Chapter S:VI

VI. Relaxed Models

Using Information about Uncertainty of *h*

Verwendung einer nicht-zulässigen Schätzfunktion

Idee:

Die Schätzfunktion h schätzt die billigsten verbleibenden Kosten h^* meistens recht gut, aber überschätzt h^* manchmal um nicht mehr als ε.

➜ A* mit solch einer Schätzfunktion h ist ε-zulässig.

Die Bedingung für die ε-Zulässigkeit von A* wird erfüllt, da zum Zeitpunkt der Terminierung gilt

$$h(n) - h^*(n) \leq \varepsilon \text{ für alle } n \in \text{ OPEN.}$$

Auch die abgeschwächte Form der Zulässigkeit von h ist oft zu restriktiv.

Häufig ist es leichter, eine Schätzfunktion für h^* zu finden, die meistens gut schätzt und h^* manchmal (um deutlich mehr als ε) überschätzt.

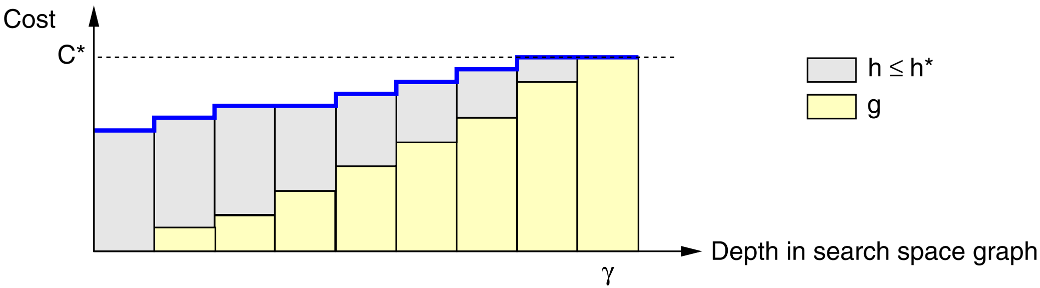
➜ Der Fehler in der Schätzung ist nicht beschränkt, ein großer Fehler aber unwahrscheinlich.

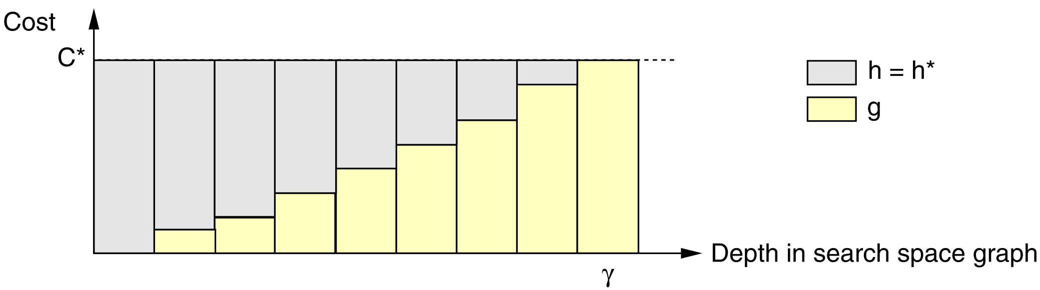
Remarks:

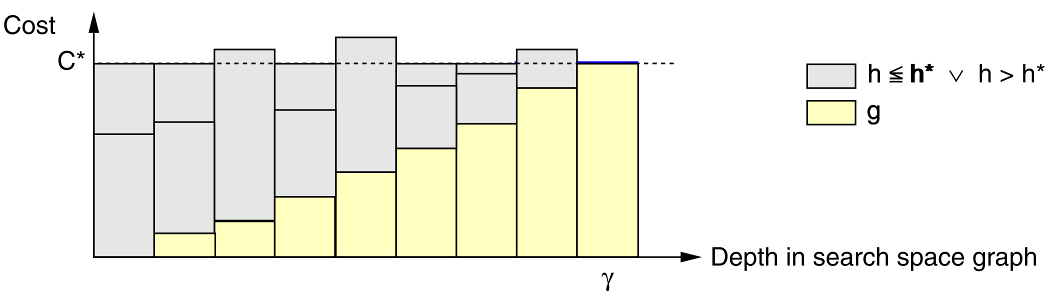
- Schätzfunktionen h mit $h \leq (1+\varepsilon)h^*$ heißen ε-zulässig.
- Die Bedingung "$h(n) - h^*(n) \leq \varepsilon$ für alle $n \in$ OPEN" ist hinreichend, aber nicht notwendig.

Using Information about Uncertainty of *h*

Illustration von unter- und überschätzenden Schätzfunktionen







Using Information about Uncertainty of *h*

Beispiel: Suche in “zufälligem” Graphen

Gegeben ist ein Graph mit zufällig gezogenen Kantenkosten. Die minimale Anzahl von Kanten zu einem Zielknoten ist in jedem Knoten bekannt.

- Kantenkosten $c(n, n')$ seien gleichverteilt im Intervall $[0; 1]$.
- Für lange Pfade mit N Kanten von einem Knoten n zu einem Ziel in Γ ist $h^*(n)$ *wahrscheinlich* in der Nähe von $\frac{N}{2}$.
- Die einzige *zulässige* Schätzfunktion für h^* ist $h_1(n) = 0$.
- Die einzige vernünftige Schätzfunktion für h^* ist $h_2(n) = \frac{N}{2}$.

Die Schätzfunktion h_2 führt im Worst-Case zu einer Kostenüberschätzung von $\frac{N}{2}$ und ist damit nicht (ε-)zulässig. Aber: Dieser Fall ist äußerst unwahrscheinlich.

Using Information about Uncertainty of *h*

Beispiel: Suche in “zufälligem” Graphen

Gegeben ist ein Graph mit zufällig gezogenen Kantenkosten. Die minimale Anzahl von Kanten zu einem Zielknoten ist in jedem Knoten bekannt.

- Kantenkosten $c(n, n')$ seien gleichverteilt im Intervall $[0; 1]$.
- Für lange Pfade mit N Kanten von einem Knoten n zu einem Ziel in Γ ist $h^*(n)$ *wahrscheinlich* in der Nähe von $\frac{N}{2}$.
- Die einzige *zulässige* Schätzfunktion für h^* ist $h_1(n) = 0$.
- Die einzige vernünftige Schätzfunktion für h^* ist $h_2(n) = \frac{N}{2}$.

Die Schätzfunktion h_2 führt im Worst-Case zu einer Kostenüberschätzung von $\frac{N}{2}$ und ist damit nicht (ε-)zulässig. Aber: Dieser Fall ist äußerst unwahrscheinlich.

→ Algorithmus R*$_\delta$:

- Neben einer Schätzfunktion h für h^* ist auch Wissen über die Unsicherheit der Schätzung vorhanden.
- Das Wissen über die Unsicherheit einer Schätzung ist mit einer Dichtefunktion $\rho_{h^*}(x)$ definiert.

Using Information about Uncertainty of *h*

Beschreibung der Schätzunsicherheit durch Dichtefunktionen

Betrachtung von Kostenfunktionen als Zufallsvariable:

Kostenfunktion	**Zufallsvariable**
$h^*(n)$	h_n^*
$f^*(n) = g^*(n) + h^*(n)$	f_n^*
$f^+(n) = g(n) + h^*(n)$	f_n^+

Sei $\rho_{h_n^*}$ eine Dichtefunktion für die Zufallsvariable h_n^*.

Semantik:

Auf Basis von $\rho_{h_n^*}$ lässt sich die Wahrscheinlichkeit definieren, mit der $h^*(n)$ in einer Umgebung der Kosten x gefunden werden kann.

$$P(h_n^* = x) = \rho_{h_n^*}(x)$$

Using Information about Uncertainty of *h*

Beschreibung der Schätzunsicherheit durch Dichtefunktionen (continued)

Sei $\rho_{h_n^*}$ eine Dichtefunktion für die Zufallsvariable h_n^*.

Weiterhin gilt:

1. Aus $\rho_{h_n^*}(x)$ lässt sich eine Dichtefunktion $\rho_{f_n^*}(y)$ für die Zufallsvariable f_n^* ableiten, falls g^* bekannt ist:

$$\rho_{f_n^*}(y) := \rho_{h_n^*}(y - g^*)$$

2. Es sei P_{s-n} der billigste bislang bekannte Pfad von s zu einem OPEN-Knoten n.
   Aus $\rho_{h_n^*}(x)$ lässt sich eine Dichtefunktion $\rho_{f_n^+}(y)$ für die Zufallsvariable f_n^+ für den Fall ableiten, dass P_{s-n} fortgesetzt wird:

$$\rho_{f_n^+}(y) := \rho_{h_n^*}(y - g)$$

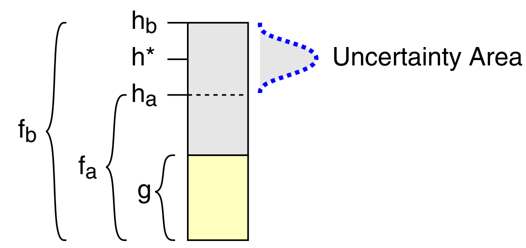
Remarks:

- Die Zufallsvariable f_n^+ mit zugehöriger Dichtefunktion $\rho_{f_n^+}$ ist für jeden Knoten n gegeben.
- Die Zufallsvariable f_n^+ beschreibt die möglichen Kosten eines optimalen Lösungspfades, der als Teilpfad den Zeigerpfad P_{s-n} enthält.
- Wenn von s aus Zielknoten erreichbar sind, enthält die OPEN-Liste immer einen Knoten n, für den $f^+(n) = f^*(n) = C^*$ gilt. (Pearl Lemma 2)

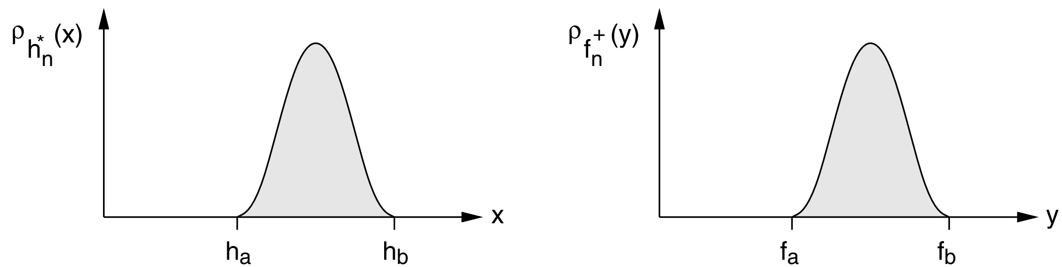
Using Information about Uncertainty of *h*

Beschreibung der Schätzunsicherheit durch Dichtefunktionen (continued)

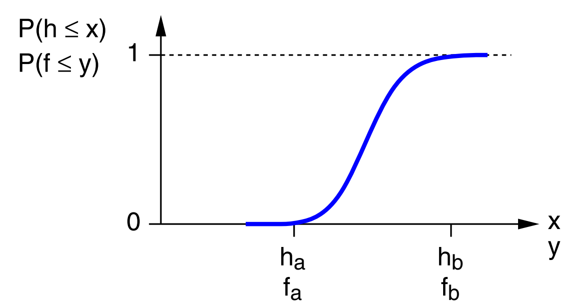
Unsicherheitsbereich:



Dichtefunktionen ρ:



Zugehörige Verteilungsfunktion:

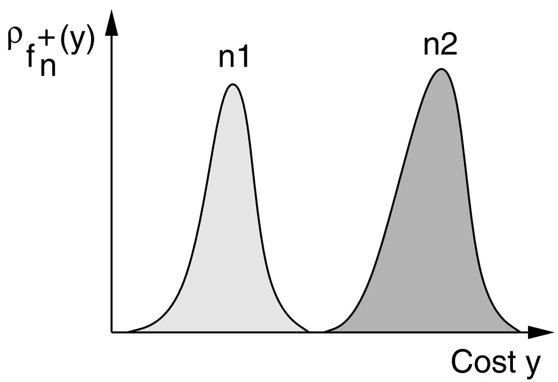


Using Information about Uncertainty of *h*

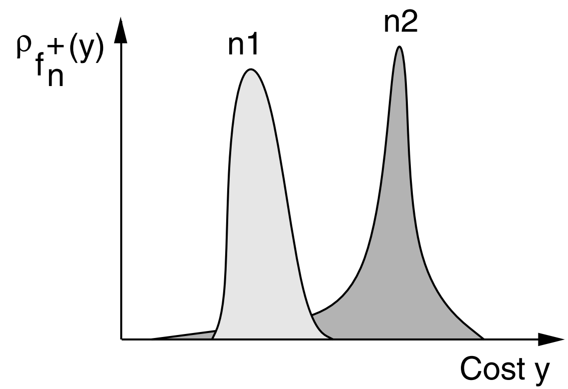
Beschreibung der Schätzunsicherheit durch Dichtefunktionen (continued)

Wie soll aus den Dichtefunktionen $\rho_{f_n^+}$ der Knoten in der OPEN-Liste eine Evaluierungsreihenfolge berechnet werden?

Möglicher Verlauf von zwei Dichtefunktionen:



Case (a)



Case (b)

Remarks:

(a) Falls sich die Dichtefunktionen nicht überlappen, würde derjenige Knoten gewählt, für den die zugehörige Dichtefunktion ρ_{f^+} den niedrigsten Dichtewert f^+ bzgl. aller anderen Knoten besitzt.

(b) $f^+_{n_1}$ hat den niedrigeren Erwartungswert; bei n_2 *besteht die Möglichkeit*, dass die Kosten $f^+_{n_2}$ niedriger als bei n_1 sein können.
Ein zulässiger Algorithmus würde n_2 expandieren.
Sinnvoller wäre es, n_1 zu expandieren, weil das Ereignis "$f^+(n_2) < f^+(n_1)$" unwahrscheinlich ist (Anm.: $f^+(n)$ ist Kostenfunktion, nicht Zufallsvariable).

➜ Bedingt durch die Unsicherheit können Kosten über- oder unterschätzt werden. D. h., einen Knoten in der OPEN-Liste nicht zu expandieren und als Folge hiervon zu teuer zu terminieren, stellt ein *Risiko* dar.

➜ Quantifizierung des Risikos, mit zu hohen Kosten (= zu früh) zu terminieren.

Risk Measures

Idee zur Berechnung der Evaluierungsreihenfolge:

Schätzung des Risikos, zu früh zu terminieren mittels eines *Risk Measuress* R für jeden Knoten in der OPEN-Liste.

- Für eine gegebene Kostenhöhe C (eines Zielknotens) bewertet das Risikomaß für jeden Knoten n in der OPEN-Liste, inwieweit C durch Expandieren von n noch verbessert werden kann.
- $R = R(C)$. Das Risikomaß ist folglich eine monoton steigende Funktion der Kosten C. Je größer der $R(C)$-Wert eines Knotens n, desto größer ist das Risiko, eine Verbesserung von C zu verpassen, falls mit C terminiert wird, ohne n zu expandieren.
- $R(C)$ sollte Wissen über die Kostenverteilung des Knotens n verwenden, sollte also auf $\rho_{f_n^+}$ basieren.

Risk Measures

Prinzip des Algorithmus R*$_\delta$

Suche fortsetzen, bis der Risikowert $R(C)$ jedes Knotens in der OPEN-Liste unterhalb einer vom Anwender akzeptierten Risikoschwelle δ ist.

- Akzeptiert man ein hohes Risiko, so bleiben Knoten mit hohem Risikowert $R(C)$ (= hohes Kostensenkungspotenzial) unexpandiert. Folglich wird eine Kostenunterschätzung unwahrscheinlicher.

  Akzeptiert man nur ein kleines Risiko, so werden selbst Knoten mit geringem Risikowert $R(C)$ (= geringes Kostensenkungspotenzial) expandiert. Folglich wird eine Kostenunterschätzung wahrscheinlicher.

- D. h, abhängig von einer Risikoschwelle $R(C) = \delta$ lässt sich die Wahrscheinlichkeit einer Kostenunterschätzung (= Wahrscheinlichkeit der Zulässigkeit bzw. Optimalität) steuern.

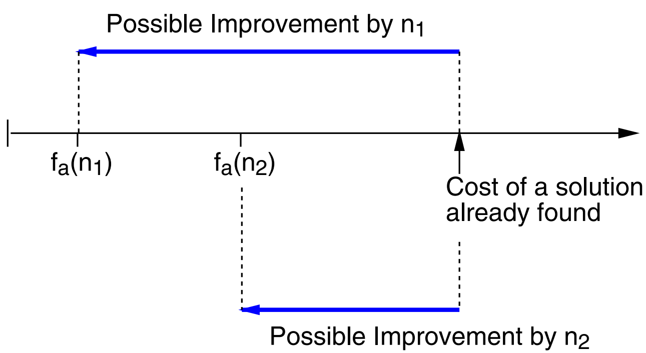
Bemerkungen und Fragen:

- Die Einhaltung dieses Prinzip durch den Algorithmus R*$_\delta$ ist — wie später gezeigt wird — bei Verwendung bestimmter Risikofunktionen $R(C)$ sichergestellt.
- Welche Eigenschaft muss $R(C)$ erfüllen?

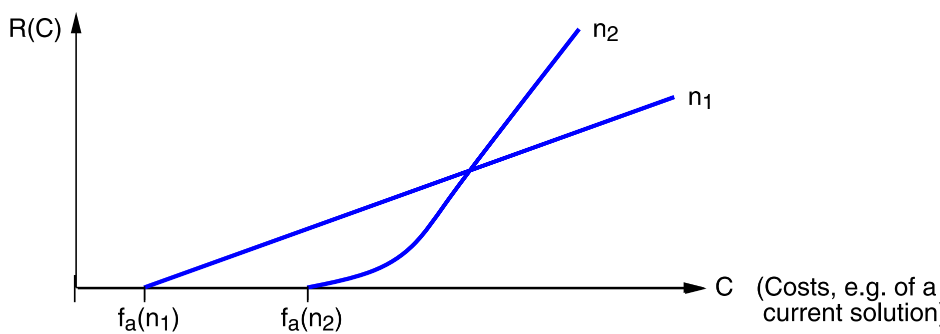
Risk Measures

Verbesserungspotenzial einer aktuellen Lösung

Es seien n_1, n_2 Knoten der OPEN-Liste.



Beispiel für zwei Risikoverläufe $R(C)$ für die Knoten n_1, n_2:



Die Knoten besitzen verschiedene Kostenzufallsvariablen $f^+_{n_1}$ und $f^+_{n_2}$.

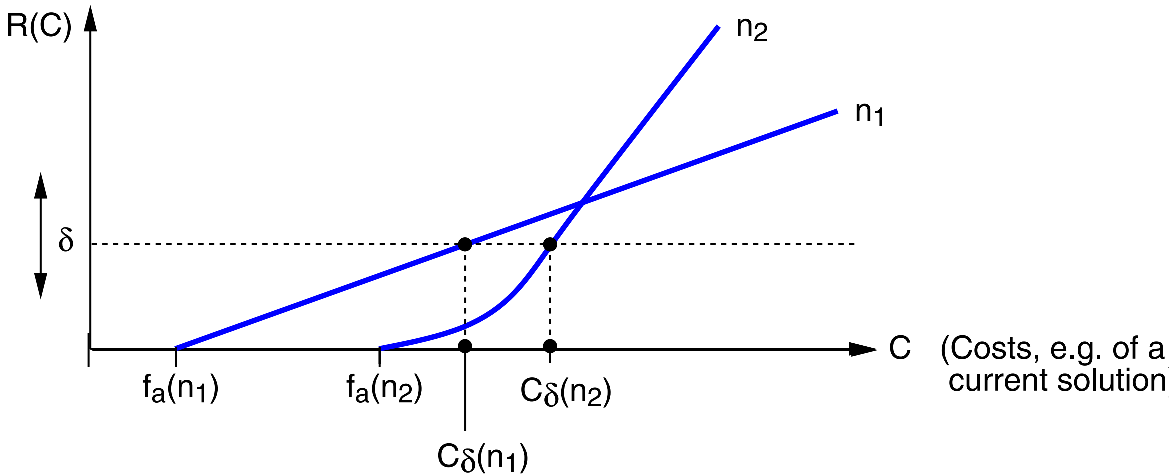
Remarks:

- Das Verbesserungspotenzial ist eine statistische Größe, die für einen Knoten n mittels f_n^+ definiert ist.
- Die *Bewertung* des Verbesserungspotenzials hinsichtlich gegebener Kosten C geschieht mit Hilfe eines Risk Measuress $R(C)$.

Risk Measures

Risikoschwelle und Risikokosten

Die Risikoschwelle $\delta \geq 0$ definiert für jeden Knoten n der OPEN-Liste seine Risikokosten $C_\delta(n)$:



Würde die Suche mit Knoten n_2 und Kosten $C' = C_\delta(n_2)$ terminieren, so läge für n_1 das Riskio $R(C')$ oberhalb der Risikoschwelle δ.

➜ R*$_\delta$ wählt in der OPEN-Liste den Knoten n mit niedrigsten Risikokosten $C_\delta(n)$. Im obigen Beispiel wäre das der Knoten n_1.

Remarks:

- Risk Measures und Risikoschwellen müssen im Kontext betrachtet werden: nicht jede Risikoschwelle ist für ein Risikomaß sinnvoll.
- Abhängig von der Kostenzufallsvariablen f_n^+ eines Knotens n kann die Risikoschwelle δ zu verschiedenen Reihenfolgen in der OPEN-Liste führen.
- Die Risikokosten $C_\delta(n)$ geben an, wie hoch die Kosten einer Lösung sein dürfen, ohne dass die Risikoschwelle δ für den Knoten n überschritten werden.

Risk Measures

Definition 75 (δ-Risikozulässigkeit)

Ein Algorithmus heißt δ-risikozulässig, falls er mit Lösungskosten C terminiert und $R(C) \leq \delta$ für alle Knoten gilt, die sich in der OPEN-Liste befinden.

Definition 76 (Algorithmus R*$_\delta$)

R*$_\delta$ ist ein Suchalgorithmus, der identisch ist zu A* bis auf den Unterschied, dass derjenige Knoten n in der OPEN-Liste zur Expansion gewählt wird, für den die Risikokosten $C_\delta(n)$ am niedrigsten sind.

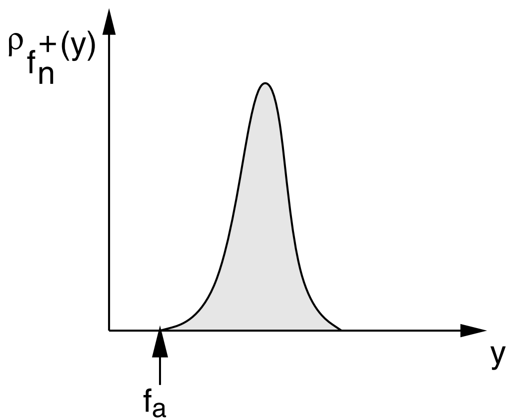
Remarks:

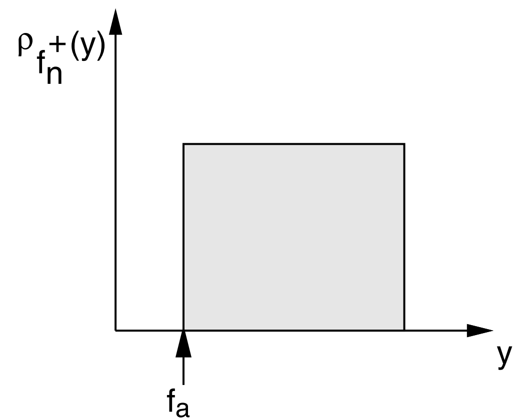
- Eine äquivalente Definition für δ-Risikozulässigkeit ist: Bei Terminierung mit Lösungskosten C müssen alle Knoten n in der OPEN-Liste die Bedingung $C_\delta(n) \geq C$ erfüllen. Die erste Definition ist aus dem Blickwinkel des Risikos, die zweite ist aus dem Blickwinkel der Kosten.
- Für $\delta = 0$ ist R*$_\delta$ identisch mit A*. Argumentation:
  1. $\delta = 0 \Rightarrow R(C) = 0$
  2. Die Lösung zu $R(C) = 0$ bestimmt die zu akzeptierenden Kosten.
  3. Kosten mit Risiko 0 bedeuten, dass von der Dichtefunktion f_n^+ der äußerste linke Wert f_a genommen wird.
  4. $f_a \leq g(n) + h^*(n) \Rightarrow$ R*$_\delta$ ist zulässig im Sinne von A*.
- Mit steigendem δ tendiert R*$_\delta$ zur Aufgabe der Zulässigkeit.

Risk Measures

Ausgangspunkt sind Dichtefunktionen für die Zufallsvariable f_n^+ eines Knoten n in der OPEN-Liste.

Beispiele:





f_a (bzw. h_a) ist das kleinste positive Urbild der Dichtefunktion $\rho_{f_n^+}$ (bzw. $\rho_{h_n^*}$).

Risk Measures

Risk Measures mit der Struktur $R(C) = \varrho[C - f^+]$

1. Worst-Case-Maß R_1:

$$R_1(C) = \sup_{\{y|\rho_{f_n^+}(y)>0\}} (C - y) = C - f_a = C - g - h_a$$

2. Risiko einer suboptimalen Terminierung R_2:

$$R_2(C) = P(C > f_n^+) = P(C - f_n^+ > 0) = \int\limits_{y=-\infty}^{C} \rho_{f_n^+}(y)dy$$

3. Erwartetes Risiko R_3:

$$R_3(C) = E(\text{max}\{C - f_n^+; 0\}) = \int\limits_{y=-\infty}^{C} (C - y)\rho_{f_n^+}(y)dy$$

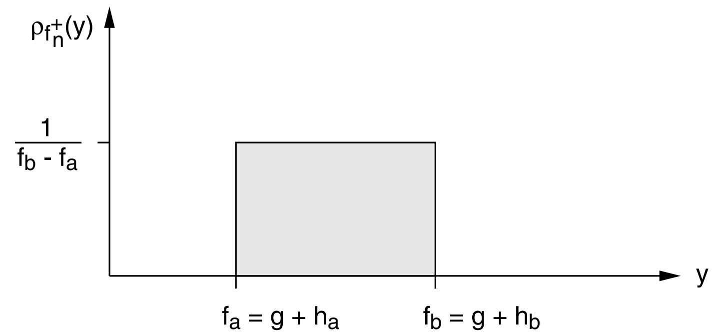
Remarks:

- Die Risk Measures R_1 und R_3 beschreiben Kosten, das Risikomaß R_2 beschreibt eine Wahrscheinlichkeit.
- R_1: Für die durch die Zufallsvariable f_n^+ repräsentierten Kosten wird der kleinstmögliche Wert angenommen. R_1 quantifiziert den maximal möglichen Verlust, falls man sich einer Lösung mit Kosten C zufrieden gibt.
- R_2: Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses "$C > f_n^+$" (eines Verlustes) wird berechnet, falls man sich mit einer Lösung mit Kosten C zufrieden gibt.
- R_3: Für die durch die Zufallsvariable f_n^+ repräsentierten Kosten wird der erwartete Verlust $E(\text{max}\{C - f_n^+; 0\})$ berechnet, falls man sich mit einer Lösung mit Kosten C zufrieden gibt.

Risk Measures

Beispiel

Gegeben sei eine gleichverteilte Kostenzufallsvariable f_n^+:



Dichtefunktion:

$$\rho_{f_n^+}(y) = \begin{cases} \frac{1}{f_b - f_a} & f_a \leq y \leq f_b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

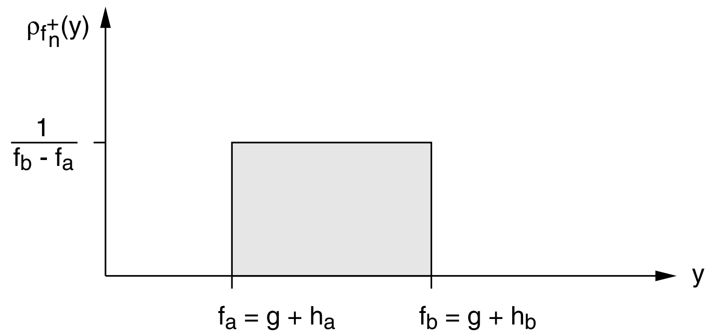
Risikomaß:

$$R_1(C) = \sup_{\{y \mid \rho_{f_n^+}(y) > 0\}} (C - y) = C - f_a$$

Risk Measures

Beispiel (continued)

Gegeben sei eine gleichverteilte Kostenzufallsvariable f_n^+:



Dichtefunktion:

$$\rho_{f_n^+}(y) = \begin{cases} \frac{1}{f_b - f_a} & f_a \leq y \leq f_b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

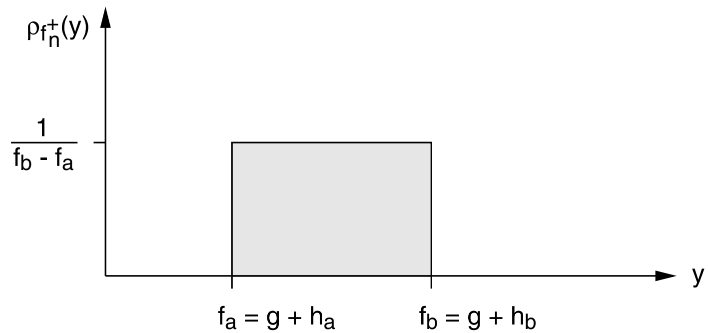
Risikomaß:

$$R_2(C) = \int_{y=-\infty}^{C} \rho_{f_n^+}(y)dy = \begin{cases} 0 & C < f_a \\ \frac{(C - f_a)}{(f_b - f_a)} & f_a \leq C \leq f_b \\ 1 & f_b < C \end{cases}$$

Risk Measures

Beispiel (continued)

Gegeben sei eine gleichverteilte Kostenzufallsvariable f_n^+:



Dichtefunktion:

$$\rho_{f_n^+}(y) = \begin{cases} \frac{1}{f_b - f_a} & f_a \leq y \leq f_b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

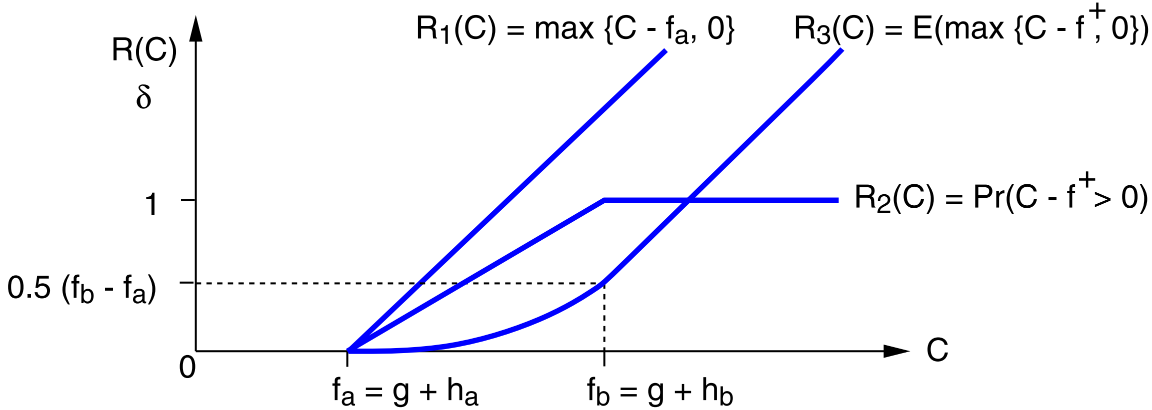
Risikomaß:

$$R_3(C) = \int_{y=-\infty}^{C} (C-y)\rho_{f_n^+}(y)dy = \begin{cases} 0 & C < f_a \\ \frac{(C-f_a)^2}{2(f_b-f_a)} & f_a \leq C \leq f_b \\ C - \frac{f_a+f_b}{2} & f_b < C \end{cases}$$

Risk Measures

Beispiel (continued)

Vergleich der Risk Measures R_1, R_2 und R_3 (f_n^+ gleichverteilt):



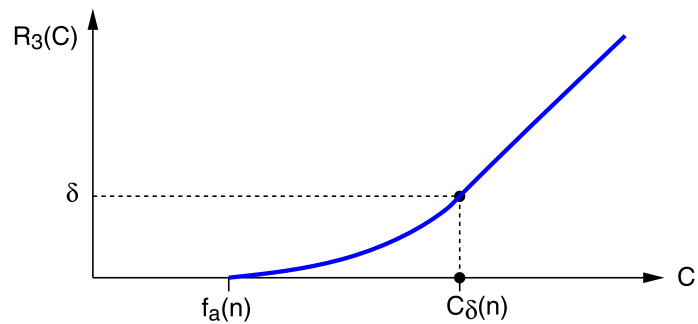
Das Bild zeigt für *einen* Knoten n bei gleichverteilter Kostenzufallsvariable f_n^+ die Berechnung des Risikos mit den Maßen R_1, R_2 und R_3.

Risk Measures

Beispiel (continued)

Berechnung der Risikokosten C_δ für R_3 (f_n^+ gleichverteilt):

Sei δ die Risikoschwelle eines Anwenders. Sie definiert für jeden Knoten der Open-Liste dessen Risikokosten auf Basis der Gleichung $R(C) = \delta$.



Die Risikokosten $C_\delta(n)$ für einen Knoten n der OPEN-Liste berechnen sich aus der Umformung von $R_3(C_\delta) = \delta$:

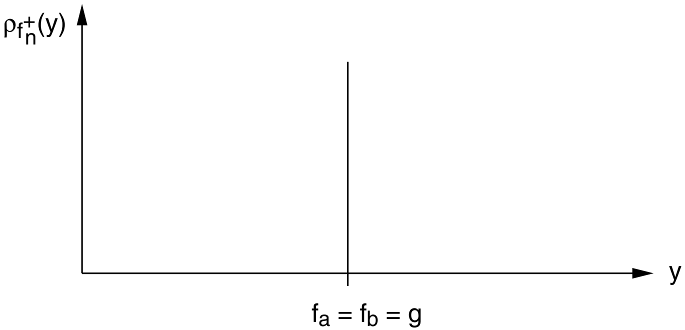
$$C_\delta = \begin{cases} f_a & \delta = 0 \\ f_a + \sqrt{2 \cdot (f_b - f_a) \cdot \delta} & 0 < \delta \leq \frac{f_b - f_a}{2} \\ \delta + \frac{f_a + f_b}{2} & \frac{f_b - f_a}{2} < \delta \end{cases}$$

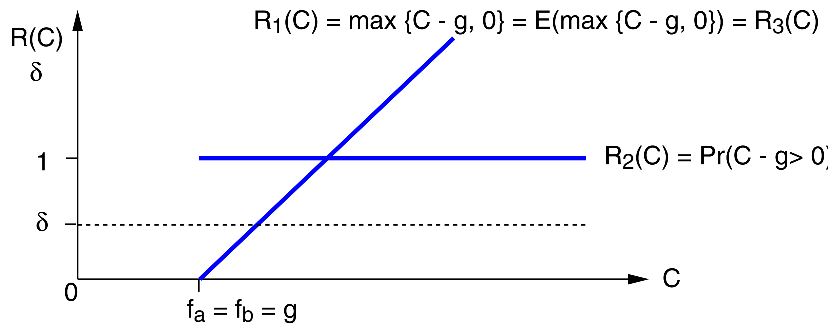
Risk Measures

Beispiel (continued)

Gegeben sei ein Zielknoten n, d.h., wegen $h(n) = h^*(n) = 0$ gibt es keine Unsicherheit hinsichtlich der Kostenzufallsvariablen f_n^+.

Verlauf der Kostenzufallsvariablen f_n^+ und der Risk Measures R_1, R_2 und R_3:





Risikokosten:

$$C_\delta(n) = \begin{cases} g(n) + \delta & \text{Risikomaß } R_1 \\ g(n) & \text{Risikomaß } R_2 \text{ und } \delta < 1 \\ g(n) + \delta & \text{Risikomaß } R_3 \end{cases}$$

Damit folgt die δ-Risikozulässigkeit von R*$_\delta$ bezüglich R_1, R_2 und R_3.

Risk Measures

Theorem 77 (δ-Risikozulässigkeit von R*$_\delta$)

R*$_\delta$ ist δ-risikozulässig bezüglich der Risk Measures R_1, R_2 und R_3.

Remarks:

- Die genaue Form von $\rho_{h^*}(n)$ ist im Allgemeinen unbekannt. Hierzu müssten die Kantenkosten $c(n, n'), n' \in succ(n)$ durch ein vorgebenes probabilistisches Modell generiert worden sein.
- Die Generierung einer guten Schätzung für $C_\delta(n)$ ist oft möglich. Hierzu genügt das Wissen über obere und untere Schranken von h^* zusammen mit der oft sinnvollen Annahme einer standardisierten Verteilung dazwischen, wie einer Gleichverteilung, einer Exponentialverteilung oder einer Normalverteilung.
- Das Prinzip der ε-zulässigen Beschleunigung kann für R*$_\delta$ genauso angewandt werden, wie für A*.