

V. Erweiterungen und Anwendungen zur Logik

- ❑ Produktionsregelsysteme
- ❑ Inferenz für Produktionsregelsysteme
- ❑ Produktionsregelsysteme mit Negation
- ❑ Regeln mit Konfidenzen
- ❑ Nicht-monotones Schließen
- ❑ Logik und abstrakte Algebren
- ❑ Verifikation
- ❑ Verifikation mit dem Hoare-Kalkül
- ❑ Hoare-Regeln und partielle Korrektheit
- ❑ Terminierung

Nicht-monotones Schließen

Problemlösen mittels Logik

1. Ausgangspunkt.

Ein System der realen Welt und eine Frage dazu.

2. Modellbildung.

Abstraktion des Systems (\rightsquigarrow Modell) und der Frage.

3. Formalisierung.

Beschreibung von Modell und Frage als Formel α bzw. β .

4. Schlussfolgern bzw. Inferenz.

(a) Überprüfung ob $\alpha \models \beta$ gilt.

(b) Bestimmung möglicher Folgerungen β' aus α .

Bemerkungen:

- ❑ Nach dem Schlussfolgerungsprozess weiß man $\alpha \wedge \beta$ bzw. $\alpha \cup \beta$.
- ❑ Das klassische Schlussfolgern basiert auf unserem Wissen über die Dinge.
- ❑ Beim klassischen Schlussfolgern nimmt unser Wissen immer weiter zu: Je mehr man weiß bzw. je „größer“ α ist, um so mehr kann man folgern. Der Schlussfolgerungsprozess ist monoton.

Nicht-monotones Schließen

Schlussfolgern in der klassischen Logik

(a) Gegeben: $\alpha = \{\gamma, \gamma \rightarrow \beta\}$

Schlussregel: Modus Ponens.

$$\gamma \wedge (\gamma \rightarrow \beta) \vdash \beta$$

Nicht-monotones Schließen

Schlussfolgern in der klassischen Logik

(a) Gegeben: $\alpha = \{\gamma, \gamma \rightarrow \beta\}$

Schlussregel: Modus Ponens.

$$\gamma \wedge (\gamma \rightarrow \beta) \vdash \beta$$

(b) Gegeben: $\alpha = \{\gamma \wedge \neg\delta, \gamma \wedge \neg\delta \rightarrow \beta\}$

Schlussregel: Modus Ponens.

$$\gamma \wedge \neg\delta \wedge (\gamma \wedge \neg\delta \rightarrow \beta) \vdash \beta$$

Nicht-monotones Schließen

Schlussfolgern in der klassischen Logik

(a) Gegeben: $\alpha = \{\gamma, \gamma \rightarrow \beta\}$

Schlussregel: Modus Ponens.

$$\gamma \wedge (\gamma \rightarrow \beta) \vdash \beta$$

(b) Gegeben: $\alpha = \{\gamma \wedge \neg\delta, \gamma \wedge \neg\delta \rightarrow \beta\}$

Schlussregel: Modus Ponens.

$$\gamma \wedge \neg\delta \wedge (\gamma \wedge \neg\delta \rightarrow \beta) \vdash \beta$$

(c) Gegeben: $\alpha = \{\gamma \wedge \delta, \gamma \wedge \delta \rightarrow \beta\}$

Schlussregel: Modus Ponens.

$$\gamma \wedge \delta \wedge (\gamma \wedge \delta \rightarrow \beta) \vdash \beta$$

Bemerkungen:

- ❑ Die Mengenschreibweise bei den Formeln steht für eine logische UND-Verknüpfung.
- ❑ Schlussfolgern über Nicht-Wissen erfordert besondere Ableitungsprinzipien.
- ❑ Die zwei wichtigsten Ansätze hierzu sind Negation-as-Failure und das logische Schließen mittels Defaults (Default-Logik).

Nicht-monotones Schließen

Schlussfolgern über Nicht-Wissen: Negation-as-Failure

Gegeben: $\alpha = \{\gamma, \gamma \wedge \neg\delta \rightarrow \beta\}$

Ableitungsprinzip: $\frac{}{\vdash_{naf}}$ \equiv Modus Ponens + Negation-as-Failure.

$$\gamma \wedge (\gamma \wedge \neg\delta \rightarrow \beta) \vdash_{naf} \beta$$

Bemerkungen:

- ❑ Lässt sich eine Formel δ nicht aus α ableiten*, so darf *unter Vorbehalt* ihr Gegenteil, $\neg\delta$, konjunktiv zu α hinzugenommen werden. Aus semantischer Sicht ist dies gleichbedeutend damit, dass $\neg\delta$ vorläufig als wahr angenommen wird.
Idee: Closed-World-Assumption. „Alles, was gilt, ist ableitbar.“ bzw. „Was nicht ableitbar ist, das gilt auch nicht.“
 - ❑ Durch Negation-as-Failure wird α (unter Vorbehalt, auf Basis aktuellen Wissens) so modifiziert, dass der Modus Ponens bzw. Resolution anwendbar wird (vgl. vorherige Folie zur klassischen Logik).
 - ❑ Dieses Ableitungsprinzip findet in der Programmiersprache Prolog Verwendung, wobei statt des Modus Ponens das Resolutionsverfahren eingesetzt wird.
- (*) Bei Negation-as-Failure in Prolog wird versucht, δ mittels Backward-Chaining abzuleiten.

Nicht-monotones Schließen

Schlussfolgern über Nicht-Wissen: Default-Logik [Doyle/McDermott 1980]

Gegeben: $\alpha = \{\gamma, \gamma \wedge M\delta \rightarrow \beta\}$

Ableitungsprinzip: $\frac{}{\vdash_{default}} \equiv \text{Modus Ponens} + \text{Default}.$

$$\gamma \wedge (\gamma \wedge M\delta \rightarrow \beta) \vdash_{default} \beta$$

Schreibweise: Default-Regel

$$\frac{\gamma \wedge M\delta}{\beta}$$

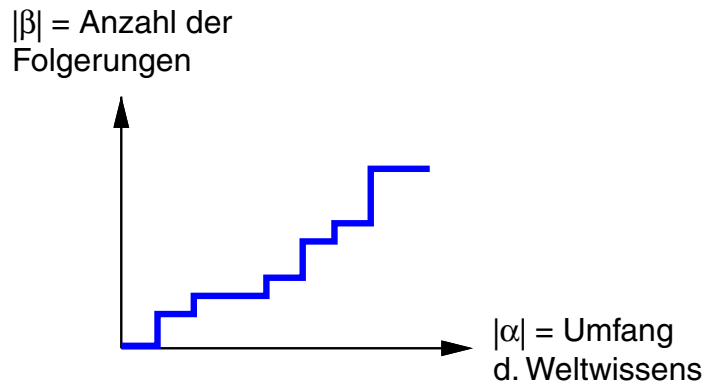
Bemerkungen:

- ❑ Lässt sich eine Formel $\neg\delta$ nicht aus α ableiten*, so darf *unter Vorbehalt* ihr Gegenteil, δ , konjunktiv zu α hinzugenommen werden. Aus semantischer Sicht ist dies gleichbedeutend damit, dass δ als wahr angenommen wird.
Idee: „Solange kein Widerspruch bei der Annahme eines Sachverhalts auftritt, gehe von seiner Gültigkeit aus.“ $M\delta \equiv$ „it is consistent to assume δ .“
- ❑ Das „ M “ (Modality) bei der Default-Logik kennzeichnet einen logischen Fakt, der defaultmäßig als vorhanden angesehen wird bzw. für den der Wert „wahr“ angenommen wird. Dadurch wird α (unter Vorbehalt, auf Basis aktuellen Wissens) so modifiziert, dass der Modus Ponens anwendbar wird (vgl. vorherige Folie zur klassischen Logik).
- (*) Der Ableitungsprozess in der Default-Logik ist üblicherweise datengetrieben, also Forward-Chaining.

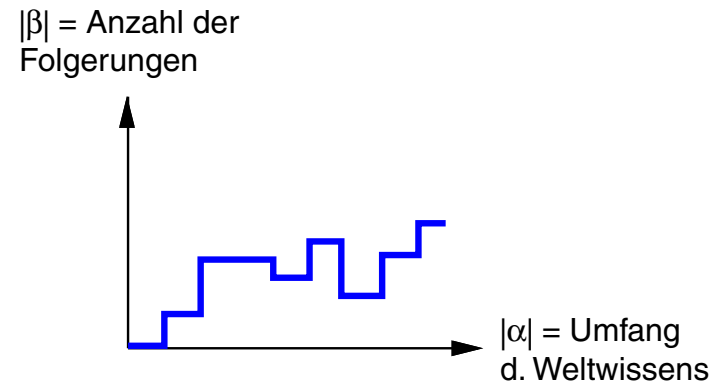
Nicht-monotones Schließen

Schlussfolgern über Nicht-Wissen

Eine Besonderheit bei Schlussfolgern über Nicht-Wissen ist, dass bei Zunahme des Wissens über die Welt das folgerbare Wissen abnehmen kann: α wird größer, die Menge β der Folgerungen aus α jedoch kleiner.



Klassische, monotone Situation



Nicht-monotone Situation

Bemerkungen:

- Wenn man über „Nicht-Wissen“ schlussfolgert nimmt die Menge der ableitbaren Fakten (= Wissen) nicht notwendiger Weise zu. Der Schlussfolgerungsprozess ist nicht-monoton. Üblich in diesem Zusammenhang ist deshalb der Begriff des *nicht-monotonen Schließens*.

Nicht-monotones Schließen

Schlussfolgern über Nicht-Wissen

Beispiel: $\alpha = \{C, (C \rightarrow B), ((B \wedge \neg D) \rightarrow E)\}$

Ableitungsprinzip: $\frac{}{\quad}_{naf} \equiv \text{Modus Ponens} + \text{Negation-as-Failure}$

Frage: $\beta = \{E\}$. Gilt $\alpha \frac{}{\quad}_{naf} \beta$?

Nicht-monotones Schließen

Schlussfolgern über Nicht-Wissen

Beispiel: $\alpha = \{C, (C \rightarrow B), ((B \wedge \neg D) \rightarrow E)\}$

Ableitungsprinzip: $\vdash_{naf} \equiv$ Modus Ponens + Negation-as-Failure

Frage: $\beta = \{E\}$. Gilt $\alpha \vdash_{naf} \beta$?

Zeitpunkt	t_1	t_2	t'_2
Weltwissen	D ist unbekannt	D ist wahr	$\neg D$ ist wahr
Folgerungen	B, E	B	B, E

Wie operationalisiert man nicht-monotones Schließen?

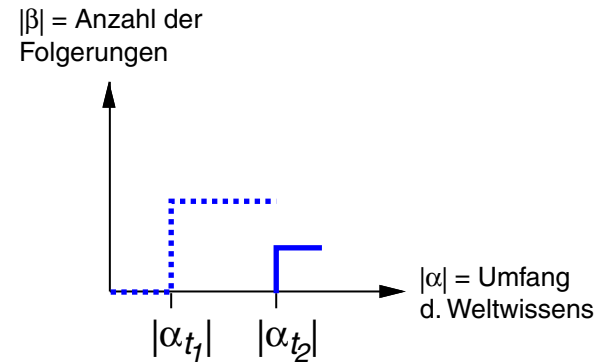
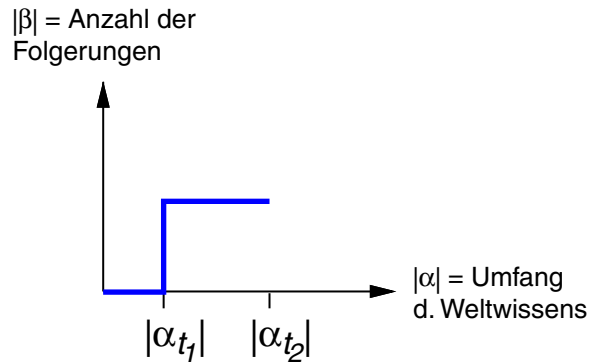
Bemerkungen:

- ❑ Kommt man von der Situation zum Zeitpunkt t_1 in die Situation zum Zeitpunkt t_2 , so darf unter der Annahme der Closed-World-Assumption E nicht in der Menge der abgeleiteten Fakten sein, denn E kann in dieser Situation nicht gefolgert werden.
- ❑ Die Mengenschreibweise bei den Formeln steht für eine logische UND-Verknüpfung.

Nicht-monotones Schließen

Operationalisierung

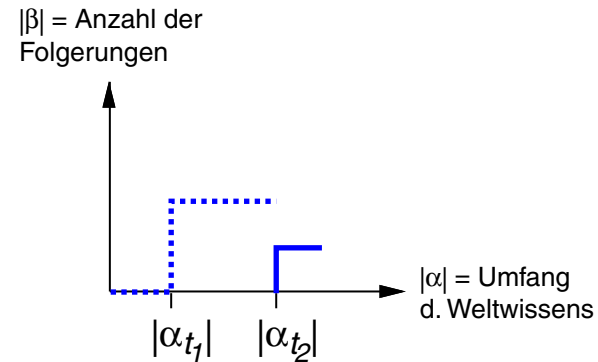
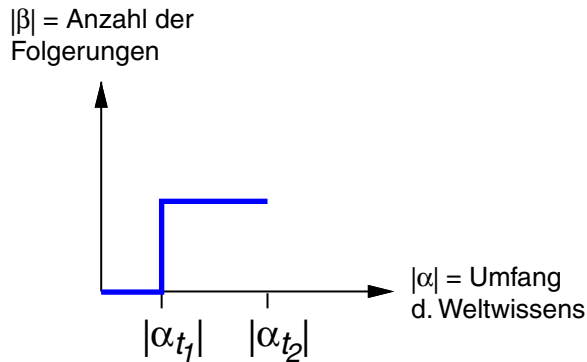
- (a) Jedes Mal, wenn sich das Weltwissen ändert, werden alle Folgerungen (abgeleitete Fakten) gelöscht und der Inferenzprozess von vorne gestartet:



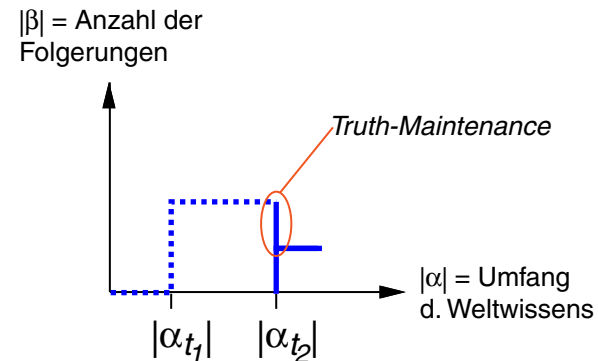
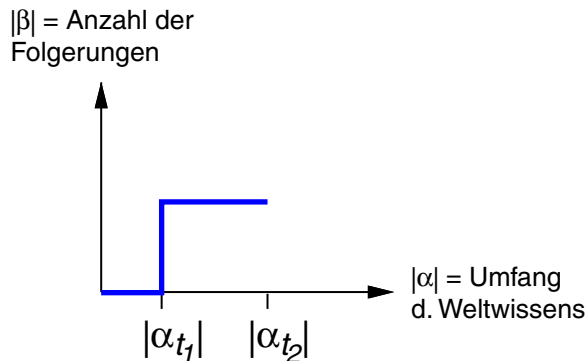
Nicht-monotones Schließen

Operationalisierung

- (a) Jedes Mal, wenn sich das Weltwissen ändert, werden alle Folgerungen (abgeleitete Fakten) gelöscht und der Inferenzprozess von vorne gestartet:



- (b) Die Menge der Folgerungen (ableitbaren Fakten) wird inkrementell konsistent bzgl. der Schlussregel gehalten:



Bemerkungen:

- ❑ Systeme, die dabei helfen, einen nicht-monotonen Schlussfolgerungsprozess nachzubilden, heißen *Truth-Maintenance-Systeme* (TMS) oder auch *Reason-Maintenance-Systeme* (RMS). Zwei wichtige Vertreter sind das Justification-based TMS und das Assumption-based TMS.

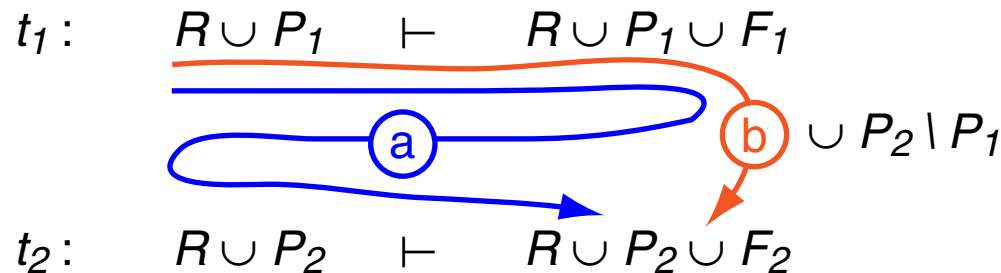
Nicht-monotones Schließen

Modellierung

Viele Modelle (z. B. in der Diagnose) lassen eine Aufteilung in folgende Mengen zu:

- R , universelle Formeln über die Welt (Regeln).
- P_t , aktuelles Faktenwissen über die Welt zum Zeitpunkt t (Prämissen).
- $\underbrace{F_t}_{\beta}$, Folgerungen aus $\underbrace{R \cup P_t}_{\alpha}$.

Es gelte $P_1 \subset P_2$. Die beiden Konzepte zur Operationalisierung des nicht-monotonen Schließens lassen sich wie folgt illustrieren:



Bemerkungen:

- Mit $P_1 \subset P_2$ gilt unmittelbar $F_1 \subseteq F_2$ für die monotone Situation. Für die nicht-monotone Situation lässt sich keine Aussage über die Relation zwischen F_1 und F_2 machen.