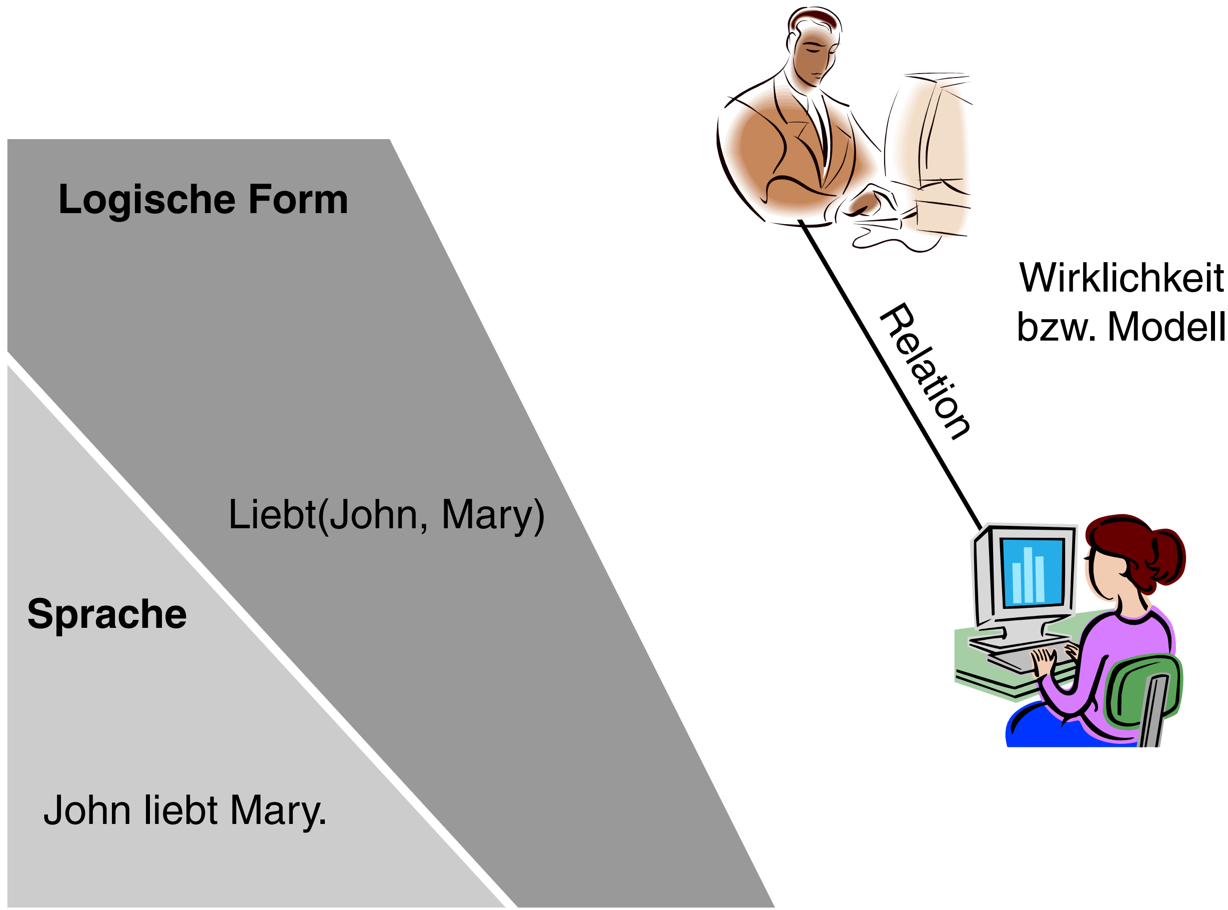
Kapitel L:III

III. Prädikatenlogik

- ❑ Syntax der Prädikatenlogik
- ❑ Semantik der Prädikatenlogik
- ❑ Wichtige Äquivalenzen
- ❑ Einfache Normalformen
- ❑ Substitution
- ❑ Skolem-Normalformen
- ❑ Standard-Erfüllbarkeit
- ❑ Prädikatenlogische Resolution
- ❑ Grenzen der Prädikatenlogik

Prädikatenlogik

Modell, Formalisierung und natürliche Sprache.



[Roland Potthast, 2001]

Prädikatenlogik

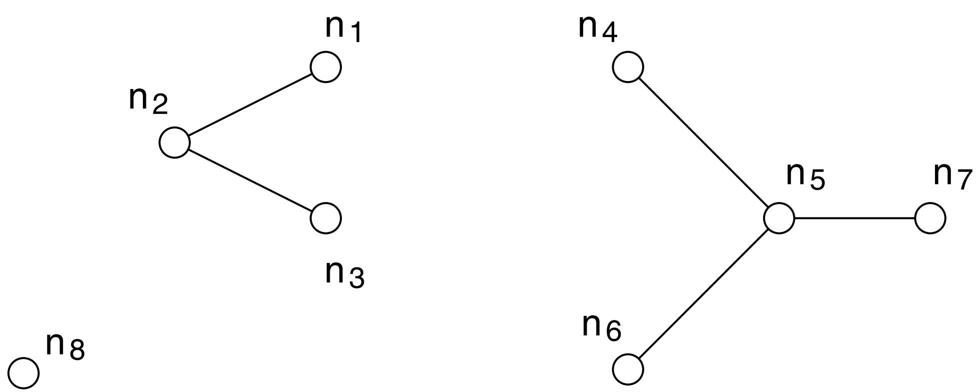
Beispiel „Graphentheorie“.

Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = \langle V, E \rangle$.

Frage:

Ist G nicht zusammenhängend?

D. h., gibt es zwei Knoten $x, y \in V, x \neq y$, die nicht über einen Pfad miteinander verbunden sind?



$$V = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8\}$$

$$E = \{\{n_1, n_2\}, \{n_2, n_3\}, \{n_4, n_5\}, \{n_5, n_6\}, \{n_5, n_7\}\}$$

Prädikatenlogik

Beispiel „Graphentheorie“ – Formalisierung der Frage.

1. Repräsentation von G:

   (a) Für alle Knoten x, y mit $\{x, y\} \in E$, schreibe:

   $$\textit{Kante}(x, y) \land \textit{Kante}(y, x)$$

   (b) Für alle Knoten x, y mit $\{x, y\} \notin E$, schreibe:

   $$\neg(\textit{Kante}(x, y) \land \textit{Kante}(y, x)) \approx \neg\textit{Kante}(x, y) \lor \neg\textit{Kante}(y, x)$$

2. Axiomatisierung (= Modellbildung) der Erreichbarkeit:

   $$\forall x, y : \ \textit{Pfad}(x, y) \ \leftrightarrow \ \left(\begin{array}{c} \textit{Kante}(x, y) \lor \\ \exists z : \ \textit{Pfad}(x, z) \land \textit{Pfad}(z, y) \end{array} \right)$$

3. Formulierung der Frage:

   $$\exists x, y : \ \neg\textit{Pfad}(x, y)$$

Prädikatenlogik

Beispiel „Graphentheorie“ – alternative Axiomatisierung.

1. Repräsentation von G:

   (a) Für alle Knoten x, y mit $\{x, y\} \in E$, schreibe:

   $$\textit{Kante}(x, y)$$

   (b) Für alle Knoten x, y mit $\{x, y\} \notin E$, schreibe:

   $$\neg\textit{Kante}(x, y)$$

2. Axiomatisierung (= Modellbildung) der Erreichbarkeit:

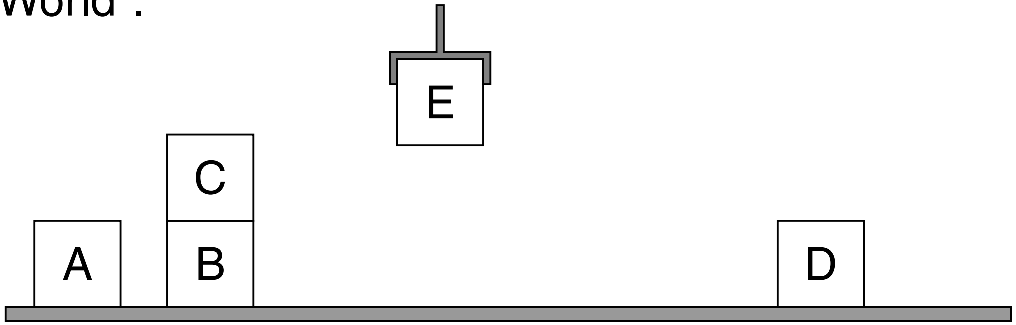
$$\forall x, y: \ \textit{Pfad}(x, y) \ \leftrightarrow \ \left(\begin{array}{c} \textit{Kante}(x, y) \vee \\ \textit{Kante}(y, x) \vee \\ \exists z: \ \textit{Pfad}(x, z) \wedge \textit{Pfad}(z, y) \end{array} \right)$$

3. Formulierung der Frage:

$$\exists x, y: \ \neg\textit{Pfad}(x, y)$$

Prädikatenlogik

Beispiel „Blocks World“.

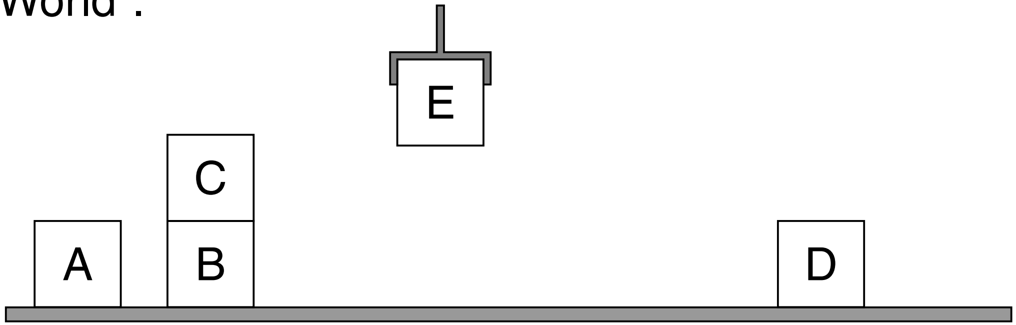


Anordnung

- Auf einem Tisch stehen Würfel neben- und übereinander; es gibt genügend Platz, um alle Würfel nebeneinander zu stellen.
- Es gibt eine Greifhand, die genau einen Würfel zur Zeit aufheben kann, falls kein anderer über diesem steht.
- Ein Würfel steht entweder auf dem Tisch oder auf genau einem anderen Würfel oder wird von der Greifhand gehalten.
- Mit der Greifhand kann man die folgenden Operationen ausführen:
  - PICKUP(x): Würfel x vom Tisch aufnehmen.
  - PUTDOWN(x): Würfel x auf den Tisch absetzen.
  - STACK(x,y): Würfel x auf einen anderen Würfel y setzen.
  - UNSTACK(x,y): Würfel x von einen anderen Würfel y herunternehmen.

Prädikatenlogik

Beispiel „Blocks World“.



Aufgabe

Generierung eines Plans (Folge von Operationen), um einen Anfangszustand in einen Zielzustand zu überführen.

Prädikatenlogik

Charakteristika der Prädikatenlogik erster Stufe:

- Die Aussagen beziehen sich auf Objekte.

  $\forall x: \textit{Gross}(x) \rightarrow \textit{Schwer}(x)$

  $\textit{Gross}(\textit{Auto})$

  $\textit{Klein}(\textit{Apfel})$

  In der Aussagenlogik gilt eine Aussage pauschal; sie kann nicht auf ein Objekt bezogen werden:

  $\textit{Gross} \rightarrow \textit{Schwer}$

  $\textit{Auto} \wedge (\textit{Auto} \rightarrow \textit{Gross})$

  $\textit{Apfel} \wedge (\textit{Apfel} \rightarrow \textit{Klein})$

  Konsequenz sind objektspezifische Regeln:

  $\textit{Gross\_Auto} \rightarrow \textit{Schwer\_Auto}$

  $\textit{Klein\_Apfel} \rightarrow \textit{Leicht\_Apfel}$

- Objekte können in eine Relation gestellt werden.

- Aussagen können für alle Objekte formuliert werden – oder für einzelne Objekte, deren Identität aber nicht bekannt ist.

- Die Verknüpfung von Aussagen ist wie in der Aussagenlogik möglich.

Bemerkungen:

- Der Begriff „Prädikatenlogik erster Stufe“ charakterisiert die Beschränktheit der Prädikatenlogik: Es können keine Meta-Aussagen über Prädikate und Funktionen gemacht werden:
  „Für alle Prädikate / Funktionen gilt . . . “

Syntax der Prädikatenlogik

Definition 1 (Sprache der Prädikatenlogik, Signatur)

Zeichen, mit denen Terme (die „Objektbezeichner“) konstruiert werden:

- Variablen: $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, x_3 \ldots$
- Konstanten: $a, b, c, \ldots, a_1, b_2, c_3, \ldots$
- Funktionssymbole: $f, g, h, \ldots, f_1, f_2, f_3, \ldots$
  Abzählbar unendlich viele Symbole mit beliebiger, aber fester Stelligkeit ≥ 1.
- Hilfszeichen: $($ $)$,

Zeichen, mit denen Formeln (die „Aussagen über Terme“) konstruiert werden:

- Prädikatssymbole: $P, Q, R, \ldots, P_1, P_2, P_3, \ldots$
  Abzählbar unendlich viele Symbole mit beliebiger, aber fester Stelligkeit ≥ 1.
- Junktoren: $\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow$
- Quantoren: $\forall,\ \exists$
- Hilfszeichen: $($ $)$

Frage: Was sind Prädikate?

Syntax der Prädikatenlogik

Definition 2 (Terme)

Die Klasse der Terme über Σ wird induktiv definiert durch die folgenden vier Schritte.

1. Jede Variable ist ein Term.
2. Jede Konstante ist ein Term.
3. Sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme und f eine n-stellige Funktion, so ist auch $f(t_1, \ldots, t_n)$ ein Term.
4. Nur die mit (1) – (3) gebildete Ausdrücke sind Terme.

Beispiele.

x_1

x_2

$f(x_1)$

$f(f(f(y)))$

$g(f(x), x_3)$

Syntax der Prädikatenlogik

Definition 3 (prädikatenlogische Formeln)

Die Klasse der prädikatenlogischen Formeln wird induktiv definiert durch die folgenden fünf Schritte.

1. Sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme und P eine n-stelliges Prädikatssymbol, so ist $P(t_1, \ldots, t_n)$ eine Formel bzw. Primformel.
2. Ist α eine Formel, so ist auch $(\neg\alpha)$ eine Formel.
3. Falls α und β Formeln sind, so sind auch $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ und $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ Formeln.
4. Falls α eine Formel ist und x eine Variable, so sind auch $(\forall x\ \alpha)$ und $(\exists x\ \alpha)$ Formeln.
5. Nur die mit (1) – (4) gebildete Ausdrücke sind Formeln.

Welche der folgenden Ausdrücke sind Formeln?

$\exists x\ P(x, f(x))$	$\forall x\ P(x, f(x)) \vee \exists z\ P(Q(z))$
$g(f(x), x_3)$	$\forall\ \exists x\ Q(x)$
$\exists x\ \exists y\ \exists z\ P(x_1)$	$\exists x\ \forall x\ \exists x\ R(x, x, x)$

Bemerkungen:

- Formeln machen Aussagen über Terme.

Syntax der Prädikatenlogik

Beispiele.

- Klammereinsparung:

$$(\forall x\ (\exists y\ (P(x) \lor Q(x, f(y)))))$$

$$\leadsto \quad \forall x\ \exists y\ (P(x) \lor Q(x, f(y)))$$

- mehrfache Quantifizierung:

$$\forall x\ (P(x) \lor \forall x\ Q(x))$$

- Verbindung über Variablen:

$$\forall x\ (P(x) \rightarrow P(f(x)))$$

- Quantorenreihenfolge kann wichtig sein:

$$\forall x\ \exists y (P(x) \lor Q(y)) \quad \not\approx \quad \exists y\ \forall x (P(x) \lor Q(y))$$

- freie Variablen:

$$P(x) \lor \forall y\ Q(y)$$

Syntax der Prädikatenlogik

Beispiel „Stetigkeit in x_0“.

$$\forall \varepsilon \; \exists \delta \; \forall x \; \big(|x_0 - x| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon \big)$$

Syntax der Prädikatenlogik

Beispiel „Stetigkeit in x_0“.

$$\forall \varepsilon \; \exists \delta \; \forall x \; \big(|x_0 - x| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon \big)$$

$$\rightsquigarrow \quad \forall x_\varepsilon \; \exists x_\delta \; \forall x \; (K(a(d(x_0, x)), x_\delta) \;\rightarrow\; K(a(d(f(x_0)), f(x)), x_\varepsilon))$$

Syntax der Prädikatenlogik

Bindungsstärke:

1. $\neg, \ \forall, \ \exists$
2. $\wedge$
3. $\vee$
4. $\rightarrow, \ \leftrightarrow$

Gleichstarke Operatoren werden als linksgeklammert aufgefasst.

Syntax der Prädikatenlogik

- Sprachgebrauch:

  $P(t_1, \ldots, t_n)$ Primformel

  $P(t_1, \ldots, t_n)$ positives Literal

  $\neg P(t_1, \ldots, t_n)$ negatives Literal

- Die Verwendung von 0-stelligen Funktionen erlaubt einen Verzicht auf Konstanten:

  $$f() \quad \text{entspricht} \quad a_f$$

- Die Verwendung von 0-stelligen Prädikate macht die Aussagenlogik zu einer Teilsprache der Prädikatenlogik:

  $$P() \quad \text{entspricht} \quad A$$

Syntax der Prädikatenlogik

Definition 4 (enthaltene Variablen)

Für Terme t und Formeln α der Prädikatenlogik definieren wir die Menge *vars*(t) bzw. *vars*(α) der Variablen in t bzw. α wie folgt:

1. Ist t eine Variable, $t = x$, so ist *vars*$(t) = \{x\}$.
2. Ist t eine Konstante, $t = a$, so ist *vars*$(t) = \emptyset$.
3. Ist $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ mit Termen $t_1, \ldots, t_n$ so ist *vars*$(t) = \bigcup_{i=1}^{n}$ *vars*(t_i).

---

4. Ist $\alpha = P(t_1, \ldots, t_n)$ mit Termen $t_1, \ldots, t_n$, so ist *vars*$(\alpha) = \bigcup_{i=1}^{n}$ *vars*(t_i).
5. Ist $\alpha = \neg\beta$ mit einer Formel β, so ist *vars*$(\alpha) =$ *vars*(β).
6. Falls $\alpha = \beta \wedge \gamma$, $\alpha = \beta \vee \gamma$, $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$ oder $\alpha = \beta \leftrightarrow \gamma$ mit Formeln β und γ,

   so ist *vars*$(\alpha) =$ *vars*$(\beta) \cup$ *vars*(γ).
7. Falls $\alpha = \forall x\ \beta$ oder $\alpha = \exists x\ \beta$ mit einer Formel β und einer Variablen x,

   so ist *vars*$(\alpha) =$ *vars*$(\beta) \cup \{x\}$.

Syntax der Prädikatenlogik

Definition 5 (gebundene und freie Variablen)

Für Formeln α der Prädikatenlogik definieren wir die Mengen *freevars*(α) der freien Variablen und *boundvars*(α) der gebundenen Variablen wie folgt:

1. Ist $\alpha = P(t_1, \ldots, t_n)$ mit Termen $t_1, \ldots, t_n$,

   so ist *freevars*$(\alpha) = \bigcup_{i=1}^{n}$ *vars*(t_i) und *boundvars*$(\alpha) = \emptyset$.

2. Ist $\alpha = \neg\beta$ mit einer Formel β,

   so ist *freevars*$(\alpha) =$ *freevars*(β) und *boundvars*$(\alpha) =$ *boundvars*(β).

3. Falls $\alpha = \beta \land \gamma$, $\alpha = \beta \lor \gamma$, $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$ oder $\alpha = \beta \leftrightarrow \gamma$ mit Formeln β und γ,

   so ist *freevars*$(\alpha) =$ *freevars*$(\beta) \cup$ *freevars*(γ) und
   boundvars$(\alpha) =$ *boundvars*$(\beta) \cup$ *boundvars*(γ).

4. Falls $\alpha = \forall x\ \beta$ oder $\alpha = \exists x\ \beta$ mit einer Formel β und einer Variablen x,

   so ist *freevars*$(\alpha) =$ *freevars*$(\beta) \setminus \{x\}$ und *boundvars*$(\alpha) =$ *boundvars*$(\beta) \cup \{x\}$.

Syntax der Prädikatenlogik

Definition 6 (geschlossene Formel)

Eine Formel α mit *freevars*$(\alpha) = \emptyset$ wird als geschlossene Formel bezeichnet.

Welche der folgenden Ausdrücke sind geschlossene Formeln?

$\exists x\ P(x, f(x))$

$\forall x\ P(x, f(x)) \lor \exists z\ Q(z)$

$\forall x\ g(f(x), x_3)$

$\forall z\ \exists x\ Q(x, z)$

$\exists x\ \exists y\ \exists z\ P(x_1)$

Bemerkungen:

- Ob es sich bei einer Variable um eine freie oder eine gebundene Variable handelt, muss für jedes *Vorkommen* dieser Variable festgestellt werden.
- Beispiel: $\alpha = P(x, f(x)) \vee \exists x\, Q(x)$
  x kommt in α sowohl gebunden als auch ungebunden vor.

Semantik der Prädikatenlogik

Definition 7 (Interpretation)

Eine Interpretation $\mathcal{I}$ besteht aus

1. einer beliebigen aber nicht leeren Menge $\mathcal{U}$, dem Universum (Grundmenge, Grundbereich, Individuenbereich) und
2. einer Abbildung aller Variablen, Konstanten, Funktionssymbole und Prädikatssymbole einer (durch eine Formel α induzierten) Signatur Σ:

x	$\mapsto \mathcal{I}(x) \in \mathcal{U}$,	x ist Variable
a	$\mapsto \mathcal{I}(a) \in \mathcal{U}$,	a ist Konstante
$f^{(n)}$	$\mapsto \mathcal{I}(f) : \mathcal{U}^n \to \mathcal{U}$,	$f^{(n)}$ ist n-stelliges Funktionssymbol
$P^{(n)}$	$\mapsto \mathcal{I}(P) \subseteq \mathcal{U}^n$,	$P^{(n)}$ ist n-stelliges Prädikatssymbol

Alternative:

$P^{(n)}$	$\mapsto \mathcal{I}(P) : \mathcal{U}^n \to \{0, 1\}$,	$P^{(n)}$ ist n-stelliges Prädikatssymbol

Bemerkungen:

- Im folgenden wird auch $x_{\mathcal{U}}$ abkürzend für $\mathcal{I}(x)$, $a_{\mathcal{U}}$ für $\mathcal{I}(a)$, $f_{\mathcal{U}}$ für $\mathcal{I}(f^{(n)})$ und $P_{\mathcal{U}}$ für $\mathcal{I}(P^{(n)})$ verwendet.
- Wie auch in der Aussagenlogik sind in der Prädikatenlogik für die Bewertung einer Formel nur die Interpretationen der in ihr vokommenden Symbole entscheidend (siehe Koinzidenztheorem für die Aussagenlogik). Wird nur eine Bewertung einer Formel gesucht, so werden auch nur Interpretationen für die vorkommenden Symbole angegeben und nicht für eine zugrunde liegende Sprache.

Semantik der Prädikatenlogik

Beispiel.

$$\alpha = \forall x\ P(x, f(x)) \wedge Q(g(a, z))$$

- P ist ein zweistelliges und Q ist ein einstelliges Prädikatssymbol.
- f ist ein einstelliges und g ist ein zweistelliges Funktionssymbol.
- a ist ein nullstelliges Funktionssymbol bzw. eine Konstante.
- Die Variable z kommt in α frei vor.

Eine zu α syntaktisch passende Interpretation $\mathcal{I}$:

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{U} & = & \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbf{N} \\
\mathcal{I}(P) & = & P_\mathcal{U} = \{(m, n) \mid m, n \in \mathcal{U} \text{ und } m < n\} \\
\mathcal{I}(Q) & = & Q_\mathcal{U} = \{n \in \mathcal{U} \mid n \text{ ist Primzahl}\} \\
\mathcal{I}(f) & = & f_\mathcal{U} = n + 1, \text{ die Nachfolgerfunktion auf } \mathcal{U} \\
\mathcal{I}(g) & = & g_\mathcal{U} = m + n, \text{ die Additionsfunktion auf } \mathcal{U} \\
\mathcal{I}(a) & = & a_\mathcal{U} = 2 \\
\mathcal{I}(z) & = & z_\mathcal{U} = 3
\end{array}$$

Semantik der Prädikatenlogik

Definition 7 (Interpretation – Fortsetzung)

Die Abbildung der Variablen und Konstanten auf Elemente von $\mathcal{U}$ lässt sich induktiv erweitern zu einer ebenfalls mit $\mathcal{I}$ bezeichneten Interpretation der Terme:

$$\mathcal{I}\big(f(t_1, \ldots, t_n)\big) = \mathcal{I}(f)(\mathcal{I}(t_1), \ldots, \mathcal{I}(t_n))$$

Bemerkungen:

- Beachte, dass bis vor dieser Definition nur $\mathcal{I}(f)$, $\mathcal{I}(x)$ und $\mathcal{I}(a)$ für die Funktionssymbole, Variablen und Konstanten einer Signatur Σ definiert war. Über die Interpretation der Anwendung einer Funktion auf Argumente, in Zeichen: $\mathcal{I}\Big(f(t_1, \ldots, t_n)\Big)$, war nichts gesagt.

  Das holt diese Definition nach, indem sie $\mathcal{I}\Big(f(t_1, \ldots, t_n)\Big)$ als die Anwendung von $\mathcal{I}(f)$ auf die Interpretationen $\mathcal{I}(t_i)$ ihrer Argumente t_i definiert.

- Bei der folgenden Definition wird im Prinzip das Gleiche auch für die Prädikate gemacht: Ihre Interpretation wird erweitert auf die Interpretation beliebiger Formeln.

Semantik der Prädikatenlogik

Definition 7 (Interpretation – Fortsetzung)

Den Formeln können Wahrheitswerte zugewiesen werden durch eine auf der Interpretation der Terme basierende Funktion, die wieder mit $\mathcal{I}$ bezeichnet wird:

1. $\mathcal{I}(P(t_1,\ldots,t_n)) = 1 \;\Leftrightarrow\; \mathcal{I}(P)(\mathcal{I}(t_1),\ldots,\mathcal{I}(t_n)) \;\in \mathcal{I}(P)$.

   Alternative:

   $\mathcal{I}(P(t_1,\ldots,t_n)) = \mathcal{I}(P)(\mathcal{I}(t_1),\ldots,\mathcal{I}(t_n))$

2. $\mathcal{I}(\neg\alpha) = 1 \;\Leftrightarrow\; \mathcal{I}(\alpha) = 0$.

3. $\mathcal{I}(\alpha \wedge \beta) = 1 \;\Leftrightarrow\; \mathcal{I}(\alpha) = 1$ und $\mathcal{I}(\beta) = 1$.

   $\mathcal{I}(\alpha \vee \beta) = 1 \;\Leftrightarrow\; \mathcal{I}(\alpha) = 1$ oder $\mathcal{I}(\beta) = 1$.

4. $\mathcal{I}(\forall x\ \alpha) = 1 \;\Leftrightarrow\;$ für jedes $x_\mathcal{U} \in \mathcal{U}$ gilt: $\mathcal{I}[x/x_\mathcal{U}](\alpha) = 1$

   $\mathcal{I}(\exists x\ \alpha) = 1 \;\Leftrightarrow\;$ es ein $x_\mathcal{U} \in \mathcal{U}$ gibt mit: $\mathcal{I}[x/x_\mathcal{U}](\alpha) = 1$.

Dabei bezeichnet $\mathcal{I}[x/x_\mathcal{U}]$ eine Interpretation, die mit $\mathcal{I}$ völlig übereinstimmt bis auf die Zuweisung eines Wertes an die Variable x, die unter $\mathcal{I}$ den Wert $\mathcal{I}(x)$, unter $\mathcal{I}[x/x_\mathcal{U}]$ jedoch den Wert $x_\mathcal{U}$ erhält.

Semantik der Prädikatenlogik

Lemma 8 (Koinzidenztheorem)

Seien $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ zwei Interpretationen für eine prädikatenlogische Formel α, Σ_α die von α induzierte Signatur. Stimmen $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ auf Σ_α überein, so gilt $\mathcal{I}_1(\alpha) = \mathcal{I}_2(\alpha)$

Beweis (Skizze)

$\mathcal{I}_1 =_t \mathcal{I}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I}_1(t) = \mathcal{I}_2(t)$
(Induktion über Aufbau von $t \in T_\Sigma$)

$\mathcal{I}_1 =_{\exists x \alpha} \mathcal{I}_2$ und $x_\mathcal{U} \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I}_1[x/x_\mathcal{U}] =_\alpha \mathcal{I}_2[x/x_\mathcal{U}]$

$\mathcal{I}_1 =_\alpha \mathcal{I}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I}_1(\alpha) = \mathcal{I}_2(\alpha)$
(Induktion über Aufbau von α)

Semantik der Prädikatenlogik

Beispiel.

$$\alpha = \forall x \exists\, y P(x,y) \ \wedge\ \forall\, z \Big(P(z,z) \to P(z, f(z)) \Big) \ \wedge\ \neg P(a,a)$$

Eine zu α syntaktisch passende Interpretation $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{U} \quad = \quad \{1,2\} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathcal{I}(a) &= a_{\mathcal{U}} = 1 \\ \mathcal{I}(f) &= f_{\mathcal{U}}, \quad f_{\mathcal{U}}(1) = 2,\ f_{\mathcal{U}}(2) = 1 \\ \mathcal{I}(P) &= P_{\mathcal{U}} = \{(1,2),(2,1)\} \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt für diese Interpretation:

Für alle $x_{\mathcal{U}} \in \{1,2\}$ gibt es ein $y_{\mathcal{U}} \in \{1,2\}$ mit $(x_{\mathcal{U}}, y_{\mathcal{U}}) \in P_{\mathcal{U}}$.

$\Rightarrow$ Für alle $x_{\mathcal{U}} \in \{1,2\}$ gibt es ein $y_{\mathcal{U}} \in \{1,2\}$ mit $\mathcal{I}_{[x/x_{\mathcal{U}}][y/y_{\mathcal{U}}]}(P(x,y)) = 1$.

$\Rightarrow$ Für alle $x_{\mathcal{U}} \in \{1,2\}$ gilt: $\mathcal{I}_{[x/x_{\mathcal{U}}]}(\exists y P(x,y)) = 1$.

$\Rightarrow$ $\mathcal{I}(\forall x \exists y P(x,y)) = 1$

Weiter gilt für $\mathcal{I}$:

Für alle $z_{\mathcal{U}} \in \{1,2\}$ gilt mit $(z_{\mathcal{U}}, z_{\mathcal{U}}) \in P_{\mathcal{U}}$ auch $(z_{\mathcal{U}}, f_{\mathcal{U}}(z_{\mathcal{U}})) \in P_{\mathcal{U}}$.

$\Rightarrow$ Für alle $z_{\mathcal{U}} \in \{1,2\}$ gilt $\mathcal{I}_{[z/z_{\mathcal{U}}]}(P(z,z) \to P(z,f(z))) = 1$.

$\Rightarrow$ $\mathcal{I}(\forall z (P(z,z) \to P(z,f(z)))) = 1$

Da auch noch $(1,1) \notin P_{\mathcal{U}}$ gilt, folgt insgesamt $\mathcal{I}(\alpha) = 1$, diese Interpretation $\mathcal{I}$ erfüllt also die prädikatenlogische Formel α.

Semantik der Prädikatenlogik

Analog zur Aussagenlogik seien folgende Begriffe definiert:

- erfüllbar
- falsifizierbar
- tautologisch
- widerspruchsvoll

- logische Äquivalenz
- Erfüllbarkeitsäquivalenz

- semantische Folgerung

- Die Formellänge als Summe der Anzahlen von Vorkommen von Zeichen der Signatur, d.h. Konstanten, Variablen, Funktionen und Prädikate.

Semantik der Prädikatenlogik

Lemma 9

Seien α und β prädikatenlogische Formeln, dann gilt:

1. $\alpha \models \beta \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha \wedge \neg\beta)$ ist widerspruchsvoll.
2. $\alpha \models \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \approx \alpha \wedge \beta$
3. α ist widerspruchsvoll $\quad \Leftrightarrow \quad$ Für alle Formeln γ gilt: $\alpha \models \gamma$
4. α ist widerspruchsvoll $\quad \Leftrightarrow \quad$ Es gibt eine Formel γ mit : $(\alpha \models \gamma$ und $\alpha \models \neg\gamma)$

Lemma 10 (Deduktionstheorem)

Seien α und β prädikatenlogische Formeln und M eine Menge solcher Formeln, dann gilt:

$$M \cup \{\alpha\} \models \beta \quad \Rightarrow \quad M \models (\alpha \to \beta)$$

Wichtige Äquivalenzen

Lemma 11

Sei α eine prädikatenlogische Formel, γ eine Teilformel von α und δ eine Formel mit $\gamma \approx \delta$.

Weiterhin sei β_1 das Ergebnis der Ersetzung *eines* Vorkommens von γ in α durch δ. Dann gilt:

$$\alpha \approx \beta_1$$

Spezialfall:

Sei β_* das Ergebnis der Ersetzung *aller* Vorkommen von γ in α durch δ. Dann gilt:

$$\alpha \approx \beta_*$$

Wie in der Aussagenlogik ist dieses Lemma zusammen mit den nachfolgenden Äquivalenzen die Basis für die Tranformation von Formeln in Normalformen.

Wichtige Äquivalenzen

Vererbung	$\alpha \approx \beta \quad \Rightarrow \quad \neg\alpha \approx \neg\beta$
	$\alpha \approx \beta \quad \Rightarrow \quad \gamma \wedge \alpha \approx \gamma \wedge \beta$ und $\gamma \vee \alpha \approx \gamma \vee \beta$
	$\alpha \approx \beta \quad \Rightarrow \quad \exists x\alpha \approx \exists x\beta$ und $\forall x\alpha \approx \forall x\beta$
Negation	$\neg\neg\alpha \approx \alpha$
Idempotenz	$\alpha \vee \alpha \approx \alpha$
	$\alpha \wedge \alpha \approx \alpha$
Kommutativität	$\alpha \vee \beta \approx \beta \vee \alpha$
	$\alpha \wedge \beta \approx \beta \wedge \alpha$
Assoziativität	$(\alpha \vee \beta) \vee \sigma \approx \alpha \vee (\beta \vee \sigma)$
	$(\alpha \wedge \beta) \wedge \sigma \approx \alpha \wedge (\beta \wedge \sigma)$
Distributivität	$(\alpha \wedge \beta) \vee \sigma \approx (\alpha \vee \sigma) \wedge (\beta \vee \sigma)$
	$(\alpha \vee \beta) \wedge \sigma \approx (\alpha \wedge \sigma) \vee (\beta \wedge \sigma)$
De Morgan	$\neg(\alpha \wedge \beta) \approx \neg\alpha \vee \neg\beta$
	$\neg(\alpha \vee \beta) \approx \neg\alpha \wedge \neg\beta$

Wichtige Äquivalenzen (Fortsetzung)

Quantorwechsel	$\neg(\exists x \alpha) \approx \forall x(\neg\alpha)$ und $\neg(\forall x \alpha) \approx \exists x(\neg\alpha)$
Quantortausch	$\exists x \exists y \alpha \approx \exists y \exists x \alpha$ und $\forall x \forall y \alpha \approx \forall y \forall x \alpha$
Quantorzusammenfassung	$\exists x \alpha \lor \exists x \beta \approx \exists x(\alpha \lor \beta)$ und $\forall x \alpha \land \forall x \beta \approx \forall x(\alpha \land \beta)$
Quantorelimination	Falls $x \notin$ *freevars*(α) gilt: $\exists x \alpha \approx \alpha$ und $\forall x \alpha \approx \alpha$
Quantifizierung	Falls $x \notin$ *freevars*(β) gilt: $\exists x \alpha \land \beta \approx \exists x(\alpha \land \beta)$ und $\exists x \alpha \lor \beta \approx \exists x(\alpha \lor \beta)$ und $\forall x \alpha \land \beta \approx \forall x(\alpha \land \beta)$ und $\forall x \alpha \lor \beta \approx \forall x(\alpha \lor \beta)$
Umbenennung	Falls $x' \notin$ *vars*(α) gilt: $\exists x \alpha \approx \exists x' \alpha[x/x']$ und $\forall x \alpha \approx \forall x' \alpha[x/x']$

$\alpha[x/x']$ bezeichne die Ersetzung aller Vorkommen von x durch x'.

Wichtige Äquivalenzen

Folgende Äquivalenzen gelten nicht:

1. $\exists x\ \alpha \land \exists\ x\beta \ \not\approx\ \exists x\ (\alpha \land \beta)$

2. $\forall x\ \alpha \lor \forall x\ \beta \ \not\approx\ \forall x\ (\alpha \lor \beta)$

Welche Seite ist strenger?

Zu 1. „$\Leftarrow$“ $\quad \exists x\ (\alpha \land \beta) \quad \approx \quad \exists x_1 \exists x_2\ (\ \alpha[x/x_1] \land \beta[x/x_2] \land (x_1 = x_2)\ )$

Zu 2. „$\Rightarrow$“

Beispiel:

$\alpha = P(x)$ und $\beta = \neg P(x)$

$\mathcal{U} = \mathbf{Z}$, die Menge der ganzen Zahlen

$\mathcal{I}(P) = P_{\mathcal{U}}$ mit $P_{\mathcal{U}}(x)$ gdw. „x ist gerade“