

Kapitel PTS:VII

VII. Gesetz der großen Zahlen

- Ungleichung von Tschebyscheff
- Bernoulli'sches Gesetz der großen Zahlen
- Borel'sche Gesetz der großen Zahlen

Das Borel'sche Gesetz der großen Zahlen

Herleitung

- Vergrößerung des Bernoulli'schen Gesetzes der großen Zahlen ($\frac{X}{n} = H_n(A)$):

$$P(|H_n(A) - p| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

Das Borel'sche Gesetz der großen Zahlen

Herleitung

- Vergrößerung des Bernoulli'schen Gesetzes der großen Zahlen ($\frac{X}{n} = H_n(A)$):

$$P(|H_n(A) - p| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} \geq 1 - \delta \quad \text{für } n \geq n_0.$$

- Beispiel: Für $\varepsilon = 0,01$ und $\delta = 0,02$ ergibt sich $n_0 = 125.000$.

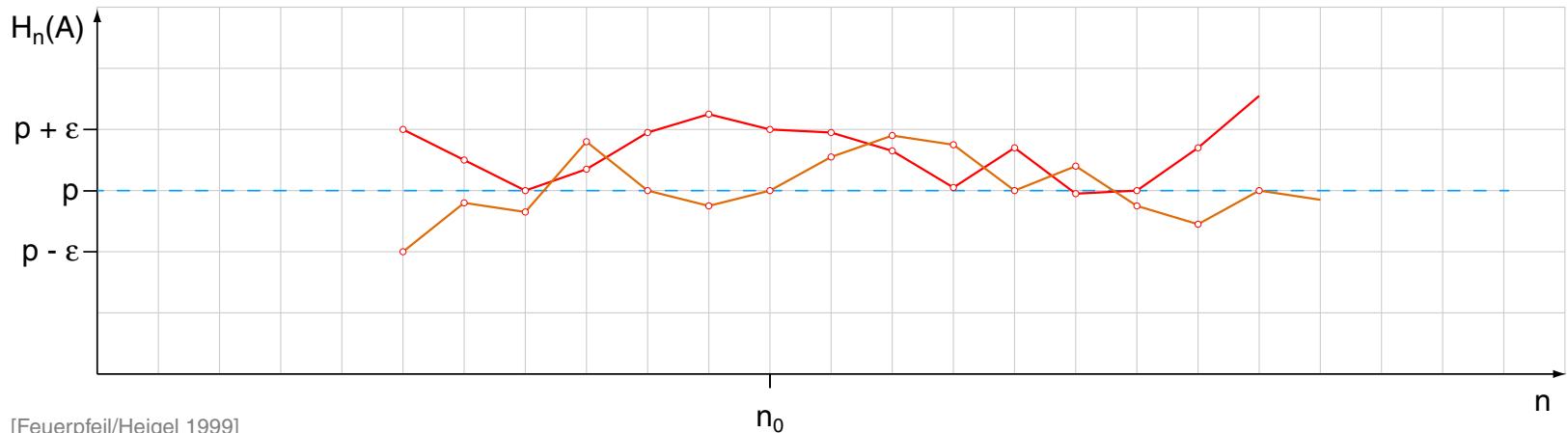
Das Borel'sche Gesetz der großen Zahlen

Herleitung

- Vergrößerung des Bernoulli'schen Gesetzes der großen Zahlen ($\frac{X}{n} = H_n(A)$):

$$P(|H_n(A) - p| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} \geq 1 - \delta \quad \text{für } n \geq n_0.$$

- Beispiel: Für $\varepsilon = 0,01$ und $\delta = 0,02$ ergibt sich $n_0 = 125.000$.
- Gemessene relative Häufigkeiten $H_n(A)$ im Laufe zweier Versuchsfolgen:



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

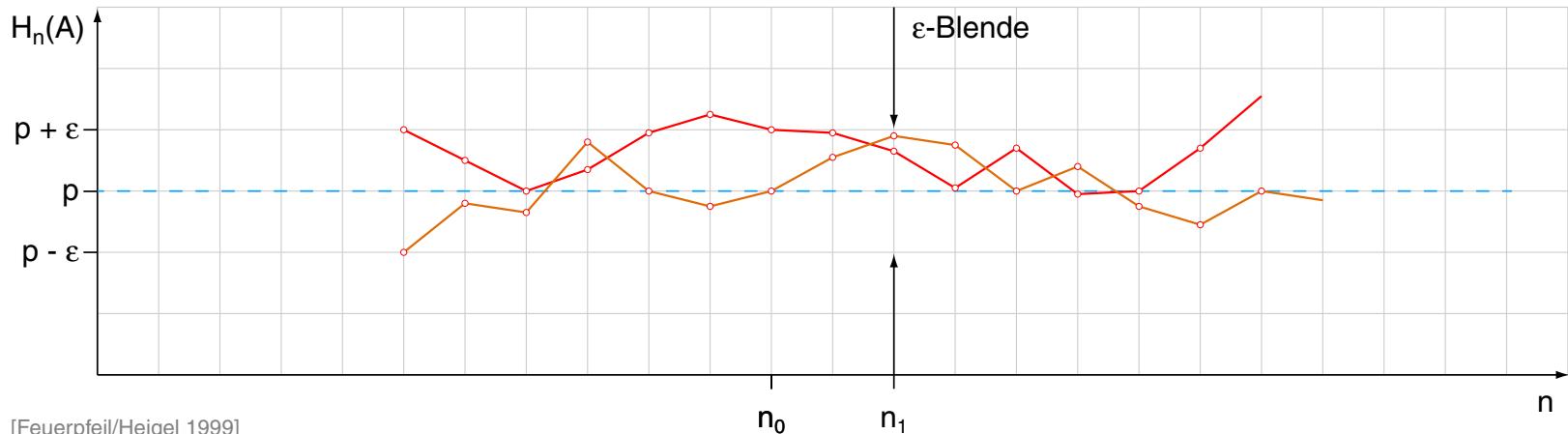
Das Borel'sche Gesetz der großen Zahlen

Herleitung

- Vergrößerung des Bernoulli'schen Gesetzes der großen Zahlen ($\frac{X}{n} = H_n(A)$):

$$P(|H_n(A) - p| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} \geq 1 - \delta \quad \text{für } n \geq n_0.$$

- Beispiel: Für $\varepsilon = 0,01$ und $\delta = 0,02$ ergibt sich $n_0 = 125.000$.
- Gemessene relative Häufigkeiten $H_n(A)$ im Laufe zweier Versuchsfolgen:



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Mit großer Wahrscheinlichkeit von mindestens $1 - \delta$ durchläuft der Pfad eine einzelne „ ε -Blende“, die bei $n_1 \geq n_0$ aufgestellt ist.

Für $\delta = 0,02$ gehen von 100 Pfaden durchschnittliche 98 durch ε -Blende n_1 .

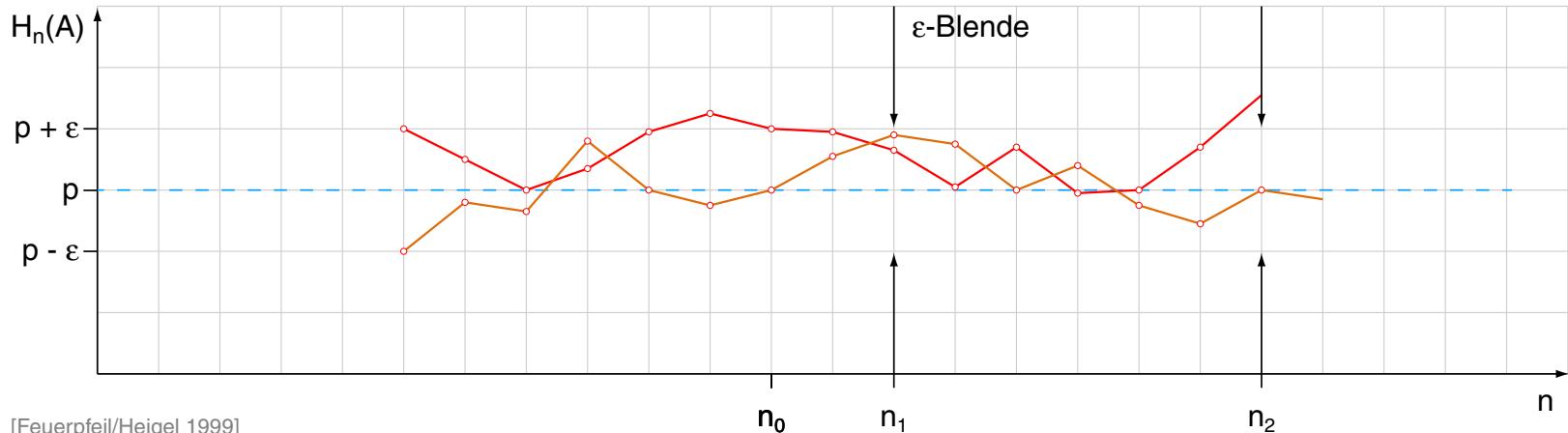
Das Borel'sche Gesetz der großen Zahlen

Herleitung

- Vergrößerung des Bernoulli'schen Gesetzes der großen Zahlen ($\frac{X}{n} = H_n(A)$):

$$P(|H_n(A) - p| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} \geq 1 - \delta \quad \text{für } n \geq n_0.$$

- Beispiel: Für $\varepsilon = 0,01$ und $\delta = 0,02$ ergibt sich $n_0 = 125.000$.
- Gemessene relative Häufigkeiten $H_n(A)$ im Laufe zweier Versuchsfolgen:



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Das Bernoulli'sche Gesetz schließt jedoch nicht aus, dass ein Pfad, der die ε -Blende bei n_1 passiert, eine zweite Blende bei $n_2 > n_1$ nicht passiert. Ein solcher Pfad würde sich entgegen unserer Erwartung wieder um mehr als ε von p entfernen; wobei die Wahrscheinlichkeit dafür mit n abnimmt.

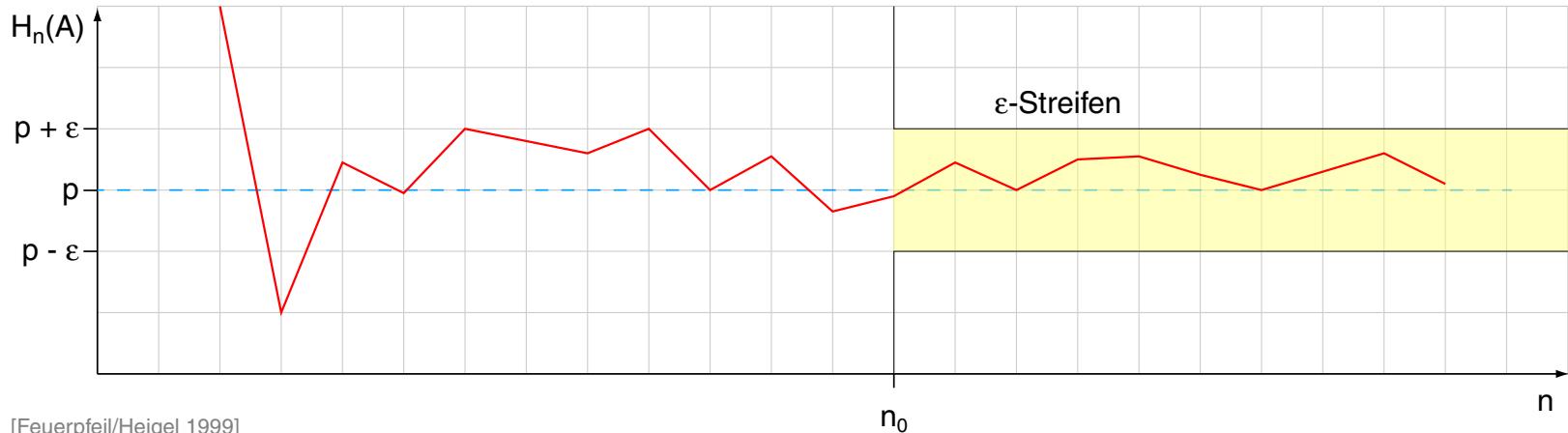
Das Borel'sche Gesetz der großen Zahlen

Herleitung

- Vergrößerung des Bernoulli'schen Gesetzes der großen Zahlen ($\frac{X}{n} = H_n(A)$):

$$P(|H_n(A) - p| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} \geq 1 - \delta \quad \text{für } n \geq n_0.$$

- Beispiel: Für $\varepsilon = 0,01$ und $\delta = 0,02$ ergibt sich $n_0 = 125.000$.
- Gemessene relative Häufigkeiten $H_n(A)$ im Laufe zweier Versuchsfolgen:



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Wünschenswert wäre, wenn ein Pfad mit Mindestwahrscheinlichkeit $1 - \delta$ rechts von n_0 in einem ε -„Streifen“ um p verbleibt.

Analog: Der Pfad passiert alle ε -Blenden rechts von n_0 .

Das Borel'sche Gesetz der großen Zahlen

Ergebnis

- Borel konnte zeigen, dass neben

$$P(|H_n(A) - p| < \varepsilon) \geq 1 - \delta$$

auch

$$P(|H_n(A) - p| < \varepsilon, |H_{n+1}(A) - p| < \varepsilon, \dots) \geq 1 - \delta$$

gilt.

- Das heißt, ein Pfad der $(n; H_n(A))$ -Punkte verläuft ab einem bestimmten n_0 mit der Mindestwahrscheinlichkeit $1 - \delta$ in einem ε -Streifen.
- Es lässt sich beweisen, dass die Borel'sche Aussage des ε -Streifens äquivalent ist zur Gleichung

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (H_n(A) - p) = 0\right) = 1 .$$

Bemerkungen:

- Im Jahr 1909 gelang es Émile Borel (1871–1956, französischer Mathematiker), das sogenannte *starke Gesetz der großen Zahlen* abzuleiten, aus dem das Bernoulli'sche Gesetz gefolgert werden kann – letzteres nennt man daher manchmal auch *schwaches Gesetz der großen Zahlen*.

