqt oraliq'ida nurlanish bo'limganligi uchun ( $a = 0$ ) bu yerda integralni  $-\infty < t < \infty$  vaqt oraliq'ida olish mumkin:

$$I_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \int_{-\infty}^\infty a^2 dt. \quad (8.93)$$

Bu ifodani (8.91) bilan bog'lash uchun tezlanishni Furye integraliga yoyamiz:

$$a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty a(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (8.94)$$

(8.90) ifodani inobatga olib tezlanishning Furye amplitudasini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \int_{-\infty}^\infty a(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^\infty a(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{a_0}{\frac{\gamma}{2} - i(\omega_0 - \omega)}. \end{aligned} \quad (8.95)$$

Endi Plansheral formulasi (A.140) ga asosan quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$$\int_{-\infty}^\infty a^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |a(\omega)|^2 d\omega = \frac{a_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{\frac{\gamma^2}{4} + (\omega_0 - \omega)^2} = \frac{a_0^2}{\gamma}. \quad (8.96)$$

Ushbu natijani (8.93) ga qo'yamiz:

$$I_0 = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{a_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\frac{\gamma^2}{4} + (\omega_0 - \omega)^2} = \frac{2e^2}{3c^3} \cdot \frac{a_0^2}{\gamma}, \quad (8.97)$$

bu yerdan

$$a_0^2 = \frac{3c^3\gamma}{2e^2} I_0. \quad (8.98)$$

(8.97) va (8.91) ifodalarni taqqoslab, quyidagini topamiz:

$$I(\omega) = \frac{I_0}{2\pi} \cdot \frac{\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (8.99)$$

Bu yerda spektral taqsimot faqat musbat chastotalar uchun aniqlanganligini e'tiborga oldik. Bu ifodadan ko'ramizki (8.4-rasm), birinchidan, nurlanish spektri uzlusiz, ikkinchidan,  $\omega = \omega_0$  chastotada nurlanishning spektal taqsimoti keskin maksimumga ega, ya'ni

$$I(\omega_0) = \frac{2I_0}{\pi\gamma}. \quad (8.100)$$

Nurlanish intensivligi  $\omega = \omega_0 \pm \gamma/2$  chastotada  $\omega = \omega_0$  dagi qiymatidan ikki marta kichik ekanligini ko'rish mumkin:

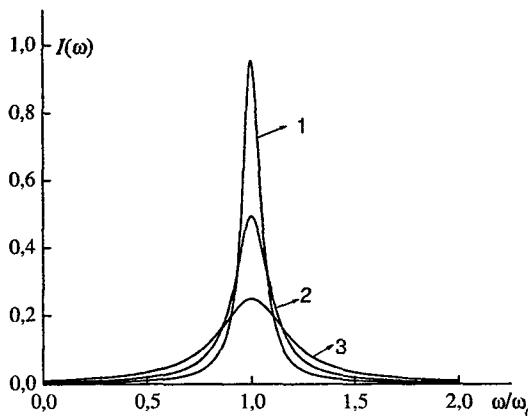
$$I(\omega_0 \pm \frac{\gamma}{2}) = \frac{I(\omega_0)}{2} = \frac{I_0}{\pi\gamma}. \quad (8.101)$$

Shuning uchun  $\gamma/2$  nurlanish chizig'ining yarim kengligi deyiladi.  $\Delta\omega = \gamma$  esa nurlanish chizig'ining *tabiiy kengligi* yoki *radiatsion kengligi* deb ataladi.

Spektral chiziqning tabiiy kengligini to'lqin uzunlik orqali ifodalash mumkin.  $\lambda = 2\pi c/\omega$  bo'lganligi uchun  $\Delta\omega = \gamma$  ga mos to'lqin uzunliklar oralig'i

$$|\Delta\lambda| = \frac{2\pi c \Delta\omega}{\omega_0^2} = \frac{2\pi c}{\omega_0^2} \gamma = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{mc^2} = \frac{4\pi}{3} r_0.$$

Bundan ko'ramizki,  $\Delta\omega$  dan farqli ravishda  $\Delta\lambda$  to'lqin uzunligi (chastota) ga bog'liq bo'lmasdan elektron (zaryadlangan zarracha) ning klasik radiusi  $r_0$  bilan aniqlanadi.



8.4-rasm: Dipol nurlanishi spektral taqsimoti funksiyasi: 1 -  $\gamma/\omega = 0.1$ , 2 -  $\gamma/\omega = 0.2$ , 3 -  $\gamma/\omega = 0.4$ .

Eksperimentlarda kuzatiladigan spektral chiziqning kengligi uning tabiiy kengligidan ancha katta bo'ladi. Masala shundaki, ossilyatorning garmonik tebranishining har qanday buzilishi spektral chiziqning kengayishiga sababchi bo'ladi. Nurlanish reaksiyasi ana shunday omillarning biridir. Nurlanuvchi zarrachalarning o'zaro hamda sistemadagi boshqa zarrachalar bilan to'qnashuvi yoki Doppler hodisasi ana shu kengaytiruvchi omillarga kiradi.

$\gamma \rightarrow 0$  da spektral taqsimot (8.99) erkin tebranayotgan garmonik ossilyatorning nurlanishining spektral taqsimotiga o'tadi, ya'ni

$$I(\omega) = I_0 \delta(\omega - \omega_0). \quad (8.102)$$

Bu monoxromatik nurlanishning spektral taqsimot funksiyasidir.

## 8.7 Kvadrupol va magnito-dipol nurlanishi

Harakatdagi zaryadlar sistemasining elektr dipol yaqinlashida nurlanishini ko'rib chiqdik. Bu yaqinlashishda nurlanish intensivligi elektr dipol momentidan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosilaga, demak zaryadlarning tezlanishiga bog'liq ekanligini aniqladik. Shunday

sistemalar borki (8.7-masalaga qarang), zaryadlari tezlanish bilan harakatlansa -da, ko‘rilgan dipol yaqinlashishda nurlanish nolga teng bo‘ladi.

Bunday hollarda (8.51) qatordagi keyingi hadlar bilan bog‘liq bo‘lgan nurlanishni ko‘rish kerak. Elektr dipol nurlanishi nolga teng bo‘lganda qatordagi keyingi hadlar oldingi hadlarga nisbatan  $v/c$  yoki  $L/\lambda$  marta kichik bo‘lishiga qaramasdan asosiy hadga aylanadi.

Qator (8.51) da keyingi hadlarni batafsil ko‘rib chiqamiz. Elektr dipol nurlanishini ko‘rganimizda zaryadlar sistemasining yetarlicha uzoq masofalardagi elektr va magnit maydonlari (8.55) va (8.56) vektor potensial bilan aniqlanishini ko‘rgan edik. Shu sababli bu yerda faqat vektor potensial uchun qatorni tekshirib chiqamiz. Vektor potensialning quyidagi ko‘rinishidan foydalanamiz:

$$A(r, t) = \frac{1}{cr} \int j\left(r', \tau_0 + \frac{rr'}{cr}\right) r' dV'. \quad (8.103)$$

Tok zichligini xususiy kechikish vaqtining darajalari bo‘yicha qatorga yoyamiz:

$$j\left(r', \tau_0 + \frac{nr'}{c}\right) = j(r', \tau_0) + \frac{\partial j(r', \tau_0)}{\partial \tau_0} \frac{(nr')}{c}. \quad (8.104)$$

Birinchi had elektr dipol nurlanishini beradi. Ikkinci hadni quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$(nr')j = \frac{1}{2}[[r'j]n] + \frac{1}{2}[(nr')j + (nj)r'].$$

Bu ifodani hisobga olib (8.104) ni (8.103) ga qo‘yamiz:

$$A(r, t) = \frac{\dot{d}}{cr} + \frac{[m n]}{cr} + \frac{1}{2c^2 r} \frac{\partial}{\partial \tau_0} \int \{(nr')j + (nj)r'\} dV'. \quad (8.105)$$

Bu yerda  $m$  sistemaning magnit momenti. Uchinchi haddagi integralni  $\int P dV' = - \int r' \operatorname{div} P dV'$  ayniyatdan va uzlusizlik tenglamasi dan foydalanib o‘zgartiramiz:<sup>2</sup>

$$\int \{-r' \operatorname{div}\{(nr')j\} + (nj)r'\} dV' = \int (nr') \frac{\partial \rho}{\partial \tau_0} dV'.$$

---

<sup>2</sup>Bu yerda integral butun fazo bo‘yicha olinadi,  $P$  fazoning chekli qismida noldan farqli bo‘lgan ixtiyoriy vektor funksiya.

Natijada quyidagini olamiz:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cr} + \frac{[\dot{\mathbf{m}}\mathbf{n}]}{cr} + \frac{1}{2c^2r} \frac{\partial^2}{\partial \tau_0^2} \int \rho (\mathbf{n}\mathbf{r}') \mathbf{r}' dV'. \quad (8.106)$$

Uchinchi hadni kvadrupol momenti tenzori orqali yozish mumkin:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{d}}(\tau_0)}{cr} + \frac{[\dot{\mathbf{m}}(\tau_0)\mathbf{n}]}{cr} + \frac{\ddot{\mathbf{D}}(\tau_0)}{6c^2r}. \quad (8.107)$$

Bu yerda  $\mathbf{D}$  komponentalari  $D_\alpha = D_{\alpha\beta}n_\beta$  bilan aniqlangan vektor,  $D_{\alpha\beta}$  kvadrupol momenti tenzori.

Vektor potensial (8.107) ma'lum bo'lgandan so'ng elektr va magnit maydon kuchlanganliklarini  $\mathbf{H} = \frac{1}{c}[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}]$ ,  $\mathbf{E} = \frac{1}{c}[[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}]\mathbf{n}]$  formulalarga asosan to'g'ridan to'g'ri yozish mumkin ((8.55)-(8.56) ifodalarga qarang):

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2r} \{ [\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}] + [[\ddot{\mathbf{m}}\mathbf{n}]\mathbf{n}] + \frac{1}{6c} [\dot{\mathbf{D}}\mathbf{n}] \}, \quad (8.108)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2r} \{ [[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]\mathbf{n}] + [\mathbf{n}\ddot{\mathbf{m}}] + \frac{1}{6c} [[\dot{\mathbf{D}}\mathbf{n}]\mathbf{n}] \}, \quad (8.109)$$

Bu yerda  $\dot{\mathbf{D}} \equiv \partial^3 \mathbf{D} / \partial \tau_0^3$ .

Fazoviy burchak  $d\Omega$  ga to'g'ri kelgan nurlanish intensivligi (8.63) ifoda bilan aniqlanadi. To'liq intensivlik bu ifodani barcha burchaklar bo'yicha o'rtachalash natijasida aniqlanadi. Ma'lumki, Poynting vektori  $\mathbf{S}$  elektr va magnit maydon kuchlanganliklari orqali birday aniqlanadi. Shu sababli hisoblashlarni osonlashtirish maqsadida magnit maydon kuchlanganligidan foydalanamiz. Magnit maydon kuchlanganligi (8.108) ning kvadratidagi ayqash ko'paytmalarining burchaklar bo'yicha o'rta-chasi nolga teng. Faqat har bir had kvadratinining o'rta-chasi qoladi. Uncha murakkab bo'limgan hisoblashlarni amalga oshirib nurlanishning to'liq intensivligi uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$I = \int \mathbf{S} dS = \frac{2}{3} \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{c^3} + \frac{2}{3} \frac{\ddot{\mathbf{m}}^2}{c^3} + \frac{1}{180c^5} \dot{\mathbf{D}}^2. \quad (8.110)$$

Shunday qilib, biz ko'rayotgan yaqinlashishda to'liq nurlanish bir-biriga bog'liq bo'limgan uch qismdan iborat ekan. Birinchi had bizga ma'lum

bo'lgan elektr dipol, ikkinchi had *magnito-dipol*, uchinchi had esa *kvadrupol* nirlanishini aniqlaydi. Harakatdagi zaryadlarning massasining zaryadiga nisbati bir xil bo'lgan sistemalarda magnito-dipol nurlanishi elekttr dipol nurlanishi kabi nolga teng. Chunki, bunday sistemalarning magnit momenti mexanik impuls momentiga proporsionaldir.

(8.110) ifodadagi har bir hadni taqqoslab tartibini baholaymiz. Sistemaning magnit momenti elektr dipol momentidan (tok zichligi hisobiga)  $v/c$  marta kichik bo'lganligi uchun magnito-dipol nurlanishining intensivligi elektr dipol nirlanishining intensivligidan  $v^2/c^2$  marta kichik bo'ladi. Baholashlar, kvadrupol va magnito-dipol nurlanish intensivligining tartibi biday bo'lishini ko'rsatadi. Agar zaryadlar sistemasining elektr va magnito-dipol nurlanishi bo'lmasa, uning kvadrupol nurlanishni aniqlash lozim. Bunday nurlanish elektr dipol nurlanishi bo'l-magan atom yadrolarini o'rganishda muhimdir. Agar (8.51) qatorda keyinga hadlarni inobatga olsak, keyingi tartibdagi multipol nurlanishlarni olamiz.

## 8.8 Elektromagnit to'lqinlarning zaryadlarda sochilishi

Agar zaryadlar sistemasiga elektromagnit to'lqin tushayotga bo'lsa, uning ta'sirida zaryadlar harakatga keladi. Bunday zaryadalar o'z navbatida har tomona nurlanadi, ya'ni boshlang'ich to'lqinning sochilishi ro'y beradi.

Sochilish berilgan yo'nalishda birlik vaqtida chiqayotga energiyani sistemaga tushayotgan energiya oqimiga nisbati bilan aniqlanadi. Bu kattalik yuza birligiga ega bo'lib, *sochilishning effektiv kesimi* (qisqacha *kesim*) deyiladi.

Energiya oqimining zichligi  $I_0$  bo'lgan tushayotgan to'lqinning birlik vaqtida  $d\Omega$  fazoviy birchak ostida sochlish (nurlanish) energiyasi  $dI$  bo'lsin. U holda sochilishning effektiv kesimi quyidagi ifoda bilan aniqlanadi:

$$d\sigma = \frac{dI}{I_0}. \quad (8.111)$$

Bu yerda chiziqcha vaqt bo'yicha o'rtachalashni bildiradi.

Sochilish masalasini sodda - ossilyator modelida ko'rib chiqamiz.

Tekislikda qutblangan yassi monoxromatik elektromagnit to'lqin ossilyatorga tushayotgan bo'lsin. Reaksiya kuchini e'tiborga olganda ossilyatorning harakat tenglamasi ((8.87) ifodaga qarang) quyidagi ko'ri-nishga ega bo'ladi:

$$\ddot{r} + \gamma \dot{r} + \omega_0^2 r = eE_0 e^{i\omega t} / m. \quad (8.112)$$

Bu tenglama tashqi davriy kuch ta'sirida ossilyatorning majburiy tebranishlarini ifodalaydi. Uning xususiy yechimi

$$r = \frac{eE_0}{m[\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma]} e^{i\omega t}. \quad (8.113)$$

$d\Omega$  fazoviy burchakda sochilgan nurlanish intensivligini (8.61) va (8.63) ifodalar orqali aniqlaymiz:

$$dI = \frac{e^2}{4\pi c^3} [\ddot{r}n]^2 d\Omega = \frac{e^4 E_0^2}{4\pi m^2 c^3} \frac{\omega^4 \sin^2 \xi \cos^2(\omega t - \delta)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} d\Omega. \quad (8.114)$$

Bu yerda  $\ddot{r}$  ning haqiqiy qismi olindi,

$$\delta = \operatorname{arctg} \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\psi,$$

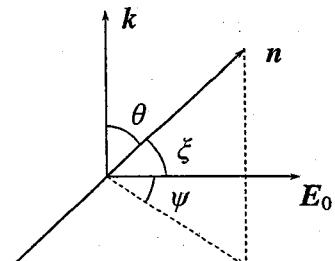
$\xi$  qutblanish vektori  $E_0$  va kuzatish (sochilish) yo'nalishi  $n$  orasidagi burchak,  $k$  tushayotgan to'lqinning to'lqin vektori (8.5-rasm).

(8.114) ni davr bo'yicha o'rtachalaymiz:

$$\overline{dI} = I_0 \frac{r_0^2 \omega^4 \sin^2 \xi d\Omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}. \quad (8.115)$$

Bu yerda  $I_0 = cE_0^2/4\pi$  tushayotgan to'lqinning davr bo'yicha o'rtacha intensivligi. Sochilishning effektiv kesimi (8.111) ga ko'ra

$$d\sigma = \frac{r_0^2 \omega^4 \sin^2 \xi}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} d\Omega. \quad (8.116)$$



8.5-rasm:

Burchaklar  $\theta$ ,  $\xi$  va  $\psi$  o'zaro quyidagicha bog'langan:

$$\cos \xi = \sin \theta \cos \psi, \quad \sin^2 \xi = 1 - \sin^2 \theta \cos^2 \psi$$

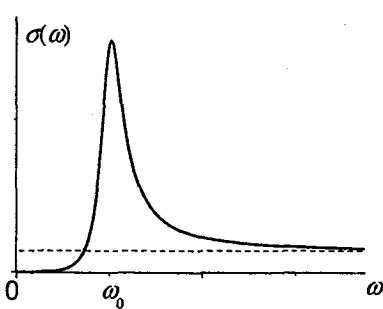
Bu bog'lanishdan foydalanib sochilish effektiv kesimini (8.116) ni  $\psi$  burchak bo'yicha o'rtachalaymiz:

$$d\sigma = \frac{r_0^2 \omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} d\Omega. \quad (8.117)$$

Bu formuladan sochilish  $\theta = 0$  (oldinga)  $\theta = \pi$  (orqaga) burchaklarda maksimal bo'lishi kelib chiqadi.

Sochilishning effektiv kesimi (8.117) ni hamma fazoviy burchaklar bo'yicha integrallab to'liq effektiv kesimni aniqlaymiz:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \frac{r_0^2 \omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}. \quad (8.118)$$



8.6-rasm:

To'liq effektiv kesimning chastotaga bog'lanishini analiz qilamiz (8.6-rasm). (8.118) dan ko'rinish turibdiki, to'liq kesim rezonans chastota  $\omega = \omega_0$  da keskin maksimumga ega. Rezonans yaqinida ( $\omega \simeq \omega_0$ ) to'liq kesimni quyidagicha yozish mumkin:

$$\sigma \simeq \frac{2\pi}{3} \frac{r_0^2 \omega_0^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (8.119)$$

Bu yerda  $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 \simeq 4\omega_0(\omega_0 - \omega)$  deb olindi.  $\gamma$  rezonans sohasining kengligini aniqlaydi. Xususan, aniq rezonansda, ya'ni  $\omega = \omega_0$  da

$$\sigma = 8\pi r_0^2 \omega_0^2 / 3\gamma^2 \quad (8.120)$$

bo'ladi.  $\gamma \ll \omega_0$  bo'lganligi uchun rezonans chastotada kesim juda katta qiyamatlarga erishadi.

Kichik chastotalarda  $\omega \ll \omega_0$ :

$$\sigma \simeq 8\pi r_0^2 \omega^4 / 3\omega_0^4 \quad (8.121)$$

sochilish chastotaning to'rtinchisi darajasiga proporsional bo'lib, juda kichik bo'ladi. Bu qonun umumiy xarakterga ega bo'lib, *Reley* sochilishi deb ataladi.

Katta chastotalarda  $\omega \gg \omega_0$ :

$$\sigma \simeq 8\pi r_0^2/3 = 8\pi e^4/3m^2c^4. \quad (8.122)$$

Bu ifoda Tomson formulasi deb ataladi. Bu formulaga ko'ra katta chastotalarda sochilish umuman chastotaga bog'liq bo'lmasdan o'zgarmasga intiladi. Katta chastotalarda tushayotgan elektromagnit maydon tomonidan atomga ta'sir etuvchi kuch elastiklik kuchidan juda katta bo'ladi. Atom yadrosining massasi elektronning massasiga nisbatan juda katta bo'lganligi ( $\sigma \sim m^{-2}$ ) uchun u sochilish jarayonida deyarli ishtirok etmaydi deb olish mumkin. Demak, atomdagi elektronni erkin deb qarash mumkin. Shunday qilib, Tomson formulasi elektromagnit to'lqinning erkin elektronlarda sochilishini aniqlar ekan.

## 8.9 Relyativistik zaryadlarning nurlanishi

Dipol yaqinlashishida nurlanish intensivligini aniqlovchi (8.66) formula  $v \ll c$  bo'lganda o'rinnlidir. Relyativistik harakatdagi zaryad uchun shu kabi formulani olishda har bir vaqt momentida zaryad bilan bog'langan sanoq sistemalarni kiritamiz. Bunday sanoq sistemalarining har biriga nisbatan zaryadning tezligi nolga teng bo'lganligi uchun (8.66) o'rinnli bo'ladi. Bu formula bilan aniqlanuvchi nurlanish sferik to'lqinlardan iborat bo'ladi. Bunda nurlanish hisobiga zaryad yo'qotadigan impulsi nolga teng. Vaqt birligidagi nurlanish energiyasi esa har bir sanoq sistemada bir hil bo'lib, invariant bo'ladi:

$$I = -d\mathcal{E}/dt = -d\mathcal{E}'/dt = -d\mathcal{E}''/dt = \dots = \text{inv} \quad (8.123)$$

Modomiki,  $I$  invariant ekan, (8.66)-(8.67) ga asosan  $a^2 = w_i w^i = \text{inv}$ . Chunki, zaryad bilan bog'langan sanoq sistemada  $w^0 = 0$ . Bu yerda  $w^i$  4-tezlanish. Ixtiyoriy sanoq sistemada (shtrixsiz) nurlanish intensivligini topish uchun 4-tezlanish  $w_i'$  ning kvadratini (1.65)-(1.68) formulalarga asosan shtrixsizga almashtiramiz. Natijada quyidagini olamiz:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d\mathcal{E}'}{dt} = -\frac{2e^2}{c^3} \left\{ \dot{v}^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{1}{c^2} (v\dot{v})^2 \right\} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-3}. \quad (8.124)$$

Bu formula orqali ixtiyoriy, masalan laboratoriya sanoq sistemada tezlanish bilan harakatlanayotgan zaryadning nurlanish hisobiga vaqt birligida yo'qotadigan energiyasini hisoblash mumkin.

Amaliy jihatdan elektromagnit maydonda katta tezlik bilan harakatlanayotgan zaryadning nurlanish energiyasini topish muhim masala hisoblanadi. Elektromagnit maydon ta'sirida zaryadlangan relyativistik zarrachaning tezlanishi (2.35) Lorentz kuchi bilan aniqlanadi:

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] - \frac{\mathbf{v}}{c^2} (\mathbf{v} \mathbf{E}) \right) \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} \quad (8.125)$$

Tezlanish uchun yozilgan bu ifodani (8.124) ga qo'yib elektromagnit maydonda tezlanish bilan harakatlanayotgan zaryadlangan relyativistik zarrachaning vaqt birligidagi nurlanish energiyasini topamiz:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{e^4}{m^4 c^7} \mathcal{E}^2 \left\{ \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \right)^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \mathbf{E})^2 \right\}. \quad (8.126)$$

Bu yerda  $\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ ,  $\beta = \frac{v}{c}$ . Ifoda (8.126) dan, tezlik yorug'lik tezlikgiga yaqin bo'lganda, birlik vaqtdagi nirlanishning to'liq energiyasining tezlikka  $(1 - v^2/c^2)^{-1}$  kabi bog'langan, ya'ni harakatdagi zaryadning energiyasining kvadratiga proporsional ekanligini ko'ramiz. Agar tezlik elektr maydon kuchlanganligiga parallel bo'lsa, nurlanish tezlikka bog'liq bo'lmaydi. Bir necha xususiy hollarni ko'rib chiqamiz.

$$1. \mathbf{H} = 0, \mathbf{E} \perp \mathbf{v} \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{e^4}{m^4 c^7} \mathcal{E}^2 \mathbf{E}^2. \quad (8.127)$$

$$2. \mathbf{H} = 0, \mathbf{E} \parallel \mathbf{v}, \quad v \approx c \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{e^4}{m^4 c^7} \mathcal{E}^2 \mathbf{E}^2. \quad (8.128)$$

$$3. \mathbf{E} = 0, \mathbf{H} \perp \mathbf{v} \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{e^4}{m^4 c^7} \mathcal{E}^2 \mathbf{H}^2. \quad (8.129)$$

Bu natijalardan birinchi va uchinchi hollarda nurlanish energiyasi zarracha energiyasining kvadratiga proporsional ekanligi ko'riniib turibdi. Ikkinchchi holda nurlansh energiyasi zarrachaning energiyasiga bog'liq emas ekan. Yana bir muhim xulosa, vaqt birligidagi nurlanish energiyasi barcha hollarda zarracha massasining kvadratiga teskari proporsional bo'lib ( $\mathcal{E} \sim m^2$ ), zarrachaning massasi qancha kichik bo'lsa,

dipol yaqinlashishidagi nurlanish energiyasi shuncha katta bo'ladi. Og'ir zarrachalar uchun esa zarracha energiyasining nurlanish hisobiga kamayishi juda kichik bo'ladi.

Endi nurlanishning burchakka bo'g'lanishini ko'rib chiqamiz. Bizga ma'lumki, katta tezliklarda harakatlanayotgan zaryadning elektr maydon kuchlanganligi Lienar-Vixert potensiallari orqali topiladi va (8.38)-(8.39) ifodalar bilan aniqlanadi. Katta masofalarda bu ifodalarning birinchisi ikkinchisiga nisbatan tezroq nolga intilishini § 8.2 da ko'rib o'tgan edik. Shu sababli nirlanishga maydonning (8.39) ifoda bilan aniqlangan qismi asosiy hissa qo'shami. Maydonning shu qismi bilan bog'liq bo'lgan va  $d\Omega$  fazoviy burchakka to'g'ri keluvchi nurlanish intensivligini  $dI = cE^2 d\Omega / 4\pi$  ga asosan yozamiz:

$$dI = \frac{e^2}{4\pi c^2} \left( \frac{2(na)(va)}{c\lambda^5} + \frac{a^2}{\lambda^4} - \frac{(1-\beta^2)(na)^2}{\lambda^6} \right) d\Omega. \quad (8.130)$$

$\lambda = 1 - nv/c$ ,  $n = R/R$  - nurlanish yo'nalishidagi birlik vektor.

Nurlanishning burchak bo'yicha taqsimoti yetarlicha / murakkab ekanligi (8.130) dan ko'rinish turibdi. Ultrarelyativistik  $(1-v/c \ll 1)$  holda mahrajda  $1 - nv/c$  ning katta darajalari borligi hisobiga u alohida xususiyatga ega. Nurlanish intensivligi burchakning tor oralig'ida katta qiymatlarga erishadi.  $n$  va  $v$  orasidagi burchakni  $\theta$  bilan belgilab quyidagini yozamiz:  $1 - \frac{nv}{c} = 1 - \frac{v}{c} \cos \theta \approx 1 - \frac{v}{c} + \frac{\theta^2}{2}$ . Burchak  $\theta \sim \sqrt{1 - v/c}$  bo'lganda bu kattalik  $(1 - v/c)$  tartibida bo'ladi. Bunda ultrarelyativistik zarrachaning nurlanishining asosiy qismi uning harakati yo'nalishi atrofidagi  $\theta \sim \sqrt{1 - \beta^2}$  burchaklar intervaliga to'g'ri kelishi kelib chiqadi.

Agar vektor  $(n - v/c) \parallel a$  bo'lsa, (8.38) va (8.39) ifodalar bilan aniqlangan maydon kuchlanganligi tezlikning har qanday qiymatida nolga teng bo'ladi. Demak, bu holda nurlanish bo'lmaydi. Tezlik va tezlanish parallel bo'lgan (8.130) ancha sodda ko'rinishni qabul qiladi:

$$dI = \frac{e^2 a^2}{4\pi c^2} \left( \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^4} - \frac{(1 - \beta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \psi}{(1 - \beta \cos \theta)^6} \right) d\Omega. \quad (8.131)$$

Bu yerda  $\theta$  yana  $n$  va  $v$  orasidagi burchak,  $\psi$   $a$  va  $v$  vektorlar yotuvchi tekislik bilan  $n$  hosil qilgan azimutal burchak.  $\theta = \arccos v/c$  bo'lganda (8.131) bilan aniqlangan nurlanish nolga teng bo'ladi.

## 8.10 8-bobga oid masala va savollar

1. Lienar-Vixert potensiallaridan foydalanib tekis harakatlanayotgan nuqtaviy zaryadning maydonini aniqlang. Natijani §3.6 da olingan ifodalar bilan taqoslang.
2. Uzluksizlik tenglamasidan foydalanib  $\varphi(r, t) = \frac{1}{cr^2} (\mathbf{r} \cdot \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', \tau_0) dV')$  ifodani (8.52) ko'rinishda yozish mumkinligini ko'rsating.
3. Dipol yaqinlashishida (8.52) va (8.54) ifodalar bilan aniqlangan potensiallar Lorenz shartini qanoatlantirishini ko'rsating.
4. Tashqi  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  kuch ta'sirida harakatlanayotgan nuqtaviy zaryadning dipol yaqinlashishda nurlanish intensivligini aniqlang. Boshlang'ich vaqt momentida zaryad tinch turibdi.
5. Bir jinsli o'zgarmas  $\mathbf{H}$  magnit maydonda harakatlanayotgan massasi  $m$  va zaryadi  $e$  bo'lgan zarrachaning dipol yaqinlashishida nurlanish intensivligini aniqlang. Boshlang'ch vaqtda zaryadning tezligi  $v_0 \perp \mathbf{H}$ .
6. Massalari  $m_1, m_2$  va zaryadlari  $e_1, e_2$  bo'lgan ikkita zarrachadan tashkil topgan sistemaning dipol nurlanishini aniqlang.
7. Berk sistemadagi har bir zarracha uchun  $e_\alpha/m_\alpha = e/m = \text{const}$  bo'lsa, elektr dipol nurlanishi nolga teng bo'lishini ko'rsating.
8. Harakatdagi zarrachalar massasining zaryadiga nisbati bir xil bo'lgan sistemalarda magnito-dipol nurlanishi nolga teng bo'lishini ko'rsating.
9. Bor modelida vodorod atomida elektron yadro atrofida aylanadi. Klasik elektrodinamika nuqtai nazaridan nurlanish natijasida, nihoyat elektron yadroga tushadi. Vodorod atomining yashash vaqtini baholang.
10. Massasi  $m$  va zayadi  $e$  bo'lgan zarracha tinch turgan ikkinchi zarrachaning oldidan  $d$  nishon masofada  $v$  tezlik bilan uchib o'tadi. Ikkinci zarrachaning zaryadi  $e_2$ . Harakatdagi zarrachaning tezligi shunday kattaki, traektoriyasining to'g'ri chiziqdan og'ishini hisobga olmasa ham bo'ladi. Shu zarrachaning nurlanish energiyasini toping.
11. Zaryadi  $e$  bo'lgan nuqtaviy zaryad  $R$  radiusli aylana bo'ylab  $\omega$  burchak tezlik bilan harakatlanmoqda. Zaryadning chiziqli tezligi  $v = \omega R \ll c$  deb hisoblab, uning nurlanishini aniqlang.
12. Qanday potensialarga kechikuvchi deyiladi? Kechikish vaqtি nimaga teng? Nuqtaviy zaryad uchun kechikuvchi potensialarni yozing.
13. Ixtiyoriy harakatlanayotgan zaryadlar sistemasining dipol yaqinlashishagini maydoni qanday xossalarga ega?
14. Dipol yaqinlashishida nurlanish intensivligi nimaga teng?
15. Nurlanish reaksiyasi deb nimaga aytildi? Reaksiya kuchini yozing.
16. Dipol nurlanish nazariyasi qanday to'lqin uzunkilalar uchun yaxshi natija beradi?

## 9-bob

# Makroskopik elektrodinamikaning asosiy tenglamalari

### 9.1 Maydon kattaliklarini o'rtachalash

Mikroskopik elektrodinamikada bo'shliqdagi elektromagnit jarayonlarini ko'rib chiqdik. Endi shu masalani muhit uchun o'rghanishni boshlaymiz. Elektrodinamikaning bunday jarayonlarni o'rGANADIGAN qismi *makroskopik elektrodinamika* deyiladi. Muhitda - dielektriklarda, o'tkazgichlarda, ferromagnetiklarda va boshqa ko'pgina boshqa xossaga ega bo'lgan muhitlarda kechadigan elektromagnit jarayonlar bir-biridan jiddiy farq qilib, ularning xossalariiga bog'liq bo'ladi. Bundan tashqari, muhitning anizotropiya xossalari va bir jinsli bo'lmasligi ham ko'rildigan jarayonlarda o'z aksini topadi. Bunday holatlarni sanab o'tishni yana davom ettirish mumkin.

Yuqoridagi sanab o'tilgan muhitning xossalardan kelib chiqadigan bo'lsak, bir qarashda makroskopik elektrodinamikani umumiy holda yaratib bo'lmaydigan ko'rindi. Ammo, muhitning xossalarni bir qancha shartlar bilan chegaralasak, makroskopik elektrodinamikani umumiy holda yaratish mumkin bo'ladi.

Birinchi navbatda muhit bir jinsli va izotrop bo'lishi, ikkinchidan, muhitning xossalari tashqi elektromagnit maydonga bo'liq bo'lmasligi talab etiladi. Oxirgi holat maydon kuchsiz bolishini taqazo qiladi. Uchinchidan maydonning o'zgarishini aniqlovchi xarakterli vaqt (davr) muhitda tashqi elektromagnit maydon ta'sirida yuz beruvchi qutblanish va magnitlanishni barqaror topish (relaksatsiya) vaqtidan yetarlicha katta bo'lishi kerak.

Bu holda muhitning xossalarni aniqlovchi moddiy kattaliklar maydon chastotasiga bog'liq bo'lmaydi. Yuqoridagi shartlarni qanoatlan-tiruvchi elektrodinamika ko'p hollarda tajriba natijalariga tayangan bo'lib, fenomenologik xarakterga egadir.

Mikroskopik elektrodinamika tenglamalarida ishtirok etuvchi kattaliklar berilgan niqtaga va vaqtga tegishli edi. Muhitda holat tubdan farq qiladi. Ma'lumki, moddani tashkil qilgan atom, molekula va ionlarning fazodagi holati tez o'zgartiradi. Masalan, kristall panjara tugunlaridagi atom yoki ionlar issiqlik harakati tufayli muvozanat holati atrofida katta chastota bilan tebranishda bo'ladi. Atom ichidagi maydon undan tashqaridagi maydondan ancha katta, bundan tashqari atomlar tebranishda bo'lganligi sababli uning koordinatasini vaqt va fazoda aniq belgilab bo'lmaydi. Ya'ni maydon atom o'lchamlari tartibidagi masofalarda va tebranish davrida keskin o'zgarib turadi. Shuning uchun maydon berilgan nuqtaga va vaqtga tegishli deyish o'z ma'nosini yo'qotadi. Boshqa tomondan tajriba natijalari shuni ko'rsatadiki, maydonning fazo va vaqtda bunday o'zgarishi makroskopik jismlar uchun kuzatilmaydi. Yana shuni ta'kidlash lozimki, modda mikro zarrachalardan tashkil topgan bo'lishiga qaramasdan makroskopik jismlar ustida o'tkazilgan tajribalarda bunday holat kuzatilmaydi. Demak, makroskopik jismlar ustida o'tkazilgan tajribalarda vaqt va fazoda o'rtachalangan fizik kattalik o'lchanadi. Shuning uchun muhitdagi elaktromagnit jaryonlarni o'rganishda fizik kattaliklarning o'rtacha qiymatlari ma'noga ega bo'ladi.

Yuqoridagi mulohazalardan kelib chiqib koordinata va vaqtni ikki qismga ajratamiz. Birinchisi, sekin o'zgaruvchi ( $r, t$ ) bo'lib, muhitdagi makroskopik jarayonlarni, ikkinchisi esa tez o'zgaruvchi ( $r', t'$ ) bo'lib, elementar hajm  $v$  va elementar vaqt  $T$  doirasi o'zgarib, mikroskopik jarayonlarni ifodalaydi. Fizik kattaliklarning tez o'zgaruvchi koordinata va vaqt bo'yicha o'rtachasi quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$F(r, t) = \frac{1}{T} \frac{1}{v} \int_0^T \int F(r + r', t + t') dV' dt'. \quad (9.1)$$

O'zgaruvchilarni ikki qismga ajratish fizik kattaliklardan koordinata va vaqt bo'yicha olingan hosilalarning o'rtacha qiymatini quyidagi ko'rinishda yozish imkonini beradi. Masalan,

$$\overline{\frac{\partial F}{\partial \tau}} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial t}, \quad \overline{\frac{\partial F}{\partial \xi_\alpha}} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_\alpha}. \quad (9.2)$$

Bu yerda  $\tau = t + t'$ ,  $\xi_\alpha = x_\alpha + x'_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ . Tajribalarda (9.1) usul bilan o'rtachalangan kattaliklar o'lchanadi.

Maksvell-Lorentz tenglamalarini yuqoridagi ma'noda o'rtalashni amalga oshirish uchun belgilashlar kiritamiz:  $e \equiv E$ ,  $h \equiv H$ . Bu belgilashlarda yozilgan o'rtachalangan Maksvell-Lorentz va uzlusizlik tenglamalarini quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\text{rot } \bar{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{h}}{\partial t}, \quad (9.3)$$

$$\text{div } \bar{h} = 0, \quad (9.4)$$

$$\text{rot } \bar{h} = \frac{4\pi}{c} \bar{\rho} \bar{v} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{h}}{\partial t}, \quad (9.5)$$

$$\text{div } \bar{e} = 4\pi \bar{\rho}, \quad (9.6)$$

$$\text{div } \bar{\rho} \bar{v} + \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = 0. \quad (9.7)$$

Bu yerda  $\bar{\rho}$  va  $\bar{\rho} \bar{v}$  mos ravishda zaryad va tok zichligining o'rtacha qiymati. (9.3)–(9.7) tenglamalarda hosilalar sekin o'zgaruvchi - makroskopik koordinata va vaqt bo'yicha olinadi.

Tenglamalarni odatdag'i ko'rinishda yozish uchun yana bir marta belgilashlar kiritamiz:  $\bar{e} = E$ ,  $\bar{h} = B$ . Muhitda elektr maydon kuchlanganligining o'rtacha qiymati  $E$  ni elektr maydon kuchlanganligi, magnit maydon kuchlanganligining o'rtacha qiymati  $B$  ni esa magnit induksiya vektori deb ataymiz. Bu belgilashlarda (9.3)–(9.6) tenglamalar quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\text{rot } E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (9.8)$$

$$\text{div } B = 0, \quad (9.9)$$

$$\text{rot } B = \frac{4\pi}{c} \bar{\rho} \bar{v} + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (9.10)$$

$$\text{div } E = 4\pi \bar{\rho}. \quad (9.11)$$

O'rtachalangan tenglamalarda tok va zaryad zichligining o'rtacha qiymatlarining ishtirok etishi muhitlarni ikki toifaga - o'tkazgich va dielektriklarga ajratishni taqazo qiladi. O'tkazgichlarda tashqi stationar elektr maydon ta'sirida zaryadlarning tartibli harakati, ya'ni tok yuzaga keladi. Bunday maydon ta'sirida dielektriklarda zaryadlar

siljisa-da tok yuzaga kelmaydi. Vaqt o'tishi bilan o'zgaruvchi maydonlarda holat statsionar maydondagidan tubdan farq qiladi, hatto dielektriklarda ham tok yuzaga kelishi mumkin.

## 9.2 Elektr maydonda muhitning qutblanishi

Zaryad zichligining o'rtacha qiymatini hisoblashda dielektrikning elektroneytral va noldan farqli zaryadga ega bo'lgan hollarni alohida ko'rib chiqamiz.

Brinchi navbatda jismni elektroneytral deb qaraymiz. Tashqi elektr maydon ta'sirida jismni tashkil etuvchi atom va molekulalardagi manfiy va musbat zaryadlarning muvozanat holatiga nisbatan siljishi ro'y beradi. Bunda jismning bir butun holda elektroneytralligi buzilmasada, alohida olingan qismlarida elektroneytrallik buziladi. Buni qanday tushunish kerak? Tashqi maydonga kiritilmagan jismda ixtiyoriy hajmni ko'ramiz. Bu hajmni shunday tanlaymizki u yana elektroneytral bo'lsin. Endi jismni tashqi statsionar elektr maydonga kiritamiz. Jismni tashkil etuvchi atomdagagi elektronlarning massasi yadroning massasidan juda kichik bo'lganligi uchun ular yadroga nisbatan ko'proq siljiydi. Buning natijasida alohida ko'rilaoygan hajmni chegaralovchi sirtga juda yaqin bo'lgan atomlardagi elektronlar sirtdan tashqari (ichkari) ga va tashqarida bo'lgan atomlardagi elektronlar ichkari (tashqari) ga o'tib qolishi mumkin. Bunda ko'rilaoygan hajm ichkarisiga kirgan va tashqarisiga chiqqan elektronlarning soni teng bo'lmasligi mumkin, ya'ni shu qismda -lokal elektroneytrallik buziladi. Bu holda jismda qandaydir lokal zaryadlar paydo bo'ldi deb qarash mumkin. Bunday zaryadlar atomni tark etmaganligi uchun bog'langan zaryadlar deb ataladi. Uning zichligi zaryad zichligining o'rtachasiga teng bo'ladi:

$$\bar{\rho} = \rho_b. \quad (9.12)$$

Bu yerda  $\rho_b$  bog'langan zaryadlar zichligi. Madomiki zaryadlar paydo bo'lgan ekan, jism elektr dipol momentiga ega bo'lib qoladi. Bu jarayonga *muhitning qutblanishi* deyiladi. Bu yerda elektr dipol momentning o'rtacha qiymati ma'noga ega.

Birlik hajmga to'g'ri keluvchi elektr dipol momentini qutblanish vektori deb ataluvchi kattalik  $P$  bilan ifodalaymiz. Bunda jismning

elektr dipol momenti

$$\mathbf{d} = \int \mathbf{P} dV. \quad (9.13)$$

Ikkinchi tomondan elektr dipol momentining ta'rifiga binoan

$$\mathbf{d} = \int \mathbf{r} \rho_b dV. \quad (9.14)$$

Jismga tashqaridan zaryad kiritilmagan ekan, u elektroneytralligicha qoladi, ya'ni

$$\int \rho_b dV = 0. \quad (9.15)$$

Bu integral munosabat istalgan shakldagi jism ushun o'tinli bo'ladi.

Dipol momentini aniqlovchi (9.13) va (9.14) ifodalarni taqqoslab,  $\mathbf{P} = \mathbf{r} \rho_b$  bog'lanishni topamiz. Bu ifodadan to'g'ridan to'g'ri foydalanib  $\rho_b$  ni topolmaymiz. Bog'langan zaryadlar zichligini qutblanish vektorining divergansiyasi ko'rinishida yozish mumkin deb faraz qilamiz:

$$\rho_b = -\operatorname{div} \mathbf{P} \quad (9.16)$$

Bu ifodani (9.15) qo'yamiz va Ostrogadskiy-Gauss formulasiga asosan hajm bo'yicha integraldan yopiq sirt bo'yicha integralga o'tamiz:

$$\int \rho_b dV = - \int \operatorname{div} \mathbf{P} dV = \oint \mathbf{P} dS. \quad (9.17)$$

Bu yerda integallash sirti jismni o'rabi olgan ixtiyoriy yopiq sirt bo'lganligi uchun uni jismdan tashqarida tanlanadi. Jismdan tashari nuqtalarda  $\mathbf{P} = 0$ , demak, integral ham nolga teng bo'ladi. Bu natija (9.15) shartni tasdiqlaydi shu bilan birga bog'langan zaryadlar zichligini (9.16) ko'rinishda tanlash mumkinligini ko'rsatadi. Endi (9.14) ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin bo'ladi:

$$\mathbf{d} = - \int \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{P} dV. \quad (9.18)$$

Jismning qutblanishi bir tekis bo'lmaydi. Buni ko'rsatish uchun teskari faraz qilamiz, ya'ni qutblanish bir jinsli bo'lsin deb qaraymiz. Bu holda  $\operatorname{div} \mathbf{P} \equiv 0$  bo'ladi. Bunga ko'ra va (9.16) ga asosan bog'langan zaryadlar zichligi jism hajmining hamma nuqtalarida aynan nolga teng va jism

qutblanmagan bo'lib chiqadi. Bunday bo'lishi mumkin emas, chunki tashqi elektr maydonga kiritilgan jism elektr momentiga ega bo'ladi va u albatta qutblangan bo'ladi. Bu mulohazalardan jismning qutblanishi bir jinsli bo'lishi mumkin emasligi kelib chiqadi.

Endi boshidan jism  $\rho$  zichlik bilan zaryadlangan deb zaryad zichligining o'rtacha qiymatini aniqlaymiz. Tashqi maydon kuchsiz bo'lganligi uchun bog'langan zaryadlar erkin zaryadga aylana olmaydi. Shuning uchun to'liq zaryad zichligiga erkin va bog'langan zaryadlar mustaqil ravishda kiradi, ya'ni

$$\bar{\varrho} = \rho + \rho_b, \quad (9.19)$$

$$\int \bar{\varrho} dV = \int \rho dV + \int \rho_b dV = \int \rho dV = e. \quad (9.20)$$

Bu yerda  $e$  jismlarning to'liq zaryadi.

### 9.3 Tok zichligining o'rtachasi

Tok zichligining o'rtacha qiymatini muhitning xossalari to'g'risi-dagi umumiy tasavvurlardan kelib chiqib aniqlaymiz. Bunda quyidagi uchta farazni asos qilib olamiz:

1. Tashqi maydonga kiritilgan jism hajmidagi o'rtacha maydon atom ichidagi maydondan kichik bo'lishi kerak. Bu faraz, maydon uchun yozilgan tenglamalarning chiziqli bo'lishini va muhitning elektr, magnit va boshqa xossalari tashqi maydonga bog'liq bo'lmasligini ta'minlaydi.

2. Muhit bir jinsli bo'lishi kerak. Bu faraz ko'rيلayotgan hajmda muhit xossalarni aniqlovchi kattaliklar birday bo'lishini ta'minlaydi.

3. Muhit izotrop bo'lishi kerak. Bu hol muhitning xossalarni aniqlovchi kattaliklar skalyar bo'lishiga ishora qiladi.

Bu shartlardan chetlashish qanday oqibatlarga olib kelishini keyinroq ko'rib chiqamiz. Hozir esa shu farazlar o'rinni deb tok zichligining o'rtacha qiymatini aniqlaymiz.

Tok zichligining o'rtacha qiymati umuman olganda tashqi elektr va magnit maydon kuchlanganliklariga, ularning vaqt va koordinata bo'yicha hosilalariga bog'liq bo'lishi mumkin, ya'ni

$$\bar{\varrho}\vec{v} = f\left(\mathbf{E}, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{E}_\alpha}{\partial x_\beta}, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{B}_\alpha}{\partial x_\beta}\right). \quad (9.21)$$

Maydon kuchsiz va hosilalari sekin o'zgarishini hisobga olib,  $f$  funksiyani argumentlarining darajalari bo'yicha qatorga yoyamiz. Maydon tenglamalari chiziqli bo'lishi uchun qatorda o'zgaruvchilarning birinchi darajalari ishtirok etgan hadlar bilan chegaralanamiz. Tok zichligi qutb vektor bo'lganligi uchun qatordagi hadlar qutb vektoriga hos bo'lishi kerak. Ular skalyar ham, aksial vektor ham bo'lishi mumkin emas.

Elektr maydon kuchlanganligining dekart koordinata o'qlariga proksiyalaridan koordinatalar bo'yicha hosilalarni guruhlarga to'plab div  $E$  va rot  $E$  larni hosil qilish mumkin. Bu kattaliklarga proporsional bo'lgan hadlar qatorda ishtirok etmaydi. Chunki, bulardan birinchisi skalyar bo'lsa, ikkinchisi aksial vektordir. Shu vaqtida  $E$  va  $\frac{\partial E}{\partial t}$  lar qutb vektorlari bo'lganligi uchun, bularga proporsional hadlar qatorda ishtirok etadi.

Magnit induksiya vektori va uning vaqt bo'yicha hosilasi aksial vektor bo'lganligi uchun bunday hadlar qatorda bo'lishi mumkin emas. Aksincha, rot  $B$  qutb vektori bo'lib, qatorda albatta ishtirok etadi.

Nolinchi had nolga teng bo'ladi. Chunki, maydon bo'lmaganda tok ham nolga teng bo'ladi. Shunday qilib, yuqoridagi mulohazalarga asoslanib, tok zichligining o'rtachasi uchun quyidagi ifodani yozish mumkin:

$$\bar{\varrho}v = \gamma E + \alpha \frac{\partial E}{\partial t} + \alpha c \operatorname{rot} B. \quad (9.22)$$

Bu yerda  $\gamma$ ,  $\alpha$ , va  $c$  muhitning xossalalarini ifodalovchi skalyar kattaliklardir. Uchinchi haddagi  $c$  yorug'lik tezligi bo'lib, qulaylik uchun kiritilgan.

Qatordagi har bir hadning fizik ma'nosini ochamiz. Muhitga faqat o'zgarmas elektr maydon ta'sir qilayotgan bo'lsin deb ko'ramiz. Bu holda (9.22) dagi ikkinchi va uchinchi hadlar nolga teng bo'lib,

$$\bar{\varrho}v = j = \gamma E. \quad (9.23)$$

Ko'rinish turibdiki, tashqi elektr maydon ta'sirida unga proporsional tok yuzaga kelar ekan. Bu tok o'tkazuvchanlik toki deyiladi va muhitdagi erkin zaryadlarning tartibli harakati bilan bog'langan.  $\gamma$  o'tkazuvchanlik koeffitsienti deyiladi. Toza dielektriklarda bu kattalik nolga teng bo'ladi. Yaxshi o'tkazgichlarda juda katta qiymatga ega bo'ladi. Bunday tok o'zgaruvchi maydonda ham mavjud bo'ladi. O'tkazuvchanlik

toki umumiy holda koordinata va vaqtning funksiyasi bo'lib, ixtiyoriy vaqtida muhitning ko'rيلayotgan nuqtasidagi elektr maydon kuchlanganligi bilan aniqlanadi. (9.23) Om qonunining differensial shakli deyiladi. Bu odatdagি Om qonuni bilan bog'langanligini keyinroq ko'ramiz.

Bog'langan zaryadlar erkin zaryadlarga aylanmasligi zaryadning saqlanish qonuni har ikkala toifadagi zaryadlar uchun mustaqil ravishda bajarilishini ko'rsatadi. Ya'ni (9.7) uzluksizlik tenglamasi bilan bir vaqtida erkin zaryadlar va o'tkazuvchanlik toki uchun ham uzluksizlik tenglamasini yozish mumkin:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (9.24)$$

Tok zichligi ifodasidagi ikkinchi hadning fizik ma'nosini ochishga kirishamiz. Buning uchun (9.22) ifodaning har ikkala tomonidan divergensiya olamiz. Bunda oxirgi hadning divergensiysi nolga teng bo'lganligi uchun quyidagi hosil bo'ladi:

$$\operatorname{div} \bar{\varrho} \bar{\mathbf{v}} = \operatorname{div} \mathbf{j} + \alpha \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (9.25)$$

To'liq va o'tkazuvchanlik toklari ishtirokidagi uzluksizlik tenglamalari (9.7), (9.24) dan foydalanib (9.25) ni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} - \rho) = -\alpha \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (9.26)$$

Bu yerda  $(\bar{\rho} - \rho)$  bog'langan zaryadlar zichligiga tengligini inobatga olsak,

$$\frac{\partial \rho_b}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \alpha \mathbf{E}.$$

Bu ifodani vaqt bo'yicha integrallab, quyidagini hosil qilamiz:

$$\rho_b = -\operatorname{div} \alpha \mathbf{E}. \quad (9.27)$$

Bu yerda maydon yo'q bo'lganda qutblanish bo'limganligi sababli integrallah doimiysini nolga teng deb olindi.

(9.16) va (9.27) ifodalarni taqqoslab, qutblanish vektori elektr maydon kuchlanganligiga proporsional ekanligini aniqlaymiz:

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E}. \quad (9.28)$$

Proporsionallik koeffitsienti æ qutblanish koeffitsienti yoki *dielektrik krituvchanlik* deb ataladi. Bu kattalik doimo musbat bo'lganligi uchun qutblanish vektori doimo elektr maydon kuchlanganligi bilan bir tomonaga yo'nalgan bo'ladi.

Tok zichligining o'rtacha qiymatini aniqlovchi (9.22) ifodadagi ikkinchi hadni olingan oxirgi natijaga ko'ra quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$j_q = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \alpha \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (9.29)$$

Ko'ramizki, qutblanishning vaqt bo'yicha o'zgarishi qandaydir tokni yuzaga keltirar ekan. Bu tok *qutblanish* toki deb atalib, o'zgaruvchi tashqi elektr maydon ta'sirida qutblanishning vaqtga bog'liq holda ozgarishi natijasida paydo bo'ladi. Bu holatni ko'z oldimizga keltirish uchun jismda faraziy sirt o'tkazish kerak. Qutblanish natijasida bu sirtni bog'langan zaryadlar kesib o'tadi. Maydon vaqtga bog'liq bo'l ganda zaryadlar sirtning bir tomonidan ikkinchi tomoniga maydon o'zgarishiga mos ravishda ko'chib turadi. Bu holat zaryadlarning harakatiga ekvivalent bo'lib, tok paydo bo'lishiga olib keladi.

Endi (9.22) dagi uchinchi hadni ko'rib chiqamiz. Buning uchun uning radius-yektor  $\mathbf{r}$  bilan vektor ko'paytmasini tashkil qilamiz va jismning hajmi bo'yicha integrallaymiz. Ikkinchi had bilan bog'liq bo'lgan integralni tekshirib chiqamiz:

$$\int \left[ \mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right] dV = \int \left[ \mathbf{r}, \frac{\partial}{\partial t} \rho_b \mathbf{v} \right] dV = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho_b [\mathbf{r}, \mathbf{v}] dV = 0.$$

Bu yerda integrallash o'zgaruvchisi  $\mathbf{r}$  vaqtga bog'liq emasligini hisobga oldik. Qolgan hadlarni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\alpha c \int [\mathbf{r}, \text{rot } \mathbf{B}] dV = \int [\mathbf{r}, (\bar{\rho} \mathbf{v} - \mathbf{j})] dV = \int [\mathbf{r}, \rho_b \mathbf{v}] dV. \quad (9.30)$$

Bu yerda  $\bar{\rho} \mathbf{v} - \mathbf{j} = \rho_b \mathbf{v}$  bog'langan zaryadlar toki.

Magnit momentining ta'rifi (6.22) ga ko'ra (9.30) ni bog'langan zaryadlar tokining magnit momenti zichligi

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \rho_b \mathbf{v}] / 2c \quad (9.31)$$

orqali yoziah mumkin:

$$\alpha \int [\mathbf{r}, \text{rot } \mathbf{B}] dV = 2 \int \mathbf{M} dV = \int [\mathbf{r}, \text{rot } \mathbf{M}] dV. \quad (9.32)$$

Ko'ramizki, magnit momentining zichligi magnit induksiya vektoriga proporsional ekan, ya'ni

$$\mathbf{M} = \alpha \mathbf{B}. \quad (9.33)$$

Shunday qilib, (9.22) dagi oxirgi had ikkinchi had kabi bog'langan zaryadlar harakatiga aloqador bo'lib, magnit momenti bilan aniqlanganligi uchun *magnitlanish* toki deb ataladi.

Qutblanish toki zichligi bilan magnitlanish toki zichligining yig'indiisi bog'langan zaryadlar tokining zichligi deb yuritiladi, ya'ni

$$\mathbf{j}_b = \mathbf{j}_P + \mathbf{j}_M. \quad \mathbf{j}_P = \partial \mathbf{P} / \partial t, \quad \mathbf{j}_M = c \operatorname{rot} \mathbf{M} \quad (9.34)$$

Bu yerda  $\mathbf{j}_P$  va  $\mathbf{j}_M$  mos ravishda qutblanish va magnitlanish toklarining zichligi. Sunday qilib muhitda tok erkin va bog'langan zaryadlarning harakati tufayli yuzaga kelishini aniqladik.

## 9.4 Maksvell va bog'lanish tenglamalari

Zaryad va tok zichligining o'rtacha qiymatlari yordamida makroskopik elektrodinamikaning asosiy tenglamalarini ta'riflashga kirishamiz. (9.10) tenglamaga (9.22) ni qo'yamiz:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + 4\pi \operatorname{rot} \mathbf{M} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

yoki

$$\operatorname{rot}(\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}). \quad (9.35)$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}, \quad (9.36)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} \quad (9.37)$$

va bu belgilashlarda (9.35) tenglamani qayta yozamiz:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (9.38)$$

Bu yerda  $H$  va  $D$  yordamchi kattaliklar bo'lib, magnit maydon kuchlanganligi va elektr induksiya vektori deb yuritiladi. Endi (9.11) tenglamani zaryad zichligining o'rtacha qiymati (9.19) va (9.16) orqali qayta yozamiz:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho + 4\pi\rho_b = 4\pi\rho - 4\pi \operatorname{div} \mathbf{P} \implies \operatorname{div}(\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}) = 4\pi\rho$$

yoki

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho. \quad (9.39)$$

Bu yerda (9.37) inobatga olindi.

(9.38), (9.39), (9.8) va (9.9) makroskopik elektrodinamikaning asosiy tenglamalari bo'lib, Maksvell tenglamalari deb ataladi. Bu tenglamalardagi erkin zaryadlar zichligi va tok zichligi uzluksizlik tenglamasi (9.24) bilan bog'langan.

Magnit maydon kuchlanganligi bilan magnit induksiya vektori orasidagi bog'lanishni aniqlaymiz. (9.33) bog'lanishni inobatga olib (9.36) ni yozamiz:

$$\mathbf{H} = (1 - 4\pi\alpha)\mathbf{B}. \quad (9.40)$$

Bu yerda  $\mu = 1/(1 - 4\pi\alpha)$  belgilash kiritib (9.40) ni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \quad (9.41)$$

$\mu$  magnit singdiruvchanlik deb ataladi. Magnit maydon ta'sirida paydo bo'lgan magnit momentining zichligi

$$\mathbf{M} = \mu\alpha\mathbf{H} = \chi\mathbf{H}. \quad (9.42)$$

Bu yerda  $\chi$  magnit kirituvchanlik deb ataladi. (9.33) va (9.41) dan

$$\mu = 1 + 4\pi\chi \quad (9.43)$$

hosil bo'ladi.

Shunga o'xshash (9.28) va (9.37) dan

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \quad (9.44)$$

hosil qilamiz. Bu yerda

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha \quad (9.45)$$

dielektrik singdiruvchanlik deb ataladi.

Qutblanish koeffitsienti (dielektrik kirituvchanlik deb ham ataladi) æ hamma jismlar uchun noldan katta bo'lganligi uchun dielektrik sing-diruvchanlik  $\epsilon > 1$  bo'ladi. Magnit kirituvchanlik  $\chi$  musbat yoki manfiy bo'lishi mumkin.  $\chi > 0$  bo'lgan moddalar paramagnit,  $\chi < 0$  bo'lgan moddalar esa diamagnit deyiladi. Agar  $\chi$  katta va magnit maydonning nochiziqli funksiyasi bo'lsa, modda ferromagnit bo'ladi. Moddalarning bunday turlarga ajratish nazariyasi ushbu darslik doirasiga kirmaydi. Termodinamika va statistik fizika kursida bu masala termodinamik nuqtai nazardan qisqacha o'rganiladi.

(9.41), (9.44) va (9.23) bog'lanish tenglamalari deb ataladi. Bu tenglamalar bilan birgalikda Maksvell tenglamalari to'liq tenglamalar sistemasini tashkil qiladi. Ushbu bobning boshida muhitga qo'yilgan shartlarga asosan bog'lanish tenglamalarining amal qilish sohasi cheklangandir. Shu sababli Maksvell tenglamalarining tatbiq qilish sohasi ham cheklangan. Bu tenglamalarning tatbiq qilish chegarasini kengaytirish mumkin.

Muhit anizotrop bo'lganda muhitning xossalari aniqlovchi skalyar kattaliklar  $\gamma, \epsilon, \mu \dots$  biz ko'rayotgan chiziqli elektrodinamika doirasida ikkichi rangli tenzor kattaliklar  $\gamma_{\alpha\beta}, \epsilon_{\alpha\beta}, \mu_{\alpha\beta} \dots$ ga o'tadi. Bu holda bog'lanish tenglamalari quyidagicha yoziladi:

$$j_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} E_\beta, \quad D_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} E_\beta, \quad B_\alpha = \mu_{\alpha\beta} H_\beta, \dots$$

Muhit bir jinsli bo'limgan holda maydon kattaliklari orasidagi algebraik bog'lanishlar integral bog'lanishlarga o'tadi. Bu holni 13-bobda ko'rib chiqamiz.

Maksvell tenglamalarining differensial ko'rinishi (9.8), (9.9), (9.38) va (9.39) dan ularning integral ko'rinishiga mikroskopik elektrodinamikadagi kabi o'tamiz:

$$\oint Edl = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int BdS, \quad (9.46)$$

$$\oint BdS = 0, \quad (9.47)$$

$$\oint Hdl = \frac{4\pi}{c} \int jdS + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int DdS, \quad (9.48)$$

$$\oint DdS = 4\pi \int \rho dV. \quad (9.49)$$

Maksvell tenglamalarning fizik ma’nosi Maksvell–Lorentz tenglamalarining ma’nosi bilan biday. Faqat induksiya qonunida magnit maydon kuchlanganligining o’rnida magnit induksiya vektori va siljish toki zichligida

$$j_s = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t} \quad (9.50)$$

elektr maydon kuchlanganligining o’rnida elektr induksiya vektori ishtirok etadi.

Endi mikroskopik elektrodinamikadagi kabi maydon potensiallarini kiritamiz:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (9.51)$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (9.52)$$

Lorenz sharti (kalibrovkasi)

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (9.53)$$

bajarilganda potensiallar uchun yozilgan Dalamber tenglamalari quyidagi ko’rinishga o’tadi:

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho(\mathbf{r}, t), \quad (9.54)$$

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \quad (9.55)$$

## 9.5 Chegaraviy shartlar

Makroskopik elektrodinamikanig asosiy tenglamalari Maksvell tenglamalarining integral ko’rinishi umuman olganda muhitning xossalari aniqlovchi kattaliklar  $\gamma$ ,  $\epsilon$ ,  $\mu$  koordinataning funksiyasi bo’lgan ixtiyoriy hol uchun ham o’rinli bo’ladi. Bu tenglamalarning differensial ko’rinishi to’g’risida bunday deb bo’lmaydi. Turli xossalarga ega bo’lgan ikki muhut chegarasida  $\gamma$ ,  $\epsilon$ ,  $\mu$  lar sakrab o’zgarganligi sababli tenglamalarning differensial ko’rinishida ishtirok etayotgan  $D$ ,  $E$ ,  $B$  va  $H$  larning koordinata bo’yicha hosilalari chegara nuqtalarida aniqlanmagan bo’ladi. Bunday hollarda asosiy tenglamalar ma’noga ega bo’lishi uchun

ular qo'shimcha chegaraviy shartlar bilan to'ldirilishi kerak. Chegaraviy shartlarni aniqlash uchun tenglamalarning integral ko'rinishidan foydalanamiz.

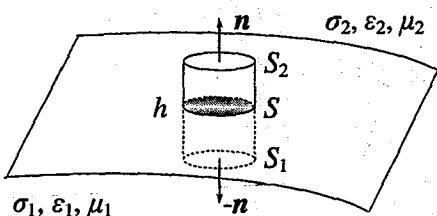
**1. Magnit induksiya vektorining normal tashkil etuvchisi uchun chegaraviy shart.** Magnit induksiya vektorining ikki muhitni chegaralovchi sirtga normal tashkil etuvchisi uchun chegaraviy shartni aniqlashda (9.47) tengalamadan foydalanamiz:

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (9.56)$$

Bu yerda integrallash sirti sifatida bir qismi bиринчи muhitda, boshqa qismi ikkinchi muhutda joylashgan cheksiz kichik silindrik sirtni tanlanadi (9.1-rasm).

Ikkinchi muhutta silindr asosiga o'tkazilgan normalning yo'nalishini musbat deb qabul qilamiz. Shu silindrning sirti bo'yicha magnit induksiya oqimini hisoblaymiz:

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = B_{2n} S_2 - B_{1n} S_1 + \bar{B} L h = 0. \quad (9.57)$$



9.1-rasm:

perimetri.

$h$  ni nolga, ya'ni  $S_2$  ni ikkinchi muhit tomonidan va  $S_1$  ni esa bиринчи muhit tomonidan  $S$  ga intiltiramiz ( $S$  chegara sirt bilan silindrni kesganda hosil bo'lgan kesim yuzasi). Bunda yon sirt bo'yicha oqim nolga intilganligi uchun (9.57) dan quyidagi shart kelib chiqadi:

$$B_{2n} - B_{1n} = 0. \quad (9.58)$$

Ko'ramizki, magnit induksiya vektorining normal tashkil etuvchisi ikki muhit chegarasida uzuksiz ekan. Shu vaqtda muhitning xossalari aniqlovchi kattaliklar sakrab o'zgaradi.

**2. Elektr induksiya vektorining normal tashkil etuvchisi uchun chegaraviy shart.** Elektr induksiya vektorining ikki muhitni chegaralovchi sirtga normal tashkil etuvchisi uchun chegaraviy shartni aniqlashda (9.49) tengalamadan foydalanamiz:

$$\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = 4\pi\rho. \quad (9.59)$$

Bu tenglama (9.56) dan chap tomoni bilan farq qiladi. Integrallash sirti oldingi holdagi kabi tanlab quyidgini hosil qilamiz:

$$D_{2n}S_2 - D_{1n}S_1 + \overline{D}Lh = 4\pi\rho Sh. \quad (9.60)$$

Bu yerda  $\rho Sh$  – silindr hajmidagi zaryad. Yuqoridagi kabi  $h$  ni nolga intiltirsak silindr yon sirti bo'yicha oqim nolga teng bo'ladi. (9.60) tenglamaning o'ng tomoni ham nolga teng bo'ladi. Agar sirt zaryadlari deb ataluvchi zaryadlarni hisobga olsak bu had nolga teng bo'lmaydi. Chunki sirt zaryadlari hajmgaga aloqasi bo'lmasdan,  $h \rightarrow 0$  da ham mavjud bo'ladi. Bunday zaryadlarning sirt zichligini (birlik yuzaga to'g'ri kelgan zaryad miqdori)

$$\omega_s = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow \infty}} \rho h$$

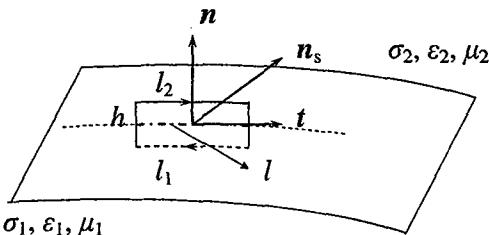
deb belgilasak, (9.60) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\omega_s. \quad (9.61)$$

Shunday qilib, elektr induksiya vektorining normal tashkil etuvchisi ikki muhit cherasidan o'tishda sirt zaryadlari mavjud bo'lgan holda uzilishga ega bo'ladi, ya'ni sakrab o'zgaradi. Uzilish kattaligi  $4\pi\omega_s$  ga teng. Sirt zaryadlari bo'lmasa  $D_n$  uzuksiz bo'ladi.

**3. Elektr maydon kuchlanganli vektorining tangensial tashkil etuvchisi uchun chegaraviy shart.** Bu sahrtni olish uchun (9.46) tengalamadan foydalanamiz:

$$\oint \mathbf{E} dl = -\frac{1}{c} \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}. \quad (9.62)$$



9.2-rasm:

normalning,  $t$  shu nuqtada urinmaning va  $n_s$  sirt tokining yo'nalishlarini aniqlaydigan vektorlar.) Sirt bo'yicha integral esa berk kontur tortib turgan sirt bo'yicha olinadi. Berk kontur bo'yicha integralni uning qismlari bo'yicha integrallarga ajratamiz va (9.62) ning o'rniga quyidagini yozamiz:

$$E_{2t}l_2 - E_{1t}l_1 + \sum \bar{E}_n h = -\frac{1}{c} \overline{\left( \frac{\partial B}{\partial t} \right)}_{n_s} lh. \quad (9.63)$$

Bu yerda  $h$  bilan berk konturning  $l_1$  va  $l_2$  bo'laklarining uchlarini birlashtiruvchi kontur qismlari belgilangan,  $\overline{(\partial B / \partial t)}_{n_s}$  kontur tortib turgan sirtga o'tkazilgan normal  $n_s$  ga  $(\partial B / \partial t)$  ning proeksiyasining o'rtacha qiymati.

$h$  ni nolga intiltirsak,  $l_2$  ikkinchi muhit tomonidan  $l_1$  esa birinchi muhit tomonidan chegara sirda yotuvchi  $l$  ga intiladi. Bunda kontur tortib turgan sirt yuzasi nolga intiladi. Natijada, elektr maydon sirkulyatsiyasining  $h$  ga tegishli qismi (9.63) ning chap tomonagi uchinchi had) va sirt bo'yicha integral nolga intiladi. Shunday qilib,

$$E_{2t} - E_{1t} = 0, \quad (9.64)$$

Ko'ramizki, elektr maydon kuchlanganligining tangensial tashkil etuvchisi ikki muhit chegarasida uzlusiz ekan. Bu natijani olishda  $\overline{(\partial B / \partial t)}_{n_s}$  chekli qiymatlarni qabul qiladi deb faraz qildik. Bunday faraz deyarli barcha real sharoitlarda o'rinli bo'ladi.

4. *Magnit maydon kuchlanganligi vektorining tangensial tashkil etuvchisi uchun chegaraviy shart.* Bu shartni olish uchun

Integrallash konturining bir qismi birinchi muhitda, boshqa qismi ikkinchi muhitda joylashgan cheksiz kichik to'rt burchak shaklida tanlaymiz. Konturning ikkinchi muhitda qismining yo'nalishini musbat deb qabul qilamiz. (9.2-rasmda  $n$  ko'rيلayotgan chegara nuqtasida sirtga o'nkazilgan

(9.48) tengalamadan foydalananamiz:

$$\oint H dl = \frac{4\pi}{c} \int j dS + \frac{1}{c} \int \frac{\partial D}{\partial t} dS. \quad (9.65)$$

Bu tenglama o'ng tomonidagi birinchi had (9.62) dan farq qiladi. Integrallash konturini oldingi holdagi kabi tanlab quyidgini yozamiz:

$$H_{2t}l_2 - H_{1t}l_1 + \overline{H}h = \frac{4\pi}{c} \left( j + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t} \right)_{n_s} lh. \quad (9.66)$$

Ikki holni bir-biridan farqlaymiz:

a) *chevara sirtda o'tkazuvchanlik toki yo'q bo'lsin.* Bu holda  $h \rightarrow 0$  da ( $l_1 \rightarrow l$ ,  $l_2 \rightarrow l$ )  $h$  ishtirok etgan hamma hadlar nolga intiladi va natijada quyidagi ifoda hosil bo'ladi:

$$H_{2t} - H_{1t} = 0. \quad (9.67)$$

Demak, ikki muhit chegasidan o'tishda magnit maydon kuchlanganligining tangensial tashkil etuvchisi uzluksiz ekan.

b) *chevara sirtda o'tkazuvchanlik toki mavjud bo'lsin.* Bu holda tok kuchi integrallash sirtiga bog'liq bo'lmaydi va  $h \rightarrow 0$  da chekli qiymatga intiladi:

$$i_s = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ j \rightarrow \infty}} (j_n)_s h.$$

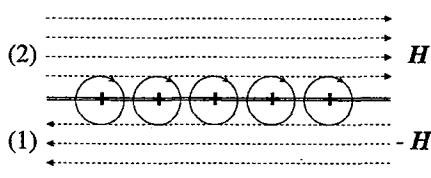
Bu yerda  $i_s$  chevara sirdan  $n_s$  yo'nalishda oqayotgan tokning chiziqli zichligi, ya'ni tokining yo'nalishiga perpendikulyar ( $l$ ) yo'nalishda sirtda yotgan chiziqning birlik uzunligiga to'g'ri kelgan tok.  $(\partial D / \partial t)_{n_s}$  chekli deb hisoblasak (9.66) ning o'ng tomonidagi ikkinchi had  $h \rightarrow 0$  da nolga intiladi. Natijada (9.66) shart bu holda quyidagi ko'rinishni oladi:

$$H_{2t} - H_{1t} = \frac{4\pi}{c} i_s. \quad (9.68)$$

Shunday qilib, magnit maydon kuchlanganligining tangensial tashkil etuvchisi ikki muhit cherasidan o'tishda sirt toki mavjud bo'lgan holda uzilishga ega bo'ladi. Uzilish kattaligi sitr tokining chiziqli zichligi  $i_s$  bilan aniqlanadi. Olingan natijani vektor ko'rinishda yozamiz (9.2-rasm):

$$[nH_2] - [nH_1] = \frac{4\pi}{c} i_s. \quad (9.69)$$

Sirt toklari mavjud bo'lganda magnit maydon kuchlanganligining sakrab o'zgarishini yassi tok misolida yaqqol ko'rish mumkin. Plastinkadan oqayotgan yassi tok rasm tekisligiga nisbatan ichkariga qarab yo'nalgan bo'lzin (9.3-rasm). Shu tok hosil qilayotgan magnit maydonning kattaligi yuqorida va pastda bir xil va bir jinsli bo'lib, yo'nalishi jihatdan qarama-qarshi bo'ladi. Ya'ni maydon plastinkadan o'tishda sakrab o'zgaradi. Uzilish  $\frac{4\pi}{c} i_s$  ga teng bo'ladi.



9.3-rasm:

Makroskopik elektrodinamika ning to'rtta asosiy tenglamasiga mos keluvchi to'rtta chegaraviy shartlarni hosil qildik.  $E_n$ ,  $H_n$ ,  $D_t$ ,  $B_t$ ,  $j_n$ ,  $j_t$ ,  $P_n$ ,  $P_t$ ,  $M_n$ ,  $M_t$  uchun chegaraviy shartlarni yuqoridagi to'rtta asosiy chegaraviy shartlar va bog'lanish tenglamalari yordamida hosil qilish mumkin.

Masalan,  $E_n$  uchun chegaraviy shartni bog'lanish tenglamasi  $D = \epsilon E$  va (9.61) shart yordamida aniqlaymiz:  $\epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_2 E_{1n} = 4\pi\omega_s$ .

Shunga o'xshash qolgan kattaliklar uchun ham chegaraviy shartlarni hosil qilish mumkin.

## 9.6 Muhitda elektromagnit maydon energiyasining saqlanish qonuni

Mikroskopik elektrodinamikada elektromagnit maydon energiyasining saqlanish qonuni 4.5§) ko'rib chiqqan edik. Shu masalani muhit uchun qayta ko'rib chiqamiz. Energiya balansini ifodalovchi (4.62) tenglamani yozamiz:

$$Q = -\frac{\partial U}{\partial t} - \oint \mathbf{S} d\mathbf{S}. \quad (9.70)$$

Bu tenglama energiyaning bir ko'rinishidan boshqa ko'rinishga aylanish qonunining umumiy ifodasıdir: Vaqt birligida birorta  $V$  hajmda  $Q$  issiqlik ko'rinishidagi energiyaning paydo bo'lishi, shu hajmda boshqa ko'rinishdagi energiya  $U$  ning kamayishiga va uni o'rab turgan sirdan energiya oqimiga teng.

Bu qonunni elektromagnit maydon uchun tatbiq qilamiz,  $Q$  issiqlikni maydon kattaliklari orqali aniqlaymiz. Ma'lumki,

$$Q = \int j E dV$$

tenglama bilan aniqlanadi. Tok zichligi  $j$  ni Maksvell tenglamalarining uchunchisi (9.38) dan topib yuqoridagi tenglamaga qo'yamiz:

$$Q = \frac{c}{4\pi} \int \mathbf{E}_{\text{rot}} \mathbf{H} dV - \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dV . \quad (9.71)$$

Bu tenglamani Maksvell tenglamalaridan birinchisi (9.8) yordamida elektr va magnit maydon kattaliklariga nisbatan simmetrik ko'rinishga keltiramiz:

$$Q = \frac{c}{4\pi} \int \text{div}[\mathbf{EH}] dV - \frac{1}{4\pi} \int \left( \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV . \quad (9.72)$$

O'ng tomondagi birinchi hadda Ostrogradskiy-Gauss teoremasiga asosan hajm bo'yicha integralni sirt bo'yicha integralga aylantiramiz. U holda

$$Q = \oint \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}] dS - \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{8\pi} (\epsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2) dV . \quad (9.73)$$

Bu yerda  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  va  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  bog'lanish tenglamalarini inobatga oldik. (9.73) muhitda elektromagnit maydon energiyasining saqlanish qonunini beradi. Bu yerda  $Q$  zaryadlarni ko'chirishda vaqt birligida bajarilgan ish bo'lib, Joul-Lentz issiqligini aniqlaydi. Xususan, chiziqli o'tkazgichlar uchun bizga ma'lum bo'lgan formulani olamiz:

$$Q = \int j E dV = \int \frac{j^2}{\gamma} dV = (jS)^2 \frac{l}{\sigma S} = I^2 R.$$

Bu yerda  $R = l/\gamma S$  elektr qarshilik,  $I = jS$  tok kuchi. Bu ifoda bizga ma'lum bo'lgan Joul-Lentz issiqligi aniqlaydi. U holda

$$Q_0 = jE = \gamma E^2 . \quad (9.74)$$

Bu ifoda Joul-Lentz qonuning differensial ko'rinishini beradi. (9.73) da qolgan hadlarning ma'nosini mikroskopik elektrodinamikada ko'rib chiqqan edik.

## 9.7 9-bobga oid masala va savollar

1. Nuqtaviy zaryad  $q$  dielektrik singdiruvchanligi  $\epsilon_1$  va  $\epsilon_2$  bo'lgan bir jinsli cheksiz ikkita dielektrikni ajratuvchi chegarada joylashgan. Elektr maydon potensiali  $\varphi$ , kuchlanganligi  $E$  va induksiyasi  $D$  ni toping.
2.  $q$  nuqtaviy zaryad joylashgan to'g'ri chiziqdandan  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  va  $\alpha_3$  ( $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi$ ) yassi burchaklar hosil qilib uchta yarimtekislik chiqqan. Ularning oralig'i singdiruvchanliklari mos ravishda  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\epsilon_3$  bo'lgan bir jinsli dielektriklar bilan to'ldirilgan. Uchta sohadagi elektr maydon potensiali  $\varphi$ , kuchlanganligi  $E$  va induksiyasi  $D$  ni toping.
3. Zaryadi  $q$  bo'lgan o'tkazuvchi shar markazi ikkita cheksiz bir jinsli  $\epsilon_1$  va  $\epsilon_2$  singdiruvchanlikka ega dielektriklar yassi chegarasida joylashgan. Elektr maydonning potensiali  $\varphi$  ni hamda shardagi zaryad taqsimoti  $\sigma$  ni toping.
4. Dielektrik singdiruvchanligi  $\epsilon$  bo'lgan bir jinsli muhitda joylashgan  $q$  zaryadli radiusi  $a$  ga teng bo'lgan o'tkazgich shar hosil qilayotgan elektrostatik maydon energiyasini hisoblang.
5. Zaryadi tekis taqsimlangan va radiusi  $a$  ga teng bo'lgan dielektrik shar hosil qilayotgan maydon energiyasini toping. Sharning dielektrik singdiruvchanligi  $\epsilon$  va zaryadi  $q$  ga teng. Shar vakuumda joylashgan deb hisoblang.
6. Fizik kattaliklarni o'rtachalashdan maqsad nima?
7. Fizik kattaliklarni o'rtachalash fo'rmulasi yozing.
8. Muhitning qutblanishi deganda nimani tushunasiz?
9. Tok zichligining o'rtacha qiymati ifodasini keltirib chiqaring.
10. Muhitga faqat elektr maydon ta'sir qilayotgan bo'lsa, tok zichligining o'rtacha qiymati ifodasi qanday bo'ladi?
11. Bog'langan zaryadlar tokining zichligi qanday tok zichliklaridan iborat?
12. Muhitda tok qanday zaryadlar hisobiga yuzaga keladi?
13. Makroskopik elektrodinamika (yoki muhit) uchun Dalamber tenglamalari qanday ko'rinishda bo'ladi?
14. Magnit induksiya vektorining normal tashkil etuvchisi uchun chegaraviy shartni keltirib chiqaring.
15. Elektr induksiya vektorining normal tashkil etuvchisi uchun chegaraviy shartni keltirib chiqaring.
16. Elektr maydon kuchlanganligi vektorining tangensial tashkil etuvchisi uchun chegaraviy shartni keltirib chiqaring.
17. Magnit maydon kuchlanganligi vektorining tangensial tashkil etuvchisi uchun chrgaraviy shartni keltirib chiqaring.
18. Maksvell tenglamalaridan foydalanim muhitda elektromagnit maydon energiyasining saqlanish qonunini keltirib chiqaring.

# 10-bob

## Muhitda elektrostatik maydon

Muhitda elektrodinamika hodisalarining spektri juda keng bo'lib, bir darslik doirasida hammasini qamrab olib bo'lmaydi. Ushbu kitobda amaliy ahamiyatga ega bo'lgan ba'zi muhim masalalarni ko'rib chiqamiz. O'rghanishni elektrostatik maydon masalasidan boshlaymiz. Ma'lumki, bunday maydonlarda barcha kattaliklar vaqtga bog'liq bo'lmaydi, zaryadlar butunlay harakatsiz bo'ladi tok  $j = 0$ . Bu holda Maks-vell tenglamalari quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= 0, & \text{rot } \mathbf{E} &= 0, \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0, & \text{div } \mathbf{D} &= 4\pi\rho, \\ \mathbf{B} &= \mu\mathbf{H}, & \mathbf{D} &= \varepsilon\mathbf{E}, \\ H_{2t} - H_{1t} &= 0, & E_{2t} - E_{1t} &= 0 \\ B_{2n} - B_{1n} &= 0, & D_{2n} - D_{1n} &= 4\pi\omega_s. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Ko'rinish turibdiki, tenglamalar ikkita o'zaro bog'liq bo'lмаган системага ajraldi. Bularдан биринчисида faqat magnit maydon kattaliklari ishtirok etsa, ikkinchisida esa elektr maydon kattaliklari ishtirok etadi. Tenglamalarning birinchisidan elektrostatikada magnit maydon aynan nolga tengligi kelib chiqadi.

Ta'kidlash lozimki, elektrostatika tenglamalari qandaydir yaqinlashishda olingan taqrifiy tenglamalar bo'lmasdan, to'liq tenglamalarning aniq shartlarga bo'ysunuvchi xususiy holi bo'lib hisoblanadi. Bunda elektrostatika tenglamalarining yechimi aniq bo'lib, bir vaqtning o'zida umumiyligi tenglamalarning xususiy yechimi bo'ladi. Bu yerda elektrostatika tenglamalarining yechimlarini bevosita ko'rmaymiz, chunki ular mikroskopik elektrostatikadagi yechimlardan farq qilmaydi. Elektrostatikaning ayrim masalalari ustida to'xtalib o'tamiz.

## 10.1 O'tkazgichlarda elektrostatik maydon

Elektrostatik maydon ta'sirida o'tkazgichda paydo bo'ladigan tok Om qonuni  $j = \gamma E$  bilan aniqlanadi. Boshqa tomondan elektrostatikaning ta'rifiga binoan  $j = 0$  bo'lishi ikki holni bir-biridan farqlash kerakligini ko'rsatadi:

$$\begin{array}{lll} \gamma = 0, & \text{ammo} & E \neq 0 \quad (\text{o'tkazgichdan tashqarida}), \\ \gamma \neq 0, & \text{ammo} & E = 0 \quad (\text{o'tkazgich ichida}). \end{array}$$

Bundan o'tkazgich ichida elektrostatik maydon nolga teng ekanligi kelib chiqadi. Elektr induksiya vektori ham nolga teng bo'ladi, chunki bu kattalik elektr maydon kuchlanganligiga proporsional. Bundan ikkita muhim xulosa kelib chiqadi:

1. O'tkazgich ichida dielektrik singdiruvchanlikning har qanday qiymatida  $D \equiv 0$  bo'lishi, elektrostatika doirasida o'tkazgichlarni dielektrik singdiruvchanlikning aniq qiymati bilan xarakterlab bo'lmasligini korsatadi. O'tkazuvchi muhitda dielektrik singdiruvchanlikning qiymati elektrostatika natijalariga ta'sir qilmaydi.

2. O'tkazgich ichidagi barcha nuqtalarda  $D \equiv 0$  bo'lishi, Maksvell tenglamasi

$$\operatorname{div} D = 4\pi\rho \equiv 0$$

ga asosan o'tkazgich ichida hajmiy zaryadlar ( $\rho = 0$ ) mavjud bo'lmasligini ko'rsatadi.

Umumiy ko'rinishda yozilgan chegaraviy shartlar dielektrik va o'tkazgich chegarasida quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned} D_{2n} - D_{1n} &= 4\pi\omega_s \implies E_n = \frac{4\pi\omega_s}{\epsilon}, \\ E_{2t} - E_{1t} &= 0 \implies E_t = 0. \end{aligned} \tag{10.2}$$

Bu yerda "1" indeks o'tkazgichga "2" indeks uni o'rab turgan muhitga tegishli.  $\epsilon$  shu muhitning dielektrik singdiruvchanligi. (10.2) dan o'tkazgich sirtida elektr maydon kuchlanganligi  $4\pi\omega_s/\epsilon$  tengligi va doimo sirtga perpendikulyar yo'nalgan bo'lishi ko'riniib turibdi.

Chegaraviy shartlar (10.2) ni (9.52) dan foydalanib skalayar potensial uchun quyidagi shartlarni yozamiz:

$$\omega_s = -\frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \quad \varphi_s = \text{const.} \tag{10.3}$$

Bu yerda hosila o'tkazgich sirtiga o'tkazilgan tashqi normal bo'yicha olinadi. Bundan o'tkazgich sirti ekvipotensial sirt ekanligi kelib chiqadi.

O'tkazgich sirtidagi to'liq zaryad

$$e_s = \oint \omega_s dS = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \oint \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_S dS. \quad (10.4)$$

Integral o'tkazgich sirti bo'yicha olinadi. Bu ifodadan o'tkazgich sirtidagi zaryad uning potensialiga bog'liq ekanligi ko'rinish turibdi. Bu bog'lanish chiziqli bo'lganligi uchun (10.4) ni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$e_s = C\varphi_s.$$

Bu yerda

$$C = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{1}{\varphi_s} \oint \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_S dS \quad (10.5)$$

elektr *sig'im* deyiladi. Sig'im bilan bog'liq bo'lган masalani keyingi mavzuda batafsil ko'rib chiqamiz.

## 10.2 O'tkazgichlarning elektrostatik maydon energiyasi

O'tkazgichlar sistemasining energiyasini hisoblaymiz. Bu masalani avval o'tkazgichlar bo'shilqda joylashgan deb ko'ramiz ( $\varepsilon = 1$ ). Bu holda zaryadlangan o'tkazgichlarning to'liq energiyasi:

$$U_E = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E}^2 dV. \quad (10.6)$$

Bu yerda integral butun fazo bo'yicha olinadi. Bu integralni (A.98) dan foydalanib o'zgartiramiz:

$$U_E = -\frac{1}{8\pi} \int \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{E} dV = -\frac{1}{8\pi} \int \text{div}(\varphi \mathbf{E}) dV + \frac{1}{8\pi} \int \varphi \text{div } \mathbf{E} dV. \quad (10.7)$$

Bu yerda ikkinchi integral  $\text{div } \mathbf{E} = 0$  bo'lganligi uchun nolga teng. Birinchi integralni sirt bo'yicha integralga o'tkazamiz. Sirt bo'yicha integral ikki qismga ajraladi. Birinchisi o'tkazgichlar sirti bo'yicha olinsa, ikkinchisi cheksiz uzoqlashgan sirt bo'yicha olinadi. Cheksizda

potensial va maydon nolga intilganligi uchun cheksiz uzoqlashgan sirt bo'yicha integral nolga teng bo'ladi. Nihoyat, o'tkazgich sirtida potensial o'zgarmas va elektr maydon sirtga perpendikulyar bo'lishini hisobga olsak, (10.7) ning o'rniغا quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$U_E = \frac{1}{8\pi} \sum_a \varphi_a \oint_{S_a} E_{and} dS_a. \quad (10.8)$$

Bu yerda "a" bo'yicha yig'indi barcha o'tkazgichlar bo'yicha hisoblanadi. Agar (10.2) ga muvofiq o'tkazgich zaryadi ( $e_a$ )<sub>s</sub> ≡  $e_a$  ni kiritib, energiya uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$U_E = \frac{1}{2} \sum_a e_a \varphi_a. \quad (10.9)$$

Bu ifoda tashqi maydonga kiritilgan nuqtaviy zaryadlarning energiyasi ifodasi (5.68) bilan mos tushadi.

Yuqorida ta'kidlaganimizdek o'tkazgich sirtidagi zaryad uning potensialiga bog'liq. Elektrodinamika tenglamalari chiziqli, shuning uchun bu bog'lanish ham chiziqli bo'lishi kerak. O'tkazgichlar soni  $N$  ta bo'lganda bu bog'lanishni umumiy holda quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$e_a = \sum_b C_{ab} \varphi_b. \quad (10.10)$$

Bu yerda  $C_{ab}$  uzunlik o'lchov birligiga ega bo'lib, o'tkazgichlarning shakliga va ularning bir-biriga nisbatan joylashishiga bog'liq bo'lgan o'zgarmas kattaliklardir.  $C_{aa}$  faqat  $a$  - o'tkazgichga tegishli bo'lib, bizga umumiy fizika kursidan ma'lum bo'lgan o'tkazgich elektr sig'mini (qisqacha sig'im) beradi.  $C_{ab}$  ( $a \neq b$ ) elektrostatik induksiya keofitsientlarini deb ataladi. Xususan, bitta o'tkazgich bo'lganda,  $e = C\varphi$ . Sig'imning kattaligi o'tkazgichning chiziqli o'lchamlari va uni o'rabi turgan muhit bilan aniqlanadi.

Zaryad yoki potensialning cheksiz kichik o'zgarishida energiyaning o'zgarishini aniqlaymiz. Buning uchun (10.6) ifodani variatsiyasini hisoblaymiz:

$$\delta U_E = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \delta \mathbf{E} dV. \quad (10.11)$$

Bu ifodani bir-biriga ekvivalent bo'lgan ikki yo'l bilan o'zgartirish mumkin:

1. (10.11) ga  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$  ni qo'yamiz va maydon variatsiyasi maydon kabi boshlang'ich tenglamalarni qanoatlantirishini ( $\text{div } \delta \mathbf{E} = 0$ ) e'tiborga olib quyidagini yozamiz:

$$\begin{aligned}\delta U_E &= -\frac{1}{4\pi} \int \text{grad } \varphi \delta \mathbf{E} dV = -\frac{1}{4\pi} \int \text{div}(\varphi \delta \mathbf{E}) dV = \\ &-\frac{1}{4\pi} \oint \varphi \delta \mathbf{E}_n dS = \frac{1}{4\pi} \sum_a \varphi_a \oint \delta \mathbf{E}_n dS_a.\end{aligned}\quad (10.12)$$

Bu yerda (10.2) ni inobatga olib  $\delta U_E$  uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\delta U_E = \sum_a \varphi_a \delta e_a. \quad (10.13)$$

Bu ifoda zaryadning o'zgarishi hisobiga energiyaning o'zgarishini aniqlaydi. Bu kutilgan natija bo'lib, berilgan maydonda cheksiz kichik  $\delta e_a$  zaryadni cheksizdan ko'chirib kelishda bajarilgan ishga teng.

2. Energiyaning o'zgarishi (10.11) ni boshqacha ko'rinishda ham yozish mumkin. Buning uchun (10.11) da  $\delta \mathbf{E} = -\text{grad } \delta \varphi$  deb almashtiramiz va birinchi holdagi kabi hisoblashlarni bajarib quyidagini olamiz:

$$\delta U_E = \sum_a e_a \delta \varphi_a. \quad (10.14)$$

Bu yerda energiyaning o'zgarishi o'tkazgichlar potensialining o'zgarishi bilan aniqlanadi.

(10.13) va (10.14) ifodalarga asosan energiyadan biror o'tkazgichning zaryadi bo'yicha olingan hosila, shu o'tkazgichning potensialiga teng bo'ladi, shu vaqtda potensial bo'yicha hosila o'tkazgichning zaryadini beradi, ya'ni

$$\frac{\partial U_E}{\partial e_a} = \varphi_a, \quad \frac{\partial U_E}{\partial \varphi_a} = e_a. \quad (10.15)$$

O'tkazgichlarning zaryadi va potensiali orasidagi chiziqli bog'lanish (10.10) ni inobatga olsak

$$\frac{\partial^2 U_E}{\partial \varphi_a \partial \varphi_b} = \frac{\partial e_b}{\partial \varphi_a} = C_{ba}, \quad (10.16)$$

$$\frac{\partial^2 U_E}{\partial e_a \partial e_b} = \frac{\partial \varphi_b}{\partial e_a} = C_{ba}^{-1}. \quad (10.17)$$

Bu yerda

$$C_{ab} = C_{ba}, \quad C_{ab}^{-1} = C_{ba}^{-1}, \quad C_{ab}C_{ab}^{-1} = \delta_{ab},$$

$\delta_{ab}$  Kroneker belgisi.

Yuqoridagilarga asosan o'tkazgichlarning energiyasini potensiallar-ning yoki zaryadlarning kvadratik shaklida yozamiz:

$$U_E = \frac{1}{2} \sum_{a,b} C_{ab} \varphi_a \varphi_b = \frac{1}{2} \sum_{a,b} C_{ab}^{-1} e_a e_b. \quad (10.18)$$

Bu kvadratik shakllar boshlang'ich ifoda (10.6) kabi aniq musbat bo'lishi kerak. Bu shartdan  $C_{ab}$  matritsaning diogonal elementlar uchun

$$C_{aa} > 0, \quad C_{aa}^{-1} > 0 \quad (10.19)$$

tengsizliklar o'rini bo'lishi kelib chiqadi.

Shu bilan birga nodioganal elementlar uchun

$$C_{ab} < 0, \quad a \neq b \quad (10.20)$$

shart o'rini bo'ladi. Bu holatni tushunish uchun ikkita o'tkazgichdan iborat bo'lgan sistemani ko'ramiz. Ulardan birinchisi yerga ulangan bo'lsin ( $\varphi_1 = 0$ ). U holda potensiali noldan farqli bo'lgan ikkinchi o'tkazgich birinchida induksiyalangan zaryad ( $e_1 = C_{12}\varphi_2$ ) hosil qiladi. Ma'lumki, induksiyalangan zaryadning ishorasi induksiyalovchi maydonni hosil qiluvchi zaryadning ishorasiga teskari bo'ladi. Shunday qilib, ikkita o'tkazgich misolida (10.20) shart to'g'ri ekanligini ko'rsatdik.

Yuqorida ko'rib chiqilgan holat asosida o'tkazgichlar energiyasini quyidagicha talqin qilish mumkin. Buning uchun (10.18) ni ikki qismga ajratib yozamiz:

$$U_E = \sum_a C_{aa} \varphi_a^2 + \sum_{a>b} C_{ab} \varphi_a \varphi_b \text{ yoki} \quad (10.21)$$

$$U_E = \sum_a C_{aa}^{-1} e_a^2 + \sum_{a>b} C_{ab}^{-1} e_a e_b. \quad (10.22)$$

Bu yerdag'i har ikkala ifodada birinchi hadlarni o'tkazgichlarning xususiy energiyasiga teng deb olsak, ikkinchi hadlar esa ularning o'zaro ta'sir energiyasini beradi.

### 10.3 Dielektriklarda elektrostatik maydon

Tashqi maydonga kiritilgan dielektrik ichidagi maydon (10.1) dagi rot  $\mathbf{E} = 0$  tenglamaga asosan uyurmasiz bo'ladi. Elektrostatik maydon potensiali uchun tenglamani  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$  tenglamadan hosil qilamiz:

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} \varphi) = -4\pi\rho. \quad (10.23)$$

Bir jinsli dielektrikda  $\varepsilon = \text{const}$  bo'lganligi uchun oxirgi tenglama Poisson tenglamasiga o'tadi:

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \quad (10.24)$$

Bu tenglamaning yechimi mikroskopik elektrodinamikadan ma'lum bo'lib, quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (10.25)$$

Bu ifoda dielektrikda elektr maydon potensiali va kuchlanganhgi shu zaryadlar bo'shliqda hosil qilgan maydondan  $\varepsilon$  marta kichik bo'lishini ko'rsatadi. Xususan, bitta nuqtaviy zaryad uchun

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{e}{\varepsilon R}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{e\mathbf{R}}{\varepsilon R^3}.$$

Demak, zaryadlarning o'zaro ta'sir kuchi bir jinsli dielektriklarda bo'shilqidagiga nisbatan  $\varepsilon$  marta kichik bo'lar ekan. Dielektrikga kiritilgan erkin zaryadlar uni qutblaydi. Bunda bog'langan zaryadlar erkin zaryadlar maydonini kamaytiruvchi maydonni paydo qiladi. Shu sababli zaryadlarning o'zaro ta'sirlashish kuchi kamayadi. Agar dielektrik bir jinsli bo'lmasa, masala yuqoridagi kabi oddiy yechimga ega bo'lmaydi.

Ikki dielektrik chegarasida maydon kattaliklari uchun chegaraviy shartlarni yozamiz:

$$E_{2t} - E_{1t} = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2, \quad (10.26)$$

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\omega_s \Rightarrow \varepsilon_2 \left( \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right)_2 - \varepsilon_1 \left( \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right)_1 = 4\pi\omega_s. \quad (10.27)$$

Yuqoridagi ikkita chegaraviy shartlarni umumlashtirib, quyidagi munosabatni olamiz:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Bu munosabat ikki dielektrik chegarasida maydon kuch chiziqlarining sinishini ko'rsatadi. Bu yerda  $\alpha_1$  va  $\alpha_2$  mos ravishda birinchi va ikkinchi dielektriklarda elektr maydon kuchlanganligi bilan chegaraviy sirtga o'tkazilgan normal orasidagi burchaklardir.

Dielektriklarda va o'tkazgichlarda elekrtostatik maydon masalasi umumiyl holda ko'rish bilan cheklandik. Eletrostatikaning aniq qo'yilgan masalasining har birini yechishda alohida yondashish zarur bo'ladi. Quyida ana shunday metodlarning ayrimlari bilan tanishib o'tamiz.

## 10.4 Elektrostatika masalalarini yechish metodlari

Elektrostatikada to'g'ri va teskari masalasi mavjud. Avval teskari masala bilan tanishib chiqamiz. Koordinataning funksiyasi sifatida berilgan maydon potensiali yoki kuchlanganligi orqali zaryadlarning taqsimotini aniqlash elektrostatikaning teskari masalasining mazmunini tashkil qiladi.

Birinchi qarashda bu masala oddiy va doimo yechimga ega bo'lib ko'rinishadi. Haqiqatan ham, teskari masalani yechish uchun berilgan maydon kuchlanganligidan yoki potensialdan koordinatalar bo'yicha tegishli ko'rinishdagi hosilalarni olish kifoyadir, ya'ni

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi} \Delta \varphi. \quad (10.28)$$

Ammo, bu holat potensial (maydon kuchlanganligi) koordinataning funksiyasi sifatida maxsus nuqtalarga ega (cheksiz, uzilish va boshqalar) bo'limganda to'g'ri bo'ladi. Buni quyidagi misolda ko'rib chiqamiz.

Potensial

$$\varphi = \frac{e}{r} e^{-\alpha r} \quad (10.29)$$

funksiya bilan aniqlangan bo'lsin. Bundan ko'rinish turibdiki,  $r = 0$  maxsus nuqtadir. Avval (10.28) yordamida potensialdan hosila olib

zaryadlarning taqsimotini aniqlaymiz:

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = -\frac{\alpha^2}{4\pi} \frac{e}{r} e^{-\alpha r} = -\frac{\alpha^2}{4\pi} \varphi. \quad (10.30)$$

Bu yerda potensial sferik simmetriyaga ega bo'lganligi uchun Laplas operatorini sferik koordinatalarda yozdik. Zaryad taqsimoti uchun olin-gan ifoda yordamida  $r = 0$  nuqta atrofidagi cheksiz kichik hajmda qan-day zaryad to'planganligini aniqlaylik:

$$e(r) = \int_v \rho dV = -\frac{e\alpha^2}{4\pi} \int_0^r \frac{1}{r} e^{-\alpha r} 4\pi r^2 dr = e [e^{-\alpha r} (1 + \alpha r) - 1]. \quad (10.31)$$

Bu yerda  $v = 4\pi r^3 / 3$ . (10.31) ifodada  $r \rightarrow 0$  da zaryad  $e(0) \rightarrow 0$ . Shunday qilib, maxsus nuqtada nuqtaviy zaryad yo'q bo'lib chiqdi. Bu natijani tekshirib ko'rish maqsadida maxsus nuqtada zaryadni aniqlashda elektrostatika tenglamasining integral ko'rinishidan foydalanamiz:

$$\oint E_n dS = 4\pi e(r), \quad E_n = E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = e \left( \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-\alpha r}. \quad (10.32)$$

Bu yerda integralni maxsus nuqtani o'z ichiga olgan sferik sirt bo'yicha olib quyidagini topamiz:

$$\oint E_n dS = 4\pi E_r r^2 = 4\pi e(\alpha r + 1) e^{-\alpha r} \quad (10.33)$$

(10.32) va (10.33) ifodalarni taqqoslab, sfera ichidagi zaryadni aniqlaymiz:

$$e(r) = e(\alpha r + 1) e^{-\alpha r}. \quad (10.34)$$

Endi sferik sirtni  $r = 0$  maxsus nuqtaga tortib, undagi zaryad (10.34) dan  $e(0) = e$  ekanligini aniqlaymiz. Demak, maxsus nuqtada nuqtaviy zaryad  $e$  joylashgan ekan. Bu differensial tenglamadan olingan natijaga ziddir.

Bu misol teskari masalani yechishda faqat differensial tenglama bilan cheklanish - maxsus nuqtalarda noto'g'ri natijalarga olib kelishi mumkinligini ko'rsatadi. Differensial tenglama faqat uzlusiz taqsimlangan zaryadlarni aniqlashda to'g'ri natija beradi. Ko'rيلayotgan misolda uzlusiz taqsimlangan zaryadlarning yig'indisi (10.31) ifodadan  $r$

cheksizga intiltirib topiladi. Bu holda  $e(r \rightarrow \infty) = -e$  ekanligi kelib chiqadi

Shunday qilib, masalaning yechimi qyidagicha: Maxsus nuqtada joylashgan musbat ( $+e$ ) zaryadni (10.30) qonuniyat bilan taqsimlangan manfiy zaryadlar buluti o'rabi olgan. Bulutdagagi to'liq zaryad  $-e$  ga teng. Demak, sistemaning to'liq zaryadi nolga teng bo'lib elektroneytral ekan.<sup>1</sup>

Endi elektrostatika to'g'ri masalasini yechishning maxsus metodlari bilan tanishamiz:

**1. Furye metodi.** Zaryadlar taqsimoti berilgan bo'lsa, elektrostatik maydon potensiali tegishli chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi Puasson yoki Laplas tenglamalarining yechimi bilan aniqlanadi. Bu tenglamalarni yechishning bir qator metodlari mavjud. Zaryadlarning taqsimoti simmetriyasiga qarab Puasson va Laplas tenglamalarini bevosita yechish bilan mikroskopik elektrodinamikaning elektrostatika bo'limida tanishib chiqqan edik. Hozir Puasson tenglamasini yechishning yana bir metodi - Furye metodi bilan tanishamiz.

Bu metod bilan masala yechilganda, zaryad zichligi va maydon potensiali butun fazoda integrallanuvchi funksiyalar bo'lishi kerak, ya'ni

$$\int |\rho| dV < \infty, \quad \int |\varphi| dV < \infty.$$

Bu metodning asosiy g'oyasi - potensial va zaryad zichligini Furye integraliga yoyib differentsiyal tenglamani Furye amplitudalar uchun algebraik tenglamaga keltirishdan iborat. Haqiqatan ham,

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} dk, \quad \rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \rho_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} dk. \quad (10.35)$$

Bu yerda  $\varphi_{\mathbf{k}}$  va  $\rho_{\mathbf{k}}$  Furye amplitudalar bo'lib teskari almashtirish bilan aniqlanadi:

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \int \varphi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} dr, \quad \rho_{\mathbf{k}} = \int \rho(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} dr. \quad (10.36)$$

Puasson tenglamasi (10.24) ga (10.35) ni qo'yamiz:

$$\int \varphi_{\mathbf{k}} (-k^2) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} dk = -4\pi \int \rho_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} dk. \quad (10.37)$$

---

<sup>1</sup>(10.29) formula bilan aniqlangan potensial kvant mexanikada katta ahamiyatga ega bo'lib, Yukava potensiali deb yuritiladi.

Bu tenglamaning har ikkala tomonini  $\exp(-ik'r)$  ga ko‘paytiramiz va koordinatalar bo‘yicha integrallaymiz va  $\delta(k) -$  funksiyaning integral tasavvuri (A.152) ni inobatga olib quyidagi natijani hosil qilamiz:

$$\int k^2 \varphi_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') d\mathbf{k} = 4\pi \int \rho_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') d\mathbf{k}. \quad (10.38)$$

Bu yerda integralni  $\delta$ -funksiyaning xossasiga asosan integrallab potensialning Furye amplitudasini aniqlaymiz:

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi}{k^2} \rho_{\mathbf{k}}. \quad (10.39)$$

Endi potensialni (10.35) ga binoan uning Furye amplitudasi (10.39) orqali ifodalaymiz:

$$\varphi(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{4\pi \rho_{\mathbf{k}}}{k^2} e^{ikr} dk. \quad (10.40)$$

Misol sifatida nuqtaviy zaryadning potensialini topamiz. Nuqtaviy zaryad koordinata boshida joylashgan bo‘lsa,  $\rho = e\delta(r)$ . U holda

$$\rho_{\mathbf{k}} = e \int \delta(r) e^{-ikr} dr = e, \quad \varphi(r) = \frac{4\pi e}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{k^2} e^{ikr} dk.$$

Bu yerdagi integralni sferik koordinatalar sistemasida hisoblaymiz:

$$\int \frac{1}{k^2} e^{ikr} dk = \int_0^\infty \frac{1}{k^2} k^2 dk \int_0^\pi e^{ikr \cos \theta} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\psi = \frac{2\pi^2}{r}.$$

Nihoyat, nuqtaviy zaryad potensiali uchun bizga yaxshi tanish bo‘lgan ifodani olamiz:  $\varphi = e/r$ . Elektrostatika masalalarining yechimlarini differensial tenglamalarni yechish orqali aniqlash ko‘p hollarda g‘oyat katta matematik qiyinchiliklarga olib keladi.

Bunday hollarda masalan yechishda maxsus metodlardan foydalaniadi. Masalan, differensial tenglamaning tegishli chegaraviy shartlarga bo‘ysunuvchi yechimining yagonaligi haqidagi teorema ga asoslanib, ba‘zi masalalarda tenglamalarni bevosita yechmasdan, maxsus metodlar yordamida potensialni aniqlash mumkin. Elektr tasvirlash,

inversiya, konform aks ettirish ana shunday metodlar jumlasiga kiradi. Hozir elektr tasvirlash metodi bilan tanishib chiqamiz.

**2. Elektr tasvirlash metodi.** Bu metodning asosiy g'oyasi quyidagidan iborat: Berilgan nuqtaviy zaryadlar (nuqtaviy bo'lishi shart emas) bilan bir qatorda yordamchi fiktiv zaryadlar kiritiladi. Yordamchi zaryadlarning yig'indisi asosiy zaryadlar ta'sirida induksiyalangan zaryadlar yig'indisiga teng bo'lishi kerak. Aniqlanishi lozim bo'lgan maydonni ana shu haqiqiy va fiktiv zaryadlar hosil qiladi deb qaraladi. Bu potensial differensial tenglamalarni qanoatlantirishi bilan birga chegaraviy shartlarga ham bo'ysunushi kerak. Shu ikki holat bajarilganda yechimning yagonaligi to'g'risidagi teoremaga asosan bu masalaning yechimi bo'ladi. Bu yerda o'tkazgich yoki boshqa muhitning potensialga qo'shgan xissasi yordamchi zaryadlar bilan aniqlanadi. Bu metod bilan quyidagi masalani yechish jarayonida chuqurroq tanishib chiqamiz.

*Masala 1. Cheksiz o'tkazuvchi tekislikdan a masofada bo'shilqda joylashgan e nuqtaviy zaryadning maydonini aniqlang.*

Avval masalaninq matematik qo'yilishini ko'rib chiqamiz. O'tkazuvchi tekislik  $yOz$  tekisligi bilan mos tushsin. Bu tekislikning ich tomonida ( $x < 0$ ) elektr maydon kuchlanganligi nolga teng. O'tkazgich sirtida potensialni nolga teng deb olamiz (masalan, o'tkazgich yerga ulangan). Bunda chegaraviy shartlarga ko'ra o'tkazgich ichida ham potensial nolga teng bo'ladi. Zaryad turgan nuqtaning ( $x > 0$ ) koordinatalari  $A(a, 0, 0)$  bo'lsin. Shu sohadagi potensialni aniqlovchi tenglamalarni va cheraviy shartlarnni yozamiz:

$$\Delta\varphi = -4\pi e\delta(x - a)\delta(y)\delta(z), \quad (10.41)$$

$$\varphi_1(S) = \varphi(S) = 0, \quad (10.42)$$

$$\frac{\partial\varphi(S)}{\partial x} = 4\pi\omega_s. \quad (10.43)$$

$S \equiv (0, y, z)$  chegaraviy tekislikdagi nuqtalar. (10.41)-(10.43) ko'rinishda qo'yilgan masalani umuman olganda yechish mumkin. Lekin, biz bu yerda bu masalani tasvirlash metodi bilan yechamiz.

Yuqorida bayon qilingan fikrlarga amal qilib yordamchi zaryadni, asosiy zaryadning tasvirini, yassi ko'zgidagi buyumning tasviri kabi  $x = -a$  nuqtada tanlaymiz. Uning miqdori o'tkazgich sirtida induk-

siyalangan zaryadlarning yig‘indisiga teng bo‘ladi, ya’ni<sup>2</sup>

$$e' = \int \omega_s dS = -e. \quad (10.44)$$

Integral o‘tkazgichning sirti ( $yOz$  tekisligi) bo‘yicha olinadi. Bu tenglikning to‘g‘riligini (10.43) shart bilan tekshirib ko‘rish mumkin.

Potensialni asosiy va yordamchi nuqtaviy zaryadlar hosil qiladigan maydon potensiallarining yig‘indisi ko‘rinishida yozamiz:

$$\varphi = \frac{e}{r} + \frac{e'}{r'} = \frac{e}{r} - \frac{e}{r'}. \quad (10.45)$$

Bu yerda  $r$  asosiy zaryaddan,  $r'$  esa yordamchi zaryaddan kuzatish nuqtasiga o‘tkazilgan radius-vektorlar (10.1-rasm). (10.45) ifodadagi birinchi va ikkinchi hadlar va ularning yig‘indisi ham (10.41) tenglamaning yechimi bo‘ladi. Bundan tashqari, u (10.42) va (10.43) chegaraviy shartlarni qanoatlanadirishini tekshirib ko‘rish qiyin emas (10.1-rasmga qarang). Shunday qilib, yechimning yagonaligi haqidagi teorema ga asosan (10.45) qo‘yilgan masalaning yechimi bo‘ladi.

Elektr maydon kuchlanganligi

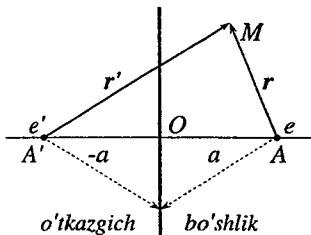
$$\mathbf{E} = \frac{e}{r^3} \mathbf{r} - \frac{e}{r'^3} \mathbf{r'}. \quad (10.46)$$

Sitrda induksiyalangan zaryadlar zichligi

$$\omega_s = -\frac{ea}{(a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (10.47)$$

*Masala 2. Radiusi  $R$  bo‘lgan o‘tkazuvchi sfera markazidan  $d > R$  masofada joylashgan nuqtaviy e zaryadning potensialini aniqlang.*

<sup>2</sup>Umuman olganda induksiyalangan zaryadlarning yig‘indisi nolga teng bo‘lishi kerak. Ammo sirtda induksiyalangan zaryadlarning ishorasi berilgan zaryadning ishorasiga teskari bo‘ladi. Induksiyalangan zaryadlarning berilgan zaryad ishorasi bilan mos keluvchi qismi masalaning qo‘yilishiga ko‘ra cheksizda yotadi. Shu sababli ular maydonga qo‘sishimcha xissa qo‘shmaydi.



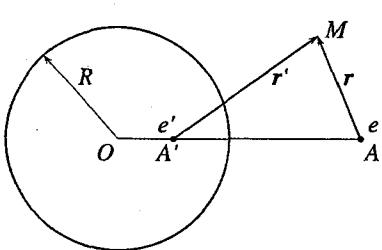
10.1-rasm:

Masalaning matematik jihatdan qo'yilishi birinchi masaladagi kabi bo'ladi. Shuning uchun uni bu yerda keltirmaymiz. Sfera yerga ulangan bo'lsin. U holda,  $e$  zaryad va sferadagi induksiyalangan zaryadlar hosil qilayotgan maydon potensiali sferada ( $r = R$ ) nolga teng bo'ladi. Masalaning yechimini

$$\varphi = e/r + e'/r' \quad (10.48)$$

ko'rinishda yozib olamiz. Bu yerda yordamchi zaryad  $e'$  ning miqdori va joylashgan nuqtasi  $A'$  ning koordinatasi chegaraviy shart - sferada potensialning nolga teng bo'lishidan aniqlanadi. Oddiy hisoblarni bajarib, quyidagilarni topamiz:  $e' = -e\sqrt{d'/d}$ ,  $dd' = R^2$ , ( $d' < R$ ). Bu yerda  $d = OA$  va  $d' = OA'$ . Asosiy zaryad joylashgan  $A$ , yordamchi zaryad joylashgan  $A'$  nuqtalar va sfera markazi  $O$  bir to'g'ri chiziqda yotadi (10.2-rasm). Yuqoridaqilarga asosan qo'yilgan masalaning yechimi quyidagi ifodalar bilan aniqlanishini topamiz:

$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{R}{d} \frac{e}{r'}, \quad \mathbf{E} = \frac{e}{r^3} \mathbf{r} - \frac{R}{d} \frac{e}{r'^3} \mathbf{r}'. \quad (10.49)$$



10.2-rasm:

**3. Inversiya metodi.** Ba'zi holarda elektrostatikaning bir masalasining yechimi yordamida boshqasining yechimini topish mumkin.

Laplas tenglamasining ma'lum bir almashtirishlarga nisbatan invariantligi bunga asos bo'ladi. Shunday almashtirishlarga inversiya (akslantirish) misol bo'ladi.

Laplas tenglamasini sferik koordinatalarda (A.117) asosan yozamiz:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta\psi} \varphi = 0.$$

Agar o'zgaruvchi  $r$  ning o'rniga yangi

$$r' = R^2/r. \quad (10.50)$$

o'zgaruvchi kiritilsa, shu vaqtda noma'lum funksiya  $\varphi(r, \theta, \psi)$  ni yangi

$$\phi(r', \theta, \psi) = \frac{R}{r'} \varphi \left( \frac{R^2}{r'}, \theta, \psi \right). \quad (10.51)$$

funksiya bilan almashtitilsa, Laplas tenglamasi invariant qoladi. Shunday qilib, agar  $\varphi$  Laplas tenglamasining yechimi bo'lsa,  $\phi$  ham uning yechim bo'ladi. Bu yerda (10.50) *inversiya almashtirishi*,  $R$  *inversiya radiusi* deyiladi.

Qandaydir zaryadlar va  $\varphi_0$  potensialga ega bo'lgan o'tkazgichlar sistemasining maydoni bizga ma'lum bo'lsin deb faraz qilamiz. Potensial  $\varphi(r)$  odatda, cheksizga nolga deb olinadi. Bu yerda potensialni shunday tanlaymizki, u cheksizda  $-\varphi_0$  bo'lsin, bu hoda o'tkazgichning potensiali nolga teng bo'ladi.

(10.50) va (10.51) almashtirish natijasida sodir bo'ladigan o'zgarishlarni isbotsiz quyida keltiriladi. Avvalo, o'lchamga ega bo'lgan barcha o'tkazgichlarning shakli va o'zaro joylashishi o'zgaradi. O'tkazgichlar sirtida potensialning o'zgarmas bo'lish sharti albatta o'z kuchini saqlab qoladi. Masalan, o'tkazgich sirtida  $\varphi = 0$  bo'lsa,  $\phi = 0$  bo'ladi. Bulardan tashqari, barcha nuqtaviy zaryadlarning joylashishi va ularning kattaligi o'zgaradi. Masalan,  $r_0$  nuqtadagi zaryad  $r'_0 = (R^2/r_0^2) r_0$  nuqtaga o'tadi va zaryad  $e' = eR/r_0$  ga almashadi.

Potensial  $\phi(r')$  ning koordinata boshida qanday bo'lishini ko'rib chiqamiz.  $r' = 0$  nuqta  $r \rightarrow \infty$  ga mos keladi. Lekin,  $r \rightarrow \infty$  da potensial  $-\varphi_0$  ga intiladi. Shuning uchun  $r' \rightarrow 0$  da funksiya

$$\phi = -\frac{R}{r'} \varphi_0$$

kqonuniyat bilan cheksizga intiladi. Bu  $r' = 0$  nuqtaga  $e_0 = R\varphi_0$  zaryad borligidan dalolat beradi. Bu natijani 221-betda ko'rilgan masala bilan taqqoslasak, natija birday ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin.

## 10.5 Dielektriklar va o'tkazgichlar tashqi elektrostatik maydonda

Dielektrik yoki zaryadlanmagan o'tkazgichlar tashqi elektrostatik maydonga kiritilganda jism ichida va uning yaqinida maydon taqsimoti umuman olganda o'zgaradi. Bu holatni bir jinsli maydon  $E_0$  uchun bir necha misollarda ko'rib chiqamiz.

1. O'qi tashqi maydon yo'nalishi bo'yucha joylashgan yetarlicha uzun ( $h \gg R$ ) dielektrik silindr uchun masalani ko'rib chiqamiz. Dielek-

trikning qutblanishi natijasida hosil bo'ladigan maydon silindr yetarlicha uzun bo'lganligi uchin juda kichik bo'ladi, ya'ni silindr ichida va atrofida maydonni buzmaydi. Silindrda uzoqda esa umuman ta'siri bo'lmaydi. Bu holatni (10.26) chegaraviy shartdan ham ko'rsa bo'ladi. Bir tomondan yuqoridagilarga asosan dielektrik ichida va tashqarisida maydon bir junsli, ikkinchi tomondan

$$E_{1t} = E_{2t}$$

shart o'rini. Shuning uchun hamma joyda maydon birday ekan, ya'ni

$$E_2 = E_1 = E_0. \quad (10.52)$$

Bu yerda  $E_0$  silindr shaklidagi dielektrik yo'q vaqtdagi maydon kuchlanganligi,  $E_1$  va  $E_2$  esa mos ravishda dielektrik kiritilgandan keyingi tashqi va ichki maydon kuchlanganliklaridir. Demak, yuqorida ko'rilgan holda dielektrik maydon taqsimotini o'zgartirmaydi.

**2.** Bir jinsli elektrostatik maydon yupqa yassi dielektrik plastinka sirtiga tik yo'nalgan bo'lsin. Bu holda (10.27) chegaraviy shartga ko'ra  $D_2 = E_0$ , yoki

$$E_2 = E_0 - 4\pi P. \quad (10.53)$$

Plastinkaning ichida maydon kuchlanganligi  $4\pi P$  ga kamayar ekan. Bu xulosa dielektrikning shakli murakkab bo'lganda ham sifat jihatdan saqlanadi.

**3.** Bir jinsli elektr maydonga kiritilgan dielektrik shar masalasini ko'rib chiqamiz. Ma'lumki, bir jinsli maydon uchun Laplas tenglamasining yechimi

$$\varphi_0 = -E_0 r. \quad (10.54)$$

Shardan yetarlicha uzoqda maydon potensiali (10.54) bilan aniqlanadi. Chunki, yetarlicha uzoq masofalarda bir jinsli maydonga sharning ta'siri sezilmaydi. Shar sirtida esa potensial (10.26)–(10.27) chegaraviy shartlarga bo'ysunishi kerak. Shardan tashqarida bu talablarni qanoatlantiruvchi potensialni

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \delta\varphi_1(r, \theta, E_0)$$

ko'rinishda qidiramiz. Bu yerda ikkinchi had sharga yaqin nuqtalarda maydonning o'zgarishini aniqlaydi. Shardan tashqarida potensialning

o'zgarishi  $r \rightarrow \infty$  da nolga intilishi va skalyar bo'lishini inobatga ol-sak,  $\mathbf{E}_0$  va  $r$  vektorlar yordamida  $\delta\varphi_1$  ni quyidagi ko'rinishda aniqlash mumkin:  $\delta\varphi_1 = \alpha \mathbf{E}_0 \mathbf{r} / r^3$ .

$$\varphi_1 = -\mathbf{E}_0 \mathbf{r} + \alpha \frac{\mathbf{E}_0 \mathbf{r}}{r^3}. \quad (10.55)$$

Shar ichida maydon chekli bo'lishini inobatga olib maydon potensialini quyidagi ko'rinishda qidiramiz:

$$\varphi_2 = \beta \mathbf{E}_0 \mathbf{r}. \quad (10.56)$$

Bu yerda  $\alpha$ ,  $\beta$  noma'lum o'zgarmas kattaliklar bo'lib, shar sirtida potensial uchun yozilgan (10.26) va (10.27) chegaraviy shartlardan topamiz ( $\omega_s = 0$ ):

$$\alpha = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} R^3, \quad (10.57)$$

$$\beta = -\frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad (10.58)$$

Nihoyat potensial uchun quyidagi ifodlarni olamiz:

$$\varphi_1 = -\mathbf{E}_0 \mathbf{r} + \frac{(dr)}{r^3}, \quad r > R : \quad (10.59)$$

$$\varphi_2 = -\mathbf{E}_0 \mathbf{r} + \frac{(dr)}{R^3}. \quad r < R : \quad (10.60)$$

Bu yerda

$$\mathbf{d} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} R^3 \mathbf{E}_0 \quad \text{yoki} \quad \mathbf{d} = \left( \frac{4\pi}{3} R^3 \right) \mathbf{P}, \quad (10.61)$$

$\mathbf{P}$  qutblanish vektori,  $\mathbf{d}$  qutblanish natijasida sharning olgan dipol momenti,  $\varepsilon_2$  va  $\varepsilon_1$  mos ravishda shar va uni o'rab turgan muhitning dilektrik singdiruvchaliklari.

Endi  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$  formula bo'yicha tashqi va ichki maydon kuchlanganligini hisoblaymiz:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 + \frac{3r(dr) - r^2 d}{r^5}, \quad (10.62)$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_0 - \frac{4\pi}{3} \mathbf{P}. \quad (10.63)$$

Shunday qilib, (10.62) va (10.63) ifodalardan quyidagi xulosalar chiqadi:

a) bir jinsli tashqi maydonda shar qutblanib, qo'shimcha maydon hosil qiladi. Bu maydon shar markaziga joylashtirilgan dipolning maydoni bilan mos tushadi;

b) shar ichida maydon o'zgarmas va  $E_0$  ga nisbatan  $3\varepsilon_1/(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$  marta kamayadi.

4. Bir jinsli elektr maydonga kiritilgan zaryadlanmagan o'tkazuvchi shar masalasini ko'rib chiqamiz. Shar ichida maydon nol bo'lganligi uchun potensial o'zgarmas bo'lishi kerak. Uni nolga teng deb olamiz:

$$\varphi_2 = 0. \quad (10.64)$$

Shardan tashqaridagi potensialni topish uchun oldingi banddag'i kabi yo'l tutub aniqlash mumkin. Buning uchun (10.57)–(10.58) ifodalarda  $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$  deb olish yetarli bo'ladi. Bu holda

$$\alpha = R^3, \quad \beta = 0.$$

Bularni (10.59) va (10.62) ifodalarga qo'yib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\varphi_1 = -E_0 r + \frac{(dr)}{r^3}, \quad (10.65)$$

$$E_1 = E_0 + \frac{3r(dr) - r^2 d}{r^5}. \quad (10.66)$$

Bu yerda  $d = R^3 E_0$ . Shar sirtida induksiyalangan zaryadlar zichligi

$$\omega_S = -\frac{\varepsilon_1}{4\pi} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right)_{r=R} = \frac{3\varepsilon_1}{4\pi} E_0 \cos \theta.$$

$\theta$  maydon kuchlanganligi  $E_1$  va  $r$  orasidagi burchak. To'liq zaryad nolga tengligicha qoladi.

## 10.6 10-bobga oid masalalar va savollar

1. Potensiali

$$\varphi = \begin{cases} -ax/\varepsilon_1 & \text{agar } x > 0, \\ +ax/\varepsilon_2 & \text{agar } x < 0. \end{cases}$$

funksiya bilan aniqlangan maydonni hosil qiluvchi zaryadlar taqsimotini aniqlang.

2. Potensiali

$$\varphi = \begin{cases} e/r & \text{agar } r > R, \\ e/R & \text{agar } r < R. \end{cases}$$

funksiya bilan aniqlangan maydonni hosil qiluvchi zaryadlar taqsimotini aniqlang.

3. Chiziqli zichlik  $\chi$  bilan tekis zaryadlangan cheksiz izun ip dielektrik singdiruvchanligi  $\varepsilon_1$  bo'lgan xuddi shunday uzun  $R$  radusli silindr bilan o'rалган, bu silindr o'z navbatida dielektrik singdiruvchanligi  $\varepsilon_2$  bo'lgan cheksiz muhit bilan o'rалган. Zaryadlangan ipning maydonini va ikki dielektrik chegarasidagi zaryadlarning sirtiy zichligini aniqlang.
4. Chiziqli zichlik  $\chi$  bilan tekis zaryadlangan  $R$  radiusli cheksiz uzun o'tkazuvchi silindrning dielektrik singdiruvchanligi  $\varepsilon(r)$  bo'lgan muhitda hosil qilayotgan maydon kuchlanganligini aniqlang.  $r$  silindr o'qidan hisoblangan masofa.
5. Qoplamlari orasidagi soha dielektrik singdiruvchanligi  $\varepsilon = \varepsilon(x)$  bo'lgan muhit bilan to'ldirilgan yassi kondensatorning maydonini aniqlang. Kondensator qoplamlari  $\pm\sigma$  sirtiy zichlik bilab zaryadlangan.  $x$  o'qining musbat yo'nalishi musbat zaryadlangan qoplamadan manfiy zaryadlangan qoplamaga qarab yo'naltirilgan deb qarang. Chegaraviy effektlarni hisobga olmang.
6. Radiusi  $R$  bo'lgan o'tkazuvchi sharning zaryadi  $e$ . Sharni dielektrik singdiruvchanligi  $\varepsilon = \varepsilon(r)$  bo'lgan muhit o'rab turibdi. Maydon kuchlanganligini aniqlang.  $r$  shar markazidan hisoblangan masofa.
7. Bir jinsli dielektrik sharning hajmi bo'yicha  $e$  zaryad  $\rho$  zichlik bilan bir tekis tasimlangan. Sharning dielektrik singdiruvchanligi  $\varepsilon_1$ , uni o'rab turgan muhitniki  $\varepsilon = \varepsilon(r)$ .  $r$  shar markazidan hisoblangan masofa. Maydon kuchlanganligini aniqlang.
8. 7-masaladagi zaryadlangan sharning ichida va sirtidagi bog'langan zaryadlar zichligini aniqlang.
9. Fazoning yarmi dielektrik singdiruvchanligi  $\varepsilon_1$ , ikkiinchi yarmi esa  $\varepsilon_2$  dielektrik singdiruvchanligi bo'lgan muhit bilan to'ldirilgan. Markazi chegaraviy tekislikda joylashgan  $R$  radiusli zaryadlangan o'tkazuvchi sharning potensialini va sig'imini aniqlang.

10. Dielektrik singdiruvchanligi  $\varepsilon$  bo'lgan muhitdagi  $R$  radiusli o'kazuvchi sharning energiyasini hisoblang. Sharning zaryadi  $e$ .
11. Dielektrik singdiruvchanligi  $\varepsilon$ , radiusi  $R$  va zaryadi  $e$  bo'lgan bo'shliqda joylashgan sharning energiyasini hisoblang.
12. Cheksiz o'tkazuvchi tekislik va undan  $a$  masofada turgan dipol qanday kuch bilan ta'sirlashadi. Dupol momenti  $d$  tekislikka parallel.
13. Nuqtaviy zaryad  $e$  bir - biriga perpendikulyar bo'lgan ikkita yerga ulangan o'tkazuvchi yarim tekisliklarning har biridan  $a$  masofada joylashgan. Shu zaryad hosil qilayotgan maydonni aniqlang.
14. 13-masala uchun o'tkazgichlar sirtida induksiyalangan zaryadlar zichligini hisoblang.
15. Butun fazo dielektrik singdiruvchanliklari  $\varepsilon_1$  va  $\varepsilon_2$  bo'lgan muhit bilan to'ladirilgan. Chegara sirti tekislikdan iborat. Birinchi muhitda chegaraviy tekislikdan  $a$  masofada turgan nuqtaviy zaryad  $e$  ning maydon potensialini birinchi va ikkinchi muhitda aniqlang.
16. Dielektrik singdiruvchalik tenzori berilgan anizotrop muhitda nuqtaviy  $e$  zaryadning maydon potensialini aniqlang.
17. Radiusi  $R$  bo'lgan o'tkazuvchi sfera markazidan  $d$  ( $d > R$ ) masofada joylashgan nuqtaviy  $e$  zaryadning potensialini aniqlang.
18. Qanday maydom elektrostatik maydon deyiladi?
19. Elektrostatikaning to'g'ri va teskari masalalari bir-biridan qanday farqlanadi?
20. O'tkazgichlarda elektr maydon qanday xususiyatlarga ega?
21. Ekvipotensial sirtga ta'rif bering.
22. Elektrostatik induksiya koefitsientlari qanday aniqlanadi?
23. Elektr sig'imga ta'rif bering.
24. O'tkazgichlar energiyasini elektrostatik induksiya koefitsientlari orqali yozing.
25. O'tkazgichlar energiyasining variatsiyasidan qanday xulosalar chiqarish mumkin?
26. O'tkazgich - dielektrik chegarasida potensiallar uchun chegaraviy shartlarni yozing.
27. Dielektriklarda elektr maydon qanday xususiyatlarga ega?
28. Ikki dielektrik chegarasida maydon potensiali uchun chegaraviy shartlarni yozing.
29. Elektrostatika masalalarini yechishning qanday metodlarini bilasiz?
30. Tasvirlash metodining g'oyasini tushuntiring.

# 11-bob

## O‘zgarmas magnit maydon

### 11.1 Om qonuni

Ko‘p qirrali elektromagnit hodisalari ichidan  $\partial\{\dots\}/\partial t = 0$ ,  $j \neq 0$  shartlar bilan chegaralangan *magnitostatika* hodisalarini ajratib olamiz. Bu hol uchun Maksvell va bog‘lanish tenglamalari quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (11.1)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (11.2)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad (11.3)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = 4\pi\rho. \quad (11.4)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}. \quad (11.5)$$

Bular magnitostatikaning asosiy tenglamalarini beradi. Tok zichligi  $\mathbf{j} = \mathbf{j}(r)$  aniq bo‘lganda bu tenglamalarning birinchi jufti  $\mathbf{B}$  ni aniqlash uchun yetarlidir. Ammo tok zichligi magnitostatika tenglamalarining ikkinchi juftida (bog‘lanish tenglamalari hisobiga) ham ishtirot etadi. Shu sababli savol tug‘iladi, (11.1)–(11.4) tenglamalar unga kirgan kattaliklarni fazoning hamma nuqtalarida, ya’ni o’tkazgich ichida va tashqarisida aniqlash imkoniyatini beradimi? Bu savolga javob olish uchun bir necha misolni ko‘rib chiqamiz:

#### 1. Energiyaning saqlanish qonunini

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -Q - \frac{4\pi}{c} \oint [\mathbf{E}\mathbf{H}] dS$$

magnitostatika uchun ko‘rib chiqamiz. Berk sistema uchun chegarada maydon nolga teng bo‘lganligi uchun energiya oqimi bo‘lmaydi, ya’ni

$$\oint [\mathbf{E}\mathbf{H}] dS = 0.$$

Bundan tashqari, vaqt bo'yicha hosilalar nolga teng. Bularni hisobga olsak, energiyaning saqlanish qonuni quyidagi ko'inishga o'tadi:

$$Q = \int j E dV = \int \frac{j^2}{\gamma} dV = 0.$$

Boshqa tomondan bu ifoda  $j \neq 0$  bo'lganligi uchun nolga teng bo'la olmaydi. Shunday qilib, maydonning statsionarlik  $\partial\{\dots\}/\partial t = 0$  va vaqt bo'yicha o'zgarmas tokning mavjudlik shartlari bir-biriga zid bo'lib, magnitostatikaning boshlang'ich asoslari yetarli emasligini ko'rsatadi. Bunday qarama-qarshilikning yuzaga kelishiga sabab shundaki, energiya balansida o'tkazgichlarda issiqlik ajralib chiqishi natijasida energiyaning kamayishi hisobga olinishi kerak. Ammo boshlang'ich tenglamalarda tokni o'zgarmas ushlab turuvchi manba yo'q bo'lganligi sababli energiy balansi noto'g'ri natijaga olib keldi. Bu holatni bartaraf qilish uchun boshlang'ich tenglamalarda tokni statsionar ushlab turuvchi tok manbalari bilan to'ldirish kerak bo'ladi.

2. Manba bor bo'lgan berk zanjirning turli nuqtalarida tok va elektr maydonning yo'nalishlarini ko'rib chiqamiz. Tashqi zanjirda tok va maydonning yo'nalishlari mos tushadi, ya'ni

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}. \quad (11.6)$$

Manba elektrodlari orasida elektr maydon musbat elektroddan manfiyga qarab yo'nalgan. Shu vaqtda zanjir berk ekanligini

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (11.7)$$

inobatga olsak, tok teskari tomonga qarab yo'nalganligini ko'ramiz. Bu (11.6) tenglama bilan aniqlangan yo'nalishga ziddir. Zanjirning manba qismida bunday ziddiyatning paydo bo'lishiga birinchi misoldagi kabi boshlang'ich tenglamalarda manba hisobga olinmaganaligidadir.

3. Bu holatni Maksvell tenglamalaridan ham ko'rish mumkin. (11.7) ga asosan, statsionar tok chiziqlari yopiq chiziqlardir, ya'ni maydon ta'sirida o'tkazgichdagi zaryad yopiq chiziqlar bo'ylab harakatlanadi. Bunday harakatni hosil qilish uchun maydon ish bajarishi lozim. Yopiq zanjirda elektr maydonning zaryadlar ustida bajargan ishi (11.3) ning integral ko'inishiga muvofiq,

$$\oint \mathbf{F} dl = e \oint \mathbf{E} dl = 0.$$

Ya'ni maydon potensial xarakterga ega bo'lganligi uchun uning yopiq zanjirda bajargan ishi nolga teng, demak, y tok hosil qilaolmaydi. Shuning uchun tok paydo qilishda potensial xarakterga ega bo'lmasagan, qandaydir chet kuchlar bilan bog'langan maydon ham ishtirok etishi kerak.

Yuqorida ko'rib chiqilgan misollarga asosan (11.6) munosabatda tokni o'zgarmas ushlab turuvchi manbani hisobga olib o'zgartirish kerakligi kelib chiqadi.

Buning uchun zaryadga elektr maydon  $E(r)$  dan tashqari boshqa cha tabiatga ega bo'lgan chet kuchlar maydoni  $E^{ch}(r)$  ta'sir qiladi deb hisoblaymiz. Bunga asosan (11.6) munosabatni quyidagi ko'rinishda yozish kerak:

$$j = \gamma(E + E^{ch}). \quad (11.8)$$

Bunga umumlashgan Om qonunining differensial ko'rinishi deyiladi.

Om qonunini bunday ko'rinishda umumlashtirish chet kuchlar tabiatining fizik xossasiga aniqlik kiritishni talab qilmaydi. U kimyoviy, termoelektr va boshqa tabiatga ega bo'lgan tok manbalari bo'lishi kerak. Shunday qilib, izotrop muhit ilgari ko'rganimizdek, uchta fizik kattalik bilan emas,  $\varepsilon = \varepsilon(r)$ ,  $\mu = \mu(r)$ ,  $\gamma = \gamma(r)$ ,  $E^{ch} = E^{ch}(r)$  kattaliklar bilan xarakterlanishini aniqladik. Om qonunining umumlashgan ko'rinishda yozilishi yuqoridagi misollarda paydo bolgan ziddiyatlarni bartaraf qiladi. Masalan, energianing saqlanish qonuni endi quyidagicha yoziladi:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = - \int \frac{j^2}{\gamma} dV + \int jE^{ch} dV - \frac{4\pi}{c} \oint [EH] dS.$$

Bu yerda (11.8) ga ko'ra  $E = j/\gamma - E^{ch}$  ekanligini hisobga oldik. Saqlanish qonunining chap tomoni va o'ng tomonidagi uchinchchi had ko'rileyotgan statsionar hol uchun nolga teng. Natijada, quyidagini hisol qilamiz:

$$Q = - \int \frac{j^2}{\gamma} dV + \int jE^{ch} dV = 0,$$

$$\text{yoki } \int \frac{j^2}{\gamma} dV = \int jE^{ch} dV.$$

Shunday qilib, o'tkazgichda ajralib chiqadigan issiqlik hisobiga energianing kamayishi chet kuchlar tomonidan kompensatsiyalanib turadi.

## 11.2 O'zgarmas tokli chiziqli o'tkazgichlar

Yuqorida olingen natijalarni tokli chiziqli o'tkazgizlarga tatbiq qilamiz. Bu hol ikki sababdan muhim. Birinchidan, masala oxirigacha yechiladi, ikkinchidan radio elektronikada keng tatbiq qilinadi. Muayyan sharoitda ko'ndalang kesimining chiziqli o'lchamlari uzunligiga nisbatan juda kichik bo'lgan o'tkazgichlar chiqli deyiladi. Chiziqli o'tkazgichlar odatda, sim deb ataladi.

Chiziqli o'tkazgichlarda tok zichligi uchun chegaraviy shartni ko'rib chiqamiz. Statsionar maydonlar uchun uzlusizlik tenglamasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \oint \mathbf{j} d\mathbf{S} = 0. \quad (11.9)$$

Bu tenglamalardan tok zichligining normal tashkil etuvchisi uchun ikki o'tkazgich chegarasida  $j_{1n} = j_{2n}$ , dielektrik va o'tkazgich chegarasida  $j_n = 0$  shartni qanoatlantirishi kelib chiqadi.

Bu shartga asosan chiziqli o'tkazgichlarda tok zichligi vektorini katta aniqlikda o'tkazgich elementi  $dl$  ga parallel deb olish mumkin. Demak, o'tkazgichning uzunligi bo'ylab har bir nuqtada  $jdl = jdl$  deb yozish mumkin.

O'tkazgich ko'ndalang kesimidan o'tuvchi to'liq tokni aniqlaymiz. Tokning aniqlanishiga ko'ra

$$I = \int \mathbf{j} d\mathbf{S} = \int \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{ch}) d\mathbf{S}. \quad (11.10)$$

Bu yerda integral chiziqli o'tkazgichning ko'dalang kesimi bo'yicha olinadi.

Uzlusizlik tenglamasining integral ko'rinishi (11.9) dan ko'riniib turibdiki, o'tkazgichning turli nuqtalarining ko'ndalang kesimidan bir xil tok oqadi, ya'ni

$$I = \int \mathbf{j} d\mathbf{S} = jS = \text{const}. \quad (11.11)$$

Bu yerda  $S$  tayin nuqtadagi o'tkazgichning ko'ndalang kesimi. Umuman olganda  $S$  o'tkazgichning uzunligi bo'yicha turli nuqtalarda turliha bo'lishi mumkin. Demak, shunga mos ravishda tok zichligining kattaligi ham o'zgaradi.

Umumlashgan Om qonuni (11.8) ni chiziqli o'tkazgichning "1" va "2" nuqtalari oralig'ida integrallaymiz:

$$\int_1^2 \frac{\mathbf{j}}{\gamma} dl = \int_1^2 \mathbf{E} dl + \int_1^2 \mathbf{E}^{ch} dl. \quad (11.12)$$

Chap tomondagi integralni ko'rib chiqamiz:

$$\int_1^2 \frac{\mathbf{j}}{\gamma} dl = \int_1^2 j S \frac{dl}{\gamma S} = I \int_1^2 \frac{dl}{\gamma S} = IR_{12}. \quad (11.13)$$

Bu yerda  $R_{12}$  o'tkazgichning "1" va "2" nuqtalari bilan chegaralangan qismining omik qarshiligi. O'ng tomonidagi birinchi integralni  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$  bog'lanishdan foydalanib "1" va "2" orasidagi potensiallar farqiga teng ekanligini ko'ramiz:

$$\int_1^2 \mathbf{E} dl = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (11.14)$$

Ikkinci integral esa "1" va "2" nuqtalar orasidagi chet kuchlar manbayi bo'lib, elektr yurutuvchi kuch (EYuK) ga teng:

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \mathbf{E}^{ch} dl. \quad (11.15)$$

Oxirgi uchta tenglamani birlashtirib, Om qonunining integral ko'rinishini olamiz:

$$IR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12} \quad (11.16)$$

Zanjirning ko'rيلayotgan qismida chet kuchlar bo'lmasa, (11.16) ma'lum bo'lган oddiy Om qonuniga o'tadi

Agar kontur berk zanjirdan iborat bo'lsa, ya'ni "1" va "2" nuqtalar ustma-ust tushsa (11.16) berk zanjir uchun Om qonuniga o'tadi, ya'ni  $IR = \mathcal{E}$ . Bu yerda  $R$  chiziqli berk zanjirning to'liq qarshiligi,  $\mathcal{E}$  zanjirdagi barcha chet kuchlarning elektr yurutuvchi kuchlarining yig'indisidir.

### 11.3 O'tkazgichlarda o'zgarmas tok

O'tkazuvchi muhitga kiritilgan yaxshi o'tkazgichlarda (masalan, metallar) o'zgarmas tok masalasi skalyar potensial kiritish orgali o'rghanish mumkin. Bunga ishonch hosil qilish uchun chet kuchlar yo'q deb faraz qilamiz va elektr maydonni aniqlovchi tenglamalarni yozamiz:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (11.17)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \operatorname{div} \gamma \mathbf{E} = 0. \quad (11.18)$$

Bu yerda muhitni yaxshi o'tkazgich shu bilan birga bir jinsli deb olsak ( $\gamma = \text{const}$ ), (11.18) tenglama  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$  ko'rinishga o'tadi.

Elektrostatikadagi kabi maydon potensialini kiritib ( $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ ), (11.17) dan quyidagi tenglamani olamiz:

$$\Delta \varphi = 0. \quad (11.19)$$

Bu bizga ma'lum bo'lgan Puasson tenglamasidir. O'tkazgichlar sirdida chegaraviy shartlar bajarilishi kerak. Elektr maydonning tangensial tashkil etuvchisi chegarada uzlusiz bo'lganligi uchun  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Chegarada  $j_n = \gamma E_n$  ni hisobga olib, maydonning normal tashkil etuvchisi uchun quyidagi shartni yozamiz:

$$\gamma_1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_1 = \gamma_2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_2. \quad (11.20)$$

O'tkazuvchi muhitda tokning taqsimotini aniqlovchi potensial uchun tenglama va chegaraviy shartlar dielektriklardagi elektr maydonning taqsimoti aniqlovchi mos ifodalar bilan birday ekan. Farqi shundaki, bu yerda dielektrik singdiruvchanlikning o'rniida o'tkazuvchanlik koefitsienti turibdi. Shuning uchun o'tkazuvchi muhitda potensial elektrostatika formulalarida  $\epsilon$  ni  $\gamma$  ga almashtirish bilan aniqlanadi. Agar o'tkazgich dielektrik bilan chegaradosh bo'lsa, potensialni bu yo'l bilan aniqlab bo'lmaydi, chunki dielektrik uchun o'tkazuvchanlik nolga teng. Bu holda  $j_n = 0$  bo'lganligi uchun yuqoridagi mulohazalar o'z ma'nosini yo'qotadi.

Misol sifatida o'tkazuvchi cheksiz muhitga tushirlgan ikkita elektrotdni ko'rib chiqamiz. (11.20) ifodaga asosan elektrotdan oqayotgan

tokni quyidagicha yozish mumkin:

$$I = \oint j dS = \oint j_n dS = \gamma \oint \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_S dS.$$

Bu ifodani (10.5) bilan taqqoslab quyidagini yozamiz:

$$I = \frac{4\pi\gamma}{\varepsilon_1} \oint \frac{\varepsilon_1}{4\pi} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_S dS = \frac{4\pi\gamma}{\varepsilon_1} C \varphi_1.$$

Ikkinci tomondan to'liq qarshilik ta'rifini eslasak, o'tkazgich sig'imi va qarshiligi orasida bog'lanish borligini aniqlaymiz:

$$R = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{I} = \frac{\varphi_1}{I} = \frac{\varepsilon_1}{4\pi\gamma} \frac{1}{C}.$$

Shunga o'xshash yo'l bilan radiuslari  $a$  va  $b$  bo'lgan sferik elektrod-larning qarshiligi topamiz:

$$R \approx (1/a + 1/b) / 4\pi\gamma.$$

Shunday qilib, o'zgarmas tokning fazodagi taqsimoti masalasi hudi-di shunday elektrostatika masalasini yechishga keltirildi.

## 11.4 Statsionar tokning magnit maydoni

Statsionar toklarning magnit maydon kuchlanganligini aniqlash uchun (11.1) va (11.2) tenglamalarni yechish kerak. Bu tenglamalarni yechish uchun mikroskopik elektrodinamikadagi kabi ( $\S 6$  ga qarang) vektor potensial kiritamiz:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (11.21)$$

Bunday aniqlangan magnit induksiya vektorini (11.2) tenglamani aynan qanoatlaniadi. Vektor potensial uchun

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad (11.22)$$

ko'rinishdagi kalibrovka o'rini deb qabul qilamiz. (11.21) ni (11.1) ga qo'yib, potensial uchun quyidagi tenglamani olamiz:

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{j}. \quad (11.23)$$

Agar ikki va undan ortiq jismlar bilan bog'liq masala ko'rيلayotgan bo'lsa, (11.23) ko'rinishidagi tenglama har bir jism uchun yoziladi. Bu tenglamalar qaysi jism uchun yozilgan bo'lsa, magnit singdiruvchanlik  $\mu$  o'sha jismga tegishli bo'ladi. Chegaralarda (9.58) va (9.68) shartlar bajarilishi kerak. Bundan tashqari, cheksizda  $B$  nolga intilishi kerak.

Tenglama (11.23) ning yechimini umumiy holda yozish mumkin, lekin bunday formula biror muhim ma'lumot bermaydi. Shuning uchun bir qator xususiy hollarni ko'rib chiqamiz.

Ko'rيلayotgan o'tkazgichlar va muhit magnit xususiyatiga ega bo'lmasin, ya'ni  $\mu = 1$ . Bu holda (11.23) hamma niqtalar (o'tkazgich va muhit) uchun bir xil ko'rinishda yoziladi. Bu holda (11.23) tenglamaning yechimi II qismdan ma'lum bo'lib, quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$A(r) = \frac{1}{c} \int \frac{j(r') dV'}{|r - r'|}. \quad (11.24)$$

Bu yerda mikroskopik elektrodinamikadagi belgilashlar saqlab qolindi. Bu ifodaga rot operatori bilan ta'sir qilish yo'li bilan magnit maydon aniqlanadi. Bunda rot operatori  $r$  o'zgaruvchiga ta'sir qilishini va tok zichligi bu o'zgaruvchiga bog'liq emasligini hisobga olib quyidagini hosil qilamiz:

$$B = H = \frac{1}{c} \int \frac{[jR] dV'}{R^3}, \quad R = r - r'. \quad (11.25)$$

Chiziqli o'tkazgichlardan oqayotgan tokning magnit maydonini aniqlash amaliy jihat muhimdir. O'tkazgichlarning ko'ndalang kesimining yuzasi juda kichik bo'lganligi uchun uning ichidagi maydonni ko'rmasa ham bo'ladi. Snuning uchun, maydonni faqat o'tkazgichlarni o'rab turgan muhitda aniqlash kifoya qiladi. Bu holda (11.24) va (11.25) ifodalar sodda ko'rinishga o'tadi:

$$A = \frac{I}{c} \oint \frac{dl}{R}, \quad H = \frac{I}{c} \oint \frac{[dlR]}{R^3}. \quad (11.26)$$

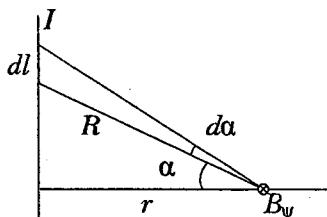
Bu formulalardan ikkinchisi chiziqli o'tkazgichni o'rab turgan bir jinsli izotrop muhitda magnit maydon kuchlanganligini aniqlaydi. Bunga Bio va Savar qonuni deyiladi. Ba'zan

$$dH = \frac{I}{c} \frac{[dlR]}{R^3} \quad (11.27)$$

Bio va Savar qonunining differensial ko'rinishi deb yuritiladi. Bu ifoda  $I$  tok oqayotgan chiziqli o'tkazgichning  $dl$  elementi  $R$  masofada hosil qilgan magnit maydon kuchlanganligini aniqlaydi. Shuni ta'kidlash lozimki, natijani o'zgarmas saqlagan holda (11.27) ifodaga yopiq kontur bo'yicha integrali nolga teng bo'lgan ixtiyoriy vektor funksiyani qo'shish mumkin.

Yoqorida olingan ifodalardan foydalanib, sodda shaklga ega bo'lgan tokli o'tkazgichlarning magnit maydon kuchlanganligini hisoblaymiz:

**1.** Cheksiz uzun to'g'ri chiziqli tokning magnit maydonini aniqlaymiz. Simmetriya nuqtai nazaridan bunday tokning magnit maydoni markazi tokli o'tkazgicha joylashgan konsentrik aylana nuqtalariga o'tkazilgan urinma bo'ylab yo'nalgan bo'ladi (11.1-rasm), ya'ni sferik koordinatalarda faqat  $B_\psi$  noldan farqli bo'ladi. O'tkazgich  $dl$  elementidan kuzatish nuqtasiga o'tkazilgan radius-vektor va shu nuqtadan o'tkazgichga tushirilgan normal orasidagi burchak  $\alpha$  bo'lsin. U holda (11.26) quyidagi ko'rinishga o'tadi:



11.1-rasm:

$$B_\psi = \frac{\mu I}{c} \int \frac{[dlR]_\psi}{R^3} = \frac{\mu I}{cr} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{2\mu I}{cr}, \quad B = \frac{2\mu I}{c} \frac{[rn]}{r}. \quad (11.28)$$

Bu yerda  $R = r / \cos \alpha$ ,  $dl = r d\alpha / \cos^2 \alpha$  va

$$[dlR]_\psi = dlR \sin(\pi/2 - \alpha)$$

ekanligi hisobga olindi.  $n$  tok yo'nalishidagi birlik vektor.

**2.** Endi  $a$  radiusli aylana bo'ylab oqayotgan tokning magnit maydonini aylana o'qining ( $z$  o'qi) ixtiyoriy nuqtasida aniqlaymiz. Simmetriya nuqtai nazaridan maydon shu o'q bo'ylab yo'nalgan bo'ladi, ya'ni

$$B_z = \frac{2\mu I}{c} \frac{\pi a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (11.29)$$

## 11.5 11-bobga oid masalalar va savollar

1. Bir biridan  $a$  masofada joylashgan ikkita cheksiz uzun parallel chiziqli o'tkazgichdan qarama-qarshi yo'nalishda  $I$  tok oqmoqda. Toklar siste maning vektor potensialini hisoblang.
2. Silindrik o'tkazgichning ichidagi va tashqarisidagi magnit maydon kuch langanligini toping, bunda tok silindrning ko'ndalang kesimi bo'yab tekis taqsimlangan, o'tkazgichning radiusi  $R$ , tok zichligi  $j$ .
3. O'tkazuvchanligi  $\gamma_1$  va  $\gamma_2$  bo'lgan ikkita o'tkazuvchi sirt chegarasidagi to'g'ri tok chiziqlarining sinish qonunini toping.
4. Tok  $j$  zichlik bilan tekis taqsimlangan silindrik o'tkazgich ichida silindrik bo'shliq mavjud. Ularning o'qlari parallel va bir-biridan  $a$  masofada joylashgan. Silindrik bo'shliq ichidagi magnit maydon kuchlanganligini toping.
5. Sirt zichligi  $i$  bo'lgan bir jinsli tok o'tayotgan tekislikning magnit maydonini toping.
6. Magnit singdiruvchanliklari  $\mu_1$  va  $\mu_2$  bo'lgan ikki muhit chegarasida tokli kontur joylashgan. Vakuumda bu kontur hosil qilgan magnit maydon ma'lum deb hisoblab, butun fazoda  $H$  magnit maydon kuchlanganligini toping.
7. Magnit singdiruvchanliklari  $\mu_1$  va  $\mu_2$  bo'lgan ikkita muhit chegarasi tekislikdan iborat. Birinchi muhitda chegara tekislikka parallel holda  $a$  masofa joylashgan  $I$  tokli yassi kontur  $L$  bor. Tok hosil qilayotgan magnit maydonni aniqlang.
8. Qanday holda maydon magnitostatik deyiladi?
9. Magnitostatika tenglamalarini yozing va izohlang.
10. Om qonuning differensial ko'rinishini yozing.
11. Umumlashgan Om qonuni qanday ta'riflanadi?
12. Maydon energiyasining saqlanish qonumi qanday xulosalarga olib keladi?
13. Chiziqli o'tkazgich uchun tok tenglamasini yozing.
14. Ikki o'tkazgich chegarasida skalyar potensial uchun chegaraviy shart bilan toklar orasida qanday bog'lanish bor?
15. O'zgarmas tokning magnit induksiya vektori qanday yoziladi?

## 12-bob

### Kvazistatsionar maydonlar

#### 12.1 Kvazistatsionarlik shartlari

Shu vaqtgacha statik va statsionar maydonlarni ko'rib chiqdik. Umuman olganda moddiy muhitlarda o'zgaruvchi maydonlarning tabiat muhitning xossalariiga va maydonning o'zgarish chastotasiga bog'liq bo'ladi. Bunday o'zgaruvchi maydonlarni o'rganishga o'tishdan oldin elektromagnit hodisalarining ichida alohida o'rinn tutgan va tajribalarda muhim ahamiyat kasb etgan - kvasistatsionar maydonlarni ko'rib chiqamiz. Bu maydonlar uchun ba'zi kattaliklar uchun  $\partial\{\dots\}/\partial t = 0$  bo'lsa, boshqalari uchun nolga teng bo'lmaydi. Quyida biz qanday hollarda maydonni kvazistatsionar deyish mumkin degan savolga javob beramiz.

1. Tashqi elektromagnit maydonga joylashtirilgan massiv (o'lchamlari yetarlicha katta) o'tkazgichni ko'ramiz. Elektromagnit maydonning o'zgarishini ifodalovchi xarakterli uzunlik (davriy maydonlarda to'lqin uzunligi)  $\lambda \sim c/\omega$  jismning chiziqli o'lchamlari (jismning ixtiyoriy ikki nuqtasi orasidagi eng katta masofa)  $L$  dan juda katta bo'lsin, ya'ni

$$\lambda \gg L \quad \text{yoki} \quad \omega \ll c/L \tag{12.1}$$

Bu shart bajarilganda ko'rileyotgan sohaning biror nuqtasidagi maydonning o'zgarishi shu onning o'zidayoq boshqa nuqtalarga deyarli tarqalib ulgiradi. Bu shartni boshqacha ko'rinishda ham yozish mumkin. Maydonning o'zgarishini ifodalovchi xarakterli vaqt (davr)  $T \sim 1/\omega \gg \tau$ . Bu yerda  $\tau$  maydonning kechikish vaqt. Shunday qilib, yuqoridaq shart bajarilganda kechikish vaqtini inobatga olmasa ham bo'ladi. Buni maydon kvazistatsionar bo'lishining birinchi sharti deb qaraymiz.

2. Maydon sekin o'zgarganda o'tkazgichlarda siljish toki o'tkazuvchanlik tokidan juda kichik bo'ladi, ya'ni

$$|j| \gg \frac{1}{4\pi} \left| \frac{\partial D}{\partial t} \right|.$$

Bog'lanish tenglamalarini inobatga olib, bu tenglamani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\gamma |E| \gg \frac{\epsilon}{4\pi} \left| \frac{\partial E}{\partial t} \right|.$$

Biz aksariyat hollarda garmonik o'zgaruvchi ( $E \sim \exp(iwt)$ ) maydonlarni ko'rishimizni inobatga olsak, yuqoridagi shart quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{\epsilon\omega}{4\pi\gamma} \ll 1 \quad \text{yoki} \quad \omega \gg \frac{4\pi\gamma}{\epsilon}. \quad (12.2)$$

Buni maydon kvazistatsionar bo'lishining ikkinchi sharti deb qabul qilamiz.

3. Maydon ta'sirida muhitning xossalari ifodalovchi kattaliklar  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$  o'zgarmas maydonda qanday bo'lsa, biz ko'rayotgan o'zgaruvchi maydonda ham shundayligicha qolishi kerak, ya'ni bu kattaliklar maydonning o'zgarish chastotasiga bog'liq bo'lmasligi talab qilinadi. Bu shartga ko'ra, maydonning o'zgarishini aniqlavchi zaryadlarning o'rtacha tezligi maydonning tarqalish tezligidan yetarlicha kichik bo'lishi kelib chiqadi:

$$\bar{v} \ll c. \quad (12.3)$$

Buni maydon kvazistatsionar bo'lishining uchinchi sharti deb qaraymiz.

Yuqorida ko'rib chiqilgan (12.1)–(12.3) shartlar bajarilganda elektrnomagnit maydonlar *kvazistatsionar* deyiladi. Bunday maydonlar bilan bog'liq bo'lgan toklar ham kvazistatsionar bo'ladi.

Shartlarni tarkibida toza metallar bo'lgan o'tkazichilar uchun baholasak, infraqizil nurlargacha siljish tokini hisobga olmasa ham bo'lishi kelib chiqadi. Bunday yuqori chastotalarda maydon kvazistatsionar bo'ladi deb bo'lmaydi, chunki bunday chastotalarda boshqa fizik effektlar namoyon bo'la boshlaydi.

Bunday holatga yuqori chastotali maydonlarni o'rganganimizda aniqlik kiritamiz. Kvazistatsionarlik shartlari o'rinli bo'lgan maydonlar "o'zgaruvchi toklar" deb ataluvchi keng sohadagi hodisalarni qamrab oladi. O'zgaruvchi toklar yoki past chastotali toklar texnikada va laboratoriyalarda keng tatbig'ini topadi. Bu kvazistatsionar jarayonlar nazariyasining o'rganishning muhimligini ko'rsatadi.

Kvazistatsionarlik shartlaridan kelib chiqib Maksvell tenglamalari (9.8), (9.9), (9.38) va (9.39) ni qayta yozamiz:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (12.4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (12.5)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (12.6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho. \quad (12.7)$$

Bu yerda (12.6) tenglamada (12.2) ga asosan siljish tokini ifodalovchi had tushirib qoldirildi. Bog'lanish tenglamalari o'z kuchini saqlab qoladi.

Uzlusizlik tenglamasini bu hol uchun ko'rib chiqamiz:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\operatorname{div} \mathbf{D}}{4\pi} = \operatorname{div} \left( \mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \approx \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (12.8)$$

Bunga asosan kvazistatsionar toklar statsionar toklar kabi solenoidal xarakterga ega ekanligini ko'ramiz. Kvazistatsionar maydon tenglamalari statsionar maydon tenglamalaridan elektromagnit induksiya hisobga olinishi bilan farq qiladi. Kechikish vaqtini inobatga olmaslik tenglamalarni yechishda bir qator yengilliklar tug'diradi va masalani bir qator hollarda oxirigacha yechish imkonini beradi.

## 12.2 Harakatdagi o'kazgichlar uchun induksiya qonuni

Biz shu vaqtgacha induksiya qonunida magnit induksiya oqimining o'zgarishi faqat magnit maydonning o'zgarishi hisobiga sodir bo'ladi deb hisoblab keldik, ya'ni o'tkazgichlarning harakatini inobatga olma-dik. Berk konturda hosil bo'ladigan induksion EYuK uchun oqim qanday sabablar bilan o'zgarishinin ahamiyati yo'q. Uruman olganda oqim konturning harakati yoki uning shaklining deformatsiyalaniши (bu holni kontur, aniqrog'i uning ayrim qismlarining harakati deb qarash mumkin) hisobiga ham o'zgaradi. Shunday qilib, biror kontur tortib turgan yuzadan o'tayotgan magnit induksiya oqimi ikki sababdan o'zgaradi. Birinchisi, magnit induksiya vektorining o'zgarishi hisobiga

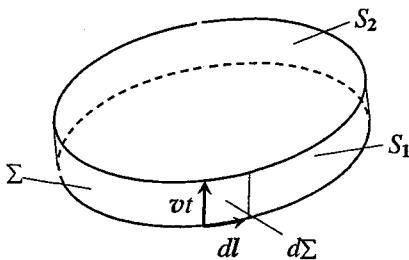
bo'lsa, ikkinchisi esa konturning harakati tufayli bo'ladi. Har ikkila holni birgalikda ko'rib, induksiya qonunini umumlashtiramiz.

Qandaydir berk kontur o'zgaruvchi tashqi maydonda  $v \ll c$  shartni qaniatlantiruvchi tezlik bilan harakatlanayotgan bo'lsin. Shu konturdan o'tayotgan magnit induksiya oqimining o'zgarishini hisoblaymiz. Buning uchun (9.46) tenglama bilan ifodalanivchi induksiya qonunini quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\oint Edl = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{S(t)} B(t) dS. \quad (12.9)$$

Bu yerdagи magnit induksiya oqimining vaqt birligidagi o'zgarishini hosila ta'rifiga ko'ra yozamiz:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Phi(t + \Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{S_2} B(t + \Delta t) dS - \int_{S_1} B(t) dS}{\Delta t}. \quad (12.10)$$



12.1-rasm:

Bu yerda birinchi integral  $t + \Delta t$  vaqt momentdagi kontur tortib turgan  $S_2$  yuzadan magnit induksiya oqimiga teng, ikkinchisi esa  $t$  vaqt momentidagi oqimga teng. Bundan tashqari har ikkala integralda sirtlarga o'tkazilgan normal bir tomonga yo'nalgan bo'lishi kerak. Bu yo'nalish sifatida  $S_1$  sirtga o'tkazilgan tashqi normalning yo'nalishida tanlab olamiz.

Konturning  $t$  va  $t + \Delta t$  momentlarda tortib turgan yuzasi ( $S_1$ ,  $S_2$ ) va konturning harakati natijasida hosil bo'lgan sirtdan ( $\Sigma$ ) iborat bo'lgan faraziy yopiq sirt hosil qilamiz. Shu yopiq sirt bo'yicha magnit induksiya oqimi yozamiz:

$$\begin{aligned} \oint B(t + \Delta t) dS &= \int_{S_2} B(t + \Delta t) dS + \\ \int_{\Sigma} B(t + \Delta t) d\Sigma &+ \int_{S_1} B(t + \Delta t) dS = 0. \end{aligned} \quad (12.11)$$

Ma'lumki, yopiq sirt bo'yicha magnit induksiya oqimi nolga teng. (12.11) da sirtlarga o'tkazilgan normallar tashqi deb olingan.  $\Sigma$  sirt bo'yicha integralni ko'rib chiqamiz. Yon sirt elementini

$$d\Sigma = [dl, v]\Delta t \quad (12.12)$$

ko'rinishda yozish mumkin (12.1-rasmga qarang). Bu yerda  $v$  kontur elementi  $dl$  ning tezligi. Bunga asosan  $\Sigma$  sirt bo'yicha integralni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\int_{\Sigma} B(t + \Delta t) d\Sigma = \int B(t + \Delta t)[dlv]\Delta t = \Delta t \oint [vB(t + \Delta t)]dl. \quad (12.13)$$

Bu yerda kontur bo'yicha integral  $S_1$  sirtni chegaralovchi tokli kontur bo'yicha olinadi.

Endi (12.11) ifodaning o'ng tomonidagi ikkita hadni  $\Delta t$  ning darajalari bo'yicha qatorga yoyamiz:

$$\int_{\Sigma} B(t + \Delta t) d\Sigma = \Delta t \oint [vB(t)]dl + O(\Delta t^2), \quad (12.14)$$

$$\int_{S_1} B(t + \Delta t) dS = \int_{S_1} B(t) dS + \Delta t \int_{S_1} \frac{\partial B(t)}{\partial t} dS + O(\Delta t^2) \quad (12.15)$$

Bu yerda  $O(\Delta t^2)$  bilan  $\Delta t$  ning ikkinchi va undan katta darajalariga proporsional hadlarning to'plamini belgiladik. Bu ifodalarni (12.11) ga qo'yamiz:

$$\begin{aligned} \int_{S_2} B(t + \Delta t) dS &= \oint [vB(t)]dl + \int_{S_1} B(t) dS + \\ &\quad \Delta t \int_{S_1} \frac{\partial B(t)}{\partial t} dS + O(\Delta t^2). \end{aligned} \quad (12.16)$$

Bu yerda (12.10) dagi har ikkala integralda sirtlarning yo'nalishi bir xil bo'lishi uchun  $S_2$  bo'yicha integralning ishorasini teskariga o'zgartirdik. Endi (12.16) ifodani (12.10) ga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S BdS = \int_S \frac{\partial B}{\partial t} dS + \oint [vB]dl. \quad (12.17)$$

Bu yerda integrallash sirti  $S_1$  ni  $S$  bilan almashtirdik. Bu ifodadan magnit induksiya oqimi ikki sababdan, biri maydon o'zgarishi hisobiga bo'lsa, (birinchi had), ikkinchisi konturning harakati (ikkinchi had) hisobiga o'zgarishi ko'rinish turibdi. Oqim ikkinchi sabab bilan o'zgarishi uchun, xususan, kontur magnit induksiya vektoriga noldan farqli burchak ostida harakat qilishi lozim.

Endi harakatdagi kontur uchun induksiya qonunini yozishimiz mumkin, ya'ni

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (12.18)$$

Bu yerda  $\mathbf{E}$  chiziqli o'tkazgichda induksiya hisobiga hosil bo'lувчи elektr maydon kuchlanganligi. Induksion elektr yurituchi kuch ((12.18) ning chap tomoni) induksiya oqimining to'liq o'zgarishiga proporsional bo'lishi kerak. Bu matematik tilda oqimdan vaqt bo'yicha olingan to'liq hosilani anglatadi.

Induksiya qonuning integral ko'rinishidan differensial ko'rinishiga o'tamiz. Buning uchun (12.17) va (12.18) ifodalardagi kontur bo'yicha integrallardan Stoks formulasiga asosan sirt bo'yicha integrallarga o'tamiz:

$$\int \operatorname{rot} \mathbf{E} d\mathbf{S} = -\frac{1}{c} \int \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}[\mathbf{vB}] \right) d\mathbf{S}. \quad (12.19)$$

Bundan quyidagini olamiz:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}[\mathbf{vB}] \right). \quad (12.20)$$

Bu ifoda induksiya qonuning umumlashgan ko'rinishining differensial ko'rinishini beradi.

Induksiya qonuning umumlashgan ko'rinishlari (12.19) va (12.20) amaliy jihatdam muhim ahamiyatga ega. Ya'ni, magnit maydonda o'tkazgichni harakatga keltirish yo'li bilan zanjirda EYUК hosil qilish mumkinligini ko'rsatadi. Bunga dinamomashinalar yaqqol misol bo'ladi.

Harakatdagi o'tkazgichlar uchun induksiya qonunini boshqa yo'l bilan ham olish mumkin. Yuqorida qo'yilgan shartlar o'rinni bo'lsin. Ya'ni, maydon kvazistatsionar, o'tkazgichning harakat tezligi o'zgarmas va elektromagnit maydonning uzatilish tezligidan juda kichik ( $v \ll c$ ) bo'lsin. O'tkazgich tinch turgan sanoq sistemada induksiya qonuni

(12.4) tenglama bilan aniqlanadi. Endi bu qonunni harakatdagi o'tkazgich uchun yozish kerak. Buning uchun bir inersial sanoq sistemadan ikkinchisiga o'tishda maydon kuchlanganliklarining almashtirish formulalari (3.45) dan foydalanish kerak. Bu yo'l bilan harakatdagi o'tkazgich uchun induksiya qonunini hosil qilishni o'quvchiga havola qilamiz.

Olingan natijalar asosida kvazistatsionar maydonlar uchun Maks-vell tenglamalari sistemasini umumlashgan hol uchun yoza olamiz:

$$\oint \mathbf{E} dl = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (12.21)$$

$$\oint \mathbf{B} dS = 0, \quad (12.22)$$

$$\oint \mathbf{H} dl = \frac{4\pi}{c} I, \quad (12.23)$$

$$\oint \mathbf{D} dS = 4\pi \int \rho dV. \quad (12.24)$$

Uzluksizlik tenglamasining integral ko'rinishi (12.8) ga binoan quyidagi-cha yoziladi:

$$\oint j dS = 0. \quad (12.25)$$

Magnit maydon (12.22) va (12.23) tenglamalar bilan aniqlanadi. Bu tenglamalardan ko'rrib turibdiki, kvazistatsionar magnit maydon stat-sionar holdan farq qilmas ekan.

### 12.3 Chiziqli o'tkazgichlarda kvazistatsionar toklar

Chiziqli o'tkazgichlarda kvazistatsionar toklarni ko'rib chiqamiz. Buning uchun umumlashgan induksiya qonuni (12.18) ni asos qilib ola-miz. Avval tokli bitta chiziqli o'tkazgichni ko'ramiz. O'tkazgichga vaqtga bog'liq chet kuchlar ulangan deb umumlashgan Om qonunini yozamiz:

$$\oint_{\gamma} \frac{j}{\gamma} dl = \oint \mathbf{E} dl + \oint \mathbf{E}^{ch} dl. \quad (12.26)$$

Chiziqli o'tkazgichni ko'rayotganligimiz uchun  $d\mathbf{j} \parallel dl \parallel dS$ . Shuning uchun (12.26) ning chap tomonini quyidagicha yozish mumkin:

$$\oint_{\gamma} \frac{\mathbf{j}}{\gamma} dl = \oint j S \frac{dl}{\gamma S} = IR.$$

$I = jS$  tok kuchi,  $R = \oint \frac{dl}{\gamma S}$  konturning to'liq qarshiligi. Agar

$$\mathcal{E}(t) = \oint \mathbf{E}^{ch} dl$$

deb belgilansa, (12.26) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$IR = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} + \mathcal{E}(t). \quad (12.27)$$

Bu tenglama o'zgaruvchi tokli zanjir uchun Om qonunini ifodalaydi.  $\mathcal{E}(t)$  vaqtga bog'liq bo'lgan EYuK.

Bu tenglamani  $N$  ta tokli konturlar uchun umumlashtirish mumkin, ya'ni

$$I_a R_a = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_a}{dt} + \mathcal{E}_a(t). \quad (12.28)$$

Bu yerda  $\Phi_a$  barcha toklar hosil qilgan magnit maydonning  $a$  - kontur orqali oqimi.

a- konturdan magnit induksiya oqimini hisoblaymiz:

$$\Phi_a = \sum_{b=1}^N \Phi_{ab} = \sum_{b=1}^N \int \mathbf{B}_b(\mathbf{r}_a) dS_a. \quad (12.29)$$

Bu yerda  $\mathbf{B}_b(\mathbf{r}_a)$   $b$  - konturdagi tokning  $a$  - kontur tortib turgan sirtda hosil qilayotgan magnit maydon induksiya vektori.  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  formuladan foydalanib (12.29) ni qayta yozamiz:

$$\Phi_a = \sum_{b=1}^N \int \text{rot } \mathbf{A}_b(\mathbf{r}_a) dS_a = \sum_{b=1}^N \oint \mathbf{A}_b(\mathbf{r}_a) dl_a. \quad (12.30)$$

Bu yerda Stoks formulasiga asosan sirt bo'yicha integralni kontur bo'yicha integral bilan almashtirdik. Statsionar toklar masalasidan ma'lumki,

vektor potensial ((11.26) ga qarang)  $\mathbf{A}_b(\mathbf{r}_a) = \frac{\mu I_b}{c} \oint \frac{d\mathbf{l}_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|}$ . Buni inobatga olib, oqim uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\Phi_a = \frac{\mu}{c} \sum_{b=1}^N I_b \oint \oint \frac{dl_a dl_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} = c \sum_{b=1}^N L_{ab} I_b. \quad (12.31)$$

Bu yerda

$$L_{ab} = \frac{\mu}{c^2} \oint \oint \frac{dl_a dl_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|}. \quad (12.32)$$

Magnit induksiya oqimi uchun olingan (12.31) ifodani (12.28) ga qo‘yamiz va o‘zgaruvchi tokli zanjirlar sistemasi uchun Om qonunini ifodalovchi tenglamani olamiz:

$$I_a R_a = - \sum_{b=1}^N L_{ab} \frac{dI_b}{dt} + \mathcal{E}_a(t). \quad (12.33)$$

Bu tenglamani olishda konturlarni harakatsiz deb hisobladik, aks holda, vaqt bo‘yicha hosila  $L_{ab}$  koeffitsientlarga ham taalluqli bo‘ladi.

EYuK va  $L_{ab}$  koeffitsientlarni aniqlovchi chiziqli konturlarning geometrik xossalari berilgan bo‘lsa, (12.33) o‘zgarmas koeffitsientli chiziqli oddiy differensial tenglamalar zanjirlardagi  $I_a$  toklarni topish imkoniyatini beradi. Ma’lumki, bunday tenglamalar chiziqli algebraik tenglamalarga keltiriladi.

## 12.4 Kvazistatsionar toklar energiyasi

Oldingi mavzuda kiritilgan  $L_{ab}$  koeffitsientlarning fizik ma’nosini ochish uchun toklarning magnit maydon energiyasini hisoblaymiz. Bu masalani ko‘rishda o’tkazgichlar chiqli bo‘lishi shart emas.

Magnit maydon energiyasi (9.73) ga asosan quyidagi ifoda bilan aniqlanadi:

$$U_H = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{B} \mathbf{H} dV. \quad (12.34)$$

Bu ifodani vektor-potensial orqali ifodalaymiz:

$$\mathbf{B} \mathbf{H} = \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{H} + \operatorname{div}[\mathbf{A} \mathbf{H}] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{A} \mathbf{j} + \operatorname{div}[\mathbf{A} \mathbf{H}].$$

Bunga ko'ra

$$U_H = \frac{1}{2c} \int A j dV + \frac{1}{8\pi} \int \operatorname{div}[AH] dV.$$

Bu yerda integtal cheksiz fazo bo'yicha olinayotganligi uchun ikkinchi had nolga teng bo'ladi. Shunday qilib, energiya uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$U_H = \frac{1}{2c} \int A j dV. \quad (12.35)$$

Bu yerda  $A$  fazoning biror nuqtasida barcha toklar hosil qilayotgan maydon vektor-potensiali,  $j$  shu nuqtada tok zichligi. (12.35) ifodada (12.34) dan farqli ravishda integral faqat tok nolga teng bo'lмаган sohalar, ya'ni o'tkazgichlarning hajmi bo'yicha olinadi. Shuning uchun  $N$  ta o'tkazgichdan iborat bo'lgan sistema uchun (12.35) ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$U_H = \frac{1}{2c} \sum_{a=1}^N \int A_a j_a dv_a. \quad (12.36)$$

Bu yerda  $dv$  o'tkazgichga tegishli hajm elementi. (12.36) da vektor potensialning o'rniga (11.24) ifodani qo'yamiz:

$$U_H = \frac{1}{2c^2} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N \int \mu \int \frac{j_a j_b}{|r_a - r_b|} dv_a dv_b. \quad (12.37)$$

Shunday qilib, tok zichliklari orqali magnit maydon energiyasining qanday ifodalanishi aniqlandi. (12.37) ifodaga boshqa ko'rinish beramiz:

$$U_H = \frac{1}{2} \sum_{a,b} I_a I_b \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\mu}{I_a I_b} \int \int \frac{j_a j_b}{|r_a - r_b|} dv_a dv_b \right\}. \quad (12.38)$$

Endi figurali qavs bilan ajratilgan ifodani quyidagicha belgilaymiz:

$$L_{ab} = \frac{1}{c^2} \frac{\mu}{I_a I_b} \int \int \frac{j_a j_b}{|r_a - r_b|} dv_a dv_b, \quad L_{ab} = L_{ba}. \quad (12.39)$$

Bu holda

$$U_H = \frac{1}{2} \sum_{a,b} L_{ab} I_a I_b. \quad (12.40)$$

(12.39) ifoda bilan aniqlangan  $L_{ab}$  kattaliklar *induksiya koeffitsientlari* deb ataladi. Agar har ikkala indeks bitta o'tkazgichga tegishli bo'lsa, ( $a = b$ ),  $L_{aa}$  o'zinduksiya koeffitsienti yoki induktivlik deyiladi. Indekslar turli o'tkazgichlarga tegishli bo'lganda ( $a \neq b$ ),  $L_{ab}$  o'zaro *induksiya koeffitsienti* deb ataladi. (12.39) dan ko'rinishi tirdibdi, induksiya koeffitsientlari o'tkazgichlarning o'lchamlariga, shakliga va bir-biriga nisbatan joylashishiga bog'liq. Bu kattaliklarni aniqlovchi formulalarda toklar ishtirok etishiga qaramasdan toklarga bog'liq bo'lmaydi. Oxirgi tasdiq chiziqli o'tkazgichlar misolida to'g'ri ekanligini shu mavzuning davomida ko'rsamiz.

Induksiya koeffitsientlarining bunday ajratish magnit maydon energiyasiga boshqacha ma'no berish mumkinligini anglatadi. Buning uchun (12.40) ikki qismga ajratib yozamiz:

$$U_H = \frac{1}{2} \sum_a L_{aa} I_a^2 + \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} L_{ab} I_a I_b. \quad (12.41)$$

Bu yerdagi birinchi yig'indining har bir hadi alohida olingan ayrim o'tkazgichlarga tegishli bo'lganligi uchun toklarning xususiy energiyasi deb qarash mumkin. Bu ma'noda ikkinchi yig'indidagi hadlar toklarning o'zaro energiyasini beradi.<sup>1</sup>

Chiziqli o'tkazgichlar uchun o'zaro induksiya koeffitsientlarini yozsak ( $a \neq b$ ), natija (12.32) bilan mos tushishini ko'rish mumkin. Bunga asosan yuqorida ta'kidlaganimizdek chiziqli o'tkazgichlar uchun o'zaro induksiya koeffitsientlari toklarga bog'liq emasligini ko'rish qiyin emas.

Chiziqli o'tkazgichlar uchun o'zinduksiya koeffitsientlarini (12.32) ifoda bilan aniqlab bo'lmaydi. Chunki bu ifodada  $a = b$  deb olsak integral uzoqlashuvchi bo'ladi. Haqiqatan ham  $r_a \rightarrow r_a'$  da

$$\frac{\mu}{c^2} \oint \oint \frac{dl_a dl_a'}{|r_a - r_a'|}$$

ifodaning mahraji suratiga nisbatan tezroq nolga intilganligi uchun integral uzoqlashuvchi bo'ladi. Demak, (12.32) formula bilan chiziqli o'tkazgichlarning o'zinduksiya koeffitsientlarini aniqlab bo'lmas ekan.

---

<sup>1</sup> Shunga o'xshash holatni elektrostatik maydon energiyasini hisoblashda ko'rgan edik.

(12.39) ifodada bunday holat yo'q bo'lganligi uchun induktivlik faqat shu formula yordamida hisoblanadi. Masalan, uni energiya orqali aniqlash mumkin:

$$U_H^{(a)} = L_{aa} I_a^2 / \quad \Rightarrow \quad L_{aa} = 2U_H^{(a)} / I_a^2. \quad (12.42)$$

Bu yerdag'i tok kuchi odatda, berilgan bo'ladi, xususiy energiya esa yuqoridagi formulalarning birortasi yordamida hisoblanadi.

## 12.5 O'tkazgichda kvazistatsionar toklarning taqsimoti

Chiziqli bo'lman massiv o'tkazgichlarda kvazistatsionar toklar qanday taqsimlanganligini ko'rib chiqamiz. Quyida massiv o'tkazgichdan oqayotgan o'zgaruvchi tokning asosiy qismi o'tkazgichning sirtiga yaqin sohada mujassamlashgan bo'lishi ko'rsatiladi. Maydon chastotasi qancha katta bo'lsa, tok mujassamlashgan qatlamning qalinligi shuncha kamaya boradi. Bu hodisaga *skin - effekt* deyiladi.

Bu effektning fizik ma'nosini ochib berish uchun elektromagnit induksiya qonunidan foydalanamiz. Buni yetaricha uzun bo'lgan silindr shaklidagi otkazgich (chiziqli emas) misolida ko'rib chiqamiz. Silindrdan o'zgaruvchi elektr tok oqayotgan bo'lsin. Ma'lumki, bunday to'g'ri tok o'z atrofida induksion magnit maydon ( $H_{in}$ ) hosil qiladi. Tok o'zgaruvchi bo'lganligi uchun bu maydon yana o'z navbatida o'zgaruvchi uyurmali elektr maydon ( $E_{in}$ ) ni hosil qiladi. Uning yo'nalishi o'tkazgich sirt tomonida asosiy maydon yo'nalishi bilan mos tushadi. Shu vaqtida ichki qismida esa teskari yo'nalgan (12.2-rasm). Bunga ko'ra to'liq tok kuchining oniy qiymati o'zgarmas qolgan holda sirtga yaqin sohalarda maydon kuchayadi ichkariga kirgan sari kuchsizlana boradi.

Kvazistatsionarlik shartlari bajarilgan deb bir jinsli o'tkazuvchi muhit uchun Maksvell tenglamalarini yozamiz:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (12.43)$$

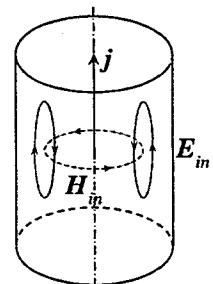
$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (12.44)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi\gamma}{c} \mathbf{E}, \quad (12.45)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \quad (12.46)$$

Bu yerda  $j = \gamma \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  bog'lanish tenglamalaridan foydalandik. Bundan tashqari, o'tkazgichda erkin zaryadlar zichligi  $\rho = 0$  ekanligini hisobga oldik. (12.43) va (12.45) tenglamalardan  $\mathbf{H}$  ( $\mathbf{E}$ ) ni yo'qotib elektr (magnit) maydon kuchlanganligini aniqlovchi tenglamalarni yozish mumkin, ya'ni

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{4\pi\mu\gamma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \Delta \mathbf{H} = \frac{4\pi\mu\gamma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (12.47)$$



12.2-rasm:

Skin - effekt masalasining aniq yechimi olish, umuman olganda o'tkazgichning shakliga va tokni hosil qilish usuliga bog'liq bo'ladi. Ammo, shunday xususiy hollar mavjudki, ular uchun tokning qanday yo'l bilan hosil qilinishining ahamiyati yo'q. Qalinligi uzunligiga nisbatan kichik bo'lgan ingichka (chiziqli emas) sim bunga misol bo'ladi.

Hisoblashlarni soddalashtirish uchun o'tkazgichni doiraviy to'g'ri silindr deb qaraymiz. Bunda elektr maydon kuchlanganligi silindr o'qiga parallel, magnit maydon kuchlanganligi esa unga perpendikulyar te-kislikda yotadi. Bu hol haqiqatan ham, ancha sodda, chunki o'tkazgichdan tashqarida maydon nimaga tengligi aniq. Simmetriyadan kelib chiqadigan bo'sak, har bir vaqt momentida silindr sirtida  $\mathbf{E} = \text{const}$ . O'tkazgich atrofida ham chegaraviy shart  $E_{1t} = E_{2t}$  ga ko'ra  $\mathbf{E} = \text{const}$  bo'ladi. Huddi shunga o'xshash magnit maydon ham o'tkazgich atrofida o'zgarmas bo'ladi. Shunday qilib, ko'rيلayotgan holda (12.47) tenglamani yyechishda chegarada har bir vaqt momentida elektr maydon kuchlanganligini o'zgarmas deb qarash kerak.

$z$  o'qini o'tkazgich oqi bo'ylab yo'naltiramiz va silindrik koordinatalarga o'tamiz. Bunda masalaning simmetriyasiga ko'ra elektr maydon kuchlanganligi faqat  $z$  tashkil etuvchisiga ega va faqat  $r$  kordinataga bog'liq bo'ladi. Vaqtga bog'lanishini esa  $\sim \exp(-i\omega t)$  ko'rinishda olamiz ( $\omega$  maydon chastotasi). Bular hisobga olinsa, (12.47) tenglama quydagi ko'rinishda yoziladi:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E(r)}{\partial r} \right) + k^2 E(r) = 0. \quad (12.48)$$

Bu yerda

$$k = \sqrt{2i}/\delta = (1+i)/\delta, \quad \delta = c/\sqrt{2\pi\gamma\omega}. \quad (12.49)$$

Silindrik koordinatalarda (12.47) tenglamaning  $r = 0$  da chekli bo'lishini ta'minlovchi yechimi:

$$E(r, t) = E_z(r, t) = C \cdot J_0(kr) \exp(-i\omega t). \quad (12.50)$$

ko'rinishga ega. Bu yerda  $J_0(kr)$  Bessel funksiyasi. Tok zichligi  $j = \gamma E$  ham shu qonun bo'yicha o'zgaradi.

Magnit maydon kuchlanganligining faqat  $H_\psi$  tashkil etuvchisi noldan farqli bo'ladi. Bu kattalik (12.43) tenglama orqali aniqlanadi (ilovadagi (A.123)–(A.125) ifodalarga qarang):

$$\frac{i\omega}{c} H_\psi = (\text{rot } E)_\psi = -\frac{\partial E_z}{\partial r}.$$

Bessel funksiyasi ( $J_0(kr)$ ) va hosilasi orasidagi bog'lanishni nazarda tutib, quyidagini aniqlaymiz:

$$H(r, t) = H_\psi(r, t) = -i \cdot C \cdot \sqrt{\frac{4\pi\gamma i}{\omega}} J_1(kr) \exp(-i\omega t). \quad (12.51)$$

Bu yerdagi doimiy  $C$  – o'tkazgich sirtida  $H = 2I/cR$  shart orqali topiladi.  $R$  – silindr radiusi,  $I$  – o'tkazgichdan oqayotgan to'liq tok.

Maydon kuchlanganliklari uchun olingan ifodalarni chegaraviy holdarda ko'rib chiqamiz:

1. Kichik chastotalar:  $R/\delta \ll 1$  ( $|kR| \ll 1$ ). Bessel funksiyasini ( $kr$ ) ning darajalari bo'yicha qatoridan, faqat birinchi ikkita hadni ko'rish bilan chegaralanamiz:

$$E_z = C \left[ 1 + \frac{1}{8} \left( \frac{r}{\delta} \right)^4 \right] \exp(i\phi_1 - i\omega t), \quad (12.52)$$

$$H_\psi = D \left[ 1 + \frac{1}{32} \left( \frac{r}{\delta} \right)^4 \right] r \exp(i\phi_2 - i\omega t). \quad (12.53)$$

Bu yerda  $D = \frac{2\pi\gamma}{c} C$ ,  $\phi_1 = \text{arctg} \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{r}{\delta} \right)^2 \right]$ ,  $\phi_2 = \text{arctg} \left[ -\frac{1}{4} \left( \frac{r}{\delta} \right)^2 \right]$ . (12.52) dan ko'rinish turibdiki, elektr maydon kuchlanganligining, shu

bilan tok kuchining amplitudasi silindr o'qidan uzoqlashgan sari  $[1 + (r/\delta)^4/8]$  ga proporsional ravishda oshib boradi.

2. Katta chastotalar:  $R/\delta \gg 1$ . Bu holda Bessel funksiyasining asimptotikasidan foydalanib quyidagilarni olamiz:

$$E_z = C \exp \left[ -\frac{R-r}{\delta} + i \left( \frac{R-r}{\delta} - \omega t \right) \right], \quad (12.54)$$

$$H_\psi = C \sqrt{\frac{4\pi\gamma}{\omega}} \exp \left[ -\frac{R-r}{\delta} + i \left( \frac{R-r}{\delta} - \omega t + \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (12.55)$$

Bu ifodalarga asosan elektr maydon kuchlanganligi, demak, tok kuchining amplitudalari o'tkazgich sirtidan ichkariga kirgan sari eksponentsiyal qonun bilan kamayib borar ekan. Bunday qonuniyat istalgan ko'rinishdagi o'tkazgichlar sirtiga yaqin sohada o'rinali bo'ladi.

**Misol.** O'tkazgich  $z \geq 0$  sohani egallagan bo'lsin. O'zgaruvchi tok  $y$  o'qi bo'yicha tekis taqsimlangan holda  $x$  o'qi bo'ylab oqayotgan deb, uning o'tkazgichdagagi taqsimotini aniqlaymiz. Bu masalani yechish natijasida maydon kuchlanganliklarining taqsimoti quyidagi ifodalar bilan aniqlanishini ko'rish mumkin:

$$E_x = E_0 \exp \left[ -\frac{z}{\delta} - i \left( \frac{z}{\delta} - \omega t \right) \right], \quad (12.56)$$

$$H_y = H_0 \exp \left[ -\frac{z}{\delta} - i \left( \frac{z}{\delta} - \omega t \right) \right]. \quad (12.57)$$

Bu misolni o'quvchiga mustaqil ravishda ko'rib chiqish tavsiya qilinadi.

Yuqorida kiritilgan kattalik  $\delta$  skin - qatlam yoki maydonning o'tkazgichga kirish chuqurligi deyiladi. Skin-qatlarning ta'rifiga binoan u o'tkazuvchanlik va chastotaga bog'liq holda keng sohada o'zgarishi mumkin. Bu kattalikning tartibini baholash uchun mis uchun quyidagi jadvalni keltiramiz:

$\nu = \omega/2\pi$ (Gs)	$\delta$ (cm)	$\nu = \omega/2\pi$ (Gs)	$\delta$ (cm)
50	$\sim 1.5$	$10^5$	$\sim 0.03$
$10^3$	$\sim 0.3$	$10^7$	$\sim 0.003$

Chastota nolga intilganda, ya'ni o'zgarmas toklar uchun  $\delta \rightarrow \infty$  va effekt yo'qoladi. Ideal o'tkazgichlarda  $\gamma \rightarrow \infty$  bu holda skin-qatlam nolga intiladi. Maydon o'tkazgichning ichiga kirmaydi. Oxirgi ikki holatda

maydonni kvasitatsionar deb bo'lmaydi. Yuqori chastotalarda maydonning o'tkazgich ichiga kirish chuqurligi umuman olganda boshqacha bo'ladi. Skin-effekti texnikada muhim ahamiyat kasb etadi. Masalan, koaksial kabellarni ishlab chiqarishda qo'l keladi.

## 12.6 Bir jinsli va izotrop muhitda elektromagnit to'lqinlar

Fazoviy dispersiyasi yo'q bo'lgan va o'zgarmas maydonlarda  $\varepsilon_0$ ,  $\mu_0$  va  $\gamma_0$  moddiy kattaliklar bilan xarakterlanuvchi bir jinsli izotrop muhitda elektromagnit maydonning tarqalishini ko'ramiz. Bu yerda nol indeks moddiy kattaliklarning  $\omega = 0$  chastotaga to'g'ri kelgan statistik qiymati ekanligini bildiradi. O'zgaruvchi maydonda bu kattaliklar qanday bo'lishi mavzu davomida aniqlaymiz. Ferromagnit bo'lмаган muhitlarni ko'rish bilan chegaralanamiz, shuning uchun katta aniqlikda  $\mu_0 = 1$  deb olish mumkin.

Bir jinsli izotrop muhitda erkin zaryadlar yo'q deb, Maksvell tenglamalarini yozamiz:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (12.58)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (12.59)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi\gamma_0}{c} \mathbf{E} + \frac{\varepsilon_0}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (12.60)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 0. \quad (12.61)$$

Bu tenglamalarning mos ravishda birinchisidan  $\mathbf{H}$  ni, ikkinchisidan  $\mathbf{E}$  ni yo'qotib maydon kuchlanganliklari uchun quyidagi tenglamalarni olamiz:

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon_0}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi\gamma_0}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (12.62)$$

$$\Delta \mathbf{H} - \frac{\varepsilon_0}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \frac{4\pi\gamma_0}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (12.63)$$

Bu tenglamalarning yechimini  $x$  bo'ylab tarqalayotgan yassi monoxromatik to'lqin ko'rinishida qidiramiz:

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}(x) \exp(i\omega t), \quad (12.64)$$

$$\mathbf{H}(x, t) = \mathbf{H}(x) \exp(i\omega t). \quad (12.65)$$

Bularning birinchisini (12.62) ga qo'yib, quyidagi tenglamani olamiz:

$$\frac{d^2 \mathbf{E}(x)}{dx^2} + k^2 \mathbf{E}(x) = 0. \quad (12.66)$$

$k$  - kompleks kattalikdir:

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0 - i \frac{4\pi\gamma_0}{\omega}}. \quad (12.67)$$

O'tkazuvchi muhitga xoc bo'lgan muhim kattalik - chastotaga bog'liq bo'lgan kompleks dielektrik singdiruvchanlik kiritiladi:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 - i \frac{4\pi\gamma_0}{\omega}. \quad (12.68)$$

Bu ifoda dielektrik singdiruvchanlik va o'tkazuvchalik orasidagi bog'lanishni aniqlaydi. Endi  $k$  ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)} = k_0 \sqrt{\varepsilon(\omega)}, \quad k_0 = \frac{\omega}{c}. \quad (12.69)$$

Kompleks kattalik  $\sqrt{\varepsilon(\omega)}$  ni haqiqiy va mavhum qismlarga ajratamiz:

$$\sqrt{\varepsilon(\omega)} = n(\omega) - i\kappa(\omega). \quad (12.70)$$

Bu yerda  $n$  va  $\kappa$  aniqlanishi lozim bo'lgan haqiqiy va musbat kattaliklardir. (12.70) da ikkinchi hadning ishorasi manfiy tanlanishining sababi quyida ma'lum bo'ladi. (12.66) tenglamaning xususiy yechimini  $\sim \exp(i\alpha x)$  ko'rinishda qidirsak, bu yerdagi  $\alpha$  uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$\alpha = \pm k_0(n - i\kappa). \quad (12.71)$$

Bunga asosan (12.66) tenglamaning ikki xususiy yechimini yozish mumkin:

$$\mathbf{E}_1(x) = \mathbf{E}_1 \exp(+ik_0 nx + k_0 \kappa x), \quad (12.72)$$

$$\mathbf{E}_2(x) = \mathbf{E}_2 \exp(-ik_0 nx - k_0 \kappa x). \quad (12.73)$$

Birinchi yechimga ko'ra, maydon o'tkazgich ichiga kirgan sari kuchaya boradi. Energiyaning saqlanish qonuniga ko'ra bunday bo'lishi mumkin emas. Shu sababli  $E_1 = 0$  bo'lishi kelib chiqadi. Demak, faqat ikkinchi yechim ma'noga ega bo'ladi. Bu holat  $\kappa > 0$  va (12.70) da  $i\kappa$  ning oldidagi ishorani manfiy qilib tanlash bilan bog'liq. Agar  $\kappa > 0$  va (12.70) da ikkinchi hadning ishorasi musbat qilib olganimizda (12.72) ma'noga ega bo'lar edi.

Shunday qilib, (12.64)–(12.65) tenglamalarining yechumlarini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$E(x, t) = E_0 \exp(-k_0 \kappa x) \exp[i(\omega t - k_0 n x)], \quad (12.74)$$

$$H(x, t) = H_0 \exp(-k_0 \kappa x) \exp[i(\omega t - k_0 n x)], \quad (12.75)$$

Bu ifodalardagi ikkinchi ko'paytuvchilar bir jinsli izotrop muhitlarda elektromagnit maydon  $v = c/n$  tezlik bilan tarqaluvchi yassi to'lqin ekanligini ko'rsatsa, birinchisi, bu to'lqin so'nuchi ekanligini ko'rsatadi. Bunga ko'ra,  $n$  muhitning sindirish ko'rsatgichi,  $\kappa$  esa so'nish koefitsienti bo'ladi.  $E_0$  va  $H_0$  kompleks amplitudalar.

Tarqalish yo'nalishi ixtiyoriy bo'lganda maydonni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$E(r, t) = E_0 \exp[i(\omega t - kr)], \quad (12.76)$$

$$H(r, t) = H_0 \exp[i(\omega t - kr)]. \quad (12.77)$$

Bu yerda  $k$  to'lqin vektor,  $k = k k_0$ ,  $k_0$  to'lqin tarqalish yo'nalishidagi birlik vektor.

Endi  $E$  va  $H$  orasidagi bog'lanishni aniqlaymiz. Buning uchun (12.58) tenglamaga murojaat qilamiz.

$$\text{rot } E = -i[kE] = -i \frac{\omega}{c} \sqrt{n^2 + \kappa^2} [k_0 E] \exp\left(-i \operatorname{arctg} \frac{\kappa}{n}\right),$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{c} i\omega H.$$

Bu tengliklardan qidirilayotgan bog'lanishni topamiz:

$$H = \sqrt{n^2 + \kappa^2} [k_0 E] \exp\left(-i \operatorname{arctg} \frac{\kappa}{n}\right). \quad (12.78)$$

Bundan vakuumdagidan farqli ravishda elektromagnit to'lqinlarning elektr va magnit maydon kuchlanganliklarining amplitudalari turlicha ekanligi kelib chiqadi. Shu vaqtida vakuumdagi kabi, bir jinsli izotrop muhitlarda elektromagnit to'lqinlar ko'ndalang bo'ladi. Haqiqatan ham, (12.76) va (12.77) ni mos ravishda (12.61) va (12.59) tenglamalarga qo'yib, bunga ishonch hosil qilamiz:

$$(\mathbf{kH}) = (\mathbf{kE}) = 0. \quad (12.79)$$

Bir jinsli izotrop muhitda Maksvell tenglamalari vakuumdagi kabi, ixtiyoriy chastotali yassi ko'ndalang to'lqin ko'rinishdagi yechimga ega ekan. Ammo, muhitda to'lqin eksponensial qonun bo'yicha so'nadi. So'nish darajasi  $\kappa$  bilan aniqlanadi.  $n$  va  $\kappa$  ni (12.68) va (12.70) ifodalarдан topamiz. (12.70) ni kvadratga oshirib (12.68) ga tenglashtiramiz va haqiqiy va mavhum qismlarga ajratamiz:

$$n^2 - \kappa^2 = \epsilon_0, \quad n\kappa = \frac{2\pi\gamma_0}{\omega}. \quad (12.80)$$

Bu sistemaning  $n, \kappa > 0$  shartni qanoatlantiruvchi yechimi quyidagi formulalar bilan aniqlanadi:

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{\epsilon_0^2 + \frac{16\pi^2\gamma_0^2}{\omega^2}} + \epsilon_0 \right)}, \quad (12.81)$$

$$\kappa(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{\epsilon_0^2 + \frac{16\pi^2\gamma_0^2}{\omega^2}} - \epsilon_0 \right)}. \quad (12.82)$$

Bu formulalar o'tkazuvchi muhitda dispersiya qonunini aniqlaydi.

Shuni ta'kidlash lozimki yetarlicha yqori chastotalarda o'tkazuvchanlik  $\gamma$  ham chastotaga bog'liq bo'lib qoladi.

(12.81) va (12.82) ifodalarni chegaraviy hollarda analiz qilamiz. Agar

$$\gamma_0 \ll \frac{\epsilon_0 \omega}{4\pi} \quad (12.83)$$

shart o'rinci bo'lsa, siljish toki  $\frac{\epsilon_0}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \sim \frac{\epsilon_0 \omega}{4\pi} \mathbf{E}$  o'tkazuvchanlik toki  $\gamma_0 \mathbf{E}$  dan katta bo'ladi. Bu shart ideal dielektriklar ( $\gamma \rightarrow 0$ ) va o'tkazuv-

chanligi juda kichik bo'lgan real dielektriklar hamda nometall o'tkazgichlar (yarimo'tkazgich, elektrolit) uchun bajariladi. Bu holda (12.81) va (12.82) lar sodda ko'rinishga o'tadi:

$$n \approx \sqrt{\epsilon_0}, \quad (12.84)$$

$$\kappa \approx 2\pi\gamma_0/\omega\epsilon_0. \quad (12.85)$$

(12.83) shartga ko'ra bu igodalardan  $n \gg \kappa$  ekanligiligi kelib chiqadi. Faqat ideal dielektriklarga  $\kappa = 0$ . Bu holda muhit shaffof deyiladi. Bunday muhitda elektromagnit to'lqin bo'shliqdagi bilan bir xil bo'ladi. Faqat magnit va elektr maydon amplitudalari bir-biriga teng bo'lmaydi:

$$\frac{|H|}{|E|} = \sqrt{\epsilon_0} = n.$$

Bundan tashqari, to'lqinning tarqalish tezligi

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0}} = \frac{c}{n}, \quad \text{yoki} \quad n = \frac{c}{v}. \quad (12.86)$$

Bu yerda  $n$  muhitning sindirish ko'rsatgichi deb atalishi yana bir marta tasdiqlandi. Maksvell tomonidan aniqlangan bu munosabatlar elektromagnit maydon nazariyasining rivojlanishida katta rol o'ynagan. Xususan, (12.86) Maksvell va Faradey ishlariga qadar mustaqil yo'nalish hisoblangan elektromagnit va optik hodisalar orasidagi bog'lanishni o'rnatdi.

Endi ikkinchi chegaraviy holni ko'rib chiqamiz. O'tkazuvchanlik toki siljish tokidan katta bo'lsin. Bu holda (12.2) shart o'rini bo'ladi. (12.81) va (12.82) dan  $n$  va  $\kappa$  uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$n \approx \sqrt{\frac{2\pi\gamma_0}{\omega}}, \quad (12.87)$$

$$\kappa \approx n \approx \sqrt{\frac{2\pi\gamma_0}{\omega}}. \quad (12.88)$$

Maydon skin-qatlama so'nadi. Haqiqatan ham (12.74) ifodadagi birinchi eksponentadagi  $k_0\kappa \approx 1/\delta$  bo'ladi. Bu holda  $\lambda \gg \delta$  bo'lganligi uchun to'lqin tushunchasi o'z ma'nosini yo'qotadi.

## 12.7 12-bobga oid masalalar va savollar

- Yassi kontur bir jinsli magnit maydonda unga perpendikulyar o'q atrofida  $\omega$  burchak tezlik bilan aylanmoqda. Maydon induksiyasi  $B$  ga teng. Bu konturda induksiya EYuK ni toping. Kontur yuzasi  $S$ .
- Oldingi masalada ko'rilgan konturdagi tok kuchini toping. Konturning o'zinduksiyasi  $L$ , qarshiligi  $R$ .
- Doimiy tok zanjiri ketma-ket ulangan quyidagi qismlardan iborat:  $L$  induktivlik, ikkita  $R_1$ ,  $R_2$  qarshilik hamda EYuK  $\mathcal{E}$  bo'lgan akkumlyator.  $R_2$  qarshilik qisqa tutashtirilgandan keyin zanjirdagi tok kuchini aniqlang.
- Sig'imi  $C$  bo'lgan zaryadlangan kondensator induktivligi  $L$  bo'lgan  $R$  qarshilik bilan tutashtirilgan. Kondensator qoplamlaridagi zaryadni vaqtning funksiyasi sifatida aniqlang. Kondensatordagi boshlang'ich zaryad  $q_0$ .
- Ikkita tebranish konturining o'zaro induksiya koefitsienti  $L_{12}$  ga teng. Bu konturlarning parametrlari (qarshilik, induktivlik va sig'imi) mos ravishda  $R_1$   $L_1$   $C_1$  va  $R_1$   $L_2$   $C_2$  ga teng. Birinchi konturning kondensatorida  $q$  zaryad bor, kontur uzilgan. Ikkinci konturning kondensatori zaryadlanmagan va berk. Birinchi kontur ulangandan (berkitilgandan) keyin konturlardagi tok kuchlari uchun differential tenglamalar tuzing.
- $OA$  sterjen  $\omega$  burchak tezlik bilan  $H$  bir jinsli magnit maydon yo'naliishiغا perpendikulyar bo'lgan tekislikdagi  $O$  nuqta atrofida aylanmoqda. Agar sterjen uzunligi  $l$  bo'lsa,  $O$  va  $A$  nuqtalar orasidagi induksiya EYuK ni toping.
- Radiuslari  $a$  va  $b$  ( $a < b$ ) bo'lgan ikkita koaksial yupqa silindrik o'tkazgichlar oralig'i magnit singdiruvchanligi  $\mu$  bo'lgan modda bilan to'ldirilgan. Birlik uzunlikka to'g'ri keluvchi  $L$  o'zinduksiya koefitsientini toping.
- Ixtiyoriy shakldağı kesimga ega bo'lgan (doirasimon bo'lishi shart emas) cheksiz uzun silindrik solenoidning birlik uzunlikdagi o'zinduksiya koefitsientini toping. Kesim yuzasi  $S$ , birlik uzunlikdagi o'ramlar soni  $n$  ga teng.
- $b$  radiusli silindrik o'tkazgich ichida magnit singdiruvchanligi  $\mu_0$  bo'lgan  $a$  radiusli koaksial sim joylashgan. O'tkazgich va sim oralig'i magnit singdiruvchanligi  $\mu$  bo'lgan modda bilan to'ldirilgan. Sistemaning birlik uzunligiga to'g'ri keluvchi  $L$  o'zinduksiya koefitsientini toping.
- O'tkazuvchanligi  $\gamma$  magnit cingdiruvchanligi  $\mu$  va  $x = \pm h$  tekisliklar bilan chegaralangan plitaga ingichka sim o'ralgan. Sim o'ramlari bir-biriga parallel va birlik uzunlikdagi soni  $n$  ga teng. Simdan oqayotgan tok  $I = I_0 \exp(-i\omega t)$ . a) Chegaraviy effektlarni hisob olmasdan plita

- ichida magnit maydon amplitudasining haqiqiy qismini aniqlang. b) Kuchli ( $\delta \ll h$ ) va kuchsiz ( $\delta \gg h$ ) skin-effekt hollarini tahlil qiling.
11. Boshlang'ich vaqtida bir jinsli o'tkazgichning ichidagi kichik bir qismida zaryad  $\rho(r)$  hajmiy zichlik bilan taqsimlangan bo'lzin. Bu zaryad o'z holiga qo'yilsa, o'tkazgich sirti tomon oqa boshlaydi.
- O'tkazgichning ko'rsatilgan qismida zaryad zichligi vaqt o'tishi bilan qanday qonuniyat bilan o'zgaradi.
  - Zaryadning oqib ketishining ralaksatsiya vaqt ni moga teng?
  - O'tkazuvchanlik toki va siljish toki bir-birini to'liq kompensatsiyalashini ko'rsating.
  - Zaryadlarning relaksatsiyasida magnit maydon hosil bo'lmasligini tushuntiring. Elektr maydon vaqtga qanday bog'langan?
- Ko'rsatma: Uzluksizlik tenglamasidan va Om qonuning differensial ko'rinishidan foydalang.
12. Qandaydir  $x = x_0$  nuqtada tok zichligi  $j(x_0) = 0$ , elektr induksiya vektori  $D(x_0)$  vaqtga bog'liq emas deb, dielektrik singdiruvchanligi  $\epsilon(x, t)$  va o'tkazuvchanligi  $\gamma(x, t)$  bo'lgan muhitda bir o'lchamli elektr maydon  $E = x_0 E(x, t)$  uchun differensial tenglamani hosil qiling. Shu tenglamaning  $E(x)$  boshlang'ich shartda yechimini toping. Bu holda magnit maydon mavjud bo'ladimi?
13. O'tkazuvchanligi  $\gamma$  bo'lgan bir jinsli muhitda boshlang'ich vaqtida koordinata  $x$  ning garmonik funksiyasi sifatida berilgan magnit maydon  $H_y = H_0 \sin kx$  ning relaksatsiya qonunini toping.
14. Qanday maydonga kvazistatsionar deyiladi? Kvazistatsionarlik shartlari o'rinci bo'lgan maydonlarga misollar keltiring.
15. Kvazistatsionarlik shartlari qanday yoziladi?
16. Kvazistatsionarlikning uchinchi shartini izohlang.
17. Kvazistatsionarlik shartlari o'rinci bo'lgan maydonlarga misollar keltiring.
18. Harakatdagi o'tkazgichlar uchun induksiya qonunini yana qanday yo'l bilan olish mumkin?
19. Chiziqli o'tkazgichga ta'rif bering.
20. O'zgaruvchan tokli zanjir uchun Om qonuni ifodasi qanday ko'rinishga ega?
21. Induksiya koefitsientlari nima? O'zinduksiya va o'zaro induksiya koefitsienti deb ni moga aytildi?
22. Skin-effekt qanday yuzaga keladi?
23. Skin-effektini chegaraviy hollar uchun tushuntiring.
24. Skin-effektidan texnikada qanday maqsadlarda foydalanish mumkin?
25. Siyrak gazlar uchun dispersiya qonuni  $n = n(\omega)$  bog'lanish grafigini chizing va bu grafikni tushuntiring.

## 13-bob

### Yuqori chastotali maydonlar

#### 13.1 Dielektrik singdiruvchanlikning dispersiyasi

Endi tez o'zgaruvchi elektromagnit maydonlarni o'rganishga o'tamiz. Bunday maydonlarning o'zgarish davri ( $T$ ) elektr va magnit qutblanish qaror topishining xarakterli vaqtidan ( $\tau$ ) katta bo'lishi kerak degan shart bilan cheklanmaydi.

Vaqt o'tishi bilan o'zgaruvchi maydon albatta fazoda ham o'zgaruvchi bo'lishi kerak. Berilgan chastota  $\omega$  da fazoviy davr - to'lqin uzunlik  $\lambda \sim c/\omega$  bilan aniqlanadi. Chastota kattalashgan sari to'lqin uzunlik kamaya boradi va pirovardida u atom o'lchamlariga tenglashib qoladi. Bu holda atom o'lchamlari tartibidagi masofalar ahamiyat kasb eta boshlaydi va maydonni makroskopik nuqtai nazardan tavsiflab bo'lmay qoladi. Muhitning dispersiyasini inobatga olish zarurati paydo bo'ladi.

Amalda shunday chastotalar sohasi mavjudki, ular uchun bir tomon dan dispersiya muhim bo'lsa, ikkinchi tomon dan maydonni makroskopik tavsiflash mumkin bo'ladi. Ma'lumki, muhitda barqaror muvozanat holati turli relaksatsiya mexanizmlari orqali o'rnatiladi. Bu borada elektron mexanizmi muhitning elektr qutblanishi va magnitlanishida eng tez mexanizmlardan hisoblanadi. Uning relaksatsiya vaqt i atom xarakterli vaqlari ( $a/v$ ) tartibida bo'ladi. Bu yerda  $a$  atomlar o'lchami,  $v$  atomdagi elektronlar tezligi. Madomiki  $v \ll c$  ekan, bu vaqlarga to'g'ri kelgan to'lqin uzunligi  $\lambda \sim ac/v$  atom o'lchamlariga nisbatan hali yetarlicha katta bo'ladi. Bunday to'lqinlar uchun maydonni makroskopik tavsiflash mumkin. Ammo, metallarda past temperaturalarda bu shart bajarilsa ham, makroskopik nazariyadan foydalanim bo'lmaydi. Umuman olganda yuqori chastotali maydonlar masalasi ancha murakkab va chalkashdir. Har gal bunday masala ko'rildiganda muhit va maydonni xarakterlovchi parametrlar nisbatini baholash lozim bo'ladi. Bu masalani churroq o'rganish alohida masala bo'lib, ushbu

kitob doirasidan tashqarida yotadi. Bundan keyin  $\lambda \gg a$  shart bajarilgan deb qaraymiz. Quyida bayon qilinadigan nazariya ham metallarga, ham dielektriklarga biday taalluqlidir. Chunki, maydonning chastotasi atom ichidagi elektronlarning harakatiga tegishli chastotalar (optik chastotalar) tartibida va undan yuqori bo'lganda metall bilan dielektrik o'rtaqidagi tafovut deyarli yo'qoladi.

Makroskopik elektrodinamikaning asosiy tenglamalarini yozganimda, maydonning o'zgarish chastotasiga qo'yilgan cheklovlar faqat bog'lanish tenglamalariga tegishli bo'lganligini inobatga olsak, yuqori chastotalarda ham 9-bob olingan

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (13.1)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (13.2)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (13.3)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = 0. \quad (13.4)$$

Makvell tenglamalardan foydalanish mumkin bo'ladi. Ammo, yuqori chastotalarda  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  va  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  orasidagi bog'lanishlar, dispersiya yo'q deb oldin olingan bog'lanishlardan tubdan farq qiladi.

Eng avvalo,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  va  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  kattaliklarning biror vaqtdagi qiymatlari orasidagi birdan bir bog'lanish buziladi. Masalan,  $\mathbf{D}(t) = \epsilon \mathbf{E}(t)$  bog'lanish ma'noga ega bo'lmay qoladi. Chunki, muhitning elektr qutblanishi va magnitanishi yuqori chastotalarda maydon o'zgarishining ketidan ulgurmaydi. Bu holda biror vaqtdagi  $\mathbf{D}$  va  $\mathbf{B}$  ning qiymati mos ravishda  $\mathbf{E}(t)$  va  $\mathbf{H}(t)$  ning oldinga barcha vaqtlardagi qiymatlari bilan aniqlanadi deb olish kerak bo'ladi.

Elektr maydon kuchlanganligi va elektr induksiya vektorlari orasidagi bog'lanishni ko'rib chiqamiz. Ilgaridek maydon kuchsiz deb qaraymiz. Bu holda  $\mathbf{D}$  va  $\mathbf{E}$  orasidagi bog'lanish chiziqli bo'ladi.  $\mathbf{D}(t)$  ning t vaqtdagi qiymati  $\mathbf{E}(t)$  ning oldingi barcha vaqtlardagi qiymatlari bilan bog'lanishi eng umumiy holda quydagи ko'rinishda yoziladi:

$$\mathbf{D}(t) = \int_{-\infty}^0 \epsilon(t-t') \mathbf{E}(t') dt'. \quad (13.5)$$

Bu yerda integral sababiyat prinsipiغا ko'ra faqat  $t$  ga nisbatan o'tgan vaqtlar bo'yicha olinadi.

Har qanday o'zgaruvchi maydonni Furye integraliga yoyish bilan monoxromatik tashkil etuvchilarga ajaratish mumkin, ya'ni

$$E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega, \quad (13.6)$$

$$D(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega. \quad (13.7)$$

Bu ifodalarni (13.5) ga qo'yib, quyidagini topamiz:

$$D(\omega) = \varepsilon(\omega) E(\omega). \quad (13.8)$$

Bu yerda

$$\varepsilon(\omega) = \int_0^{\infty} \varepsilon(\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau \quad (13.9)$$

formula bilan aniqlanadi. Vaqt bo'yicha integral  $(0, \infty)$  oralig'ida oliniganligi uchun  $\varepsilon(\omega)$   $\varepsilon(\tau)$  ning Furye tasviri bo'la olmaydi. Shunday qilib, davriy maydonlarda dielektrik singdiruvchanlik tushunchasini  $D(\omega)$  va  $E(\omega)$  ni bog'lovchi koefitsient sifatida kiritish mumkin. Bu kattalik muhitning xossalari bilan bir vaqtda chastotaga ham bog'liq bo'ladi. Dielektrik cingdiruvchanlikning chastotaga bog'lanishi *dispersiya* qonuni deyiladi.

Funksiya  $\varepsilon(\omega)$  umuman olganda (13.9) ga ko'ra kompleksdir, ammo  $\varepsilon(t)$  haqiqiy bo'lganligi uchun

$$\varepsilon^*(\omega) = \varepsilon(-\omega) \quad (13.10)$$

shartni qanoatlantiradi. Uning haqiqiy qismini  $\varepsilon^R$ , mavhum qismini esa  $\varepsilon^S$  bilan belgilaymiz:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon^R(\omega) + i\varepsilon^S(\omega). \quad (13.11)$$

$\varepsilon(\omega)$  ning ta'rifi (13.9) dan uning haqiqiy qismi chastotaning juft, mavhum qismi esa toq funksiya ekanligini ko'rish mimkin, ya'ni

$$\varepsilon^R(\omega) = \varepsilon^R(-\omega), \quad \varepsilon^S(\omega) = -\varepsilon^S(-\omega). \quad (13.12)$$

Kompleks dielektrik singdiruvchanlik  $\varepsilon(\omega)$  kabi kompleks magnit singdiruvchanlik  $\mu(\omega)$  ni kiritish mumkin.

## 13.2 Yorug'lik dispersiyasi

Elektromagnit to'lqinlarni zaryadlarda sochilish masalasini § 8.8 da ko'rib chiqqan edik. Hozir bu masalani siyrak gazlarning dielektrik singdiruvchanligini hisoblash uchun yana bir marta ko'rib chiqamiz.

Siyrak gazda atomlar bir-biri bilan ta'sirlashmasligini nazarda tut-sak, tashqi maydonda qutblanishi

$$\mathbf{P} = N\mathbf{d} \quad (13.13)$$

bilan aniqlanadi. Bu yerda  $\mathbf{P}$  qutblanish vektori,  $N$  atomlar zichligi,  $\mathbf{d}$  har bir atomning tashqi maydonda olgan dipol momenti. (8.113) ga muvofiq

$$\mathbf{d} = \frac{e^2 \mathbf{E}}{m[\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma]}. \quad (13.14)$$

Siyrak gazda elektr maydon tashqi maydonga teng bo'ladi. Shuning uchun

$$\mathbf{D}(\omega) = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = \left(1 + \frac{4\pi e^2 N}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}\right) \mathbf{E}. \quad (13.15)$$

Bo'g'anish tenglamasi (13.8) va (13.15) ko'ra dielektrik singdiruvchanlik uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi e^2 N}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}. \quad (13.16)$$

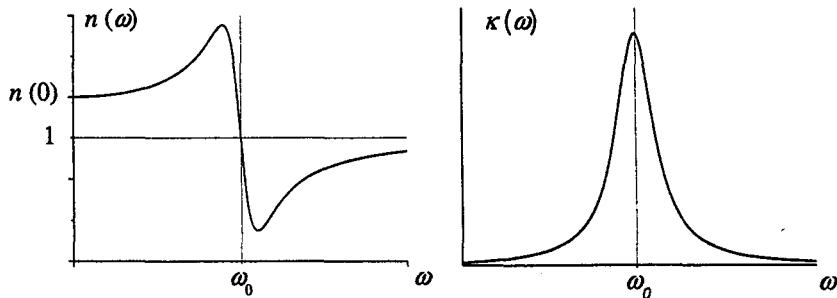
Bu yerdan (12.70) ifodaga muvofiq  $n(\omega)$  va  $\kappa(\omega)$  ni topamiz:

$$n = 1 + \frac{2\pi e^2 N}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}, \quad (13.17)$$

$$\kappa = \frac{2\pi e^2 N}{m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}. \quad (13.18)$$

Bu ifodalarni olishda siyrak gazlar uchun (13.16) dagi ikkinchi had kichik bo'lishi e'tiborga olindi. Olingan formulalar tajribalarda yaxshi

o'lchanadigan - muhitning sindirish korsatkichi va nurlanishni yutish koeffitsientini aniqlaydi. Yutish koeffitsienti xususiy chastotada keskin maksimumga ega, sindirish ko'rsatkichi esa bu chastotada birga teng bo'ladi (13.1-rasm). Bu holda nuring sinishi to'g'risida gapirishning ma'nosi yo'qoladi.



13.1-rasm:

Agar gaz turli xususiy chastotaga ( $\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03}, \dots$ ) ega bo'lgan atomlardan tashkil topgan bo'lsa, (13.14) ifodada ikkinchi har bir nav atomlar bo'yicha yig'indi ko'rinishida yoziladi. Bu holda (13.17) va (13.18) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$n = 1 + \frac{2\pi e^2}{m} \sum_i \frac{(\omega_{0i}^2 - \omega^2) N_i}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}, \quad (13.19)$$

$$\kappa = \frac{2\pi e^2}{m} \sum_i \frac{\gamma \omega N_i}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}. \quad (13.20)$$

Sindirish ko'rsatkichi va so'nish koeffitsientining chastotaga bog'lanishini bataysil ko'rib chiqamiz. Maydon chostotasi  $\omega$  xususiy chastotalaridan keckin farq qilsin. Bu holda  $\gamma \ll \omega_{0i}$  shartni hisobga olsak,  $n(\omega)$  uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$n \simeq 1 + \frac{2\pi e^2}{m} \sum_i \frac{N_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2}. \quad (13.21)$$

Bu formula siyrak gazda dispersiya qonunini aniqlaydi. Chastota  $\omega$  kichik tomondan  $\omega_{01}$  ga yaqinlashganda sindirish ko'rsatkichi keskin oshadi. Maydon chostotasi  $\omega_{01}$  dan katta bo'lganda sindirish ko'rsatkichi birga juda yaqin bo'lib qoladi. Chastota  $\omega_{02}$  ga yaqinlashgada u

ortadi.  $\omega > \omega_{02}$  da esa yana kichik qiymatlar qabul qiladi. Bu holat barcha  $\omega_{0i}$  uchun takrorlanadi. Juda katta chastotalarda ( $\omega \gg \omega_{0i}$ ) (13.21) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\varepsilon \simeq 1 - \frac{4\pi e^2}{m} \frac{N}{\omega^2}, \quad N = \sum_i N_i \quad (13.22)$$

Bu formuladan o'ta yuqori chastotalarda dielektrik singdiruvchanlik muhitning xossalariiga (muhit o'tkazgich yoki dielektrik bo'lishining farqi yo'q, 262-betga qarang) bog'liq bo'lmasligi kelib chiqadi. Bu natijani oddiy fizik mulohazalar orqali tushunish mumkin.  $\omega \rightarrow \infty$  muhitdagi qutblanish jarayoni maydon o'zgarishi ketidan yetib ulgirmaydi - muhit qutblanmaydi. Ya'ni, elektr induksiya vektorining muhitdagi elektr maydon kuchlanganligidan farqi qolmaydi.

Chastota juda katta bo'lganda (to'lqin uzunlik  $\lambda \rightarrow 0$ ) geometrik optika qonunlari ishlay boshlaydi. (13.22) formulaga ko'ra muhitning sindirish ko'rsatgichi  $n = \sqrt{\varepsilon} < 1$ . Bunday muhitning optik zichligi vakuumnikidan kichik bo'ladi. Bo'shiqdandan bunday muhitga nur kelib tushganda to'la ichki qaytish hodisasi ro'y beradi.

Shu hol uchun elektromagnit to'lqinlarning gruppa tezligini hisoblaylik

$$v_g = \frac{dk}{d\omega}.$$

Sindirish ko'rsatgichi  $n = \sqrt{\varepsilon}$  va  $k = c/n\omega$  ni nazarda tutib  $dk/d\omega$  ni hisoblaymiz:

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} \frac{d(n\omega)}{d\omega} = \frac{1}{c} \left( 1 + \frac{2\pi e^2}{m} \frac{N}{\omega^2} \right).$$

Bundan

$$v_g = c \left( 1 + \frac{2\pi e^2}{m} \frac{N}{\omega^2} \right)^{-1} \approx c \left( 1 - \frac{2\pi e^2}{m} \frac{N}{\omega^2} \right) = cn.$$

Kutilgandek, biz ko'rayotgan holda  $n < 1$  bo'lganligidan  $v_g < 1$  bo'lishi kelib chiqdi.

Katta chastotalar dielektrik singdiruvchanlikni aniqlovchi (13.22) formulani boshqa yo'l bilan ham hosil qilish mumkin. Katta chastotalarda yorug'lik kvantining energiyasi atomdagi elektronlarning bog'lanish energiyasidan ancha katta bo'ladi. Bu holda elektronlarni bog'langanligining ahamiyati qolmaydi. Demak, biz ko'rayotgan masala erkin

elektronlardan tashkil topgan gazda nurlanishning sochilish masalasiga o'tadi. Bunday gaz uchun dielektrik sindirish ko'rsatgichi (13.22) formula bilan aniqlanishini ko'rish qiyin emas.

Yuqoridagi boblarda klassik fizikaning tatbiq qilish cheralari to'g'risida bir necha bor to'xtalib o'tgan edik. Real mikroskopik sistemalar - atom va molekulalar klassik fizika, xususan klassik elektrodinamika qonunlariga buysunmaydi. Bunga qaramasdan, atomlar nurlanishning klassik garmonik ossilyator modeli nurlanishning asosiy xarakteristikalarini to'g'ri aniqlab beradi. Yuqorida ko'rilgan yorug'lik dispersiya masalasini kvant mexanikada nuqtai nazaridan ko'rulganda dispersiya qonuni

$$n = 1 + \frac{2\pi e^2 N}{m} \sum_k \frac{f_k}{\omega_k^2 - \omega^2} \quad (13.23)$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda  $\omega_k = (E_k - E_0)/\hbar$  0- energetik holatdan  $k$ - holatga o'tish chastotasi,  $f_k$   $k$ - holatning ossilyator kuchi deyiladi va  $\sum f_k = 1$  shartni qanoatlantiradi. Klassik va kvant modellar asosida olingan dispersiya qonunlari (13.21) va (13.23) ko'rinish jihatda bir xil bo'lsada, u yerga ishtirok etayotgan kattaliklarning fizik ma'nolari bir-biridan tubdan farq qiladi. Ammo o'ta yuqori chastotalarda ( $\omega \gg \omega_0$ ;  $\omega \gg \omega_k$ ) har ikkala formula bir xil ko'rinishga o'tadi:

$$n = 1 - \frac{2\pi e^2}{m} \frac{N}{\omega^2}. \quad (13.24)$$

Bundan ko'rinib turibdiki, qaralayotgan masala uchun o'ta yuqori chastotalarda nafaqat muhitlarning, hattoki masalaga yondashishning ham farqi qolmaydi.

### 13.3 Dispersion munosabatlar

Ushbu bobning boshida yuqori chastotalarda, nurlanish chastotasi xarakterli atom chastotalari va to'lqin uzunligi muhitdag'i xarakterli fazoviy masshtab tartibida bo'lganda dispersiya hodisasining boshlanishini ta'kidlagan edik. Bu hodisani chastota bilan bog'liq qismini siyrak gazlar misolida 13.1- mavzuda ko'rib chiqildi.

Yuqori chastotali elektromagnit maydonda muhitning qutblanishiga ko'rileyotgan vaqtdan oldingi barcha vaqtlar (tarix) ta'sir qilganidek,

muhitning biror nuqtasidagi qutblanishga uning barcha nuqtalaridagi maydon o‘z ta’sirini ko‘rsatadi. Bunga fazoviy dispersiya deyiladi. Har ikkala dispersiyani birgalikda ko‘rib chiqamiz.

Bir jinsli va izotrop muhitda  $D$  va  $E$  orasidagi bog‘lanishni umumiy holda quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$D(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^0 dt' \int \varepsilon(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') E(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' \quad (13.25)$$

Fazoda tanlangan nuqtalar bo‘limganligi sababli  $\varepsilon(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t')$  funksiya faqat radius-vektorlar ayirmasining moduliga bog‘liq bo‘ladi.

Elektr maydon kuchlanganligini va elektr induksiya vektorini Furge integraliga yoyamiz:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)] d\mathbf{k} d\omega, \quad (13.26)$$

$$D(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int D(\mathbf{k}, \omega) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)] d\mathbf{k} d\omega. \quad (13.27)$$

Bularni (13.25) qo‘yib, quyidagini topamiz:

$$D(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega). \quad (13.28)$$

Bu yerda

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{k}, \omega) &= \int_{-\infty}^0 dt' \int \varepsilon(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') \exp[-i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + i\omega(t - t')] d\mathbf{r}' = \\ &\quad \int_0^\infty d\tau \int \varepsilon(|\mathbf{R}|, \tau) \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{R} - \omega\tau)] d\mathbf{R}. \end{aligned} \quad (13.29)$$

Bunda yangi o‘zgaruvchilar  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  va  $\tau = t - t'$  kiritildi. Kiritilgan kattalik  $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$  263-betda keltirilgan sababga ko‘ra  $\varepsilon(|\mathbf{R}|, \tau)$  ning Furge tasviri bo‘la olmaydi. Bu funksiya  $D$  va  $E$  orasidagi bog‘lanishni aniqlaydi hamda to‘lqin vektor va chastotaning funksiyasi bo‘lgan dielektrik singdiruvchanlik deyiladi. Dielektrik singdiruvchanlikning to‘lqin vektorga bog‘liq bo‘lishi *fazoviy dispersiya* deyiladi.

Funksiya  $\varepsilon(\mathbf{k})$  umiman olganda kompleks bo'lganligi uchun uni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon^{\Re}(\mathbf{k}, \omega) + \varepsilon^{\Im}(\mathbf{k}, \omega). \quad (13.30)$$

Ravshanki, uning haqiqiy va mavhum qismlari

$$\varepsilon^{\Re}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) + \varepsilon^*(\mathbf{k}, \omega)}{2}, \quad (13.31)$$

$$\varepsilon^{\Im}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) - \varepsilon^*(\mathbf{k}, \omega)}{2i}. \quad (13.32)$$

(13.29) ga ko'ra dielektrik singdiruvchanlik quyidagi xossa ega:

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon^*(-\mathbf{k}, -\omega). \quad (13.33)$$

Endi haqiqiy va mavhum qismlar uchun (13.29) kabi ifodalarni hosil qilamiz. Bining uchun (13.29) ni (13.31) ga qo'yamiz. Ikkinchi hadda integrallash o'zgaruvchisi  $\tau$  ni  $-\tau$  ga amashtirsak, ikkala hadni bitta hadga birlashtirib yozish mumkin bo'ladi:

$$\varepsilon^{\Re}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int \varepsilon(|\mathbf{R}|, \tau) \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{R} - \omega\tau)] d\mathbf{R}. \quad (13.34)$$

Shunga o'xhash

$$\varepsilon^{\Im}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int \varepsilon(|\mathbf{R}|, \tau) \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{R} - \omega\tau)] \operatorname{sign}(\tau) d\mathbf{R}. \quad (13.35)$$

Bu yerda  $\operatorname{sign}(\tau)$  ishora funksiyasi.

Shunday qilib, dielektrik singdiruvchanlikning haqiqiy va mavhum qismlari bitta funksiya  $\varepsilon(|\mathbf{R}|, \tau)$  orqali ifodalananadi va (13.29) dan farqli o'laroq mos ravishda  $\varepsilon(|\mathbf{R}|, \tau)/2$  va  $\varepsilon(|\mathbf{R}|, \tau) \operatorname{sign} \tau / 2i$  funksiyalarining Furye tasvirlaridir. Shu sababdan bu kattaliklarni bir-biri bilan bog'lash mumkin. Masalan, (13.35) ga nisbatan teskari Furye tasvirni yozamiz:

$$\varepsilon(|\mathbf{R}|, \tau) \operatorname{sign}(\tau) = \frac{2i}{(2\pi)^4} \int \int \varepsilon^{\Im}(\mathbf{k}', \omega') \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{R} - \omega\tau)] dk' d\omega'. \quad (13.36)$$

Bu ifodani (13.34) ga qo'yamiz. Bunda  $\mathbf{R}$  bo'yicha integralni alohida yozib olamiz:

$$\int \exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{R}] d\mathbf{R} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

va  $\mathbf{k}'$  bo'yicha integralni  $\delta$ -funksiyaning xossasidan foydalanib hisoblab, quyidagini hosil qilamiz:

$$\varepsilon^{\Re}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \varepsilon^{\Im}(\mathbf{k}, \omega') \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i(\omega - \omega')] \operatorname{sign}(\tau) d\tau \quad (13.37)$$

Ishora funksiyasining Furye tasviri

$$S_{\operatorname{sign}}(\omega) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{i}{\pi} \frac{\omega}{\omega^2 + \delta^2} = P\left(\frac{1}{x}\right)$$

dan foydalansak, (13.37) ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin bo'ladi:

$$\varepsilon^{\Re}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{1}{\pi} \int \frac{\varepsilon^{\Im}(\mathbf{k}, \omega')}{\omega - \omega'} d\omega'. \quad (13.38)$$

Shu yo'l bilan  $\varepsilon^{\Im}(\mathbf{k}, \omega)$  ni  $\varepsilon^{\Re}(\mathbf{k}, \omega)$  orqali ifodalash mumkin:

$$\varepsilon^{\Im}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\varepsilon^{\Re}(\mathbf{k}, \omega')}{\omega - \omega'} d\omega'. \quad (13.39)$$

(13.37) va (13.38) *Kramers – Kronig* yoki *dispersion* munosabatlari deb ataladi. Ular dielektrik singdiruvchanlikning haqiqiy va mavhum qismlarini bog'lovchi munosabatlari bo'lib muhitda elektromagnit nurlanishning sochilish va yutilish xarakteristikalarini bog'lovchi munosabatlardir. Shunga o'xshash muhitning boshqa xarakteristikalari uchun dispersion munosabatlarni olish mumkin. Ammo bunday munosabatlarni har bir kattalik uchun olishda muhitning xususiyatlari inobatga olinishi kerak.

*Kramers-Kronig* munosabatlari elektrordinamikadagi eng umumiy formulalari bo'lib hisoblanadi. Ularni olishda faqat ikkita faraz qilindi:

1. Elektr induksiya vektorining biror "t" vaqt momentidagi qiymati elektr maydonning shu vaqtgacha o'tgan barcha vaqtlardagi qiymatlari

bilan aniqlanadi deb oldik. Bu faraz sababiyat prinsipi bilan mos tishadi.

2. Barcha funksiyalarini Furye integraliga yoyish mumkin deb hisobladik. Bu faraz barcha real fizik kattalik uchun o'rinnlidir.

Kramers-Kronig munosabatlari muhim amaliy ahamiyatga ega. Tajribalarda nisbatan oson aniqlanishi mumkin bo'lgan yutilish xarakteristikalari (dielektrik singdiruvchanlikning mavhum qismi) orqali sochlish xarakteristikalarini (13.38) formula orqali tiklash mumkin.

### 13.4 Fazoviy va vaqtiy dispersiyasi

Maksvell tenglamalarining ko'ndalang elektromagnit to'lqin ko'rnishidagi yechimi fazoviy dispersiya mavjud bo'lganda o'rini bo'lmay qoladi. Oldingi mavzulardan bizga ma'lumki, muhitning bir jinsli emasligini xarakterlovchi mashtab to'lqin uzunligi tartibida bo'lganda dispersiya muhim bo'lib qoladi. Bunda fazoning biror nuqtasidagi induksiya fazoning shu nuqtasini qurshab olgan qismidagi maydonga bog'liq bo'ladi. Bu holda elektr maydon kuchlanganligi va induksiya orasidagi bog'lanish ((13.25) ga qarang) nolakal deyiladi.

Makroskopik elektrodinamikada fazoviy dispersiyani inobatga olish shart emas deb hisoblab kelingan. Haqiqatan ham, bir jinsli izotrop muhitlarda yuqori chastotali maydonlar nazariyasi fazoviy dispersiyani inobatga olinmaganda ham juda yaxshi natijalar beradi. Ammo, bir qator muhitlarda (masalan, metall va yarim o'tkazgichlardagi elektronlar gazi) xarakteli masofa  $10^{-6} - 10^{-7} \text{ sm}$  tartibida bo'ladi. Bunday muhitlarda fazoviy dispersiyani hisobga olish yangi effektlarga olib keladi. Bu holat plazmada ham muhim ahamiyat kasb etadi.

Magnit xususiyatiga ega bo'lмаган bir jinsli izotrop muhitda yuqori chastotali elektromagnit maydon masalasini ko'rib chiqamiz. Muhit erkin zaryadlar va toklardan holi bo'lsin. Maksvell tenglamalarini Furye metodi bilan yechamiz. Buning uchun tenglamalarga kirgan kattaliklarni Furye integraliga (elektr maydon kuchlanganligi va elektr induksiya vektori uchun bular (13.26)–(13.27) formulalarda keltirilgan) yoyamiz va ularni Maksvell tenglamalariga qo'yib, quyidagi algebraik

tenglamalar sistemasini topamiz:

$$i[\mathbf{k}H(\mathbf{k}, \omega)] = -i\frac{\omega}{c}\mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega), \quad (13.40)$$

$$i[\mathbf{k}E(\mathbf{k}, \omega)] = i\frac{\omega}{c}\mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega), \quad (13.41)$$

$$(\mathbf{k}\mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega)) = 0, \quad (13.42)$$

$$(\mathbf{k}\mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega)) = 0. \quad (13.43)$$

Bu yerda  $\mathbf{k}$  to'lqin vektor,  $E(\mathbf{k}, \omega)$ ,  $D(\mathbf{k}, \omega)$ ,  $H(\mathbf{k}, \omega)$ ,  $B(\mathbf{k}, \omega)$  mos kattaliklarning Furye tasvirlari. Shunday qilib, xususiy hosilali differential tenglamalarni chiziqli algegebraik tenglamalarga keltirdik (Furye metodining mohiyati ham ana shundadir). Bu tenglamalar  $E(\mathbf{k}, \omega)$  va  $D(\mathbf{k}, \omega)$ ;  $H(\mathbf{k}, \omega)$  va  $B(\mathbf{k}, \omega)$  orasidagi bog'lanishlar bilan to'ldirildi.

Dielektrik singdiruvchanlik  $\mathbf{k}$  ga bog'liq bo'lganligi uchun hatto izotrop muhitda ham skalyar kattalik bo'la olmaydi. Chunki, maydon ta'sirida muhitda uning tarqalish yo'nalashi qolgan yo'nalishlardan farq qiladi, ya'ni ajralgan yo'nalish paydo bo'ladi. Shuning uchun boshida izotrop bo'lgan muhit maydon ta'sirida anizotrop bo'lib qoladi. Uni xarakterlovchi kattaliklar tenzor kattalikka aylanadi. Masala simmetriyasiga ko'ra, bu tenzorlar simmetrik bo'lishi kerak.

To'lqin vektori va Kroneker belgisi yordamida dielektrik singdiruvchanlikni aniqlovchi yagona simmetik tenzor quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon_{\perp}(\mathbf{k}, \omega) \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) + \varepsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega) \frac{k_i k_j}{k^2}. \quad (13.44)$$

Agar ajralgan yo'nalish sifatida  $z$  o'qini tanlasak, (13.44) ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp}(\mathbf{k}, \omega) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp}(\mathbf{k}, \omega) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega) \end{pmatrix}. \quad (13.45)$$

Shunday qilib, boshida izotrop bo'lgan muhit fazoviy dispersiya inobatga olinganda  $\mathbf{k}$  ga nisbatan bo'ylama  $\varepsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega)$  va ko'ndalang  $\varepsilon_{\perp}(\mathbf{k}, \omega)$  dielektrik singdiruvchalik bilan aniqlanar ekan. Agar fazoviy dispersiyani inobatga olmasak, dielektrik singdiruvchanlik skalyar kattalikka o'tadi, ya'ni

$$\varepsilon_{\perp}(\omega) = \varepsilon_{\parallel}(\omega) = \varepsilon(\omega) \quad yoki \quad \varepsilon_{ij}(\omega) = \delta_{ij}\varepsilon(\omega). \quad (13.46)$$

Muhitni magnetik emas ( $\mu = 1$ ) deb, dielektrik singdiruvchanlik tenzori orqali elektr maydon kuchlanganligi va elektr induksiya vektorlarining Furge tasvirlari uchun bog'lanish tenglamasini yozamiz:

$$D_i(k, \omega) = \epsilon_{ij}(k, \omega) E_j. \quad (13.47)$$

Dispersiya qonunini topish uchun (13.41) tenglamani  $k$  ga vektor ravishda ko'paytiramiz:

$$[k[kE]] = \frac{\omega}{c} [kB].$$

Bu tenglamaning chap tomonidagi vektor ko'paytmani ochamiz:

$$k^2 E - k(kE) = -\frac{\omega}{c} [kB].$$

(13.40) tenglamadan foydalanib bu tenglamani qayta yozamiz:

$$k^2 E - k(kE) = \frac{\omega^2}{c^2} D \quad (13.48)$$

Bu tenglamani vektorlarning komponentalari orqali yozamiz:

$$\{k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij}\} E_j = 0. \quad (13.49)$$

Bu yerda (13.47) bog'lanish tenglamasi inobatga olindi. (13.49) notrivial yechimga ega bo'lishi uchun

$$k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij} = 0 \quad (13.50)$$

bo'lishi talab qilinadi. Bu tenglama topilishi lozim bo'lgan dispersiya qonunini aniqlaydi. Elektromagnit to'lqin ta'sirida bo'lgan izotrop muhit uchun dielektrik singdiruvchanlik parallel va perpendikulyar komponentalarga ega bo'lishini, ya'ni (13.44) ni inobatga olib (13.50) ni ikkita tenglamaga ajratamiz:

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\perp}(k, \omega) = 0, \quad (13.51)$$

$$\epsilon_{\parallel}(k, \omega) = \epsilon_{zz}(k, \omega) = 0. \quad (13.52)$$

Bu yerda to'lqin tarqalish yo'nalishi sifatida  $z$  o'qini tanladik. Bu holda ( $k_x = k_y = 0$ ,  $k_z = k$ ).

Topilgan dispersion tenglamalar o'zaro bog'liq bo'lмаган tenglamalar bo'lib, fazoviy dispersiyaga ega bo'lган muhitda bir-biriga bog'liq bo'lмаган ikkita to'lqin jarayoni kechishini bildiradi. Ulardan biri ko'ndalang to'lqinni tarqalishi bo'lib (13.51) tenglama bilan aniqlanadi. Ikkinchisi esa fazoviy dispersiyaga ega bo'lган muhitga hos bo'lган bo'ylama to'lqinning mavjudligiga isora qiladi. Bu jarayon (13.52) dispersion tenglama bilan aniqlanadi. Ko'ndalang to'lqinda elektr maydon kuchlanganligi ikkita komponentaga ega ( $E_x$ ,  $E_y$ ), bo'ylama to'lqinda esa faqat bitta ( $E_z$ ) komponenta bor. Shuni ta'kidlash lozimki, elektr induksiya vektori  $D$  (13.42) tenglamaga ko'ra to'lqin tarqalish yo'naliishi  $k$  ga perpendikulyar yo'nalgan bo'ladi.

Bo'ylama to'lqinning paydo bo'lishi maydon ta'sirida muhitning qutblanishi bilan bog'liq. Fazoviy dispersiyaga ega bo'lган muhitda zaryadlar muvozanatlari, ammo notekis taqsimlangan bo'lsin deb faraz qilamiz. Muhit bir jinsli bo'lмаганligi uchun bu hol tabiiydir. Maydon ta'sirida zaryadlar taqsimotidagi muvozanat buziladi. Muvozanat holatdan chiqqan zaryadlar tebrana boshlaydi. Bu tebranishlar elastik muhitdagi tebranishlar bilan birday xossaga ega bo'ladi. Bunday tebranishlar bo'ylama to'lqinlarning paydo bo'lishiga olib keladi.

Agar muhit bir jinsli bo'lsa, (13.44) tenglama quyidagi ko'rinishga o'tadi:

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) = 0. \quad (13.53)$$

Bu tenglama (13.51) bilan mos tushadi va muhitda tarqaluvchi ko'ndalang to'lqinlar chastotasi  $\omega = \omega(k)$  ni yagona tarzda aniqlaydi. Shu vaqtida  $\epsilon_{\parallel}$  (13.46) ga asosan nolga teng bo'lmaydi. Bu holda (13.50) tenglamaning parallel tashkil etuvchiga tegishli qismi bajarilishi uchun  $E_{\parallel} = 0$  bo'lishi kerak. Demak, bunday muhitda chastotasi (13.51) dispersion qonuniyat bilan aniqluvchi faqat ko'ndalang to'lqinlar tarqalashi mumkin.

### 13.5 Cherenkov-Vavilov nurlanishi

Shaffof muhitda juda katta tezlikda harakatlanayotgan zaryadlanigan zarracha ma'lum sharoitlarda o'ziga xos nur chiqarishi 1937 yilda P.A.Cherenkov va S.I.Vavilov tajribalarda kuzatilgan. Bu hodisaga

I.E.Tamm va I.M.Frank tomonidan nazariy talqin berilgan. Bu nurlanish zaryadlangan zarrachaning harakati bilan bog'liq bo'lgan tormozlanish nurlanishidan tamoman farq qiladi. Tormozlanish nurlanishi harakatdagi elektronning atomlar bilan to'qnashishi natijasida yuz beradi. Cherenkov hodisasida harakatdagi zaryad maydoni ta'sirida muhit nur chiqaradi. Bu ikki nurlanish orasidagi farq ayniqsa og'ir zarrachalar uchun yaqqol seziladi. Chunki, tormozlanish nurlanishining intensivligi zarracha massasining kvadratiga teckari proporsional bo'lganligi og'ir zarrachalar uchun juda kichik bo'ladi (§ 8.9 qarang). Cherenkov nurlanishi esa zarrachaning massasiga bog'liq emas.

Umuman olganda muhitda harakatlanayotgan zaryad o'z energiyasini yo'qotishining bir necha mexanizmlari bor. Birinchidan, zaryadlangan zarracha atomlar bilan to'qnashish natijasida sekinlashadi. Bunda tormozlanish nurlanishi sodir bo'ladi. Bu nurlanish yuqorida qayd qilganimizdek, massaning kvadratiga teskari proporsional bo'ladi va og'ir zarrachalar uchuun juda kichik. Muhittda harakatlanayotgan zaryad moddaning atomlari bilan ta'sirlashish natijasida ularni qutblaydi. Ya'ni zaryad muhitda qandaydir maydon hosil qiladi. Bu maydon o'z navbatida zaryadga ta'sir qilib uning harakatini sekinlashtiradi. Bunda zaryad energiyasining kamayishi harakatni sekinlashtiruvchi kuchlarining ishiga teng bo'ladi. Bunday nurlanish qutblanish nurlanishi deyiladi. Chunki sekinlashtiruvchi kuchni qutblanish maydoni hosil qiladi. Yana bir ko'rinishdagi nurlanish bor. Agar zaryadning harakat tezligi to'lqinning fazaga tezligidan katta bo'lsa, qutblangan soha zaryad ketidan yetib ulgurmaydi. Ya'ni, uchub borayotgan zaryad o'z ortida qutblangan sohani qoldirib ketadi. Bu sohada paydo bo'lgan qo'shimcha energiya ko'ndalang to'lqin ko'rinishida tarqaladi. Nurlanishning bu manbayi Cherenkov nurlanishi deb ataladi. Bu nurlanish zaryadning sekinlashishi bilan bog'liq bo'lmasdan muhitning nurlanishi ekanligini yana bir marta ta'kidlaymiz.

Oddiy mulohazalar yordamida bu nurlanish mohiyatini aniqlashga harakat qilamiz. Shaffof muhitda tarqalayotgan elektromagnit to'lqinning to'lqin vektori va chastotasi orasidagi bog'lanish  $\omega = ck/n(\omega)$  formula bilan aniqlanadi. Bu yerda  $n$  muhitning sindirish ko'rsatgichi bo'lib, shaffof muhitlar uchun haqiqiy bo'ladi. Boshqa tomonidan, zarrachaning harakat yo'nalishida maydonning Furye tasvirining chasto-

tasi  $\omega = k_x v$  munosabat bilan aniqlanadi. Bu maydon muhitda erkin tarqalishi uchun  $\omega = ck/n(\omega)$  va  $\omega = k_x v$  munosabatlar bir-biriga zid bo'lmasligi kerak.  $k > k_x$  ekanligini inobatga olsak,

$$v > \frac{c}{n(\omega)}. \quad (13.54)$$

shart bajarilishi lozimligi kelib chiqadi. Bu yerda  $v$  zarrachaning tezligi. Shunday qilib, zarrachaning tezligi  $\omega$  chastotali to'lqinning faza tezligidan katta bo'lganda shu chastotada nurlanish sodir bo'ladi.

Zarrachaning harakat yo'nalihi va nurlanish yo'nalihi orasidagi burchak  $\theta$  bo'lsin. Ikki yo'l bilan olingan to'lqin vektorning harakat yo'naliishiga proeksiyalari  $k_x = k \cos \theta = n(\omega)\omega \cos \theta/c$  va  $k_x = \omega/v$  ni taqqoslab, quyidagi tenglikni olamiz:

$$\cos \theta = \frac{c}{vn(\omega)}. \quad (13.55)$$

Bunga asosan har bir chastotadagi nirlanishga aniq burchak mos kela-di. Nurlanish oldinga (zarrachaning harakat yo'nalihi) bo'lib, (13.55) ifoda bilan aniqlanuvchi  $\theta$  burchakli konusning sirti bo'ylab tarqaladi. Bunday nurlanishning burchak va chastota bo'yicha taqsimotlari bir-biri bilan aniq bog'lanishda bo'ladi.

Endi nurlanish maydonini hisoblashga o'tamiz. Hisoblashlarni sod-dalashtirish maqsadida, harakat davomida zarrachaning tezligi kattaligi va yo'nalihi bo'yicha o'zgarmaydi deb qaraymiz. Ya'ni uning tezligining o'zgarishini inobatga olmaymiz. Muhitni shaffof deb hisoblaymiz. Bu holda dielektrik singdiruvchalikning mavhum qismi nolga teng bo'ladi.

Zaryadlangan nuqtaviy zarrachaning tekis harakatiga mos keluvchi tok zichligini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\mathbf{j} = ev\delta(\mathbf{r} - vt). \quad (13.56)$$

Bu hol uchun Maksvell tenglamalarini yozamiz:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (13.57)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi ev}{c} \delta(\mathbf{r} - vt) \quad (13.58)$$

Bu yerda  $\mu = 1$  deb olindi. Bu tenglamalarni yechish uchun Furye metodidan foydalanamiz. (13.57), (13.58) tenglamalarga kirgan barcha kattaliklarning o'rniiga ularning Furye integrallarini qo'yamiz. Natijada Furye komponentalar uchun quyidagi algebraik tenglamalarni olamiz:

$$i[\mathbf{kE}(\mathbf{k}, \omega)] = i\frac{\omega}{c}\mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega), \quad (13.59)$$

$$i[\mathbf{kH}(\mathbf{k}, \omega)] = -i\frac{\omega}{c}\mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega) + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega). \quad (13.60)$$

Bu yerda (13.49) tenglamani olgandagi kabi yo'l tutib quyidagi algebraik tenglamani hosil qilamiz:

$$\{k^2\delta_{ij} - k_ik_j - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}\}E_j = i\frac{4\pi\omega}{c^2}j_i. \quad (13.61)$$

Bu yerda

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) = 2\pi e\mathbf{v}\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \quad (13.62)$$

tok zichligining Furye komponentasi. Izotrop muhitlarda  $\varepsilon_{ij}$  ni (13.44) ko'rinishda yozish mumkinligidan foydalanib (13.61) tenglamani qayta yozamiz:

$$\begin{aligned} & \{k^2\delta_{ij} - k_ik_j - \frac{\omega^2\varepsilon_{\perp}}{c^2}\left\{\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{k^2}\right\}E_j - \\ & \quad \frac{\omega^2\varepsilon_{\parallel}}{c^2}\frac{k_ik_j}{k^2}E_j = i\frac{4\pi\omega}{c^2}j_i. \end{aligned} \quad (13.63)$$

Buni vektor ko'rinishda ham yozish mumkin

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2\varepsilon_{\perp}}{c^2}\right)\left(\mathbf{E} - \frac{\mathbf{k}(\mathbf{kE})}{k^2}\right) - \frac{\omega^2\varepsilon_{\parallel}}{c^2}\frac{\mathbf{k}(\mathbf{kE})}{k^2} = i\frac{4\pi\omega}{c^2}\mathbf{j}. \quad (13.64)$$

Ushbu tenglamadan  $(\mathbf{kE})$  ni yo'qotish uchun unga  $\mathbf{k}$  vektorni skalyar ravishda ko'paytiramiz. Bunda (13.64) ning chap tomonidagi birinchi had ikkinchi qavs hisobiga nolga teng bo'ladi. Natijada

$$(\mathbf{kE}) = -i\frac{4\pi}{\omega\varepsilon_{\parallel}}(\mathbf{kj}) \quad (13.65)$$

olamiz. Buni (13.64) ga qo'yamiz va hosil bo'lgan tenglamadan  $\mathbf{E}$  ni topamiz:

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = -i \frac{4\pi\omega}{k^2} \left\{ \frac{\mathbf{k}(kj(\mathbf{k}, \omega))}{\omega^2 \varepsilon_{||}} + \frac{\mathbf{k}(kj(\mathbf{k}, \omega)) - k^2 j(\mathbf{k}, \omega)}{c^2 (k^2 - \frac{\omega^2 \varepsilon_{\perp}}{c^2})} \right\}. \quad (13.66)$$

Endi maydonning Furye tasviridan real maydon  $\mathbf{E}(r, t)$  ga o'tamiz. Bunda maydonni ikki qismga alratamiz. Birinchi qism (13.66) ifodadagi bиринчи had bilan bog'liq bo'lib quyidagiga teng bo'ladi:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= -\frac{4\pi i}{(2\pi)^4} \int \frac{dk d\omega}{k^2} \frac{\mathbf{k}(kj)}{\omega \varepsilon_{||}} \exp[i(kr - \omega t)] = \\ &- \frac{ie}{2\pi^2} \int \frac{dk}{k^2} \frac{\mathbf{k}}{\varepsilon_{||}(\mathbf{k}, kv)} \exp[i(kr - kv t)]. \end{aligned} \quad (13.67)$$

Bu yerda tok zichligining Furye tasviri (13.62) ni inobatga olib  $\omega$  bo'yicha integralni hisobladik.  $\varepsilon_{||}(\mathbf{k}, kv)$  dielektrik singdiruvchanlik  $\varepsilon_{||}(\mathbf{k}, \omega)$  ning  $\omega = kv$  dagi qiymati.  $\mathbf{E}_1$  ni uchib ketayotgan zaryadlangan zarracha hosil qiladi. Bu maydon o'z navbatida zaryadga ta'sir ko'rsatadi. Bunda zaryad o'z energiyasini kamaytiradi. Bu energiya bo'ylama qutblanishni paydo bo'lishiga sarf bo'ladi.

Endi (13.66) ifodadagi ikkinchi hadni ko'rib chiqamiz. Bu holda  $\mathbf{E}_1$  ni hisoblashdagi amallarni bajarib  $\mathbf{E}_2$  ni aniqlaymiz:

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{ie}{2\pi^2} \int dk \frac{(kv)}{k^2} \frac{k^2 v - k(kv)}{k^2 c^2 - (kv)^2 \varepsilon_{\perp}(\mathbf{k}, kv)} \exp[i(kr - kv t)]. \quad (13.68)$$

Bu maydonning zarracha ustida bajarayotgan ishi va mos ravishda ener-gyaning kamayishi, Cherenkov nurlanishini aniqlaydi. Bunda muhitda ko'ndalang elektromagnit to'lqin hosil bo'ladi, ya'ni qutblangan muhit nurlanadi.

Fazoviy dispersiyani hisobga olish ikki xil tabiatga ega bo'lgan maydonlarni bir-biridan ajtatish imkoniyatini berdi. Agar muhit fazoviy dispersiyaga ega emas deb qarasak, yuqorida olingan natijalar o'z kuchini saqlaydi. Faqat maydon uchun olingan ifodalarda

$$\varepsilon_{\perp}(\mathbf{k}, kv) = \varepsilon_{||}(\mathbf{k}, kv) = \varepsilon(kv) \quad (13.69)$$

deb hisoblash kerak.

Cherenkov–Vavilov nurlanishining asosiy xossalari sanab o'tamiz:

1. Bu nurlanish uchun chegaraviy tezlik mavjud. Zarrachaning muhitdagi tezligi  $v > v_{ch} = c/n$  shartni qanoatlantirganda bunday nurlanish paydo bo'ladi;

2. Nurlanish zarrachaning massasiga bog'liq emas;

3. Nurlanish spektri elektrromagnit to'lqinlarning ko'rish va ultrabinafsha sohasiga to'g'ri keladi. Bundan qisqa to'lqinlar uchun  $n < 1$  bo'lib qoladi va nurlanish bo'lmaydi;

4. Berilgan nuqtada paydo bo'ladigan nurlanish uchi zarracha turgan nuqtada bo'lgan va burchagi

$$\cos \theta = \frac{c}{nv}$$

konusning sirti bo'ylab zarrachaning harakat yo'nalishida tarqaladi.

Baholashlar shuni ko'rsatadiki, Cherenkov–Vavilov nurlanishi hisobiga zarracha energiyasining kamayishi, hamma mexanizmlar hisobiga energiya yo'qotilishining faqat 0,1% ni tashkil qiladi. Shunga qaramasdan, bu tipdagi nurlanishning yuqorida qayd qilingan xossalari uni barcha nurlanishlar ichidan ajratib olish imkoniyatini beradi. Bu effekt elementar zarrachalarni qayd qiluvchi o'ta sezgir asbob – Cherenkov sanog'ichini yaratilishiga asos bo'lgan.

### 13.6 13-bobga oid masalalar va savollar

1. Kompleks dielektrik singdiruvchanlikning haqiqiy qismi chastotaning juft, mavhum qismi esa toq funksiyasi ekanligini ko'rsating.
2. Agar dielektrik singdiruvchanlik  $\epsilon(t) = A \exp(-t/\tau)$  bilan aniqlansa,  $\epsilon(\omega)$  nimaga teng bo'ladi?  $A$  va  $\tau$  o'zgarmas kattaliklar.
3. Shaffof muhitda ( $\gamma = 0$ )  $z$  o'qi bo'ylab tarqalayotgan chiziqli qutblangan yassi monoxromatik elektrromagnit to'lqin tenglamasini yozing.
4. Sindirish ko'rsatgichi  $n$  bo'lgan nomagnit muhitda ( $\mu = 1$ )  $x$  o'qining manfiy yo'nalishida tarqalayotgan doiraviy ( $o'ng$ ) qutblangan yassi monoxromatik elektrromagnit to'lqin tenglamasini yozing.
5. Chiziqli qutblangan yassi monoxromatik elektrromagnit to'lqin maydonida zaryadlangan zarrachaning harakatini aniqlang. Zarrachaning massasi  $m$ , zaryadi  $e$ .
6. Muhit elastik bog'langan zaryadlangan zarrachalardan tashkil topgan. Elastiklik koefitsienti har uchala yo'nalishda turlich. Zarrachalarning konsentratsiyasi  $N$ . Dielektrik singdiruvchalik tenzorini toping.

7. Elastik bog'langan elektronlardan tashkil topgan sistemaning (13.16) ifoda bilan aniqlangan dielektrik singdiruvchanligi dispersion munosabatlarni qanoatlantirishini ko'rsating.
8. Yuqori chastotali maydonlarda fazoviy va vaqt dispersiyasi inobatga olib,  $D(\mathbf{r}, t)$ ,  $E(\mathbf{r}, t)$  va  $B(\mathbf{r}, t)$ ,  $H(\mathbf{r}, t)$  orasidagi bog'lanishlarni yozing va izohlang.
9. Yuqori chastotali maydonlarda fazoviy va vaqt dispersiyasi inobatga olib,  $D(\mathbf{k}, \omega)$ ,  $E(\mathbf{k}, \omega)$  va  $B(\mathbf{k}, \omega)$ ,  $H(\mathbf{k}, \omega)$  orasidagi bog'lanishlarni yozing va izohlang.
10. Kompleks dielektrik singdiruvchanlik qanday xossalarga ega?
11. Siyrap gazlar uchun yorug'lik dispersiyasidan kelib chiqadigan asosiy xulosalar nimalarda iborat?
12. Dispersion munosabatlarni yozing va izohlang.
13. Bir jinsli muhitda dielektrik singdiruvchanlik tenzori nima uchun ko'ndalang va bo'ylama tashkil etuvchilarga ajraladi? Bu qanday natijalarga olib keladi?
14. Ko'ndalang va bo'ylama elektromagnit to'lqinlarning paydo bo'lishi sababini tushuntiring.
15. Cherenkov–Vavilov nurlanishini tushuntiring.
16. Cherenkov–Vavilov nurlanishi zarrachagami yoki muhitga tegishli?

## 14-bob

### Nochiziqli optika

#### 14.1 Nochiziqli dielektrik singdiruvchanlik

Shu vaqtgacha dielektriklarda ko'rilgan elektromagnit maydon nazariyasi elektr induksiyasi vektori  $D$  va elektr maydon kuchlanganligi  $E$  ( $B$  va  $H$  mos ravishda) orasidagi bog'lanish chiziqli deb qaralgan. Maydon intensivligi katta bo'lganda bog'lanish nochiziqli bo'ladi. Bu holda paydo bo'ladigan hodisalarni o'rganish uchun yuqorida ko'rilgan nazariya umumlashtirilishi lozim. Muhit parametrlari va maydon kattaliklari qanday bo'lganda nazariyani bunday umumlashtirishga zaruriyat paydo bo'lishini baholab ko'ramiz.

Bundan keyin yorug'lik uchun shaffof dielektriklarni ko'ramiz. Bunday muhitda yorug'likning tarqalish masofasi yetaricha katta bo'ladi. Muhitda to'lqin tarqalish davomida bir qator effektlar to'planish xususiyatiga ega. Masalan, to'lqin tarqalishida dispersiya, nochiziqlilik va so'nishning ta'siri shular jumlasiga kiradi. Ya'ni, bu effektlar nisbatan kichik bo'lsada, to'lqin tarqalishi davomida to'planib borib katta effektlarga olib kelishi mumkin. Kristall panjara doimiysi  $a \approx 3 \cdot 10^{-8} \text{ sm}$ , yorug'lik spektrining ko'rish sohasidagi to'lqin uzunligi  $\lambda \sim 5 \cdot 10^{-5} \text{ sm}$ . Demak,  $a \ll \lambda$  bo'lganligi uchun kristallni uzlusiz muhit deb qarash mumkin. Amalda erishib bo'ladigan elektr maydon qiymati  $10^6 \text{ V/sm}$  tartibadir. Maydonning bunday qiymatlarida dielektrik buziladi, u teshilib o'tkazgichga aylanadi. Muhitning dielektriklik xossasi buzulmasligi uchun tashqi maydon  $10^6 \text{ V/sm}$  dan kichik bo'lishi kerak. Atom ichidagi maydon  $10^9 \text{ V/sm}$  tartibida bo'lganligi uchun tashqi maydonni kuchsiz g'alayon deb qarash mumkin. Shunday qilib, biz ko'rigan masalalarda tashqi maydon kuchlanganligi hali ham kichik ekan. Ammo, yuqorida ta'kidlaganimizdek, yig'ilish tabiatiga ega bo'lgan effektlar borligini nazarda tutsak, qutblanish vektorini tashqi maydon kuchlanganligining darajalari bo'yicha yoyilgan qatorda maydonning birinchi darajasidan yuqori hadlarni ham inobatga olish kerak bo'ladi.

Birlik hajmdagi dipol momenti - qutblanish vektori  $P(r, t)$  ni faqat shu nuqtadagi va shu vaqt momentidagi elektr maydon  $E$  ga bog'liq deb olamiz:

$$P_\alpha(r, t) = F_\alpha(E(r, t)).$$

Boshqacha qilib gapirsak, to'lqinning tarqalish tezligi chekli bo'lishi bilan bog'liq bo'lgan kechikish vaqtini hisobga olmaymiz. Qutblanish vektorini tashqi elektr maydon kuchlanganligi  $E$  ning darajalari bo'yicha qatorga yoyib bir necha hadlar bilan chegaralanamiz:

$$\begin{aligned} P_\alpha(r, t) = & P_\alpha^{(0)} + \sum_{\beta} \left( \frac{\partial P_\alpha}{\partial E_\beta} \right) E_\beta + \frac{1}{2!} \sum_{\beta, \gamma} \left( \frac{\partial^2 P_\alpha}{\partial E_\beta \partial E_\gamma} \right) E_\beta E_\gamma + \\ & \frac{1}{3!} \sum_{\beta, \gamma, \delta} \left( \frac{\partial^3 P_\alpha}{\partial E_\beta \partial E_\gamma \partial E_\delta} \right) E_\beta E_\gamma E_\delta + \dots \end{aligned} \quad (14.1)$$

Bu yerda  $\alpha = \{x, y, z\}$ .

Ko'pgina dielektrik muhitlar uchun birinchi had nolga teng bo'ladi. Segnetoelektriklar bundan mustasno, chunki ularda tashqi maydon bo'l-maganda ham faza o'tishlar hisobiga spontan holda (o'z - o'zidan) dipol momenti paydo bo'ladi.

Bundan keyin bizni vaqt va fazoda sodir bo'lувчи nochiziqli ho-disalar qiziqtiradi. Ular, masalan lazer (katta intensivlikdagi yorug'lik manbayi) maydoni ta'sirida yuzaga kelishi mumkin. Qator (14.1) dagi ikkinchi, uchinchi va keyingi hadlar fazo va vaqtida o'zgaruvchi maydonlarning ta'sirini aniqlaydi. Bu qatorni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\begin{aligned} P_\alpha(r, t) = & P_\alpha^{(0)} + \sum_{\beta} \chi_{\alpha\beta}^{(1)} E_\beta + \frac{1}{2!} \sum_{\beta, \gamma} \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} E_\beta E_\gamma + \\ & \frac{1}{3!} \sum_{\beta, \gamma, \delta} \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)} E_\beta E_\gamma E_\delta + \dots \end{aligned} \quad (14.2)$$

Bu yerda  $\chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}$  uchinchi va  $\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}$  to'rtinchchi rangli tensorlar bo'lib, mos ravishda ikkinchi va uchinchi tartibli kirituvchanlik (dielektrik kirituvchanlik), yoki qutblanish koefitsienti deb ataladi.  $\chi_{\alpha\beta}^{(1)}$  esa ikkinchi rangli tehzoz bo'lib, dielektriklarning chiziqli (oddiy) nazariyada kirituvchanlikni (qutblanish koefitsienti) beradi. Izotrop muhitlarda (gaz,

suyuqlik) bu tenzor diagonal ko‘rinishni qabul qiladi:

$$\chi_{\alpha\beta}^{(1)} = \chi^{(1)} \delta_{\alpha\beta}.$$

$P$  va  $E$  qutb, ya’ni inversiya operatsiyasiga ( $r \rightarrow -r$ ) nisbatan toq (qutb) vektorlar bo‘lgani uchun  $\chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}$  inversiya markazi bo‘lmagan muhitlarda (gazlar, suyuqliklar, Si, Ge tipdagi yarimo‘tkazgichlar va boshqa kristallar) nolga teng bo‘ladi.

Qutblanish vektorini ikki qismga ajratish mumkin:

$$\begin{aligned} P_\alpha(r, t) &= P_\alpha^{(ch)}(r, t) + P_\alpha^{(nch)}(r, t), \\ P_\alpha^{(ch)}(r, t) &= \sum_{\beta} \chi_{\alpha\beta}^{(1)} E_{\beta}(r, t), \\ P_\alpha^{(nch)}(r, t) &= \sum_{\beta, \gamma} \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} E_{\beta}(r, t) E_{\gamma}(r, t) + \\ &\quad \sum_{\beta, \gamma, \delta} \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)} E_{\beta}(r, t) E_{\gamma}(r, t) E_{\delta}(r, t). \end{aligned} \quad (14.3)$$

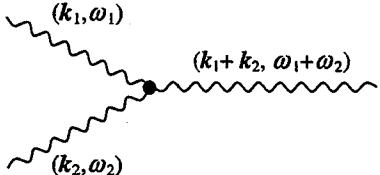
Dielektrik singdiruvchanlik tenzori

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + 4\pi \chi_{\alpha\beta}(E). \quad (14.4)$$

Biz ko‘rayotgan model sodda bo‘lib, tashqi elektronnit maydonda muhitning javobi oniy tarzda bo‘ladi. Real hollarda albatta kechikish mavjud bo‘ladi. Shu bilan birga bog‘lanish tenglamasi fazo bo‘yicha ham nolokal xarakterga ega bo‘ladi. Bunday holda  $P_\alpha^{(nch)}(r, t)$  ning nochiziqli qismi uchun umumiy ifodani quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\begin{aligned} P_\alpha^{(nch)}(r, t) &= \sum_{\beta\gamma} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 dt_1 dt_2 \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(|\mathbf{R}_1|, \tau_1; |\mathbf{R}_2|, \tau_2) \times \\ &\quad E_{\beta}(\mathbf{r}_1, t_1) E_{\gamma}(\mathbf{r}_2, t_2) + \sum_{\beta, \gamma, \delta} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 dt_1 dt_2 dt_3 \times \\ &\quad \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(|\mathbf{R}_1|, \tau_1; |\mathbf{R}_2|, \tau_2; |\mathbf{R}_3|, \tau_3) E_{\beta}(\mathbf{r}_1, t_1) E_{\gamma}(\mathbf{r}_2, t_2) E_{\delta}(\mathbf{r}_3, t_3). \end{aligned} \quad (14.5)$$

Bu yerda  $\mathbf{R}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$ ,  $\tau_i = t - t_i$ .



14.1-rasm:

Nochiziqli kirituvchanlikning chas-totaga bog'lanishini analiz qilish uchun Furye integrali metodini tatbiq qilamiz ((A.143) qarang). Elektr maydon kuch-langanligi  $E$ , nochiziqli kirituvchanlik  $\chi^{(2)}$  va  $\chi^{(3)}$  larning Furye integrallarini (14.5) ga qo'yib quyidagini hosil qila-miz:

$$P_{\alpha}^{(nch)}(r, t) = \frac{1}{(2\pi)^8} \int dk_1 dk_2 d\omega_1 dt_1 d\omega_2 \exp[i(k_1 + k_2)r - i(\omega_1 + \omega_2)t] \times$$

$$\sum_{\beta\gamma} \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(k_1, \omega_1; k_2, \omega_2) E_{\beta}(k_1, \omega_1) E_{\gamma}(k_2, \omega_2) + \dots \quad (14.6)$$

Bu ifodaning o'ng tomoniga fizik ma'no berish mumkin. Birinchi had to'lqin vektorlari va chastotalari mos ravishda  $(k_1, \omega_1)$  va  $(k_2, \omega_2)$  bo'lgan ikkita yassi to'lqinning nochiziqlilik hisobiga aralashishi natijasida to'lqin vektori  $k = k_1 + k_2$  va chastotasi  $\omega = \omega_1 + \omega_2$  bo'lgan uchinchi to'lqinning tug'ilishini (generatsiyasi) ifodalaydi. Bu jarayon 14.1-rasmida sxematik ravishda tasvirlangan. (14.6) da yozilmagan yuqori tartibdagi hadlar ustida keyingi mavzularda to'xtalib o'tamiz.

Real to'lqin ikkita eksponentaning superpozitsiyasi bilan aniqla-nadi:

$$E_{\beta}^{(a)}(r, t) = \frac{1}{2} E_{\beta}^{(a)} \left[ \exp[i(k_a r - \omega_a t + \varphi_a)] + k.q. \right] = \\ E_{\beta}^{(a)} \cos(k_a r - \omega_a t + \varphi_a). \quad (14.7)$$

Bu maydonning Furye tasviri quyidagicha yoziladi

$$E_{\beta}^{(a)}(k, \omega) = \frac{1}{2} E_{\beta}^{(a)} [\exp(i\varphi_a) \delta(k - k_a) \delta(\omega - \omega_a) + k.q.] . \quad (14.8)$$

Bu yerda "k.q" ifodaning kompleks qo'shmasini bildiradi.

Kvadratik nochiziqlikga ega bo'lgan muhitda ikkita to'lqin tarqala-yotgan bo'lsin:

$$E_{\beta}(r, t) = E_{\beta}^{(a)} \cos(k_a r - \omega_a t + \varphi_a) + E_{\beta}^{(b)} \cos(k_b r - \omega_b t + \varphi_b). \quad (14.9)$$

Bu holda quyidagi jarajonlar kechishi mumkin:

1. Ikkita to'lqindan birortasi, masalan (*a*) to'lqinning o'z - o'ziga ta'siri. Bunda ikki hol bo'lishi mumkin:

**a)** to'lqin o'z - o'zi bilan qo'shilib ikkinchi garmonika to'lqini paydo bo'ladi, ya'ni

$$E_{\beta}^{(a)} E_{\gamma}^{(a)} \rightarrow k_a + k_a = 2k_a, \quad \omega_a + \omega_a = 2\omega.$$

**b)** to'lqin o'z - o'zini yo'qotadi, ya'ni

$$E_{\beta}^{(a)} E_{\gamma}^{(a)} \rightarrow k_a - k_a = 0, \quad \omega_a - \omega_a = 0.$$

Bu holda fazoda bir jinsli va vaqt bo'yicha o'zgarmas elektr maydon hosil bo'ladi.

2. Bu jarayonlar (*b*) to'lqin uchun ham o'rinni.

3. (*a*) va (*b*) to'lqinlarning o'zaro ta'sirlashuvi  $\{E_{\beta}^{(a,b)} E_{\gamma}^{(b,a)}\}$  yuz beradi. Bunda dipol momentiga nochiziqli hissa qo'shuvchi yig'indi va ayirma chastotali to'lqinlar hosil bo'ladi:  $\{\pm(k_a \pm k_b), \pm(\omega_a \pm \omega_b)\}$ .

Uchinchi tartibli nochiziqligi ega bo'lgan muhitlarda yuqoridaidan murakkabroq, ya'ni to'lqinlarning o'z - o'ziga ta'siri va uchta to'lqinning bir-biri bilan nochiziqli ta'sirlashuvi kabi jarayonlar sodir bo'ladi.

Nochiziqli kirituvchanlikning chastotaga bog'lanishi sodda modelda Blombergen tomonidan ko'rib chiqilgan.

$\chi^{(2)}$  va  $\chi^{(3)}$  kattaliklarning qiymatlarining tartibini baholaymiz. Atom ichidagi maydonni  $E_a$  orqali belgilaymiz:

$$\chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} \rightarrow \langle \chi^{(2)} \rangle \sim \frac{\langle \chi^{(1)} \rangle}{E_a} \quad \text{va} \quad \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)} \rightarrow \langle \chi^{(3)} \rangle \sim \frac{\langle \chi^{(1)} \rangle}{E_a^2}.$$

... o'rtacha qiymatni bildiradi. Qattiq jismlar uchun  $\langle \chi^{(1)} \rangle \sim 0.1 \div 1$ ,  $E_a \sim 10^9 V/sm$ . Tashqi maydonning maksimal qiymati  $E \sim 10^6 V/sm$ . U holda  $\langle \chi^{(2)} \rangle \sim 3 \cdot 10^{-8} - 3 \cdot 10^{-7}$  CGSE va  $\langle \chi^{(3)} \rangle \simeq 10^{-13}$  CGSE deb baholash mumkin. Bu baholashlar ko'rilayotgan effektlar kichik bo'lgan holda g'ayalonlar nazariyasini tatbiq qilish mumkinligini ko'rsatadi. Ammo, muhitning nochiziqliliqi kichik bo'lishiga qaramasdan maydonning tarqalish masofasi va vaqt yetarlicha katta bo'lganda uning to'lqinga ta'siri yig'ilib boradi va pirovardida kuzatiladigan effektlarga olib keladi.

Endi yuqorida qayd qilingan to'lqin dastalarining o'z – o'ziga ta'siri natijasida ikkinchi garmonikaning generatsiyasi, soliton (zarracha xossasiga ega bo'lgan yakkalangan nochiziqli to'lqin) larning paydo bo'lishi va to'lqin kollapsi kabi fundamental jarayonlarni ko'rishga o'tamiz.

## 14.2 Ikkinchi garmonikaning generatsiyasi

Avval kvadratik nochiziqli muhitda amplitudasi sekin o'zgaruvchi to'lqinlar uchun tenglamalarni keltirib chiqaramiz. Buning uchun Maks-vell tenglamalarini yozamiz:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0,$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{D} = 0.$$

Bu tenglamalarning birinchisidan rotor olib uchinchi tenglama yordamida undan magnit maydonini yo'qtamiz. Natijada elektr maydon uchun quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$-\Delta \mathbf{E} + \text{grad div } \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}, \quad (14.10)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = 0. \quad (14.11)$$

Bu yerda muhit dielektrik bo'lganligi uchun magnit singdiruvchanlik  $\mu = 1$  deb oldik.

To'lqinning elektr maydonini Furge integraliga yoyamiz:

$$E_\alpha(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_\alpha(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

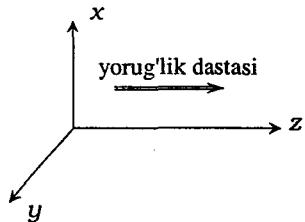
Buni (14.10) va (14.11) ga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\text{div} (\varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)) = -4\pi \text{div } \mathbf{P}^{(nch)}(\mathbf{r}, \omega), \quad (14.12)$$

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) - \text{grad}(\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)) + \frac{\omega^2 \varepsilon(\omega)}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{4\pi\omega^2}{c^2} \mathbf{P}^{(nch)}(\mathbf{r}, \omega). \quad (14.13)$$

Bu yerda  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$  bog'lanish umumiylar xarakterga ega ekanligini va  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(ch)} + \mathbf{P}^{(nch)}$  ni inobatga oldik.

Chastotasi  $\omega_1$  va to'lqin vektori  $k_1$  bo'lgan lazer hosil qilayotgan yorug'lilik das-tasining muhitga ta'sirini ko'rib chiqamiz. Asosiy garmonikadagi nurlanish intensivligini pasayishini inobatga olmaslik uchun ikkinchi garmonikaning intensivligini kichik deb faraz qilamiz. Masalaning geometriyasi 14.2-rasmda tasvirlangan.



14.2-rasm:

Qutblanish vektorining nochiziqli qismini va elektr maydonni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) &= \hat{\mathbf{e}} E(\omega_1) e^{i(k_1 z - \omega_1 t)} + \hat{\mathbf{e}} E^*(\omega_1) e^{-i(k_1 z - \omega_1 t)}, \\ P_{\alpha}^{(nch)}(z, t) &= E^2(\omega_1) \sum_{\beta, \gamma} \chi_{\alpha\beta\gamma} \hat{\mathbf{e}}_{\beta} \hat{\mathbf{e}}_{\gamma} e^{2i(k_1 z - \omega_1 t)} + k.q.. \quad (14.14) \end{aligned}$$

Bu yerda  $\hat{\mathbf{e}}$  to'lqining qutblanish yo'nalişidagi birlik vektor.

Izotrop dielektrikda to'lqin  $z$  o'qi bo'ylab tarqalganda, elektr maydon ( $xy$ ) tekisligida yotadi. Ma'lumki, tushayotgan to'lqin ko'ndalang bo'lishiga qaramasdan, muhitning qutblanish vektorining ko'ndalang va bo'ylama tashkil etuvchilari paydo bo'ladi:

$$\mathbf{P}^{(nch)} = \hat{\mathbf{z}} P_{\parallel}^{(nch)} + \mathbf{P}_{\perp}^{(nch)}. \quad (14.15)$$

Shu sababli  $\omega_2 = 2\omega_1$  chastotali ikkinchi garmonika maydonining ko'ndalang va parallel tashkil etuvchilari bo'ladi, ya'ni

$$\mathbf{E}(z, \omega_2) = \hat{\mathbf{z}} E_{\parallel}(z, \omega_2) + \mathbf{E}_{\perp}(z, \omega_2). \quad (14.16)$$

Bularni inobatga olsak, boshlang'ich to'lqin tenglamalari (14.12) va (14.13) quyidagi ko'rinishni qabul qiladi:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_{\perp}}{\partial z^2} + \frac{\omega_2^2}{c^2} (\epsilon_{\perp}(\omega_2) \mathbf{E}_{\perp} + 4\pi \mathbf{P}_{\perp}^{(nch)}) + \frac{\omega_2^2}{c^2} (\epsilon_{\parallel}(\omega_2) \mathbf{E}_{\parallel} + 4\pi \mathbf{P}_{\parallel}^{(nch)}) = 0, \quad (14.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\epsilon_{\parallel}(\omega_2) \mathbf{E}_{\parallel} + 4\pi \mathbf{P}_{\parallel}^{(nch)}) = 0. \quad (14.18)$$

Bu yerda  $\epsilon_{\parallel}$ ,  $\epsilon_{\perp}$  optik o'qga parallel va perpendikulyar dielektrik singdiruvchanliklardir. Yuqoridaqilarga asosan (14.17) tenglamani parallel va

perpendikulyar tashkil etuvchilarga ajratamiz:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_2^2 \right) E_{\perp} = -\frac{4\pi\omega_2^2}{c^2} P_{\perp}^{(nch)}, \quad (14.19)$$

$$\varepsilon_{\parallel}(\omega_2) E_{\parallel} = -4\pi P_{\parallel}^{(nch)}. \quad (14.20)$$

$$\text{Bu yerda } k_2^2 = \frac{\omega_2^2}{c^2} \varepsilon_{\perp}(\omega_2) = \frac{4\omega_1^2}{c^2} \varepsilon_{\perp}(2\omega_1).$$

Rovon o'zgaruvchi to'lqin konturi (paket) yaqinlashishidan foydalanim (14.19) tenglamani soddalashtiramiz. Bu yaqinlashishga maydon kuchlanganligi amplitudasi rovon o'zgaruvchi to'lqin ko'rinishida yoziladi:

$$E_{\perp}(z, \omega_1) = E(z, \omega_1) e^{ik_1 z}, \quad E_{\perp}(z, \omega_2) = E(z, \omega_2) e^{ik_2 z}. \quad (14.21)$$

Bu yerda  $E(z, \omega_2)$  koordinata  $z$  ning rovon o'zgaruvchi funksiyasi. Endi (14.19) tenglamadagi  $z$  bo'yicha ikkinchi tartibli hosilani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin bo'ladi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_{\perp}}{\partial z^2} &= - \left( k_2^2 E_{\perp} - 2ik_2 \frac{\partial E}{\partial z} - \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \right) e^{ik_2 z} \approx \\ &- \left( k_2^2 E - 2ik_2 \frac{\partial E}{\partial z} \right) e^{ik_2 z}. \end{aligned} \quad (14.22)$$

Bu yerda  $E = \hat{e}^{(2)} E(z, \omega_2)$ ,  $\hat{e}^{(2)} \parallel P_{\perp}^{(nch)}$ . (14.22) ifodani (14.19) ga qo'yamiz:

$$\frac{\partial E(z, \omega_2)}{\partial z} = \frac{2\pi i \omega_2^2}{c^2 k_2} \bar{\chi}^{(2)} E^2(z, \omega_1) e^{i(2k_1 - k_2)z}. \quad (14.23)$$

$$\text{Bu yerda } \bar{\chi}^{(2)} = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} \hat{e}_{\alpha}^{(2)} \hat{e}_{\beta}^{(2)} \hat{e}_{\gamma}^{(2)}.$$

Asosiy garmonika  $E(z, \omega_1)$  ning evolyutsiyasini aniqlovchi tenglamani keltirib chiqaramiz. Sistemaga fazalarning moslashuvlik shartini qo'yamiz:  $2k_1 = k_2$ .  $E(z, \omega_1)$  ning evolyutsiyasi nochiziqli qitblanshdagi  $\exp(-i\omega_1 t)$  ishtirok etgan hadlar bilan aniqlanadi. Bunday hadlar  $\exp(-2i\omega_1 t)$  ga proporsional bo'lgan ikkinchi garmonika Furye

komponentasining  $\sim \exp(+i\omega_1 t)$  ga proporsional bo'lgan asosiy harmonika bilan ta'sirlashuvi natijasida paydo bo'ladi. Bu holda

$$P^{(nch)}(z, \omega_1) = 2\bar{\chi}^{(2)} E(z, \omega_2) E^*(z, \omega_1). \quad (14.24)$$

Tenglama (14.23) ni hosil qilganimizdagi kabi yo'l tutib  $E_{\perp}(z, \omega_1)$  uchun quyidagi tenglamani olamiz:

$$\frac{\partial E(z, \omega_1)}{\partial z} = \frac{4\pi i \omega_1^2}{c^2 k_1} \bar{\chi}^{(2)} E(z, 2\omega_1) E^*(z, \omega_1). \quad (14.25)$$

Olingan ikkita (14.23) va (14.25) tenglamalar bирgalikda

$$E(0, 2\omega_1) = 0, \quad E(0, \omega_1) = E(\omega_1). \quad (14.26)$$

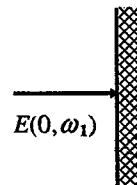
cheгарави shartlar bilan yechilishi kerak (14.3-rasm).

(14.22) va (14.22) tenglamalarni yechish uchun maydonni

$$E(z, \omega_1) = E(\omega_1) f_1(z), \quad E(z, \omega_2) = E(\omega_1) f_2(z) \quad (14.27)$$

ko'rinishda yozib olamiz. Chegaraviy shartlarga ko'ra  $f_1(0) = 1$ ,  $f_2(0) = 0$ . Qulaylik uchun o'lchov birliksiz koordinatani kiritamiz:

$$z = L_c \xi, \quad L_c = \frac{k_1 c^2}{4\pi \omega_1^2 \bar{\chi}^{(2)} E(\omega_1)}. \quad (14.28)$$



Bu yerda  $L_c$  kritik uzunlik deyiladi. Yangi o'zgaruvchilarda (14.23) va (14.25) tenglamalar quyidagi ko'rinishga o'tadi:

$$\frac{\partial f_2}{\partial \xi} = i f_1^2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \xi} = i f_2 f_1^*. \quad (14.29)$$

Bu tenglamalarning ko'rinishi amplituda va faza funksiyalarini kiritishni taqazo qiladi. Ya'ni, tenglamalarning yechimlarini quyidagi ko'rinishda qidirish mumkin

$$f_{1,2} = \rho_{1,2} \exp(i\varphi_{1,2}). \quad (14.30)$$

Buni (14.29) ga qo'yamiz va tenglamalarni haqiqiy va mavhum qismlarga ajratib,  $\rho_{1,2}$  va  $\varphi_{1,2}$  uchun to'rtta tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} &= -\rho_1^2 \sin(2\varphi_1 - \varphi_2), \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} &= \rho_1 \rho_2 \sin(2\varphi_1 - \varphi_2), \\ \rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} &= \rho_1^2 \cos(2\varphi_1 - \varphi_2), \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} &= \rho_2 \cos(2\varphi_1 - \varphi_2).\end{aligned}\tag{14.31}$$

Nisbiy faza  $\psi = 2\varphi_1 - \varphi_2$  kiritib, yuqoridagi to'rtta tenglamani uchta tenglamaga keltirish mumkin:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} &= -\rho_1^2 \sin(\psi), \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} &= \rho_1 \rho_2 \sin(\psi), \\ \frac{\partial \psi}{\partial \xi} &= \left(2\rho_2 - \frac{\rho_1^2}{\rho_2}\right) \cos \psi.\end{aligned}\tag{14.32}$$

Bu tenglamalar yordamida quyidagi tenglikni yozish mumkin:

$$\operatorname{tg} \psi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \frac{2}{\rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} = 0,$$

yoki

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \ln \left( \rho_1^2 \rho_2 \cos \psi \right) \right] = 0.$$

Demak, bu yerda qavs ichidagi kattalik

$$\rho_1^2 \rho_2 \cos \psi = \text{const},\tag{14.33}$$

saqlanuvchi kattalik, ya'ni harakat integrali ekan.

Chegaraviy shart (14.26) va (14.30) ga ko'ra  $\rho_2(0) = 0$ . Demak, harakat integrali const = 0. Bu holat barcha  $\xi$  larda o'rini bo'lishi uchun faqat  $\cos \psi = 0$  bo'lishi mumkin. Chunki, amplituda  $\rho_{1,2} = 0$

bo'la olmaydi. Shunday qilib, hamma  $\xi$  lar uchun  $\psi = \pm\pi/2$  bo'lishi mumkinligi kelib chiqadi. Muhitda to'lqin tarqalishi davomida ikkinchi garmonikaning intensivligi o'sib borishini inobatga olsak, bu ikkita holdan minus ishorani tanlash kerak. U holda

$$\frac{\partial\rho_2}{\partial\xi}=\rho_1^2, \quad \frac{\partial\rho_1}{\partial\xi}=-\rho_1\rho_2. \quad (14.34)$$

Bundan quyidagini topamiz:

$$\rho_2 \frac{\partial\rho_2}{\partial\xi} + \rho_1 \frac{\partial\rho_1}{\partial\xi} = 0,$$

yoki

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = 1. \quad (14.35)$$

Bu tenglik energiyaning saqlanish qonunini anglatadi. (14.35) shart yordamida (14.34) sistemaning birinchisidan  $\rho_1$  ni yo'qotib tenglamani integrallaymiz va  $\rho_{1,2}$  uchun quyidagi ifodalarni topamiz:

$$\rho_2 = \operatorname{th} \xi \quad \rho_1 = \operatorname{sech} \xi. \quad (14.36)$$

Endi boshlang'ich funksiya va o'zgaruvchilarga qaytamiz:

$$\begin{aligned} E(z, \omega_2) &= iE(\omega_1) \operatorname{th}\left(\frac{z}{L_c}\right), \\ E(z, \omega_1) &= E(\omega_1) \operatorname{sech}\left(\frac{z}{L_c}\right), \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (14.37)$$

Bu natijalardan ko'rinib turibdiki,  $z$  ortishi bilan asosiy garmonikaning hamma intensivligi ikkinchi garmonikaga o'tadi. Yuqorida ta'kidlanganidek nochiziqli qutblanishning hissasi juda kichik bo'lishiga qaramasdan, kuchsiz g'alayon uzoq masofalarda yoki katta vaqtarda to'planib boradi va pirovardida katta effektlarga olib keladi. 1963 yili o'tkazilgan tajribada lazerdan chiqayotgan qizil nur dastasi KDP kristallidan o'tkazilganda havo rangga aylanganligi kuzatilgan.

Asosiy garmonikaning energiyasi ikkinchi garmonikaga to'liq o'tishi, yuqorida asosiy garmonikaning energiyasini o'zgarmaydi deb qilinigan farazga zid. Shu sababli olingen natijalar katta masofalar va katta vaqtlar uchun tatbiq qilib bo'lmaydi. Nazariya mukammal bo'lishi

uchun yuqoridagi tenglamalarni olishda asosiy garmonikaning energiya-sini kamayishini hisobga olish kerak. Ammo, yuqorida ishlab chiqilgan nazariya sifat jihatidan tajriba natijalari bilan yaxshi mos tushadi.

Yuqorida ko'rilganga o'xshash bir qator boshqa ta'sirlashishlar ham bor. Masalan, chastotasi va to'lqin vektorlari mos ravishda  $\omega_1$ ,  $k_1$  va  $\omega_2$   $k_2$  bo'lgan ikkita lazer nurlarining ta'sirlashishi natijasida chiqishda chastotasi  $2\omega_1 - \omega_2$  va to'lqin vektori  $2k_1 - k_2$  bo'lgan to'lqin hosil bo'lishini kuzatish mumkin.

### 14.3 Uchinchi tartibli nochiziqli effektlar

Uchunchi tartibli nochiziqli effektlar qutblanish vektorining yoyilmasi (14.1) da elektr maydon kuchlanganligi bo'yicha uchinchi darajali hadlar bilan bog'liq. Izotrop muhitlar uchun  $\chi^{(2)} = 0$  ikkinchi tartibli effektlar kuzatilmaydi. Bu holda induksiya vektori  $D$  ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$D = D^{(ch)} + D^{(nch)} = \epsilon E + \alpha |E|^2 E. \quad (14.38)$$

$\alpha = \bar{\chi}^{(3)}$ . Bu ifodani Maksvell tenglamasiga qo'yamiz:

$$\text{rot rot } E + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = 0 \quad (14.39)$$

$$\text{div } D = 0. \quad (14.40)$$

Bu tenglamalarning  $E = E_0 \exp[i(kr - \omega t)]$ , (yassi monoxromatik to'lqin) ko'rinishidagi aniq yechimi mavjud. Bu yechimni (14.39) tenglamaga qo'yib quyidagi bog'lanishni hosil qilamiz:

$$D = \left( \epsilon + \frac{2c^2\eta}{\omega^2} |E_0|^2 \right) E,$$

Bu yerda

$$\eta = \frac{\omega^2 \alpha}{2c^2}, \quad k^2 = \frac{\omega^2 \epsilon}{c^2} + 2\eta |E_0|^2. \quad (14.41)$$

Chiziqli masaladagi yassi to'lqin ko'rinishidagi yechimdan bu yechimning farqi shundaki, to'lqinning faza tezligi  $v_\phi = \omega/k$  dielektrik singdiruvchanlik bilan bir qatorda to'lqin amplitudasi  $E_0$  ga ham bog'liq.

Agar  $\eta > 0$  bo'lsa, faza tezligi amplituda ortishi bilan kamayadi. Bunda muhit fokuslovchi deyiladi. Agar  $\eta < 0$  bo'lsa, amplituda ortishi bilan tezlik ortadi va muhit defokuslovchi (yo'yuvchi) deyiladi.

Shu bilan birga (14.40) tenglamadan  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$  kelib chiqadi. Demak, bu holda ham chiziqli nazariyadagi kabi maydon ko'ndalang ekan.

Maksvell tenglamalaridan uchinchi darajali nochiziqlikga ega bo'l-gan muhitda yorug'lik to'lqining elektr maydoni uchun to'lqin tenglamasini olish mumkin. Buning uchun (14.39) va (14.40) tenglamalarning yechimini amplitudasi rovon o'zgaruvchi yassi to'lqin ko'rinishida qidi-ramiz:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(r, t) e^{i(k_0 z - \omega t)}. \quad (14.42)$$

Bu yerda  $\mathbf{E}_0(r, t)$  to'lqin tarqalish yo'nalishidagi koordinataning va vaqtning  $(2\pi/k_0$  tartibidagi masofalarda va  $2\pi/\omega_0$  tartibidagi vaqt orali-g'ida) rovon o'zgaruvchi funksiyasi. (14.42) ni Maksvell tenglamalariga qo'yamiz va bir qator soddalashtirishlarni bajaramiz.

Birinchi soddalashtirishni ko'rib chiqamiz:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} \approx -\Delta \mathbf{E}.$$

Bu tenglikda birinchi hadni tashlab yubordik. (14.40) tenglamadan foydalanib, bu yaqinlashish o'rinni ekanini ko'rish mumkin. Haqiqatan ham  $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$  tenglamadan

$$\operatorname{div} \left( \epsilon \mathbf{E} + \frac{2c^2\eta}{\omega^2} |\mathbf{E}_0|^2 \mathbf{E} \right) = 0$$

deb yozish mumkin. Bundan

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= -\frac{2c^2\eta}{\epsilon\omega^2} \operatorname{div} (|\mathbf{E}_0|^2 \mathbf{E}) \approx \\ &\quad -\frac{2c^2\eta}{\epsilon\omega^2} \left[ |\mathbf{E}_0|^2 \operatorname{div} \mathbf{E} + \mathbf{E} \operatorname{grad} (|\mathbf{E}_0|^2) \right] \sim \delta^2. \end{aligned}$$

Bu kattalik ikki sababdan juda kichik, birinchidan, nochiziqli bo'lgani uchun, ikkinchidan, rovon o'zgaruvchi funksiyaning hosilasi ishtiroy etadi. Natijada quyidagi tenglamani olamiz:

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}^{(ch)}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}^{(nch)}}{\partial t^2}. \quad (14.43)$$

Bu yerda

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 D^{(nch)}}{\partial t^2} = -2\eta(\omega)|E_0|^2 E.$$

(14.43) tenglamaning chap tomonini ham soddalashtiramiz:

$$\begin{aligned}\Delta E &= \left( 2ik_0 \frac{\partial E_0}{\partial z} + \frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2} - k_0^2 E_0 + \Delta_{\perp} E_0 \right) e^{i\theta} \approx \\ &\quad \left( 2ik_0 \frac{\partial E_0}{\partial z} - k_0^2 E_0 + \Delta_{\perp} E_0 \right) e^{i\theta}, \\ \frac{\partial^2 D^{(ch)}}{\partial t^2} &= \left( i \frac{\partial(\omega^2 \epsilon)}{\partial \omega} \frac{\partial E_0}{\partial t} - \omega^2 \epsilon E_0 + \frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} + \dots \right) e^{i\theta} \approx \\ &\quad \left( i \frac{\partial(\omega^2 \epsilon)}{\partial \omega} \frac{\partial E_0}{\partial t} - \omega^2 \epsilon E_0 + \dots \right) e^{i\theta}\end{aligned}$$

Bu yerda rovon o'zgaruvchi funksiya  $E_0$  dan vaqt va  $z$  bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosilali hadlar juda kichik bo'lganligi uchun tushirib qoldirdik. Bu yerda

$$\theta = k_0 z - \omega t, \quad \Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Bu soddalashtirishlarni (14.43) tenglamaga qo'yib, sekin o'zgaruvchi amplituda uchun parabolik tipdagi to'lqin tenglamani olamiz:

$$ik_0 \left( \frac{\partial E_0}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial E_0}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \Delta_{\perp} E_0 + \eta(\omega) |E_0|^2 E_0 = 0. \quad (14.44)$$

Bu tenglamani standart ko'rinishda yozish uchun  $z \rightarrow z - v_g t / k_0$  va  $t \rightarrow t$  almashtirish bajaramiz. Bundan tashqari,  $\eta = k_0^2 \alpha / 2$  belgilash va o'lchamsiz o'zgaruvchilar kiritamiz:

$$\tilde{z} = \frac{z}{L_d}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{\xi_0}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{\xi_0}, \quad u = \frac{1}{2} \sqrt{k_0 L_d |\alpha|} |E_0|.$$

$L_d = k_0 \xi_0^2$  diffraksiyon uzunlik (Reley uzunligi),  $\xi_0$  muhitga kirishdagি yorug'lik dastasining kengligi. Yangi o'zgaruvchilarida (14.44) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \Delta_{\perp} u \pm |u|^2 u = 0. \quad (14.45)$$

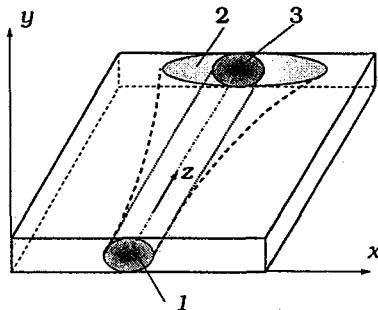
Bu yerda ( $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{z}$ ) ni yana mos ravishda ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) ga almashtirildi. Bu tenglama (2+1) o'lchamli nochiziqli Shredinger tenglamasıdır. Bunda “2” ko'ndalang o'lchamlar soni ( $x$ ,  $y$ ) ni ko'rsatsa, “1” esa to'lqin tarqalish yo'nalişini ( $z$ ) belgilaydi.

Yassi to'lqin o'tkazgichlar uchun (14.45) tenglamani (1+1) ko'rinishga keltirish mumkin. Buning uchun (14.45) tenglamani ko'ndalang yo'nalişlardan birini yassi to'lqin o'tkazgichning xususiy modasi bo'yicha o'rtachalaymiz:

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm |u|^2 u = 0. \quad (14.46)$$

Odatda, bu tenglama nochiziqli Shredinger tenglamasi deb yuritiladi.

Diffraksiya hisobiga yassi yorug'lik dastasi (14.4-rasm - 1)  $x$  yo'nalişida yoyiladi (bu effekt 14.4-rasm - 2). Shu vaqtida nochiziqlilik uni lokalizatsiyalaydi. Ikkala effekt o'zaro bir-birini to'la kompensatsiyalaganda yorug'lik dastasi statsionar tarqaladi (rasm - 14.4 - 3).



14.4-rasm:

## 14.4 Bir o'lchamli nochiziqli Shredinger tenglamasi

### 14.4.1 Modulyatsion barqarorlik

Yassi to'lqin o'tkazgichlarda yorug'lik impulsining tarqalish masalasini ko'rib chiqamiz. Buning uchun (14.46) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma |u|^2 u = 0. \quad (14.47)$$

Bu yerda  $\sigma = \pm 1$ , “+” fokuslovchi, “-” ishora esa defokuslovchi nochiziqli muhitga to'g'ri keladi. (14.47) tenglamaning yechimini yassi to'lqin ko'rinishida qidiramiz, ya'ni

$$u(z, x) = A e^{i(kz + qx)}. \quad (14.48)$$

Buni (14.47) tenglamaga qo'yib, quyidagi dispersiya qonunini olamiz:

$$k = -\frac{q^2}{2} + \sigma A^2. \quad (14.49)$$

Bundan amplitudasi  $A$  bo'lgan to'lqin nochiziqli xossaga ega bo'lgan muhitda shaklini o'zgartirmasdan tarqalishini ko'ramiz. Faqat faza bo'yicha siljish mavjud bo'lib, u ham bo'lsa, to'lqin amplitudasiga (intensivliga) bog'liq ekan. Kichik g'alayonlarga nisbatan bu to'lqinning turg'unligini o'rghanamiz. Bu muammoni o'rghanish uchun chiziqli analizdan foydalanamiz. Bu maqsadda (14.47) tenglamaning yechimini

$$u(z, y) = (A + \delta u(z, y))e^{i(kz+qx)}. \quad (14.50)$$

ko'rinishda yozib olamiz. Bu yerda  $\delta u \ll u$ .

(14.50) ni boshlang'ich to'lqin tenglamasiga qo'yamiz va kichik g'alayon  $\delta u$  bo'yicha chiziqli hadlar bilan chegaralanamiz. Natijada

$$i \frac{\partial \delta u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} + \sigma A^2 \delta u = 0. \quad (14.51)$$

tenglamani olamiz. Kichik g'alayon  $\delta u$  ni haqiqiy va mavhum qismlarga ajratamiz:

$$\delta u = v + iw. \quad (14.52)$$

Buni (14.51) tenglamaga qo'yib,  $v$  va  $w$  uchun tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (14.53)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2\sigma A^2 v = 0. \quad (14.54)$$

Bu sistemaning yechimini yassi to'lqin ko'rinishida qidiramiz:

$$v, w \sim e^{i(Qz+Px)}$$

Buni (14.53) va (14.54) tenglamalarga qo'yib quyidagi dispersion munosabatni olamiz:

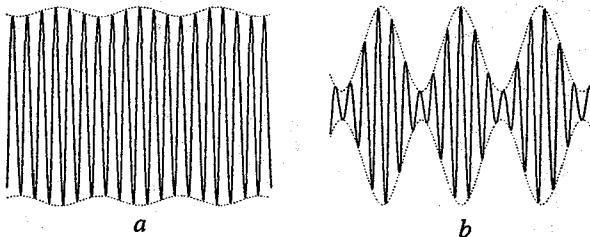
$$Q = \pm \frac{P}{2} \sqrt{P^2 - 4\sigma A^2}. \quad (14.55)$$

Endi nochiziqli to'lqin (14.48) qachon barqaror bo'ladi degan savolni qo'yamiz. To'lqin barqaror bo'lishi uchun  $Q$  haqiqiy bo'lishi kerak. Aksincha,  $Q$  kompleks bo'lsa, to'lqin barqaror bo'lmaydi. Haqiqatan ham  $Q$  kompleks bo'lsa  $\delta u \sim e^{\pm \text{Im}(Q)x}$  bo'ladi. Bu holda to'lqin tarqalish yo'nalishida (+) ishorada uning amplitudasi o'suvchi, (-) ishorada esa kamayuvchi bo'ladi. Ya'ni to'lqin amplitudasi barqaror emas. (14.55) ga ko'ra to'lqin barqaror bo'lmasligi uchun

$$P < 4A^2 \quad (14.56)$$

shart bajarilishi kerak. Bu shart  $\sigma = +1$ , ya'ni sindirish ko'rsatkichining nochiziqli qismi  $n_2 > 0$  bo'lganda bajariladi. Bu holda muhit fokuslovchi bo'ladi.

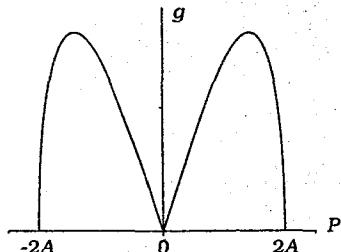
Shunday qilib, fokuslovchi muhitda (14.49) dispersiya qonuni bilan aniqlanuvchi (14.48) nochiziqli yassi to'lqin (14.56) shartni qanoatlantiruvchi katta mashtabli  $l \sim 1/P$  tartibidagi modulyatsiyalarga nisbatan turg'un bo'lmas ekan. Bu modulyatsion nobarqarorlik deb ataladi. 14.5-rasmda ikki hol uchun nochiziqli yassi to'lqinning kichik g'layonlarga nisbatan modilyatsiya nobarqarorligi keltirilgan.



14.5-rasm:

Fokuslovchi muhitda bunday nobarqarorlikning bo'lishi *yorqin solitonlar* - lokalizatsiyalangan statsionar yechimlarining mavjud bo'lishidan darak beradi. 14.6-rasmda modulyatsion nobarqarorlikning kuchayish koeffitsienti

$$g = \text{Im}(Q) = \frac{P}{2} \sqrt{4A^2 - P^2}$$



14.6-rasm:

ning modulyatsiya impulsi  $P$  ga bog'lanishi keltirilgan. Modulyatsion noturg'unlik  $P$  ning ham musbat, ham

manfiy qiymatlarida bor. Kuchayishning maksimal qiymatga  $g = A^2$  ga  $P = \sqrt{2}A$  da erishiladi.

#### 14.4.2 Fazoviy yorqin optik solitonlar ( $\sigma = 1$ )

Tenglama (14.47) ning nochiziqli yassi to'lqin yechimi bilan bir qatorda lokalizatsiyalashgan yechimi ham mavjud ekanligini yuqorida ta'kidlab o'tdik. O'z-o'zini ushlab turuvchi to'lqin o'tkazgich ko'rinish-dagi to'lqin bunday yechimlardan biri hisoblanadi. Bunday yechim fazoviy yorqin soliton deb ataladi. G.Askar'yants 1962 yilda fizik mu-lohazalarga asoslanib yorqin solitonni bashorat qilgan.

Yorug'lik dastasining o'qidan uzoqlashgan sari maydon amplitudi kamaya borganda, muhitning sindirish ko'rsatgichi ( $n = n_0 + n_2|E|^2$ ,  $n_2 < 0$ ) ham kamaysa, muhit o'zini bamisoli yig'uvchi linza kabi tutadi. Bunda yorug'lik dastasi fokuslanadi. Ikkinci tomondan diffraksiya hisobiga dasta yoyiladi. Agar har ikkala effekt bir-biri bilan to'liq muvozanatda bo'lsa, ya'ni yoyilish fokuslanish hisobiga dastaning torayishini kompensatsiyalasa, fazoviy yorqin soliton yuzaga keladi.

Yorqin soliton ko'rinishidagi yechimni quyidagicha qidiramiz:

$$u(x, z) = \rho(x)e^{imz+inx}. \quad (14.57)$$

Bu yerda  $n$  dastaning tarqalish yo'nalishi hamda  $z$  o'qi orasidagi bur-chakka bog'hq bo'lgan parametr. Burchak nolga teng desak,  $n = 0$  bo'ladi. Shu holni ko'rish bilan chegaralanamiz. U holda (14.57) ni (14.47) tenglamaga qo'yib,  $n = 0$  deb quyidagi oddiy differensial tenglmani olamiz:

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} = 2\rho(m - \rho^2). \quad (14.58)$$

Bu tenglamani  $2d\rho/dx$  ga ko'paytirib, bir marta integrallaymiz va natijadan quyidagini olamiz:

$$\frac{d\rho}{dx} = \pm \sqrt{2m\rho^2 - \rho^4 + C}. \quad (14.59)$$

Bu yerda  $C$  integrallash doimiysi. Tenglama (14.58) ni massasi birga teng bo'lgan "zarracha"ning angarmonik potensialdagi harakat tenglamasi deb qarash mumkin, ya'ni  $\frac{d^2\rho}{dx^2} = -\frac{\partial W(\rho)}{\partial \rho}$ . Bu yerda potensial

energiya

$$W(\rho) = \rho^2 \left( \frac{\rho^2}{2} - m \right). \quad (14.60)$$

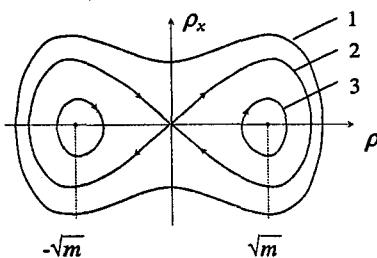
14.7-rasmda (14.59) tenglamaning faza portreti keltirilgan. (14.58) tenglama (14.60) bilan aniqlangan potensial energiyaning ekstremum nuqtalariga to'g'ri keluvchi uchta maxsus nuqtaga ega. Bulardan bittasi  $\rho = 0$  egar va ikkitasi  $\rho_{2,3} = \pm\sqrt{m}$  markaz tipidagi maxsus nuqtalardir.<sup>1</sup>

(14.58) tenglamaning birinchi integrali  $C$  ning turli qiymatlariga turli traektoriyalar to'g'ri keladi: "1" chiziq ( $C>0$ ) "zarracha" turg'un bo'lмаган muvozanat, "3" ( $C<0$ ) esa turg'un muvozanat nuqtalar atrofida davriy harakatda bo'lishini ko'rsatadi. To'lqin amplitudasi ( $\rho$ ) tiliga o'tsak, bu traektoriyalar amplitudasi fazoda tebranuvchi to'lqinni aniqlaydi. "2" traektoriya ( $C=0$ ) ikki xil tipdagi davriy harakatni bir-biridan ajratuvchi chiziq bo'lib, "zarracha" ning separatrissadagi harakatiga mos keladi. (14.58) tenglamaning bunga to'g'ri keluvchi yechimi yorqin solitonni beradi. Bu ko'rinishdagi yechim  $|x| \rightarrow \infty$  da nolga intiladi. Yorqin soliton uchun analitik yechimni olish mumkin.

Bundan keyin bizni  $|x| \rightarrow \infty$  da o'zi va hosilari nolga intiluvchi yechim qiziqtiradi, ya'ni (14.59) tenglamada  $C = 0$  deb olish kerak. Endi to'lqin paketning markazida  $\rho(0) = a$ ,  $d\rho(0)/dx = 0$  bo'lishidan va (14.59) tenglamadan yuqorida kiritilgan oz'garmas kattalik  $m$  ni aniqlaymiz:

$$m = \frac{\rho_0^2}{2} = \frac{a^2}{2} \quad (14.61)$$

$a$  solitonning amplitudasi ekanligi keyinroq ma'lum bo'ladi. Yuqorida-gilarni hisobga olib (14.59) tenglamani integrallaymiz va yorqin soliton



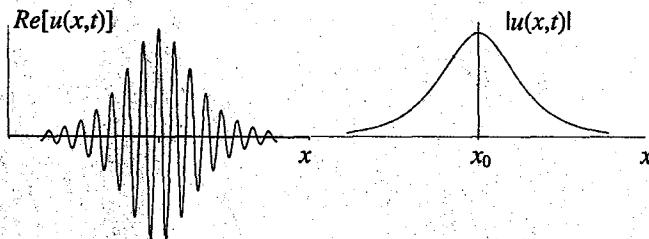
14.7-rasm:

<sup>1</sup>Markaz tipidagi maxsus nuqta sistemaning turg'un muvozanatiga, egar tipidagi maxsus nuqta turg'un bo'lмаган muvozanat holatiga to'g'ri keladi.

uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$u(x, z) = a \operatorname{sech}(ax) \exp\left(\frac{ia^2 z}{2}\right), \quad a = \sqrt{2m}. \quad (14.62)$$

Bu ifoda intensiv yorug'lik dastasining muhitda tarqalishi natijasida hosil bo'ladigan o'z - o'zinii ushlab turuvchi lokalizatsiyalangan to'lqinni ifodalaydi. Bunda yorug'lik dastasining markazida sindirish ko'rsatkichi chekkalardagiga nisbatan katta. Agar boshlang'ich holda yorug'lik das-tasi (14.62) bilan ifodalansa, u diffraksiya hisobiga yoyilmaydi va shakli tarqalish davomida o'zgarmaydi (14.8-rasm).



14.8-rasm: Yorqin soliton

Olingan natijani o'lchamli o'zgaruvchilarda yozish mumkin:

$$E(z, x) = \sqrt{I_0} \operatorname{sech}\left(\frac{x}{\xi_0}\right) \exp\left(\frac{iz}{2L_d}\right).$$

Bu yerda  $\xi_0$  yorug'lik dastasining boshlang'ich kengligi,  $I_0$  maydon intensivligining markazdagi qiymati,  $I_0 = 2/\sqrt{k_0 L_d |\alpha|}$ . Bu kattalik real maydon bilan quyidagi ifoda orqali bog'langan:

$$E_0 = \frac{2u}{\sqrt{k_0 L_d |\alpha|}} = u \sqrt{I_0}.$$

Ikkinchi tomondan  $I_0 \sim 1/\xi_0$  bo'lganligi sababli boshlang'ich yorug'lik dastasining intensivligi qanchalik katta bo'lsa, shunchalik tor yorug'lik dastasi ko'rinishdagi fazoviy yorqin soliton hosil bo'ladi. Biz umuman olganda kutilgan natijani oldik. Haqiqatan ham, dasta qanchalik tor bo'lsa, diffraksiyon effektlar shunchalik kuchli bo'ladi. Buni kompensatsiya qilish uchun intensivlik ham shunga mos ravishda katta bo'lishi kerak.

## 14.5 14-bobga oid masalalar va savollar

1. Nochiziqli effektlarni qanday hollarda o'rganish kerak?
2. Intensivligi yuqori bo'lgan maydonlarda qutblanish vektori qanday hadlardan iborat va har biri qanday fizik jarayonni ifodalaydi?
3. Ikkinchchi garmonika deganda nimani tushunasiz?
4. Chastotalari  $\omega_1$  va  $\omega_2$  bo'lgan to'lqinlardan  $\omega_1 + \omega_2$  chastotali to'lqin qachon hosil bo'ladi?
5. Ikkinchchi garmonikaning generatsiyasida kritik uzunlik qanday aniqlanadi?
6. Yassi to'lqin o'tkazgichlar uchun asosiy va ikkinchi garmonika uchun tenglamalarni yozing.
7. Bu tenglamalarning yechimlarini tushuntiring.
8. To'lqin dastasining o'z-o'zidan fokuslanishi qanday hodisa?
9. Muhitning dispersiyasi qanday fizik jarayonni yuzaga keltiradi?
10. Muhitning nochiziqli xossalari qanday fizik jarayonni yuzaga keltiradi?
11. Modulyatsion barqarorlikni qanday tushunasiz?
12. Modulyatsion nobarqarorlik qanday fizik jarayonlarga sababchi bo'ladi?
13. Barqarorlik shartlari qanday topiladi?
14. Yorqin solitonlar qachon paydo bo'ladi?
15. Fazoviy yorqin soliton nimani bildiradi?
16. Muhit qanday xossaga ega bo'lganda qorong'i solitonlar paydo bo'ladi?
17. Qora va kulrang solitonlar bir-biridan nima bilan farq qiladi?
18. To'lqin kollapsi qanday xossaga ega bo'lgan muhitlarda yuzaga keladi?
19. Ikki o'chamli nochiziqli Shredinger tenglamasi uchun birinchi uchta harakat integralini yozing va ularga fizik ma'no bering.
20. To'lqin kollapsini to'xtatish mumkinmi?

# Masalalarining javoblari va yechimlari

1.1a.  $\Delta l = c \cdot 4 \text{ cek}; \quad 1.1b. v = 0,8c. \quad 1.2. d\Omega = cdtdV = \text{inv.}$

1.3. Tenzorlarni almashtirish qoidasi va (1.49) formuladan foy-dalanish kerak. Misol uchun tenzorning  $S^{00}$  komponentasini almashtirishni ko'rib chiqamiz. Tenzorni ikki vektorning oddiy ko'paytmasi ko'rinishida tasavvur qilamiz, ya'ni  $S^{ik} = A^i B^k$ .

$$A^0 B^0 = \frac{A'^0 + \beta A'^1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \frac{B'^0 + \beta B'^1}{\sqrt{1 - \beta^2}} =$$

$$\frac{A'^0 B'^0 + \beta^2 (A'^0 B'^1 + A'^1 B'^0) + \beta^2 A'^1 B'^1}{1 - \beta^2}.$$

Bu yerda  $S^{00} = A^0 B^0$ ,  $S'^{00} = A'^0 B'^0$ ,  $S'^{01} = A'^0 B'^1$ ,  $S'^{10} = A'^1 B'^0$ ,  $S'^{11} = A'^1 B'^1$  va  $S'^{01} = S'^{10}$  larni hisobga olib  $S^{00}$  uchun almashtirish formulasini topamiz:  $S^{00} = \frac{S'^{00} + \beta(S'^{01} + S'^{10}) + \beta^2 S'^{11}}{1 - \beta^2}$ . Qolgan komponentalar ham shu yo'l bilan topiladi.

1.7.  $x - x_0 = \frac{x' - x'_0 + V(t' - t'_0)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t - t_0 = \frac{t' - t'_0 + V(x' - x'_0)/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}},$

$$y - y_0 = y' - y'_0, \quad z - z_0 = z' - z'_0.$$

1.8.  $x = \frac{c^2}{V} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) t, \quad x' = \frac{c^2}{V} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) t'$ .

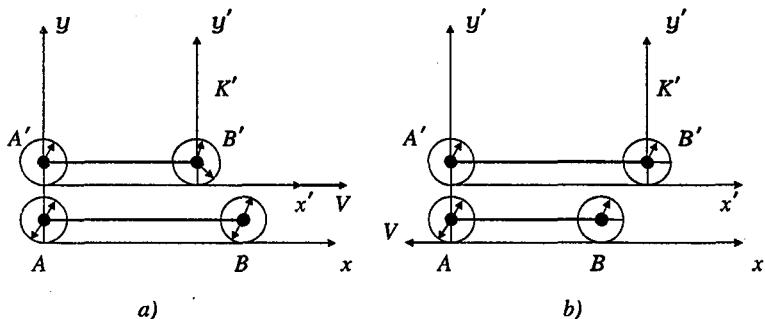
Bu ifodalargan  $t = t'$  nuqta har bir sistemada tekis harakatlanishi kelib chiqadi. Agar shu nuqta bilan bog'langan sanoq sistema kirinsak,  $K$  va  $K'$  sistemalarning har biri bunga nisbatan qarama - qarshi tomoniga  $V_0 = \frac{c^2}{V} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)$  tezlik bilan harakatlanadi. Bu yerda  $V_0$  tezlik  $V$  larning relyativistik yig'disining "yarmini" beradi.

1.9.  $t = \gamma \left( t' + \frac{r' V}{c^2} \right), \quad r = \gamma (r' + V t') + (\gamma - 1) \frac{[r' V] V}{V^2},$   
 $\gamma = \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right)^{-1/2}.$

1.10.  $\varphi = \gamma \left( \varphi' + \frac{A' V}{c} \right), \quad A = \gamma \left( A' + \frac{V}{c} \varphi' \right) + (\gamma - 1) \frac{[A' V] V}{V^2}.$

1.12.  $T' = T \sqrt{1 - V^2/c^2}$

**1.13a.** Mumkin emas. Birdaniga 12 soat 00 min ni bir sanoq sistemadagi ikki soat va boshqa sistemadagi bir soat ko'rsatishi mumkin.



14.9-rasm: 13-masalaga doir chizma

**1.13b.** Fazoviy mos tushayotgan soatlarning ko'rsatishi sanoq sistemani tanlashga bog'liq emas:

$$t'_A = 12 : 00 + l_0/V = 13 : 00, \quad t_A = 12 : 00 + \frac{l_0}{V\gamma} = 12 : 36.$$

Bir vaqtida tushunchasining nisbiyligi tufayli qolgan  $B'$  va  $B$  soatlarning ko'rsatishi sanoq sistemani tanlashga bog'liq.

"Platforma"dagi kuzatuvchiga nisbatan (14.9a-rasm):

$$t'_B = 12 : 21, 6, \quad t_B = 12 : 36, \quad t_B = t_A.$$

"Poezd"dagi kuzatuvchiga nisbatan (14.9b-rasm):

$$t'_B = 13 : 00, \quad t_B = 13 : 14, 4, \quad t'_B = t'_A.$$

**1.13c.** "Platforma"dagi kuzatuvchiga nisbatan:

$$t_A = t_B = 13 : 00, \quad t'_B = 12 : 36, \quad t'_A = 13 : 14, 4.$$

"Poezd"dagi kuzatuvchiga nisbatan:

$$t_A = 12 : 21, 6, \quad t'_A = t'_B = 12 : 36, \quad t_B = 13 : 00.$$

Hamma hollarda ikkita soatning ko'rsatishi bilan solishtirilayotgan soatning ko'rsatishi doimo orqada qoladi.

**1.14.** Parallel tezliklarni qo'shish formulasiga asosan chizg'ichlarining nisbiy tezligi

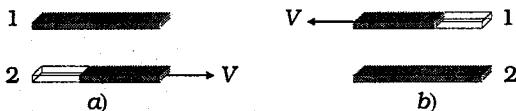
$$v = (V + V)/(1 + \beta^2),$$

bu yerda  $V = l_0/\Delta t$  ekanligini hisobga olib, nisbiy tezlik uchun quyidagi

ifodani hosil qilamiz:

$$v = 2l_0 \Delta t / \left( (\Delta t)^2 + \frac{l_0^2}{c^2} \right).$$

Birinchi chizg'ichdag'i kuzatuvchi uchun (14.10a-rasm), avval chap



14.10-rasm:

so'ngra o'ng uchlari ustma-ust tushadi, ikkinchi chizg'ichdag'i kuzatuvchi uchun (14.10b-rasm) teskari bo'ladi. Agar chizg'ichlar boshqa kuzatuvchiga nisbatan bir xil tezliklar bilan bir-biriga qarab harakatlanayotgan bo'lsa, uchlari bir vaqtida ustma-ust tushadi.

$$1.15. l = l_0 \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}. \quad 1.16. \text{ a)} V = 2 \cdot 0, 9c = 1, 8c, \text{ b)} V = 0, 994c.$$

$$1.19. w^i w_i = -\gamma^4 \left( \dot{v}^2 + \frac{\gamma^2}{c^2} (v \dot{v})^2 \right) < 0, \quad \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}.$$

1.20.  $K$  sistemada fazoviy burchak  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\psi$ .  $K'$  sistemada  $d\Omega' = \sin \theta' d\theta' d\psi'$  ga teng. Burchaklarni almashtirish qonunlariga asosan  $\cos \theta' = \frac{\cos \theta + \beta}{1 + \beta \cos \theta}$  va  $\psi' = \psi$ . Bularni differensiallab quyidagi topiladi:

$$d\Omega' = \sin \theta' d\theta' d\psi' = \frac{1 + \beta^2}{(1 + \beta \cos \theta)^2} d\Omega.$$

$$2.1. p = \frac{1}{c} \sqrt{T(T + 2mc^2)} \quad 2.2. v = \frac{cp}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}}.$$

$$2.3. v = c \sqrt{1 - \left( \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}} \right)^2}, \quad v \approx c \sqrt{\frac{2T}{\mathcal{E}_0}}, \quad v = c \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}} \right)^2 \right).$$

$$2.4. T = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{3}{8} m \frac{v^4}{c^2} + \dots, \quad T = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{8} \frac{p^4}{m^3 c^2} + \dots$$

$$2.5. \text{ a)} 0, 0342 \cdot c, \quad \text{b)} 0, 9999985 \cdot c, \quad \text{c)} 0, 81 \cdot c, \quad \text{d)} 0, 9956 \cdot c.$$

2.6. Burchaklarni almashtirish formulasi (1.39) ni ultra relyativistik hol uchun yozamiz. Uning surat va maxrajini  $p'$  ga ko'paytirib,

quyidagini hosil qilamiz:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta'}{\cos \theta' + \frac{V}{v'}} = \frac{p' \sin \theta'}{p' \cos \theta' + \frac{V \mathcal{E}'}{c^2}}, \quad \mathcal{E} = \gamma(\mathcal{E}' + p' V \cos \theta'),$$

bu yerda  $p' V / v' = \mathcal{E}' V / c^2$  tenglikdan foydalanildi. Masalada keltirilgan taqribiy formuladan foydalanish mumkinlik shartini hosil qilsh uchun burchaklarni almashtirish formulasida  $\theta'$  burchak trigonometrik funksiyalarini  $\theta'/2$  argumentga o'tkazamiz. Hosil bo'lgan ifodadan quyidagi shartni olamiz:

$$\cos \frac{\theta'}{2} \gg \sqrt{\left|1 - \frac{V}{v'}\right|}.$$

Bu yerda  $v' = p' c^2 / \mathcal{E}'$  - zarrachaning  $K'$  sistemadagi tezligi. Ultra relyativistik holda  $\mathcal{E} \approx pc \approx 2\gamma\mathcal{E}' \cos^2(\theta'/2)$ . ko'rinishni oladi.

**2.7.** Natija bir-biridan farq qilmaydi.

**2.9.** Inertsiya markazi sanoq sistemada hosilaviy zarrachalarning energiyasi (2.66) bilan aniqlanadi. Energiya va impuls 4-vektorni tashkil qilganligi sababli, ular uchun Lorentz almashtirishlari o'rinni, ya'ni

$$\mathcal{E}_{10} = \frac{\mathcal{E}_1 - V p_1 \cos \theta_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \mathcal{E}_{20} = \frac{\mathcal{E}_2 - V p_2 \cos \theta_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{V}{c}$$

bu yerdan

$$\cos \theta_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_{10} \sqrt{1 - \beta^2}}{V \sqrt{\mathcal{E}_1^2 - m_1^2 c^4}} c, \quad \cos \theta_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_{20} \sqrt{1 - \beta^2}}{V \sqrt{\mathcal{E}_2^2 - m_2^2 c^4}} c.$$

$\mathcal{E}_{10}$ ,  $\mathcal{E}_{20}$  birinchi va ikkinchi zarrchalarning inersiya markazi sanoq sistemasidagi energiyalari.  $p_1$ ,  $p_2$  va  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$  mos ravishda ularning laboratoriya sanoq sistemasidagi impulsi va energiyalari. Biz bu yerda energiya va impuls orasidagi bog'lanishdan foydalandik.

Olingan natijalarni analiz qilamiz. Burchaklar uchun olingan ifodalardan zarrachalarning laboratoriya sanoq sistemasidagi energiyalarini topmoqchi bo'lsak, ularga nisbatan kvadrat tenglama hosil bo'ladi (birinchi zarracha uchun yozish bilan kifoyalananamiz va kattaliklarning indekslarida "1" ni tushirib qoldiramiz):

$$\mathcal{E}^2 (1 - \beta^2 \cos^2 \theta) - 2\mathcal{E}\mathcal{E}_0 \sqrt{1 - \beta^2} + \mathcal{E}_0^2 (1 - \beta^2) + V^2 m^2 c^2 \cos^2 \theta = 0.$$

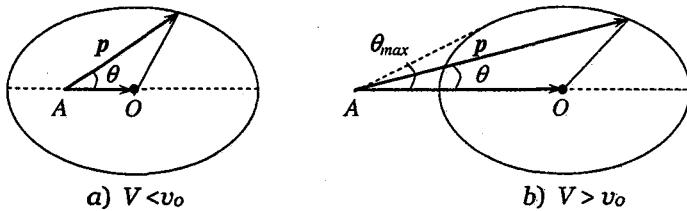
Ushbu kvadrat tenglamaning ildizlarini topishdan oldin parchalanish diagrammasini ko'rib chiqamiz. Laboratoriya va inersiya markazi sanoq sistemalarida impuls komponentalari orasidagi bog'lanish Lorentz almashtirishlari bilan aniqlanadi:

$$p_x = \frac{p_0 \cos \theta + \mathcal{E}_0 V / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad p_y = p_0 \sin \theta.$$

Bu ifodalarda  $\theta$  burchakni yo'qotib quyidagini hosil qilamiz:

$$p_y^2 + \left( p_x \sqrt{1 - \beta^2} - \mathcal{E}_0 \beta / c \right)^2 = p_0^2.$$

Bu tenglama  $p_x$ ,  $p_y$  o'zgaruvchilarga nisbatan yarim o'qlari  $p_0$  va



14.11-rasm: Zarrachaning parchalanish diagrammasi.

$p_0 / \sqrt{1 - \beta^2}$  bo'lgan va markazi (14.11-rasmdagи  $O$  nuqta)  $p = 0$  nuqtadan  $\mathcal{E}_0 V / c^2 \sqrt{1 - \beta^2}$  ga siljigan ellips tenglamasidir.

Agar  $V < p_0 c^2 \mathcal{E}_0 / p_0 = v_0$  bo'lsa,  $A$  nuqta ellipsisning ichida joylashadi (14.11a-rasm). Yuqoridagi kvadrat tenglama bitta yechimga ega bo'ladi.  $V > v_0$  shart bajarilganda va  $\theta < \theta_{max}$  da (14.11b-rasm) tenglama ikkita yechimga ega bo'ladi. Agar  $\theta > \theta_{max}$  bo'lsa, tenglama yechimga ega bo'lmaydi.

Energiya uchun yozilgan kvadrat tenglama diskriminantining nolga teng bo'lish shartidan maksimal burchakni aniqlaymiz:

$$\sin \theta_{max} = p_0 \sqrt{1 - \beta^2} / mV.$$

$$2.11. m^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2 \frac{\left[ \sqrt{(p_1^2 + c^2 m_1^2)(p_2^2 + c^2 m_2^2)} - p_1 p_2 \cos \theta \right]}{c^2},$$

$m_\pi = 139,58 \text{ MeV}.$

$$2.12. m_2^2 = m^2 + m_1^2 - 2 \frac{\sqrt{(p_1^2 + c^2 m_1^2)(p^2 + c^2 m^2)} - p_1 p \cos \theta_1}{c^2}.$$

$$2.13. m^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{c^4} - \frac{p^2}{c^2} = m_1^2 + m_2^2 + \frac{2m_1 m_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$V = \frac{p}{\mathcal{E}} = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2 \sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

$$2.14. T_1 = \frac{(m_0 - m_1)^2 - m_2^2}{2m_0} c^2, T_2 = \frac{(m_0 - m_2)^2 - m_1^2}{2m_0} c^2.$$

$$2.15. v = \frac{c\sqrt{\mathcal{E}^2 - m^2 c^4}}{\mathcal{E} + M c^2}. \quad 2.16. T_1 = \frac{2mc^2 T_0 \cos^2 \theta_1}{2mc^2 + T_0 \sin^2 \theta_1}.$$

3.1. Zaryadlangan zarracha harakat tenglamasi (3.21) da impulsni  $p = v\mathcal{E}/c^2$  bilan almashtiramiz. Bunda paydo bo'lgan  $d\mathcal{E}/dt$  ni (3.22) ga asosan  $eEv$  bilan almashtiramiz. Natijada aniqlanishi lozim bo'lgan ifodani olamiz:

$$\dot{v} = \frac{e}{m} \sqrt{(1 - v^2/c^2)} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vH}] - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}(\mathbf{vE}) \right).$$

3.4. Bu shartni qanoatlantiruvchi sanoq sistemalar cheksiz ko'p. Agar ulardan birortasini topsak, unga nisbatan  $\mathbf{E}$  va  $\mathbf{H}$  ning umumiy yo'nalishi bo'yicha o'zgarmas tezlik bilan harakatlanadigan ixtiyoriy sistemalarda ham maydon huddi shunday xossaga ega bo'ladi. Shuning uchun har ikkala maydonga perpendikular yo'nalishda harakatlanadigan sanoq sistemaning tezligini topish yetarlidir. Tezlik  $x$  o'qi bo'ylab yo'nalgan deb olamiz. Bu holda  $E_x' = H_x' = 0$  va masala sharti  $[\mathbf{EH}] = 0$  ga binoan  $E_y'H_z' - E_z'H_y' = 0$  ekanligini kelib chiqadi. Bularni e'tiborga olib, maydon uchun almashtirish formulalari (3.38) dan qidirilayotgan tezlik uchun kvadrat tenglama hosil qilamiz. Bu tenglamaning ikkita yechimidan  $V < c$  shartni qanoatlantiruvchisini tanlab olamiz. Ikkinchisi ma'noga ega bo'lmaydi. Olingan natijani tezlikning yo'nalishi ixtiyoriy bo'lgan hol uchun umumlashtirib, quyidagi ifodani olamiz:

$$\frac{V}{c} = \frac{E^2 + H^2 - \sqrt{(E^2 - H^2)^2 + 4(EH)^2}}{2[\mathbf{EH}]} [\mathbf{EH}].$$

Maydon bunday xossaga ega bo'lgan sanoq sistemalar cheksiz ko'p bo'lib, ularda maydon kuchlanganliklarining moduli quyidagiga teng

bo'ladi:

$$E'^2 = \frac{1}{2} \left[ E^2 - H^2 + \sqrt{(E^2 - H^2)^2 + 4(EH)^2} \right]$$

$$H'^2 = \frac{1}{2} \left[ H^2 - E^2 + \sqrt{(E^2 - H^2)^2 + 4(EH)^2} \right]$$

**3.5a.** Masala shartiga ko'ra  $E' = 0$  yoki  $H' = 0$  bo'lganligi uchun  $K$  sanoq sistemada ham maydon invarianti  $I_2 = (EH) = 0$  bo'ladi. Bunda ikki hol paydo bo'ladi (4-masala natijasidan foydalaniladi):

$$1) H^2 - E^2 > 0: \quad E' = 0, \quad V = \frac{[EH]}{H^2} c, \quad H' = \frac{H}{H} \sqrt{H^2 - E^2};$$

$$2) H^2 - E^2 < 0: \quad H' = 0, \quad V = \frac{[EH]}{E^2} c, \quad E' = \frac{E}{E} \sqrt{E^2 - H^2}.$$

**3.5b.** ( $EH$ ) invariant bo'lganligi uchun  $(E'H') = 0$  shart barcha inersial sanoq sistemalarda, jumladan boshlang'ich sanoq sistemada ham bajariladi.

**3.5c-d.** ( $E' = H'$ ) bo'lishi uchun ( $E = H$ ) bo'lishi kerak.

**3.9.**  $z$  o'qini magnit maydon bo'ylab yo'naltiramiz. Magnit maydon ko'ndalang bo'lganligi uchun harakat  $z = \text{const}$  tekisligida sodir bo'ladi. Harakat tenglamasini yozamiz:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = -\eta\dot{x} + \frac{e}{c} H\dot{y}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{y}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = -\eta\dot{y} - \frac{e}{c} H\dot{x}.$$

Bu tenglamalar sistemasini bir marta integrallaymiz. Hosil bo'lgan tenglamalardan  $\sqrt{1 - \beta^2}$  ni yo'qotib quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{e}{c} H(x\dot{x} + y\dot{y}) = \eta(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Bu yerda ( $r, \psi$ ) ga koordinatalar o'tamiz:  $\frac{e}{c} H\dot{r} = \eta r\dot{\psi}$ . Bu tenglamani integrallab, masalada so'ralayotgan harakat traektoriyasini topamiz:

$$r = r_0 \exp(\psi c \eta / e H).$$

Magnit maydonda zaryadga qarshlik ta'sir qilganda, traektoriyasi mar-kazdan uzoqlashuvchi spiral chiziq bilan aniqlanishini topdik.

**3.11.** Maydon  $x$  o'qi bo'ylab yo'nalgan deb olamiz. Masalaning shartiga ko'ra hakat tekislikda sodir bo'ladi. Bu tekislik  $xy$  tekisligi bo'lsin. Kovariant ko'rinishda yozilgan harakat tenglamalarini

$$\frac{dp_x}{d\tau} = \frac{eE}{mc^2}\mathcal{E}, \quad \frac{dp_y}{d\tau} = 0, \quad \frac{dp_z}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = \frac{eE}{m}p_x$$

integrallab, impuls va energiyani xususiy vaqtning funksiyasi sifatida olamiz:

$$p_x = \frac{\mathcal{E}_0}{c} \operatorname{sh} \kappa E \tau + p_{0x} \operatorname{ch} \kappa E \tau, \quad p_y = p_{0y}, \quad p_z = 0,$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \operatorname{ch} \kappa E \tau + cp_{0x} \operatorname{sh} \kappa E \tau, \quad \kappa = e/mc.$$

Bu yerda impuls mos koordinatadan xususiy vaqt bo'yicha olingan hosila ekanligini hisobga olib, to'rtinchchi tenglamani yana bir marta integrallaymiz:

$$x^0(\tau) = ct = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \operatorname{sh} \kappa E \tau + \frac{cp_{0x}}{eE} (\operatorname{ch} \kappa E \tau - 1).$$

Qolgan tenglamalar shunga o'xshash aniqlanadi. Bu tenglamani  $\tau$  nisbatan yechib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\tau(t) = \frac{mc}{eE} \ln \frac{p_{0x} + eEt + \sqrt{(p_{0x} + eEt)^2 + m^2 c^2 + p_{0y}^2}}{p_{0x} + \mathcal{E}/c}.$$

Endi bu yerda topilgan  $\tau(t)$  ni  $x(t)$  va  $y(t)$  ga qo'yamiz.

$$x(t) = \frac{c}{eE} \ln \frac{p_{0x} + eEt + \sqrt{(p_{0x} + eEt)^2 + m^2 c^2 + p_{0y}^2}}{p_{0x} + \mathcal{E}/c}.$$

$$y(t) = \frac{cp_{0y}}{eE} \tau(t), \quad z(t) = 0, \quad \mathcal{E}(t) = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 - c^2 p_{0x}^2 + (cp_{0x} + eEct)^2}.$$

Bu natijalarni kichik  $t \ll mc/|e|E$  va katta  $t \gg mc/|e|E$  vaqtlar uchun analiz qiling.  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  funksiyalarning grafiklarini kompyuterda chizing.

**3.12.**  $l = (\mathcal{E} - mc^2)/eE$ .

**3.13.**  $p_x = p_{0x} \cos \kappa H \tau, \quad p_y = -p_{0x} \sin \kappa H \tau, \quad \kappa = e/mc,$

$$p_z = \frac{p_{0x}E}{H} \operatorname{ch} \kappa E\tau + \frac{\mathcal{E}E}{cH} \operatorname{sh} \kappa E\tau, \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \operatorname{ch} \kappa E\tau + p_{0z} c \operatorname{sh} \kappa E\tau.$$

3.14.  $x = x_0 \cos \omega t$ ,  $y = y_0 \operatorname{ch} \omega t$ ,  $z = v_0 t + z_0$ ;  $\omega = 2ek/m$ .

$$3.15. \frac{d}{dt} \frac{mr\dot{r}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{mr\dot{\psi}^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + e \left[ E_r + \frac{1}{c} (-H_\psi \dot{z} + H_z r \dot{\psi}) \right],$$

$$\frac{d}{dt} \frac{mr^2\dot{\psi}}{\sqrt{1-\beta^2}} = e \left[ E_\psi + \frac{1}{c} (H_r \dot{z} - H_z \dot{r}) \right] r,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{m\dot{z}}{\sqrt{1-\beta^2}} = e \left[ E_z + \frac{1}{c} (H_\psi \dot{r} - H_r r \dot{\psi}) \right].$$

3.16.  $H = 0$  bo'lganda elektronlarning traektoriyasi to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi. Magnit maydon ta'sirida traektoriya silindrlar o'qi tik bo'lgan tekislikda buriladi. Magnit maydon orta borishi bilan burilishi kattalashib boradi. Silindrik koordinatalar  $(r, \psi, z)$  ga o'tamiz. Elektronlar traektoriyasining egrilik radiusi  $r = R_2$  bo'lib qolganda tezligi anod sirtiga parallel bo'ladi va ular anodga tushmaydi. Bu holda tezlikning radial tashkil etuvchisi  $\dot{r}|_{r=R_2} = 0$  va  $(r\dot{\psi})|_{r=R_2} = v_{max}$ . 15-masaladagi ikkinchi tenglamadan foydalanamiz. Bu tenglama biz ko'rilayotgan hol uchun quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\frac{d}{dt} \frac{mr^2\dot{\psi}}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{e}{c} H(r) r \ddot{r}.$$

Bu tenglamani zarrachaning traektoriyasi bo'ylab  $r = R_1$  dan  $r = R_2$  gacha integrallaymiz:

$$R_2 p_{max} = \frac{mr^2\dot{\psi}}{\sqrt{1-\beta^2}} \Big|_{r=R_1}^{r=R_2}, \quad \frac{e}{2\pi c} \Phi = \frac{e}{2\pi c} \int_{r=R_1}^{r=R_2} 2\pi H(r) r dr.$$

Bu yerda impulsning maksimal qimatini ( $p_{max}$ ) kondensator qoplamlari orasidagi potensiallar farqi orqali ifodalaymiz va yuqoridagi ifodalardan foydalanib kritik oqim uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$\Phi_c = \frac{2\pi c R_2}{|e|} p_{max} = 2\pi c R_2 \sqrt{\frac{2mV}{|e|} \left( 1 + \frac{|e|V}{2mc^2} \right)}.$$

Bu yerda maksimal kinetik energiya  $T_{max} = eV$ .

Potensiallar farqi kichik bo'lganda  $|e|V \ll mc^2$  (yoki  $v \ll c$  shart bir xil natija beradi) natija soddalashadi:

$$\Phi_c = \frac{2\pi c R_2}{|e|} p_{max} = 2\pi c R_2 \sqrt{\frac{2mV}{|e|}}.$$

**3.17.** Zarrachaning dreyfi effektiv elektr maydon  $E_{eff} = F/e$  ta'si-rida yuzaga kelib,  $v_d = c[FH]/eH^2$  tezlik bilan sodir bo'ladi.

**3.18.**  $\mathcal{F} = 2e\chi/\gamma r$ . Masalani turli yo'l bilan yechish mumkin:

a) chiziqli zaryad va tok tomonidan zaryadga ta'sir etuvchi kuchni to'g'ridan to'g'ri hisoblash mumkin. Bunda Lotentz qisqarishini hisobga olish kerak;

b) kuch avval magnit maydon nolga teng bo'lgan sonoq sistemada aniqlanadi. So'ng 4-kuch uchun Lorentz almashtirshlardan foydalani-ladi.

**4.1.** Tenglama (4.40) ning har ikkala tomoniga div operatori bilan ta'sir qilamiz va uzlusizlik tenglamasidan foydalanimiz hosil qilamiz:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{E} - 4\pi\rho) = 0.$$

Bundan ayirma  $\operatorname{div} \mathbf{E} - 4\pi\rho$  vaqtga bog'liq emasligi ko'rinish turibdi. Agar  $t = t_0$  da u nolga teng bo'lsa, keyingi vaqtarda ham  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$  tenglik o'rini bo'ladi. Shunga o'xshash (4.1) dan

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{H}) = 0$$

kelib chiqadi. Bundan  $\operatorname{div} \mathbf{H}$  vaqtga bog'liq emasligi ko'rinish turibdi. Agar  $t = t_0$  da u nolga teng bo'lsa, keyingi vaqtarda ham  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$  tenglik o'rini bo'ladi.

$$4.4. i[k\mathbf{E}_k] = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{H}}_k, \quad i[k\mathbf{H}_k] = \frac{1}{c}\dot{\mathbf{E}}_k + \frac{4\pi}{c}j_k,$$

$$i(k\mathbf{H}_k) = 0, \quad i(k\mathbf{E}_k) = 4\pi\rho_k.$$

$$4.5. \operatorname{rot} \mathbf{E}_\omega = \frac{i\omega}{c}\mathbf{H}_\omega, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}_\omega = -\frac{i\omega}{c}\mathbf{E}_\omega + \frac{4\pi}{c}j_\omega,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H}_\omega = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E}_\omega = 4\pi\rho_\omega.$$

$$4.6. S_\omega = \frac{c}{4\pi} \operatorname{Re}[\mathbf{E}_\omega \mathbf{H}_\omega^*].$$

**4.7.**  $\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c} [\mathbf{EH}] + \operatorname{rot} \mathbf{G}$ , bu yerda  $\mathbf{G} - [\mathbf{EH}]$  ga bog'liq bo'lgan ixtiyoriy vektor.

4.8. Garmonik tashkil etuvchilar uchun:

$$\operatorname{div} \mathbf{A}_\omega - \frac{i\omega}{c} \varphi_\omega = 0, \Delta \mathbf{A}_\omega + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{A}_\omega = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_\omega, \Delta \varphi_\omega + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi_\omega = -4\pi \rho_\omega.$$

Yassi to'lqinlarga yoyilmasi uchun:

$$\dot{\varphi}_{\mathbf{k}} + ic(kA_{\mathbf{k}}) = 0, \ddot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} + k^2 c^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}} = 4\pi c j_{\mathbf{k}}, \dot{\varphi}_{\mathbf{k}} + k^2 c^2 \varphi_{\mathbf{k}} = 4\pi c^2 \rho_{\mathbf{k}}.$$

Yassi monoxromatik to'lqinlarga yoyilmasi uchun:

$$\frac{\omega}{c} \varphi_{\mathbf{k}\omega} - (kA_{\mathbf{k}\omega}) = 0, \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) A_{\mathbf{k}\omega} = 4\pi c j_{\mathbf{k}\omega},$$

$$\left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \varphi_{\mathbf{k}\omega} = 4\pi c^2 \rho_{\mathbf{k}\omega}.$$

5.1.  $\mathbf{E} = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad r > R; \quad \mathbf{E} = \frac{4\pi \rho}{3} \mathbf{r}, \quad r < R.$

5.2.  $\mathbf{E} = 2\pi \rho \frac{R^2}{r^2} \mathbf{r}, \quad r > R; \quad \mathbf{E} = 2\pi \rho \mathbf{r}, \quad r < R$

5.3.  $\varphi = -2\chi \ln r, \quad \mathbf{E} = \frac{2\chi}{r^2} \mathbf{r}$

5.4.  $\varphi(x, y, z) = -\frac{e}{2a} \ln \left| \frac{z - a + \sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}}{z + a + \sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} \right|.$

5.5. Ekvipotensial sirt  $\varphi(x, y, z) = \text{const}$  shart bilan aniqlanadi.  
Bunga asosan ko'rileyotgan masalada

$$\frac{z - a + \sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}}{z + a + \sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} = \text{const.}$$

shart o'rinli bo'lishi kerak. Quyidagi belgilashlar kiritamiz:

$$z_{1,2} = z \pm a, \quad r_{1,2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z_{1,2}^2}, \quad C = \frac{z_1 + r_1}{z_2 + r_2}, \quad z_1 - z_2 = 2a.$$

Bu belgilashlarda ekvipotensial sirning ko'rinishi

$$r_1 + r_2 = 2a \frac{C + 1}{C - 1} = \text{const}$$

tenglama bilan aniqlanishini topamiz. Bu fokuslari  $z = \pm a$  nuqta-lardagi aylanma ellipsoidning tenglamasidir.

$$5.6. \varphi = -2\pi\sigma x, E = \frac{2\pi\sigma}{x}x.$$

$$5.7. E = 4\pi\rho x \quad (|x| < d), \quad E = 4\pi\rho d \frac{x}{x} \quad (|x| > d).$$

$$5.8. \varphi = -2\chi \ln r, \quad E = \frac{2\chi}{r^2}r \quad (r > R); \quad E = 0 \quad (r < R).$$

5.9. Maydon kuchlanganligi sfera radusni bo'ylab yo'nalgan.

$$\varphi_1 = \frac{e}{R_2 - R_1} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad E_1 = 0 \quad r \leq R_1;$$

$$\varphi_2 = \frac{e}{R_2 - R_1} \left[ 1 - \ln \frac{r}{R_2} - \frac{R_1}{r} \right], \quad E_2 = \frac{e(r - R_1)}{(R_2 - R_1)r^2} \quad R_1 \leq r \leq R_2;$$

$$\varphi_3 = \frac{e}{r}, \quad E_3 = \frac{e}{r^2} \quad r \geq R_2.$$

Bu yerda  $e = 4\pi\alpha(R_2 - R_1)$ .

$$5.10. \varphi = \frac{e}{r}, \quad E = \frac{e}{r^3}r \quad (r > R); \quad E = 0 \quad (r < R); \quad e = 4\pi\sigma R^2.$$

$$5.11. e = 4\pi\alpha;$$

$$\varphi_1 = \frac{e}{R_2 - R_1} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad E_1 = 0 \quad r \leq R_1;$$

$$\varphi_2 = \frac{e}{R_2 - R_1} \left( 1 - \ln \frac{r}{R_2} - \frac{R_1}{r} \right), \quad E_2 = \frac{e(r - R_1)}{(R_2 - R_1)r^2} \quad R_1 \leq r \leq R_2;$$

$$\varphi_3 = \frac{e}{r}, \quad E_3 = \frac{e}{r^2} \quad r \geq R_2.$$

Maydon kuchlanganligi sharlar radusni bo'ylab yo'nalgan.

5.12.  $E_r = \frac{e}{r^2} \left( 1 + 2\frac{r}{a} + 2\frac{r^2}{a^2} \right) \exp \left( -\frac{2r}{a} \right)$ ,  $E_r$  - maydon kuchlanganligining radial tashkil etuvchisi. Qolgan tashkil etuvchilar nolga teng.

$$5.13. \varphi = 2\pi\sigma \left( \sqrt{R^2 + z^2} - z \right), \quad E = 2\pi\sigma \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \frac{z}{z}$$

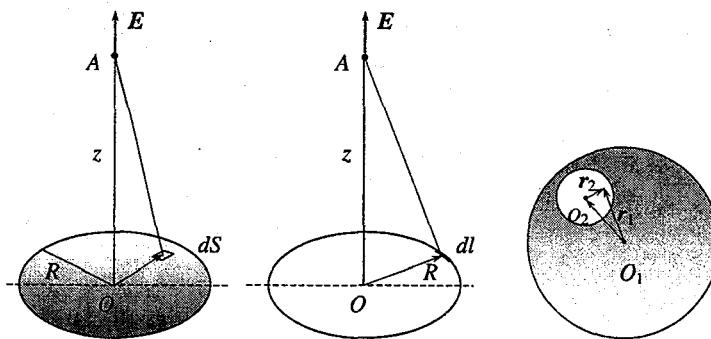
(14.12a-rasm).

$$5.14. \varphi = 2\pi\chi \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}, \quad E = \frac{2\pi\chi R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} z \quad (14.12b\text{-rasm}).$$

$$5.15. E = 4\pi\rho a/3 \quad (14.12c\text{-rasm}).$$

$$5.16. \varphi(x, y, z) = \frac{4\pi\rho_0}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \cos\alpha x \cos\beta y \cos\gamma z.$$

$$5.17. D_{xx} = \frac{e}{5}(2a^2 - b^2 - c^2), \quad D_{yy} = \frac{e}{5}(2b^2 - a^2 - c^2),$$



14.12-rasm:

$$D_{zz} = \frac{e}{5}(2c^2 - b^2 - a^2), \quad e = \frac{4\pi}{3}abc.$$

$$5.18. \text{ a) } \varphi \approx ea^2 \frac{3z^2 - r^2}{r^5}; \quad \text{b) } \varphi \approx \frac{3ea^2 \sin^2 \theta \cos \psi \sin \psi}{r^3}.$$

5.19a. Zaryadlarning taqsimotini Puasson tenglamasidan foydalanib topamiz. Masala shartidan potensial silindrik simmetriyaga ega ekanligi ko'rinish turibdi. Laplasian silindrik koordinatlariga (A.126) ifoda bilan aniqlanadi. Potensial faqat  $r$  ga bog'liq bo'lganligi uchun:

$$\rho = -\frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \right] = \begin{cases} 0 & r > R; \\ \frac{a}{2\pi R^2} & r < R. \end{cases}$$

Demak, masala shartida berilgan maydonni, hajmiy zichlik ( $\rho = \text{const}$ ) bilan bir tekis zaryadlangan  $R$  radiusli cheksiz uzun silindr hosil qiladi.

$$5.19b. \rho = \begin{cases} 0 & r > R; \\ \frac{e}{V} & r < R, \text{ bu yerda } V = \frac{4\pi R^3}{3}. \end{cases}$$

Maydonni bir tekis zaryadlangan  $R$  radiusli shar hosil qiladi.

$$5.20. U_E = \frac{e^2}{2R}, \quad 5.21. U_E = \frac{3e^2}{5R}, \quad F = \frac{ed}{r^3} - \frac{3e(rd)r}{r^5}.$$

$$5.22. U_E = \int \frac{e}{r} \rho(r) dV = -\frac{e^2}{r}, \quad 5.23. U_E = \frac{e_1 e_2}{a}, \quad F = \frac{e_1 e_2}{a^2}.$$

$$5.24. U_E = -\frac{e}{r^2}(rd). \quad 5.25. U_E = \frac{(d_1 d_2)}{r^3} - \frac{3(rd_1)(rd_2)}{r^5},$$

$$F = \frac{3(rd_1)d_2}{r^5} + \frac{3(rd_2)d_1}{r^5} + \frac{3(d_1d_2)r}{r^5} - \frac{15(rd_1)(rd_2)r}{r^7}$$

- a)  $U_E = -\frac{2d_1d_2}{r^3}$   $F = \frac{-6d_1d_2r}{r^5}$  dipolar bir birini tortadi.  
 b)  $U_E = \frac{d_1d_2}{r^3}$   $F = \frac{3d_1d_2r}{r^5}$  dipolar bir birini itaradi.  
 c)  $U_E = \frac{2d_1d_2}{r^3}$   $F = \frac{6d_1d_2r}{r^5}$  dipolar bir birini itaradi.  
 d)  $U_E = -\frac{d_1d_2}{r^3}$   $F = \frac{-3d_1d_2r}{r^5}$  dipolar bir birini tortadi.

$$5.26. \varphi_k = 4\pi e/k^2, \quad E_k = -ik\varphi_k = -i4\pi ek/k^2.$$

6.1. Agar  $(j_0k) = 0$  bo'lsa  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  bo'ladi. Aks holda zaryad zichligi vaqtga bog'liq bo'ladi.

$$6.3. H = 2I/cr.$$

$$6.4. H_r = H_z = 0, \quad H_\psi = \begin{cases} 2Ir/c & r < R, \\ 2I/cr & r > R. \end{cases}$$

$$6.5. H_r = H_z = 0, \quad H_\psi = \begin{cases} 0 & r < a, \\ \frac{2\pi j}{c(b^2 - a^2)} \left( r - \frac{a^2}{r} \right) & a \leq r \leq b, \\ 2\pi j/cr & r > b. \end{cases}$$

$$6.6. H_r = H_z = 0, \quad H_\psi = \begin{cases} c2Ir/ca & r < a, \\ 2I/cr & a \leq r \leq b, \\ 0 & r > b. \end{cases}$$

$$6.7. H_r = H_z = 0, \quad H_\psi = \begin{cases} 0 & r < R, \\ 2I/cr & r > R. \end{cases}$$

$$6.8. H = \frac{2\pi IR^2}{c(R^2 + z^2)}, \quad z = 0 \text{ bo'lsa}, \quad H = \frac{2\pi IR^2}{cR}$$

$$6.9. \text{Shar uchun: } m = \frac{\omega R^2 c}{5c}, \quad \text{sfera uchun: } m = \frac{\omega R^2 e}{3c}.$$

$$6.10. m = \frac{1}{2} \frac{m_1 e_2 + m_2 e_1}{m_1 + m_2} L.$$

$$6.12. A_z = \frac{2I}{c} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}, \quad H_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x},$$

$$r_1 = \sqrt{(a-x)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(a+x)^2 + y^2}.$$

**6.13.** a) Tekisliklar orasida  $H = 4\pi i/c$ , fazoning boshqa qismida  $H = 0$ ; b) tekisliklar orasida  $H = 0$ , fazoning qolgan qismida  $H = 4\pi i/c$ . Ikkala holda ham magnit maydon tokka perpendikulyar va tekisliklarga parallel yo'nalган bo'ladi.

**6.14.** Plastinkalar  $f = \frac{4I^2}{c^2 a} \left( \operatorname{arctg} \frac{a}{b} - \frac{b}{2a} \ln \frac{a^2 + b^2}{b^2} \right)$  kuch bilan itarishadi.

$$\text{6.15. } N = \frac{4I_1 I_2 a}{c} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha).$$

$$7.2. \omega^2 = c^2 k^2$$

**7.6.**  $E_y = E_0 \cos(\psi + \psi_0)$ ,  $E_z = E_0 \sin(\psi + \psi_0)$ ,  $\psi = \omega t - kx$ ,  $\psi_0$  - boshlang'ich faza.

$$7.7. E_y = E_0 \cos(\psi + \psi_0), E_z = -E_0 \sin(\psi + \psi_0).$$

$$7.8. E_y = E'_y + E'_z = 2E_0 \cos(\psi + \psi_0), E_z = E'_z + E'_z = 0.$$

$$7.9. E_y = E_0 \cos(\psi + \psi_0)/2, E_z = E_0 \sin(\psi + \psi_0)/2.$$

**7.10.** To'lqindagi maydon

$$\begin{aligned} A_y &= -(cE_0/\omega) \sin \omega \tau, & A_z &= (cE_0/\omega) \cos \omega \tau, \\ E_y &= E_0 \cos \omega \tau, & E_z &= E_0 \sin \omega \tau. \end{aligned}$$

Bu yerda  $\tau = t - x/c$ . Harakat quyidagi tenglamalar bilan aniqlanadi:

$$x = 0, \quad y = -\frac{ecE_0}{\omega^2 \delta} \cos \omega \tau, \quad z = \frac{ecE_0}{\omega^2 \delta} \sin \omega \tau,$$

$$p_x = 0, \quad p_y = \frac{eE_0}{\omega} \sin \omega \tau, \quad p_z = \frac{eE_0}{\omega} \cos \omega \tau.$$

$\delta^2 = m^2 c^2 + c^2 E_0^2 / \omega^2$ . Zaryad  $yz$  tekisligida  $ecE_0/\omega^2 \delta$  radiusli aylana bo'ylab harakat qiladi. Impulsi o'zgarmas bo'lib  $eE_0/\omega$  ga teng. Har bir vaqt momentida impulsning yo'nalishi magnit maydon yo'nalishi bilan mos tushadi.

**8.4.**  $I = 2e^2 a^2 / 4c^3$ , a zarrachaning tezlanishi.

**8.5.**  $I = \frac{4}{3} \frac{e^4}{m^3 c^5} \frac{mv_0^2}{2}$ . Bu natija  $v \ll c$  da o'rinli bo'ladi. Sababini tushuntiring.

**8.6.**  $I = \frac{2}{3} \frac{e_1^2 e_2^2}{c^3 r^4} \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2$ ,  $r$  - zaryadlar orasidagi masofa.

**8.7. Yechish:** Ma'lumki, dipol nurlanishining intensivligi zaryadlar sistemasining dipol momentidan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosila bilan aniqlanadi. Shu kattalikni aniqlaymiz:

$$\ddot{\mathbf{d}} = \sum e_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha = \frac{d}{dt} \sum e_\alpha \mathbf{v}_\alpha.$$

Bu yerdagи yig'indining har bir hadini mos zarrachaning massasiga ham ko'paytiramiz, ham bo'lamiciz. Masalaning shartiga binoan quyidagini olamiz:

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{e}{m} \frac{d}{dt} \sum m_\alpha \mathbf{v}_\alpha = \frac{e}{m} \frac{d}{dt} \sum p_\alpha = \frac{e}{m} \frac{d\mathbf{P}}{dt}.$$

Bu yerda  $\mathbf{p}_\alpha = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha$  zarrachalarning impulsi,  $\mathbf{P}$  sistemaning to'liq impulsi. Berk sistema uchun bu kattalik harakat integrali bo'ladi. Shuning uchun  $d\mathbf{P}/dt = 0$ . Shunday qilib, ko'rileyotgan sistema dipol momentidan vaqt bo'yicha ikkinchi tartibli hosila nolga teng ekan. Demak, nurlanish ham bo'lmaydi. Xususan, sistema bir xil zaryadlangan bir xil zarrachalardan tashkil topgan bo'lsa, bu sistemaning elektr dipol nurlanishi nolga teng bo'ladi.

**8.9. Doiraviy orbita bo'ylab aylanayotgan elektronning to'liq energiyasi**  $E$  va uning vaqt birligidagi nurlanish energiyasi  $-dE/dt$  bo'lsa, topish lozim bo'lgan vaqt  $\tau$  ni  $E / (-dE/dt)$  nisbat bilan baholash mumkin. Elektronning to'liq energiyasi kinetik va yadro bilan ta'sirlashish energylarning yig'indisidan iboratligini inobatga olsak,  $E = -e^2/2R$ .

Vaqt birligidagi nurlanish energiyasi esa  $\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{e^6}{m^2 c^3 R^4}$ . Bu ikki ifodadan yordamida vodorod atomining yashash vaqtini baholaymiz:  $\tau \sim 3R^3/4cr_0^2$ . Bu yerda  $r_0$  elektronning klassik radiusi,  $R$  atomning boshlang'ich vaqtdagi radiusi.

$$8.10. \Delta E = \pi e^4 e_1^2 / 3vm^2 c^3 d^3.$$

**8.11. Aylanma harakatni o'zaro perpendikulyar bo'lgan ikkita ossilyatorga ekvivalent deb qarash mumkin. Zaryadning aylanishi  $xOy$  tekisligida va aylana markazi koordinata boshida deb hisoblasak:**

$$\mathbf{H} = \frac{eR\omega^2}{r c^2} ([n, i] \cos(kr - \omega t) + [n, j] \sin(kr - \omega t)), \quad \mathbf{E} = [\mathbf{H}\mathbf{n}],$$

$$I = \frac{\omega^4 e^2 R^2}{4\pi c^3 r^2} \left( 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right), \quad n = r/r, \quad r \text{ kuzatish nuqtasiga o'tkazilgan radius-vektor}, \quad \theta \text{ azimutal burchak}, \quad i \text{ va } j \text{ mos ravishda } x \text{ va } y$$

o'qlaridagi birlik vektorlar.

$$9.1. \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{q}{r}, \quad \mathbf{D}_1 = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{qr}{r^3}, \quad \mathbf{D}_2 = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{qr}{r^3}.$$

$$9.2. \varphi_i = \frac{2\pi}{\varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2\alpha_2 + \varepsilon_3\alpha_3} \frac{q}{r}, \quad \mathbf{D}_i = \frac{2\pi\varepsilon_i}{\varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2\alpha_2 + \varepsilon_3\alpha_3} \frac{qr}{r^3}.$$

9.3. Chegaraviy shartlarni (o'tkazgich sirtida  $\varphi = \text{const}$  va  $r \rightarrow \infty$  da  $\varphi = 0$ ) qanoatlantiruvchi potensial ko'rinishi  $\varphi = C/r$  bo'lsin. Bu yerda doimiy  $C$ .  $\oint_S D_n dS = 4\pi q$  shartdan aniqlanadi:  $C = 2q/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$

Bu yerdan  $\varphi = \frac{2q}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{1}{r}$ , potensialni va

$$\sigma_1 = \frac{q\varepsilon_1}{2\pi a^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}, \quad \sigma_2 = \frac{q\varepsilon_2}{2\pi a^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

$$\sigma_{1erk} = \frac{q(\varepsilon_1 - 1)}{2\pi a^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}, \quad \sigma_{2erk} = \frac{q(\varepsilon_2 - 1)}{2\pi a^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

sirt zaryadlarining taqsimotini topamiz:

$$9.4. W = \frac{1}{8\pi} \int \epsilon E^2 dV = \frac{1}{2} \int \epsilon E^2 dr = \frac{q^2}{2\varepsilon a}.$$

9.5. Shar energiyasini quyidagicha topamiz:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \epsilon E^2 dV = \frac{1}{2} \int \epsilon E^2 r^2 dr =$$

$$\frac{q^2}{2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon a^6} \int_0^a r^4 dr + \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} \right\} = \frac{q^2}{2a} \left( 1 + \frac{1}{5\varepsilon} \right)$$

10.1. Maydonni  $\omega_S = a/2\pi$  sirtiy zichlik bilan zaryadlangan ikki dielektrikni chegaralovchi ( $x = 0$ ) tekislik hosil qiladi.

10.2. Maydonni  $\omega_S = e/4\pi R^2$  sirtiy zichlik bilan zaryadlangan  $R$  radiusli  $e/R$  potensialga ega bo'lgan o'tkazuvchi sferik sirt hosil qiladi.

$$10.3. \mathbf{E} = \frac{2\chi}{\varepsilon_1 r^2} \mathbf{r}, \quad r < R; \quad \mathbf{E} = \frac{2\chi}{\varepsilon_2 r^2} \mathbf{r}, \quad r > R; \quad \omega_S = \frac{\chi}{2\pi R} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right)$$

$$10.4. \mathbf{E} = 0, \quad r < R; \quad \mathbf{E} = \frac{2\chi}{\varepsilon(r) r^2} \mathbf{r}, \quad r > R.$$

$$10.5. \mathbf{E} = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon(x)} \frac{\mathbf{x}}{x}. \quad 10.6. \mathbf{E} = 0, \quad r < R; \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{e}}{\varepsilon(r) r^3} \mathbf{r}, \quad r > R.$$

$$10.7. \quad \mathbf{E} = \frac{e}{\varepsilon_0 R^3} \mathbf{r}, \quad r < R; \quad \mathbf{E} = \frac{e}{\varepsilon(r) r^3} \mathbf{r}, \quad r > R.$$

$$10.8. \quad \omega_S = \frac{e}{4\pi R^2} \left( \frac{1}{\varepsilon(R)} - \frac{1}{\varepsilon_0} \right), \quad r = R; \quad \rho_b = -\frac{\varepsilon_0 - 1}{\varepsilon_0} \rho, \quad r < R.$$

$$10.9. \quad \varphi = \frac{2e}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)R}, \quad C = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)R.$$

$$10.10. \quad U_E = \frac{e^2}{2R\varepsilon}. \quad 10.11. \quad U_E = \frac{e^2}{2R} \left( 1 + \frac{1}{5\varepsilon} \right).$$

10.12. 5-bob 25- masalaning yechimiga qarang.

10.13.  $\varphi = \frac{e}{r_1} - \frac{e}{r_2} + \frac{e}{r_3} - \frac{e}{r_4}$ ,  $x > 0, y > 0$ ; boshqa hamma nuqtalarda  $\varphi = 0$ . Bu yerda  $r_i$  mos ravishda  $A_1(a, a, 0)$ ,  $A_2(a, -a, 0)$ ,  $A_3(-a, -a, 0)$ ,  $A_4(-a, a, 0)$  nuqtalarga o'tkazilgan radius-vektorlar.

10.14.  $\omega_S^{(1)} = -\frac{ae}{2\pi} \left( \frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^3} \right)$ ,  $Ox$  o'qiga perpendikulyar yarim tekislikda;  $\omega_S^{(2)} = -\frac{ae}{2\pi} \left( \frac{1}{R_3^3} - \frac{1}{R_4^3} \right)$ ,  $Oy$  o'qiga perpendikulyar yarim tekislikda. Bu yerda  $R_i$  ko'rيلайотган nuqtadan mos zaryadgacha bo'l-gan masofa.

10.15. Bu masalani yechish ucun elektr tasvirlash metodidan foy-dalanamiz. Zaryad turgan muhitdagi maydonni asosiy zaryad bir qatorda  $e'$  yordamchi zaryad hosil qiladi deb olamiz. Bu yordamchi zaryad asosiy zaryadning ikkinchi muhitdagi tasviri bo'lib, uni  $Ox$  o'qining  $x = -a$  nuqtaga joylashtiramiz. U holda  $\varphi_1 = \frac{e}{\varepsilon_1 r} - \frac{e'}{\varepsilon_1 r'}$ . Ikkinchi muhitdagi maydonni esa asosiy zaryad tigan nuqtadagi  $e''$  ikkinchi yordamchi zaryad hosil qiladi deb olamiz, ya'ni  $\varphi_2 = \frac{e''}{\varepsilon_2 r''}$ . Bu yerdagi noma'lum zaryadlar chegara nuqtalarda  $\varphi_1 = \varphi_2$ ,  $D_{1n} = D_{2n}$  bo'lish shartlaridan aniqlaymiz. Yuqoridagi potensiallarni shu chegaraviy shartlarga qo'yib, quyidagi ikkita tenglamani olamiz:  $(e - e')\varepsilon_2 = e\varepsilon_1$ ,  $e + e' = e''$ . Bu yerdan

$$e' = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} e, \quad e'' = \frac{2e\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$

Bularni potesiallar ifodalariga qo'yib, masalaning yechimi topiladi.

10.16. Zaryad koordinata boshida joylashgan deb, Maksvell tenglamalarini yozamiz:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = e\delta(r), \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0.$$

Bu tenglamalarni yechish uchun birinchi navbatda dielektrik singdiruvchanlik tenzori asosiy o'qlarga keltirilgan deb, (9.44) bog'lanish tenglamasini yozamiz:

$$D_x = \varepsilon_x E_x = -\varepsilon_x \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad D_y = \varepsilon_y E_y = -\varepsilon_y \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad D_z = \varepsilon_z E_z = -\varepsilon_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Bularni Maksvell tenglamalariga qo'yib, potensial uchun quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\varepsilon_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \varepsilon_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \varepsilon_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi e\delta(r).$$

O'zgaruvchilarni almashtiramiz:

$$x' = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon_x}}, \quad y' = \frac{y}{\sqrt{\varepsilon_y}}, \quad z' = \frac{z}{\sqrt{\varepsilon_z}}$$

Yangi o'zgaruvchilarda potensial uchun tenglama quyidagi ko'rinishga o'tadi:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2} = -\frac{4\pi e}{\sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z}} \delta(r').$$

Bu dielektrik singdiruvchanligi  $\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z}$  bo'lgan izotrop muhitda nuqtaviy zaryadning potensialini aniqlovchi Puasson tenglamasining o'zidir. Shunday qilib, anizotrop muhitdagi elektrostatika masalasini izotrop muhitdagi masalaga keltirdik.

**10.17.** Koordinata boshini sferaning markazida, qutb o'qini esa sfera markazi bilan zaryad turgan nuqtani tutashtiruvchi to'g'ri chiziqda tanlab olamiz. Potensial uchun

$$\Delta\varphi = -4\pi\delta(r - d)$$

Puasson tenglamasining cheksizda nolga intiluvchi yechimini Lejandr polynomlari  $P_n(\cos \theta)$  bo'yicha qator ko'rinishida qidiramiz:

$$\varphi(r, \theta) = \frac{e}{|r - d|} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta).$$

Birinchi hadni ham Lejandr polynomlari bo'yicha qatorga yoyamiz:

$$\frac{1}{|r - d|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{d^{n+1}} P_n(\cos \theta), \quad (r < d). \quad (*)$$

Potensialni sfera sirtida ( $r = R$ ) nolga tenglashtiramiz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{R^n}{d^{n+1}} + \frac{b_n}{R^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta) = 0.$$

Lejandr polinomlari ortogonalligidan bu tenglik o'rini bo'lishi uchun polinomlar oldidagi koeffitsientlar nolga teng bo'lishi kerak. Bundan

$$b_n = -e \frac{R^{2n+1}}{d^{n+1}},$$

$$\varphi(r, \theta) = \frac{e}{|r - d|} - \frac{eR}{d} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{R^2}{d} \right)^n \frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}}.$$

Bu yerdagi ikkinchi hadni (\*) bilan taqqoslab, uni  $d_1 = R^2/d$  nuqtada joylashgan  $e' = -eR/d$  nuqtaviy zaryadning potensiali ko'rinishida yozish mumkin:

$$\varphi(r, \theta) = \frac{e}{|r - d|} - \frac{e'}{|r - d_1|}.$$

Bu tasvirlash metodi bilan olingan (10.49) natija bilan mos tushadi.

**11.1.** Oz o'qiga parallel  $l$  uzunlikdagi o'tkazgich uchun quyidagi munosabat o'rini:

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \int_{-l}^l \frac{dz}{\rho_1} - \int_{-l}^l \frac{dz}{\rho_2} \right), \quad A_x = A_y = 0$$

bunda  $\rho_{1,2} = \sqrt{z^2 + r_{1,2}^2}$ ;  $r_1$  va  $r_2$  - qaralayotgan nuqtadan birinchi va ikkinchi o'tkazgichgacha bo'lgan masofalar. Intagrajni hisoblab  $l \rightarrow \infty$  quyidagini hosil qilamiz:

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

$$11.2. \quad H = \frac{1}{2} [j, \quad r], \quad r < R; \quad H = \frac{R^2}{2r^2} [j, \quad r], \quad r > R.$$

**11.3.**  $\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ . Bunda  $\alpha_1$  va  $\alpha_2$  - tok chiziqlari va 1-, 2- muhit tekisliklariga o'tkazilgan normal orasidagi burchaklar.

$$11.4. \quad H = \frac{1}{2}[j, a].$$

11.5. Koordinatalar sistemasini shunday tanlaymizki, bunda tok  $Oz$  o'qi bo'yicha, tekislikka o'tkazilgan normal esa  $Ox$  o'qi bo'yicha yo'nalgan. U holda  $[n, H_2 - H_1] = i$  chegaraviy shartdan quyidagini hosil qilamiz:  $H_y = -\frac{i_s}{2}$ ,  $x < 0$  bo'lganda,  $H_y = \frac{i_s}{2}$ ,  $x > 0$  bo'lganda.

11.6.  $H_1 = \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} H_0$ ,  $H_2 = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} H_0$ . Bu yerda  $H_0$  - vaku umdagi kuchlanganlik,  $H_1$ ,  $H_2$  -  $\mu_1$  va  $\mu_2$  muhitlardagi kuchlanganlik.

11.7.  $z = 0$  tekislikni ikki muhitni chegaralovchi tekislik va  $z$  o'qining musbat yo'nalishi birinchi muhitga yo'naltrilgan deb olamiz. Masalani yechishda elektr tasvirlash metodi kabi metoddan foydalana miz. Bu holda vektor potensiallarni quyidagi ko'rinishda qidiramiz:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\mu_1 I}{c} \oint \frac{dl}{r} + k_1 \frac{\mu_1 I}{c} \oint \frac{dl'}{r'} \quad z > 0, \\ A_2 &= k_2 \frac{\mu_2 I}{c} \oint \frac{dl}{r} \quad z < 0, \end{aligned}$$

Chegaraviy shartlardan noma'lum koeffitsientlarni aniqlaymiz:

$$k_1 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}, \quad k_2 = \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1}.$$

$$12.1. \quad \mathcal{E}_{ind} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{c} S B \omega \sin(\omega t + \theta_0)$$

bu yerda  $\theta_0$  -  $t = 0$  momentda kontur tortib turgan sirtga o'tkazil gan normali va maydon yo'nalishi orasidagi burchak.

12.2. Konturdagi tok  $\frac{L}{c^2} \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}_{ind}$  tenglama bilan aniqlanadi. Bu tenglamani 12.1-masala yechimidan foydalanimiz, quyidagi natijani olamiz:

$$I = A_0 \exp \left( -\frac{c^2 R}{L} t \right) + \frac{\omega S B}{\sqrt{c^2 R^2 + \omega^2 L^2 / c^2}} \sin(\omega t + \theta_0 - \phi).$$

Bu yerda  $\operatorname{tg} \phi = \frac{\omega L}{c^2 R}$ ,  $A_0$ - boshlang'ich tok kuchiga bog'liq bo'lgan integrallash doimiysi.

**12.3.** Zanjirdagi tok kuchi  $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}$  ga teng.  $R_2$  qarshilik qisqa tutashtirilgandan keyin zanjirdagi tok kuchi quyidagi differensial tenglama bilan aniqlanadi:

$$\frac{L}{c^2} \frac{dI}{dt} + R_1 I = \mathcal{E}.$$

Bu tenglamani integrallash ( $t = 0$  da  $I = I_0$  boshlang'ich shartlarni hisobga olganda) natijasida quyidagini topamiz:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1} \left[ 1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \exp\left(-\frac{c^2 R_1}{L} t\right) \right].$$

**12.4.** Kondensator qoplamlari orasidagi potensiallar farqi  $q/C$  ga teng bo'lgani uchun tokni aniqlovchi tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi:  $\frac{L}{c^2} \frac{dI}{dt} + RI = \frac{q}{C}$ . Konturdagi tok kuchi  $I = -\frac{dq}{dt}$ . Buni oldingi tenglamaga qo'yamiz:

$$\frac{L}{c^2} \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

Bu tenglamaning umumiy yechimini  $q = A_1 e^{k_1 t} + A_2 e^{k_2 t}$  ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda

$$k_{1,2} = -\eta \pm \sqrt{\eta^2 - \omega_0^2}; \quad \eta = \frac{c^2 R}{2L}; \quad \omega_0^2 = \frac{c^2}{LC^2}.$$

Boshlang'ich shartlardan ( $t = 0$  da  $q = q_0$ ;  $I = 0$ ) foydalanib noma'lum koeffitsientlarni topamiz:

$$A_1 = \frac{k_2}{k_2 - k_1} \cdot q_0; \quad A_2 = \frac{k_1}{k_1 - k_2} \cdot q_0.$$

**12.5.** Konturlardagi toklar quyidagi differensial tenglamalar bilan aniqlanadi:

$$\begin{aligned} \frac{L_{11}}{c^2} \frac{d^2 I_1}{dt^2} + \frac{L_{12}}{c^2} \frac{d^2 I_2}{dt^2} + R_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{C_1} I_1 &= 0, \\ \frac{L_{22}}{c^2} \frac{d^2 I_2}{dt^2} + \frac{L_{21}}{c^2} \frac{d^2 I_1}{dt^2} + R_2 \frac{dI_2}{dt} + \frac{1}{C_2} I_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{bu yerda } I_1 = -\frac{dq_1}{dt}, \quad I_2 = -\frac{dq_2}{dt}.$$

**12.6.**  $O$  nuqtadan  $r$  masofada joylashgan sterjen uzunligining elementi  $v = \omega r$  tezlik bilan harakatlanadi. Shu elementda induksiyalangan EYuK  $dE_{ind} = \frac{1}{c} Hvdr = \frac{\omega}{c} Hrdr$ . Sterjendagi to'liq EYuK

$$E_{ind} = \frac{\omega}{c} H \int_0^l r dr = \frac{1}{2} \frac{\omega}{c} H l^2.$$

$$\mathbf{12.7. } L = 2\mu \ln(b/a). \quad \mathbf{12.8. } L = 4\pi n^2 S.$$

$$\mathbf{12.9. } L = \frac{1}{2}\mu_0 + 2\mu \ln \frac{b}{a}.$$

$$\mathbf{12.10. a) } H(x) = H_0 \left( \frac{\operatorname{sh}^2(x/\delta) + \cos^2(x/\delta)}{\operatorname{sh}^2(h/\delta) + \cos^2(h/\delta)} \right)^{1/2}, \quad H_0 = \frac{4\pi}{c} I_0 n;$$

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\gamma\omega}}. \quad \mathbf{b) } H(x) = \begin{cases} H_0 \exp \left[ -\frac{h - |x|}{\delta} \right], & \delta \ll h; \\ H_0, & \delta \gg h. \end{cases}$$

$$\mathbf{12.11a. } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{4\pi\gamma}{\varepsilon} \rho = 0, \text{ bundan } \rho = \rho(r) \exp \left( -\frac{4\pi\gamma}{\varepsilon} t \right).$$

$$\mathbf{12.11b. } \tau = \frac{\varepsilon}{4\pi\gamma}. \quad \mathbf{12.11d. } \mathbf{H} \equiv 0, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}(r) \exp \left( -\frac{4\pi\gamma}{\varepsilon} t \right)$$

$$\mathbf{12.12. } \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E) + 4\pi\gamma E = 0, \quad \mathbf{H} \equiv 0,$$

$$E(x, t) = \frac{\varepsilon(x, 0)}{\varepsilon(x, t)} E(x) \exp \left( -4\pi \int_0^t \frac{\gamma}{\varepsilon} dt' \right).$$

$$\mathbf{12.13. } H_y = H_0 \sin kx \exp \left( -\frac{k^2 c^2}{4\pi\gamma} \right).$$

$$\mathbf{13.2. } \varepsilon(\omega) = \frac{aA}{1 - i\omega}.$$

$$\mathbf{13.3. } E_x = A \exp[i(kz - \omega t)], \quad H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} A \exp[i(kz - \omega t)],$$

$$E_y = E_z = H_x = H_z = 0. \quad A \text{ o'zgarmas, } k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu}.$$

$$\mathbf{13.4. } E_x = 0, \quad H_x = 0,$$

$$E_y = A \exp(-i\phi_1), \quad H_y = -nA \exp(-i\phi_2),$$

$$E_z = A \exp(-i\phi_2), \quad H_z = +nA \exp(-i\phi_1).$$

Bu yerda  $A$  o'zgarmas,  $k = n\omega/c$ ,  $\phi_1 = kx + \omega t$ ,  $\phi_2 = kx + \omega t - \pi/2$ .

## Asosiy matemanik formulalar

Nazariy fizikaning elektrordinamika kursini o'rganishda asosiy matematik apparat vektor analiz bilan bog'liq bo'lganligi uchun o'quvchi vektor analiz bilan tanishligini hisobga olib, bir qator asosiy formulalarni keltiramiz.

### A.1 Vektorlar algebrasi

Ma'lum o'lchov birligida olingan son qiymati bilan to'la aniqlanuvchi kattalik skalyar deyiladi. Hajm, zaryad, massa, elektr maydon potensiali va shunga o'xshash kattaliklar skalyarga misol bo'ladi.

Ma'lum o'lchov birligida olingan son qiymati va yo'nalishga ega bo'lgan kattalik vektor deyiladi. Vektor kattalikning boshqa ta'riflari ham mavjud. Kuch, kuch momenti, tezlik, maydon kuchlanganligi va boshqalar vektorga misol bo'ladi.

Skalyar va vektorganing matematik ta'rifini:  $N$  o'lchovli fazoda koordinata o'qlarini burishda o'z qiymatini o'zgartirmaydigan kattalik skalyar (invariant) deyiladi. Bunda skalyar  $N$  o'lchovli fazoda aniqlangan deyiladi.

Vektorning matematik ta'rifini:  $N$  o'lchovli fazoda koordinata o'qlarini burishda

$$A'_i = \sum_{k=1}^N \alpha_{ik} A_k$$

formula bilan almashadigan qandaydir  $A_i$  kattaliklar to'plami vektor deyiladi.  $\alpha_{ik}$  almashtirish matritsasi bo'lib,  $\det \alpha = 1$  shartni qanoatlantiradi. Masalan, uch o'lchovli fazoda  $\alpha_{ik}$  boshlang'ich sistemaning "k" va burilgan sistemaning "i" o'qlari orasidagi burchakning kosinusiga teng.

Vectorlar va ular ustida amallar bilan bog'liq bo'lgan asosiy formulalarni keltiramiz:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad (\text{A.63})$$

bu yerda  $i, j, k - x, y, z$  o'qlari bo'ylab yo'nalgan birlik vektorlar (ortlar),  $a_x, a_y, a_z - \mathbf{a}$  vektorning mos ravishda  $x, y, z$  o'qlarga bo'lgan proksialari.

Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi:

$$(\mathbf{ab}) = (\mathbf{ba}) = ab \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \equiv \mathbf{ab}. \quad (\text{A.64})$$

Ikki vektorning vektor ko‘paytmasi:

$$[ab] = -[ba] = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}. \quad (\text{A.65})$$

Ikki vektorning vektor ko‘paytmasining moduli:

$$|[ab]| = ab \sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}). \quad (\text{A.66})$$

Uch vektorning aralash ko‘paytmasi:

$$(a[bc]) = (b[ca]) = (c[ab]). \quad (\text{A.67})$$

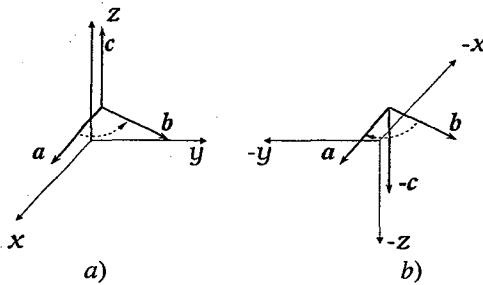
Uch vektorning vektor ko‘paytmasi:

$$[a[bc]] = b(ac) - c(ab). \quad (\text{A.68})$$

Fazo inversiyasida ( $r \rightarrow (-r)$ ) fazoviy orientatsiyasi o‘zgarmaydigan vektorlar qutb vektor deyiladi.

$$\mathbf{a}(r) = \mathbf{a}(-r). \quad (\text{A.69})$$

Radius vektor, chiziqli tezlik, kuch, impuls va elektr maydon kuchlanganligi qutb vektorga misol bo‘ladi.



13-rasm:

Fazo inversiasida fazoviy orientatsiyasi o‘zgaradigan vektorlar *aksial* yoki *psevdo* vektor deyiladi.

$$\mathbf{a}(r) = -\mathbf{a}(-r). \quad (\text{A.70})$$

Aksial vektor, odatda, ikki qutb vektorlarning vektor ko‘paytmasidan hosil bo‘ladi. Bu 13-rasmda ko‘rsatilgan ( $a$  va  $b$  qutb vektorlarning vektor ko‘paytmasidan aksial  $c$  vektorning hosil bo‘lishi keltirilgan. ( $b$ ) chizma ( $a$ ) chizmaning inversiyasi.). Burchak tezlik, kuch momenti va magnit maydon kuchlanganligi aksial (psevdo) vektorga misol bo‘ladi.

## A.2 Maydonlar

Fazoning har bir nuqtasida aniqlangan skalyar funksiya  $\varphi(\mathbf{r})$  skalyar maydon deyiladi.

Fazoning har bir nuqtasida aniqlangan vektor funksiya

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = i \, a_x(\mathbf{r}) + j \, a_y(\mathbf{r}) + k \, a_z(\mathbf{r}) \quad (\text{A.71})$$

vektor maydon deyiladi.

Vektor (maydon) ning skalyar argumenti bo'yicha hosilasi:

$$\frac{d\mathbf{a}(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(\mathbf{a}_0(x)a(x)) = \mathbf{a}_0(x) \frac{da(x)}{dx} + a(x) \frac{d\mathbf{a}_0(x)}{dx}. \quad (\text{A.72})$$

Bu yerda birinchi had vektoring modulini, ikkinchi had esa uning yo'nalishini o'zgarishini ko'rsatadi.  $\mathbf{a}_0(x)$  birlik vektor.

Maydon koordinataga bog'liq bo'lish bir qatorda vaqtga ham bog'liq bo'lishi mungkin.  $\mathbf{a}(x, y, z, t)$  vektoring vaqt bo'yicha to'liq hosilasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{a}. \quad (\text{A.73})$$

Nabla operatori

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \quad (\text{A.74})$$

munosabat bilan aniqlanadi.

Nabla operatori bilan skalyar maydon (funksiya) ga ta'sir qilsak (gradient olsak), yana vektor maydon hosil bo'ladi:

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \nabla \varphi(\mathbf{r}) = \operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r}) = i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (\text{A.75})$$

Bu vektor  $\varphi(\mathbf{r})$  ning eng tez o'sish tomoniga qarab yo'nalgan. (A.75) blan aniqlangan maydon potensial maydon deyiladi.

Nabla operatori bilan vektor maydon (funksiya) ga skalyar tarzda ta'sir qilsak (divergensiya olsak), skalyar maydon hosil bo'ladi:

$$f(\mathbf{r}) = (\nabla \cdot \mathbf{a}(\mathbf{r})) = \operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (\text{A.76})$$

Nabla operatori bilan vektor maydon (funksiya) ga vektor tarzda ta'sir qilsak (rotor olsak), vektor maydon hosil bo'ladi:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\mathbf{r}) &= [\nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r})] = \operatorname{rot} \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \\ &i \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + j \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + k \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.77})$$

Vektor  $\mathbf{a}$  dan kontur bo'yicha olingan chiziqli integral quyida ko'rinishda aniqlanadi:

$$\int_l \mathbf{a} dl = \int (a_x dx + a_y dy + a_z dz). \quad (\text{A.78})$$

Berk kontur bo'yicha birorta vektordan olingan integral

$$\oint_l \mathbf{a} dl \quad (\text{A.79})$$

shu vektorning sirkulyatsiya deyiladi. Potensial maydondan kontur bo'yicha olingan integral:

$$\int_1^2 \text{grad } \varphi dl = \varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1). \quad (\text{A.80})$$

Bunga asosan potensial maydon sirkulyatsiyasi nolga teng:

$$\oint_l \text{grad } \varphi dl = 0. \quad (\text{A.81})$$

Skalyar funksiyadan sirt bo'yicha olingan integral quyidagicha yoziladi:

$$\int \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{S} = \int \varphi(\mathbf{r}) \mathbf{n} dS, \quad (\text{A.82})$$

bu yerda  $\mathbf{n}$  sirtga perpendikulyar bo'lgan birlik vektor. Yopiq sirt bo'yicha integral quyidagicha yoziladi:

$$\oint \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{S}. \quad (\text{A.83})$$

Bu integralni hajmi nolga intiluvchi cheksiz kichik parallelopipedning sirti bo'yicha hisoblaymiz. Bunda parallelopiped tomonlari dekart koordinatalarining ( $xy$ ), ( $yz$ ), ( $zx$ ) tekisliklariga parallel va bir uchi koordinata boshida joylashgan deb olamiz. U holda

$$\oint_{\Delta V \rightarrow 0} \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{S} = \left( i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \Delta V.$$

Bunga asosan gradientning integral ta'rifi yoziladi:

$$\text{grad } \varphi = i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \varphi \mathbf{n} dS}{\Delta V}. \quad (\text{A.84})$$

Bu formula nabla operatori uchun (A.74) bilan bir xil bo'lgan integral ko'ri-nishdagi ikkinchi ta'rifni beradi.

Hajm  $V$  nolga intilganda integrallash sirti nuqtaga tortilganligi uchun (A.83) bilan aniqlangan operator integrallash sirtiga bog'liq bo'lmaydi. Shu sababli skalyar funksiya  $\varphi$  dan sirt va uning gradientidan hajm bo'yicha integrallarni bog'lovchi quyidagi munosabatni olamiz:

$$\oint \varphi dS = \int \operatorname{grad} \varphi dV. \quad (\text{A.85})$$

Bu yerda hajm bo'yicha integral sirt o'rabi olgan soha bo'yicha olinadi.

Vektor maydonda vektorning elemantar  $dS$  sirt bo'yicha oqimi

$$d\Phi = \mathbf{a} dS, \quad (\text{A.86})$$

birorta  $S$  sirt bo'yicha oqim esa

$$\begin{aligned} \Phi &= \int \mathbf{a} dS = \int \mathbf{a} \mathbf{n} dS = \int a_n dS = \\ &= \int a_x dy dz + \int a_y dz dx + \int a_z dy dx \end{aligned} \quad (\text{A.87})$$

tengliklar bilan aniqlanadi.

Vektordan berk sirt bo'yicha olingan integral uchun Ostrogradskiy-Gauss teotemasi o'rinnlidir:

$$\oint \mathbf{a} dS = \int \operatorname{div} \mathbf{a} dV. \quad (\text{A.88})$$

Bu teoremani isbotlash uchun integrallash hajmini cheksiz kichik bo'laklarga bo'lamicha (A.84) ni olishdagi yo'lni tutib div  $\mathbf{a}$  uchun integral ta'rifni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{a} \mathbf{n} dS}{\Delta V}. \quad (\text{A.89})$$

Bu ifodaga ko'ra  $\mathbf{a}(r)$  vektordan olingan divergensiya  $\mathbf{r}$  nuqtani o'rabi turgan cheksiz kichik sirt bo'yicha  $\mathbf{a}$  ning birlik hajmga to'g'ri keluvchi oqimiga teng ekanligi kelib chiqadi.

Agar  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$  bo'lsa, vektor solenoidal deyiladi va uning maydoni uyur-mali bo'ladi. Bu holda berk sirt bo'yicha vektorning oqimi nolga teng bo'ladi. Maydonning  $\operatorname{div} \mathbf{a} \neq 0$  bo'lgan nuqtalarida manba mavjud bo'ladi.  $\operatorname{div} \mathbf{a} > 0$  bo'lsa, kuch chiziqlar shu nuqtadan chiqadi,  $\operatorname{div} \mathbf{a} < 0$  da esa kuch chiziqlar shu nuqtaga kiradi.

Berk kontur bo'yicha va shu kontur tortib turgan ixtiyoriy sirt bo'yicha integrallarni bog'lovchi quyidagi tenglik

$$\oint \mathbf{a} dl = \int \operatorname{rot} \mathbf{a} dS \quad (\text{A.90})$$

Stoks teoremasining mazmunini aniqlaydi. Stoks teoremasi va nabla operatorining integral ko'rinishidan foydalananib, rot  $\mathbf{a}$  uchun integral ta'rifni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint [\mathbf{n} \mathbf{a}] dS}{\Delta V}. \quad (\text{A.91})$$

Stoks teoremasiga ikkita muhim natijani kelib chiqadi:

1. Agar vektor potensial xarakterga ( $\mathbf{a} = \operatorname{grad} \varphi$ ) ega bo'lsa, quyidagi tenglik o'rnili bo'ladi:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0. \quad (\text{A.92})$$

Bunga asosan vektor potensial xarakterga ega bo'lsa, bu vektoring maydoni uyurmasiz bo'ladi. Aksincha, vektoring maydoni uyurmasiz bo'lsa, u potensial vektor bo'ladi.

2. Solenoidal vektordan olingan divergansiya nolga teng bo'ladi, ya'ni

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{c} = 0. \quad (\text{A.93})$$

Bundan vektoring maydoni solenoidal bo'lsa, uni hosil qilayotgan vektoring rotorini nolga teng bo'ladi va aksincha, vektoring rotorini nolga teng bo'lsa, u hosil qilayotgan maydon solenoidal bo'ladi.

Quyida maydonlar bilan bog'liq bo'lgan bir qator muhim formulalarni isbotsiz keltiramiz:

Vektor maydon yoki skalyat maydon birorta skalyar o'zgaruvchining funksiyasi bo'lsin, ya'ni  $\mathbf{a}(u)$ ,  $f(u)$ . U holda:

$$\operatorname{grad} \psi(u) = \nabla \psi(u) = \frac{\partial \psi}{\partial u} \nabla u = \dot{\psi} \nabla u, \quad (\text{A.94})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(u) = \left( \nabla u \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u} \right) = (\operatorname{grad} u, \dot{\mathbf{a}}), \quad (\text{A.95})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a}(u) = \left[ \nabla u \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u} \right] = [\operatorname{grad} u, \dot{\mathbf{a}}]. \quad (\text{A.96})$$

Bu yerda  $\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial u}$ ,  $\dot{\mathbf{a}} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u}$ .

Maydonlar ko'paytmasidan olingan hosilalar:

$$\text{grad}(\psi f) = f \text{grad } \psi + \psi \text{grad } f, \quad (\text{A.97})$$

$$\text{div } \psi \mathbf{a} = \mathbf{a} \text{grad } \psi + \psi \text{div } \mathbf{a}, \quad (\text{A.98})$$

$$\text{div}[\mathbf{ab}] = \mathbf{b} \text{rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \text{rot } \mathbf{b}, \quad (\text{A.99})$$

$$\text{rot}[\mathbf{ab}] = (\mathbf{b} \text{grad})\mathbf{a} - (\mathbf{a} \text{grad})\mathbf{b} + \mathbf{a} \text{div } \mathbf{b} - \mathbf{b} \text{div } \mathbf{a}, \quad (\text{A.100})$$

$$\text{grad}(\mathbf{ab}) = (\mathbf{b} \text{grad})\mathbf{a} + (\mathbf{a} \text{grad})\mathbf{b} + [\mathbf{b} \text{rot } \mathbf{a}] + [\mathbf{a} \text{rot } \mathbf{b}], \quad (\text{A.101})$$

$$\text{grad } \mathbf{a}^2 = 2(\mathbf{a} \text{grad})\mathbf{a} + 2[\mathbf{a} \text{rot } \mathbf{a}], \quad (\text{A.102})$$

$$\text{rot}(\psi \mathbf{a}) = \psi \text{rot } \mathbf{a} + [\mathbf{a} \text{grad } \psi]. \quad (\text{A.103})$$

$$(\nabla, \mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{b} \text{div } \mathbf{a} + (\mathbf{a} \text{grad})\mathbf{a}. \quad (\text{A.104})$$

Bu yerda  $(\mathbf{a} \text{grad}) \equiv (\mathbf{a} \nabla) = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z}$  skalyar differensial operator.

Maydonlardan ikkinchi tartibli hosilalar:

$$\text{rot grad } \psi = 0, \quad (\text{A.105})$$

$$\text{div rot } \mathbf{a} = 0, \quad (\text{A.106})$$

$$\text{div grad } \psi = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = \Delta \psi, \quad (\text{A.107})$$

$$\text{rot rot } \mathbf{a} = \text{grad div } \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}. \quad (\text{A.108})$$

### A.3 Egri chiziqli koodinatalar

Ko'p hollarda vektor va vektor operatsiyalarning dekart koordinatalar-dagi tasavvurlari bilan bir qatorda sferik va silindrik koordinatalardagi tasavvurlaridan foydalanamiz. Bu koordinata sistemalari dekart koordinata sistemasi singari ortogonaldir. Quyida egri chiziqli koordinatalarda vektor operatsiyalardan ba'zilarini keltiramiz:

#### A.3.1 Sferik koordinata sistemasi

Sferik va dekart koordinatalari orasidagi bog'lanish

$$x = r \cos \psi \sin \theta, \quad y = r \sin \psi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta. \quad (\text{A.109})$$

Hajm elementi

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\psi d\theta. \quad (\text{A.110})$$

Nabla operatori

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{e}_\psi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \psi}. \quad (\text{A.111})$$

Skalyar maydon gradienti

$$\text{grad } \phi = e_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{e_\theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{e_\psi}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \psi}. \quad (\text{A.112})$$

Bu yerda  $e_r$ ,  $e_\theta$  va  $e_\psi$  mos ravishda  $r$ ,  $\theta$  va  $\psi$  o'qlardagi birlik vektorlar (ortlar).

Vektor maydon divergesiyasi

$$\text{div } \mathbf{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\psi}{\partial \psi}. \quad (\text{A.113})$$

Vektor maydon rotorini

$$(\text{rot } \mathbf{a})_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta a_\psi)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(a_\theta)}{\partial \psi}, \quad (\text{A.114})$$

$$(\text{rot } \mathbf{a})_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \psi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_\psi)}{\partial r}, \quad (\text{A.115})$$

$$(\text{rot } \mathbf{a})_\psi = \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta}. \quad (\text{A.116})$$

Laplas operatori

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}. \quad (\text{A.117})$$

### A.3.2 Silindrik koordinata sistemasi

Silindrik va dekart koordinatalari orasidagi bog'lanish

$$x = r \cos \psi, \quad y = r \sin \psi, \quad z = z. \quad (\text{A.118})$$

Hajm elementi

$$dV = r \, dr \, dz \, d\psi. \quad (\text{A.119})$$

Nabla operatori

$$\nabla = e_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{e_\psi}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} + e_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (\text{A.120})$$

Skalyar maydon gradienti

$$\text{grad } \phi = e_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{e_\psi}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} + e_z \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (\text{A.121})$$

Bu yerda  $e_r$ ,  $e_\psi$  va  $e_z$  mos ravishda  $r$ ,  $\psi$  va  $z$  o'qlardagi birlik vektorlar (ortlar).

Vektor maydon divergesiyasi

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial r a_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\psi}{\partial \psi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (\text{A.122})$$

Vektor maydon rotorini

$$(\operatorname{rot} \mathbf{a})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \psi} - \frac{\partial a_\psi}{\partial z}, \quad (\text{A.123})$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{a})_\psi = \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}, \quad (\text{A.124})$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{a})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial (r a_\psi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \psi}. \quad (\text{A.125})$$

Laplas operatori

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (\text{A.126})$$

## A.4 Furye qatori. Furye integrali

Davriylik sharti

$$f(t) = f(t + T) = f \left( t + \frac{2\pi}{\omega} \right) \quad (\text{A.127})$$

ni qanoatlantiruvchi har qanday funksiyani quyidagi qatorga yoyish mumkin:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin(n\omega t + \alpha_n), \quad (\text{A.128})$$

yoki

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\omega t}. \quad (\text{A.129})$$

Bu yerda  $T = 2\pi/\omega$  funksiyaning davri. Davriy funksiyani chastotalari  $\omega$ ,  $2\omega$ ,  $3\omega$ , ... (yoki davri  $T/2$ ,  $T/3$ , ... ) bo'lgan oddiy garmonikalar yig'indisi ko'rinishida tasvirlash, Furye qatoriga yoyish deyiladi.  $n\omega$  chastotaga mos keluvchi had  $n$ -garmonika deyiladi.  $\omega$  asosiy chastota bo'lib, unga mos kelgan had asosiy garmonika deyiladi.

Furye koeffitsientlari  $f_n$  quyidagi formula bilan aniqlanadi.

$$f_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (\text{A.130})$$

Furye koeffitsientlari umuman olganda kompleks bo'ladi. Agar  $f(t)$  funksiya haqiqiy bo'lsa,

$$f_n^* = f_{-n}. \quad (\text{A.131})$$

Davriy funksiyani Furye qatoriga yoyishni shu funksiyani *spektrga* yoyish deb yuritiladi. Bu spektr ayrim  $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$  chastotalardan iborat bo'lganligi uchun *diskret spektr* deyiladi. Har bir garmonika bitta spektral chiziq mos keladi. Shu sababli diskret spektr *chiziqli spektr* deb ham yuritiladi. Odatda, fizik kattaliklar uchun Furye qatoriga yoyish sharti bajariladi.

Davriy funksiyaning davr bo'yicha o'rtacha qiymati nolga teng bo'ladi, ya'ni

$$\overline{f(t)} = 0. \quad (\text{A.132})$$

Bu qoidani bevosita (A.128) yoki (A.129) ni davr bo'yicha o'rtachalab qanoat hosil qilish mumkin. Endi  $f(t)$  funksiya kvadratining davr bo'yicha o'rtacha qiymatini aniqlaymiz. Buning uchun (A.129) ni kvadratga oshiramiz va vaqt bo'yicha bir davr ichida integrallaymiz:

$$\overline{f(t)^2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} f_n f_m e^{i(n+m)\omega t}. \quad (\text{A.133})$$

$f(t)$  funksiyani haqiqiy deb hisoblaymiz va (A.131) ga binoan (A.133) ni quyidagi ko'rimishda yozish mumkin:

$$\overline{f(t)^2} = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} f_n f_m^* \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(n-m)\omega t} dt = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} f_n f_m^* \delta_{nm}. \quad (\text{A.134})$$

Bu yerda

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m; \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

Kroneker simvoli yoki  $\delta$  simvol deyiladi. (A.134) da yig'ndini hisoblab Furye qatori uchun Parseval tengligini olamiz:

$$\overline{f(t)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2. \quad (\text{A.135})$$

Bu yerda  $\overline{f(t)} = 0$  bo'lganligi uchun  $f_0 = 0$ .

Davriylik xossasiga ega bo'lmagan funksiyalar uchun (A.128)–(A.129) qator integral bilan almashtiriladi:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (\text{A.136})$$

Bunga Furye integrali deyiladi. Bu yerda  $f(t)$  funksiy chekli vaqt oralig'ida mavjud bolishi kerak. Ya'ni  $t \rightarrow \pm\infty$  da  $f(t) \rightarrow 0$  kerak.

$F(\omega)$  Furye amplitudasi deyiladi va quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (\text{A.137})$$

(A.136) da chastota  $\omega$  uzluksiz o'zgaradi. Shuning uchun Furye integraliga yoyish uzluksiz spektrga yoyish deb yuritiladi. Boshlang'ich funksiya  $f(t)$  haqiqiy bo'lsa, quyidagi shart o'rinni bo'ladi:

$$F^*(\omega) = F(-\omega). \quad (\text{A.138})$$

Furye integrali bilan aniqlangan funksiyaning kvadratidan barcha vaqtlar bo'yicha olingan integralni aniqlaymiz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega') e^{i\omega' t} d\omega'. \quad (\text{A.139})$$

Bu yerda o'ng tomondagi vaqt bo'yicha integral  $1/2\pi$  bilan birga  $\delta(\omega + \omega')$  ni beradi. Endi yuqoridagi ifodani  $\delta$ -funksiya yordamida  $\omega'$  bo'yicha integralaymiz va (A.138) ni inobatga olib quyidagini hosil qilamiz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (\text{A.140})$$

Bu ifoda Furye integrali uchun *Plansheral formulasi* (yoki umumlashgan Par-seval tengligi) deb yuritiladi.

Koordinataga bog'liq bo'lgan va fazoning chekli qismida mujassamlashgan funksiyani Furye integraliga yoyish mumkin:

$$f(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f(k) e^{-ikr} dk. \quad (\text{A.141})$$

Bu yerda  $k$  to'lqin vektori,

$$f(\mathbf{k}) = \int f(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{kr}} d\mathbf{r} \quad (\text{A.142})$$

esa Furye amplutuda yoki funksiyaning Furye tasviri deb yuritiladi.

Agar ko'rilayotgan funksiya koordinata va vaqtga bog'liq bo'lsa, bir vaqt-da koordinata va vaqt bo'yicha Furye integraliga

$$f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \int f(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\omega t - \mathbf{kr})} d\mathbf{k} d\omega. \quad (\text{A.143})$$

yoyish mumkin. Bunda funksiyaning Furye tasviri teskari Furye almashtirishi bilan aniqlanadi:

$$f(\mathbf{k}, \omega) = \int \int f(\mathbf{r}, t) e^{i(\omega t - \mathbf{kr})} dr dt. \quad (\text{A.144})$$

Furye qatori yoki integrali fizika masalalarini yechishda muhim ahamiyatga ega. Ayniqsa differensial tenglamalarni yechishda qo'l keladi. Bundan tashqari nurlanish spektrini o'rganishda spektrometrning matematik ifodasi deb qarash mumkin.

## A.5 Dirak delta-funksiyasi

$\delta$ -funksiya singular bo'lib, Dirak<sup>2</sup> tomonidan kiritilgan va nazariy fiziikaning ko'p masalalarida ishlataladi.  $\delta$ -funksiya quyidagi munosabatlar bilan aniqlanadi:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{agar } x \neq 0, \\ \infty & \text{agar } x = 0, \end{cases} \quad \int_a^b \delta(x) dx = 1, \quad a < 0 < b. \quad (\text{A.145})$$

Bu ta'rifdan  $\delta$ -funksiyaning asosiy xossasi kelib chiqadi:

$$\int_a^b f(x) \delta(x) dx = f(0), \quad a < 0 < b. \quad (\text{A.146})$$

Bu yerda  $f(x)$  ixtiyoriy uzlusiz funrsiya. (A.146) integralni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0), \quad a < x_0 < b. \quad (\text{A.147})$$

---

<sup>2</sup>П.А.М.Дирак, Основы квантовой механики, ГИИТЛ, 1937.

Agar  $x_0$  integrallash sohasidan tashqarida ( $x_0 < a$ ;  $x_0 > b$ ) bo'lsa, bu integral nolga teng bo'ladi.

$\delta$ -funksiya natijaviy ifodalarda ishtirok etaolmaydi. Doimo  $\delta$ -funksiya yozilganda, albatta uning argumentlaridagi o'zgaruvchilar bo'yicha integral olish ko'zda tutiladi. Bu funksiyani analitik funksiyalar ketma-ketligining limiti deb qarash mumkin.

Xususan, bunday xossaga

$$F(x) = \frac{\sin \alpha x}{\pi x}$$

funksiya ega bo'lib,  $\alpha \rightarrow \infty$  da o'zini  $\delta$ -funksiya kabi tutadi. Haqiqatan ham,  $F(x)|_{x=0} = \alpha/\pi$  va  $\alpha \rightarrow \infty$  da cheksizga intiladi.  $x \neq 0$  da uning qiymati so'nuvchi amplituda bilan nol atrofida tez tebranadi. Nihoyat, ixtiyoriy  $\alpha$  da

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{\pi x} dx = 1.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{\pi x} dx = 1, \quad \delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin ax}{x}. \quad (\text{A.148})$$

Shunga o'xshash  $\delta$ -funksiyaning boshqa tasavvurlarini ham yozish mumkin:

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a}{x^2 + a^2}, \quad (\text{A.149})$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{a \rightarrow 0} a \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right), \quad (\text{A.150})$$

$$\delta(x) = - \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\exp\left(\frac{x}{a}\right)}{a \left[\exp\left(\frac{x}{a}\right) + 1\right]^2}, \quad (\text{A.151})$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2ikx} dk, \quad (\text{A.152})$$

$$\delta(x) = \frac{d\Theta(x)}{dx}. \quad (\text{A.153})$$

$\Theta(x)$  - Xevisayda funksiyasi

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{agar } x < 0, \\ 1 & \text{agar } x > 0. \end{cases} \quad (\text{A.154})$$

$\delta$ -funksiyaning ba'zi xossalari keltiramiz:

$$\delta(-x) = \delta(x), \quad \delta'(-x) = -\delta'(x), \quad (\text{A.155})$$

$$x\delta(x) = 0, \quad x\delta'(x) = -\delta(x), \quad (\text{A.156})$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x) \quad a > 0, \quad (\text{A.157})$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a}[\delta(x-a) + \delta(x+a)], \quad (\text{A.158})$$

$$\int \delta(x-a)\delta(x-b) dx = \delta(a-bx), \quad (\text{A.159})$$

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a), \quad (\text{A.160})$$

$$\int f(x)\delta'(x-a) dx = -f'(a) \quad (\text{A.161})$$

$$\delta(f) df = \delta(x) dx, \quad (\text{A.162})$$

$$\delta(g(x)) = \frac{1}{|g'(x_0)|}\delta(x-x_0), \quad (\text{A.163})$$

$$\int f(x)\delta(g(x)) dx = \sum \frac{1}{|g'(x_i)|}f(x_i), \quad (\text{A.164})$$

$$\delta(r-a) = \delta(x-a_x)\delta(y-a_y)\delta(z-a_z). \quad (\text{A.165})$$

Bu yerda  $x_i$  nuqlarda  $g(x_i) = 0$  tenglama bilan aniqlanadi,  $g(x)$  "x" ning silliq funksiyasi.

## Foydalanilgan adabiyotlar

1. Маллин Р.Х. Майдон назарияси.- Т.: Ўқитувчи, 1965.
2. Маллин Р.Х. Классик электродинамика. I қисм. Классик микроЭлектродинамика - Т.: Ўқитувчи, 1974.
3. Маллин Р.Х. Классик электродинамика. II қисм. Классик макро-Электродинамика - Т.: Ўқитувчи, 1978.
4. Левич В.Г. Курс теоретической физики. Учеб. пособие. Том I. - М.: Наука, 1969.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. Учеб. пособие. - М.: Наука, 1976.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. Учеб. пособие. - М.: Наука, 1982.
7. Mills D.L. Nonlinear Optics. Basic Concepts. - Springer-Verlag, 1998.
8. Кившарь Ю.С., Агравал Г.П. Оптические солитоны. - М.: Физматлит, 2005.
9. Абдуллаев Ф.Х., Дарманян С.А., Хабибуллаев П.К. Оптические солитоны. - Т.: ФАН, 1986.
10. Маркузе Д. Оптические волноводы. - М.: Мир, 1974.
11. Топтыгин И.Н. Современная электродинамика, часть I. Микроскопическая теория: Учебное пособие. - Москва-Ижевск, 2002; Интернет магазин - <http://shop.rcd.ru>.
12. Шарипов Р. А. Классическая электродинамика и теория относительности. Учебное пособие. УФА, 1997.
13. Киселев В.В. Классическая электродинамика. Семинары по курсу "Теория поля". Протвино, 2004.
14. Гречко А.Г. и др. Сборник задач по теоретической физике. М. Просвещение, 1979.
15. Векштейн Е.Г. Сборник задач по электродинамике. - М.: Высшая школа, 1965.

# Mundarija

<b>So‘z boshi . . . . .</b>	<b>5</b>
<b>Bob 1 Maxsus nisbiylik nazariyasi . . . . .</b>	<b>9</b>
1.1 Nisbiylik prinsiplari . . . . .	9
1.2 Nisbiylik nazariyasida interval . . . . .	14
1.3 Nisbiylik nazariyasida vaqt . . . . .	20
1.4 Lorentz almashtirishlari . . . . .	23
1.5 Lorentz almashtirishlaridan kelib chiqadigan xulosalar	26
1.6 Nisbiylik nazariyasida tezliklarni va burchaklarni al-	
mashtirish . . . . .	28
1.7 To‘rt ‘lchovli vektor va tenzorlar . . . . .	31
1.8 To‘rt o‘lchovli tezlik va tezlanish . . . . .	36
1.9 1-bobga oid masala va savollar . . . . .	38
<b>Bob 2 Relyativistik mexanika . . . . .</b>	<b>41</b>
2.1 Erkin moddiy nuqtaning Lagranj funksiyasi . . . . .	41
2.2 Erkin moddiy nuqtaning energiya va impulsi . . . . .	43
2.3 Zarrachalar sistemasining mexanikasi . . . . .	48
2.4 Relyativistik zarrachalarning parchalanishi . . . . .	54
2.5 Relyativistik zarrachalarning elastik to‘qnashishi. . . . .	57
2.6 2-bobga oid masala va savollar . . . . .	61
<b>Bob 3 Elektromagnit maydondagi zaryad . . . . .</b>	<b>63</b>
3.1 Nisbiylik nazariyasida zaryad va zarrachalar . . . . .	63
3.2 Elektromagnit maydondagi zaryad uchun ta’sir integrali	65
3.3 Elektromagnit maydondagi zaryad harakat tenglamasi.	67
Lorentz kuchi . . . . .	
3.4 Maydon kattaliklari uchun Lorentz almashtirishlari . .	73
3.5 Maydonning kalibrovka invariantligi . . . . .	76
3.6 Tekis harakatlanayotgan zaryad maydoni . . . . .	78
3.7 Elektr maydonda zaryadning harakati . . . . .	81
3.8 Magnit maydonda zaryadning harakati . . . . .	84
3.9 3-bobga oid masala va savollar . . . . .	86
<b>Bob 3 Elektrodinamikaning asosiy tenglamalari . . . . .</b>	<b>89</b>

4.1	Maksvell–Lorentz tenglamalarining birinchi jufti . . . . .	89
4.2	Zaryadning saqlanish qonuni . . . . .	92
4.3	Elektromagnit maydon uchun ta'sir integrali . . . . .	94
4.4	Maksvell–Lorentz tenglamalarining ikkinchi jufti . . . . .	97
4.5	Elektromagnit maydon energiyasining saqlanish qonuni	100
4.6	Maydon potensiallari uchun tenglamalar . . . . .	104
4.7	4-bobga oid masala va savollar . . . . .	106
<b>Bob 5</b>	<b>Elektrostatika . . . . .</b>	<b>109</b>
5.1	Elektrostatik maydon. . . . .	109
5.2	Kulon qonuni . . . . .	111
5.3	Multipol momentlar . . . . .	112
5.3.1	Dipol momenti . . . . .	113
5.3.2	Kvadrupol momenti . . . . .	115
5.4	Elektrostatik maydon energiyasi . . . . .	119
5.5	Tashqi maydonning zaryadlar sistemasiga ta'siri . . . . .	123
5.6	5-bobga oid masala va savollar . . . . .	126
<b>Bob 6</b>	<b>O'zgarmas magnit maydon . . . . .</b>	<b>129</b>
6.1	Statsionar tokning magnit maydoni . . . . .	129
6.2	Magnit momenti . . . . .	133
6.3	Chiziqli tokning magnit momenti . . . . .	135
6.4	Magnit va impuls momentlari orasidagi bog'lanish . . . . .	138
6.5	6-bobga oid masala va savollar . . . . .	140
<b>Bob 7</b>	<b>Vakuumda elektromagnit maydon . . . . .</b>	<b>143</b>
7.1	To'lqin tenglamasi . . . . .	143
7.2	Yassi elektromagnit to'lqinlari . . . . .	145
7.3	Monoxromatik elektromagnit to'lqinlar . . . . .	148
7.4	7-bobga oid masalalar va savollar . . . . .	153
<b>Bob 8</b>	<b>Ixtiyoriy harakatdagi zaryadlar maydoni . . . . .</b>	<b>155</b>
8.1	Kechikuvchi potensiallar . . . . .	155
8.2	Nuqtaviy zaryad kechikuvchi potensiali . . . . .	160
8.3	Ixtiyoriy harakatdagi zaryadlarning yetarlichcha uzoq masofalardagi maydoni . . . . .	165
8.4	Dipol nurlanishi . . . . .	169
8.5	Nurlanish reaksiyasi . . . . .	172
8.6	Nurlanish chizig'ning tabiiy kengligii . . . . .	175

8.7	Kvadrupol va magnito-dipol nurlanishi . . . . .	179
8.8	Elektromagnit to'lqinlarning zaryadlarda sochilishi . . . . .	182
8.9	Relyativistik zaryadlarning nurlanishi . . . . .	185
8.10	8-bobga oid masala va savollar . . . . .	188
<b>Bob 9</b>	<b>Makroskopik elektrodinamikaning asosiy tenglamalari . . . . .</b>	<b>189</b>
9.1	Maydon kattaliklarini o'rtachalash . . . . .	189
9.2	Elektr maydonda muhitning qutblanishi . . . . .	192
9.3	Tok zichligining o'rtachasi . . . . .	194
9.4	Maksvell va bog'lanish tenglamalari . . . . .	198
9.5	Chegaraviy shartlar . . . . .	201
9.6	Muhitda elektromagnit maydon energiyasining saqlanish qonuni . . . . .	206
9.7	9-bobga oid masala va sayollar . . . . .	208
<b>Bob 10</b>	<b>Muhitda elektrostatik maydon . . . . .</b>	<b>209</b>
10.1	O'tkazgichlarda elektrostatik maydon . . . . .	210
10.2	O'tkazgichlarning elektrostatik maydon energiyasi . . . . .	211
10.3	Dielektriklarda elektrostatik maydon . . . . .	215
10.4	Elektrostatika masalalarini yechish metodlari . . . . .	216
10.5	Dielektriklar va o'tkazgichlar tashqi elektrostatik maydonda . . . . .	223
10.6	10-bobga oid masalalar va savollar . . . . .	227
<b>Bob 11</b>	<b>O'zgarmas magnit maydon . . . . .</b>	<b>229</b>
11.1	Om qonuni . . . . .	229
11.2	O'zgarmas tokli chiziqli o'tkazgichlar . . . . .	232
11.3	O'tkazgichlarda o'zgarmas tok . . . . .	234
11.4	Statsionar tokning magnit maydoni . . . . .	235
11.6	11-bobga oid masalalar va savollar . . . . .	238
<b>Bob 12</b>	<b>Kvazistatsionar maydonlar . . . . .</b>	<b>239</b>
12.1	Kvazistatsionarlik shartlari . . . . .	239
12.2	Harakatdagi o'kazgichlar uchun induksiya qonuni . . . . .	241
12.3	Chiziqli o'tkazgichlarda kvazistatsionar toklar . . . . .	245
12.4	Kvazistatsionar toklar energiyasi . . . . .	247
12.5	O'tkazgichda kvazistatsionar toklarning taqsimoti . . . . .	250
12.6	Bir jinsli va izotrop muhitda elektromagnit to'lqinlar . . . . .	254
12.7	12-bobga oid masalalar va savollar . . . . .	258

<b>Bob 13 Yuqori chastotali maydonlar . . . . .</b>	<b>261</b>
13.1 Dielektrik singdiruvchanlikning dispersiyasi . . . . .	261
13.2 Yorug'lik dispersiyasi . . . . .	264
13.3 ispersjon munosabatlar . . . . .	267
13.4 Fazoviy va vaqtiy dispersiyasi . . . . .	271
13.5 Cherenkov-Vavilov nurlanishi . . . . .	274
13.6 13-bobga oid masalalar va savollar . . . . .	279
<b>Bob 14 Nochiziqli optika . . . . .</b>	<b>281</b>
14.1 Nochiziqli dielektrik singdiruvchanlik . . . . .	281
14.2 Ikkinchи garmonikaning generatsiyasi . . . . .	286
14.3 Uchinchi tartibli nochiziqli effektlar . . . . .	292
14.4 Bir o'lchamli nochiziqli Shredinger tenglamasi . . . . .	295
14.4.1 Modulyatsion barqarorlik . . . . .	295
14.4.2 Fazoviy yorqin optik solitonlar . . . . .	298
14.4.3 Qorong'i fazoviy solitonlar . . . . .	301
14.6 14-bobga oid masalalar va savollar . . . . .	302
<b>Masalalarning javoblari va yechimlari . . . . .</b>	<b>303</b>
<b>Ilova Asosiy matemanik formulalar . . . . .</b>	<b>325</b>
A.1 Vektorlar algebrasi . . . . .	325
A.2 Maydonlar . . . . .	327
A.3 Egri chiziqli koodinatalar . . . . .	331
A.3.1 Sferik koordinata sistemasi . . . . .	331
A.3.2 Silindrik koordinata sistemasi . . . . .	332
A.4 Furye qatori. Furye integrali . . . . .	333
A.5 Dirak delta-funksiyasi . . . . .	336
<b>Foydalaniqgan adabiyotlar . . . . .</b>	<b>339</b>

**Abdulaziz Abduvakhovich ABDUMALIKOV**

## **ELEKTRODINAMIKA**

*Oliy o‘quv yurtlari uchun darslik*

*Muharrir Xudoyberdi Po‘latxo‘jayev*

*Badiiy muharrir Yasharbek Rahimov*

*Texnik muharrir Yelena Tolochko*

*Musahhih Muhabbat Xalliyeva*

*Kompuyterda teruvchi Feruza Razzoqova*

Litsenziya raqami AI № 163. Bosishga ruxsat etildi 22.07.2011. Bichimi  
60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Tayms UZ garniturasi. Shartli b.t. 19,99. Nashr b.t. 21,66. Shartnoma  
№ 49—2011. 500 nusxada. Buyurtma № 29.

O‘zbekiston Matbuot va axborot agentligining Cho‘lon nomidagi nashriyot-matbaa ijodiy uyi. 100129, Toshkent, Navoiy ko‘chasi, 30-uy.

«NOSHIR-FAYZ» MCHJ bosmaxonasida chop etildi. Toshkent tumani,  
Keles shahar, K. G‘ofurov ko‘chasi, 97-uy.