Kapitel PTS:V

V. Zufallsgrößen und Maßzahlen

Zufallsgrößen

Beispiel: Skat

- Drei Spieler:innen erhalten je 10 von 32 Karten; oft als „Blatt“ bezeichnet.
- Es gibt $|\Omega| = \binom{32}{10}$ Blätter.
- Die Unter (Bube) sind meist hohe Trumpfkarten.
- Man ist daher an der Anzahl $X(\omega)$ der Unter im eigenen Blatt ω interessiert.
- Die Funktion $X(\omega)$ ordnet jedem Blatt ω eindeutig eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, oder 4 zu.
- Die fünf Ereignisse „$X(\omega) = i$“ ($i \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$) bilden eine Zerlegung der Menge Ω möglicher Blätter.
- Gezeigtes Blatt: $X(\omega) = 1$

Zufallsgrößen

Beispiel: Lotto „Super 6“

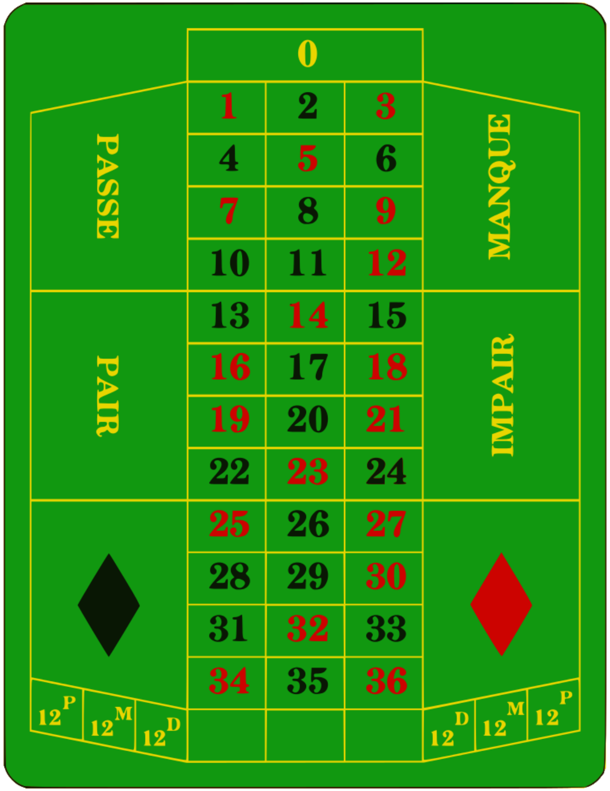
- „Super 6“ ist eine Endziffernlotterie.
- Auf dem Spielschein ist eine sechsstellige Losnummer vorgegeben.
- Je mehr Endziffern der Losnummer mit denen der gezogenen Gewinnzahl übereinstimmen, desto höher der Gewinn; jede Ziffer stammt aus $\{0; 1; \ldots; 9\}$.
- Die Gewinnzahl 781568 hat zwei Endziffern mit der obigen Losnummer 561968 gemein.
- Einer Losnummer ω mit i richtigen Endziffern ($i \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$) werden Gewinne $X(\omega)$ nach einem Gewinnplan zugeordnet.
- Die sieben Ereignisse „$X(\omega) = i$“ bilden eine Zerlegung des Ergebnisraums Ω der 10^6 möglichen Losnummern bzw. Gewinnzahlen.

Zufallsgrößen

Beispiel: Französisches Roulette

- Ein Roulette-Spieler setzt eine Geldeinheit auf „1. Dutzend“.
- Tritt dieses Ereignis ein, werden ihm 3 Geldeinheiten ausgezahlt.
- Sonst verliert er seinen Einsatz.
- Der Reingewinn $X(\omega)$ des Spielers ist eine Funktion $X : \{0; 1; \ldots ; 36\} \to \mathbf{R}$ der bei der Ausspielung fallenden Zahl ω:

$$X(\omega) = \begin{cases} 2 & \text{für } \omega \in \{1; 2; \ldots ; 12\}, \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$



Bemerkungen:

- In den Beispielen wird jedem $\omega \in \Omega$ eine reelle Zahl $X(\omega)$ zugeordnet.
- X ist also eine auf Ω erklärte reellwertige Funktion, die Ereignisse aus Ω durch reelle Zahlen charakterisiert.
- Wie die Ergebnisse ω hängen auch die Werte von $X(\omega)$ vom Zufall ab. Daher nennt man X eine Zufallsgröße.

Zufallsgrößen

Definition 1 (Zufallsgröße)

Eine Funktion X, die jedem Ergebnis ω eines Ergebnisraums Ω eine reelle Zahl $X(\omega)$ zuordnet, heißt Zufallsgröße X auf Ω. In formaler Schreibweise:

$$X : \Omega \to \mathbf{R} \text{ mit } \omega \mapsto X(\omega).$$

Bemerkungen:

- Das Wahrscheinlichkeitsmaß P des Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega; P)$ geht nicht in die Definition mit ein.

- Zufallsgrößen werden üblicherweise mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet, vorwiegend vom Ende des Alphabets; die von ihnen angenommenen Werte dann mit den entsprechenden kleinen lateinischen Buchstaben.

- Bei einer Zufallsgröße X ist die Menge der Ergebnisse, die einen bestimmten Funktionswert x liefert, eine Teilmenge von Ω.
  - Im Roulette-Beispiel gehört zu $x = 2$ die Teilmenge $\{1; 2; \ldots; 12\}$ von $\Omega = \{0; 1; \ldots; 36\}$, zu $x = -1$ die Restmenge $\{0; 13; 14; \ldots; 36\}$.
  - Jeder Gleichung $X(\omega) = x$ mit $x \in \{-1; 2\}$ ist also eindeutig eine Teilmenge von Ω, also ein Ereignis, zugeordnet: Im Roulette-Beispiel das Ereignis „1. Dutzend“ für $x = 2$ und das Gegenereignis „Nicht-1. Dutzend“ für $x = -1$.

- Der Begriff der Zufallsgröße und alle damit zusammenhängenden Begrifflichkeiten bildeten sich erst im 19. Jahrhundert heraus.

Kapitel PTS:V

V. Zufallsgrößen und Maßzahlen

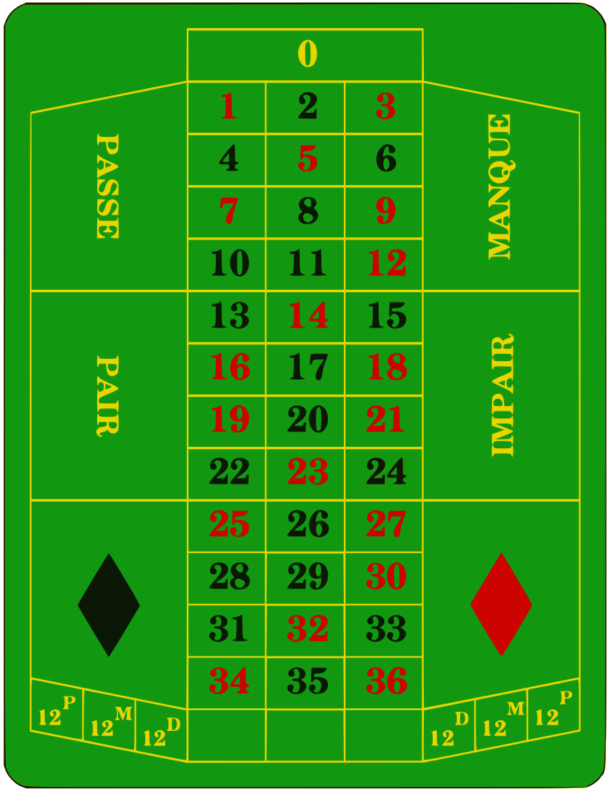
- ❑ Zufallsgrößen
- ❑ Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- ❑ Verteilungsfunktionen
- ❑ Multiple Zufallsgrößen
- ❑ Erwartungswerte
- ❑ Varianz und Standardabweichung
- ❑ Das $\sqrt{n}$-Gesetz
- ❑ Schätzwerte für Erwartungswert und Standardabweichung

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Beispiel: Französisches Roulette

- Bei Einsatz auf das „1. Dutzend“ interessiert neben der möglichen Höhe X des Gewinns, wie wahrscheinlich er den Wert 2 annimmt.
- $X(\omega) = 2$ ist erfüllt, wenn $\omega \in \{1; \ldots ; 12\}$
- $P(X(\omega) = 2) = P(\{1; \ldots ; 12\}) = \frac{|\{1;\ldots;12\}|}{|\Omega|} = \frac{12}{37}$
- $P(X(\omega) = -1) = P(\{0; 13; 14; \ldots ; 36\}) = \frac{25}{37}$
  $= 1 - \frac{12}{37} = 1 - P(X(\omega) = 2)$
- Die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten $P(X(\omega) = -1)$ und $P(X(\omega) = 2)$ auf die Werte -1 und 2 lässt sich tabellarisieren:

x_i	-1	2
$P(X(\omega) = x_i)$	$\frac{25}{37}$	$\frac{12}{37}$



Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Begriffsbildung

- Eine auf dem Ergebnisraum Ω definierten Zufallsgröße X mit der Wertemenge $W = \{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$ induziert eine eindeutige Zerlegung von Ω:

$$\Omega = \{\omega : X(\omega) = x_1\} \cup \ldots \cup \{\omega : X(\omega) = x_k\} \ .$$

- Die Wahrscheinlichkeit, dass $X(\omega)$ den Wert x_i ($i \in \{1; 2; \ldots; k\}$) annimmt, wird mit $P(X = x_i)$ bezeichnet; formal:

$$P(X = x_i) = P(\{\omega : X(\omega) = x_i\}) \ .$$

- Wird statt Ω der vergröberte Ergebnisraum $\Omega_X = W$ zugrunde gelegt, dann ist durch $P(X = x_i)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P_X auf Ω_X definiert.

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Begriffsbildung

- Eine auf dem Ergebnisraum Ω definierten Zufallsgröße X mit der Wertemenge $W = \{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$ induziert eine eindeutige Zerlegung von Ω:

$$\Omega = \{\omega : X(\omega) = x_1\} \cup \ldots \cup \{\omega : X(\omega) = x_k\} \; .$$

- Die Wahrscheinlichkeit, dass $X(\omega)$ den Wert x_i ($i \in \{1; 2; \ldots; k\}$) annimmt, wird mit $P(X = x_i)$ bezeichnet; formal:

$$P(X = x_i) = P(\{\omega : X(\omega) = x_i\}) \; .$$

- Wird statt Ω der vergröberte Ergebnisraum $\Omega_X = W$ zugrunde gelegt, dann ist durch $P(X = x_i)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P_X auf Ω_X definiert.

Definition 2 (Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße)

Die Funktion $P_X : x_i \mapsto P(X = x_i)$ mit $x_i \in W = \{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$ heißt Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$.

Bemerkungen:

- In der Literatur wird der Begriff Wahrscheinlichkeitsverteilung manchmal auf die Menge $\mathbf{R}$ der reellen Zahlen erweitert. Für alle $x \in \mathbf{R}$, die nicht Werte von X sind, ist dann $P(X = x) = 0$. Man nennt dann P_X auch Wahrscheinlichkeitsfunktion von X.

- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung beschreibt man oft durch Angabe der Paare $(x_i; P(X = x_i))$ bzw. durch eine Tabelle. Dabei muss die Summe der Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$ stets gleich 1 sein.

- Es gibt auch Wahrscheinlichkeitsverteilungen, bei denen sich die Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$ durch einen Funktionsterm ausdrücken lassen.

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Beispiel: Lotto „Spiel 77“

- „Spiel 77“ ist eine Endziffernlotterie.
- Auf dem Spielschein ist eine siebenstellige Losnummer vorgegeben.
- Je mehr Endziffern der Losnummer mit denen der gezogenen Gewinnzahl übereinstimmen, desto höher der Gewinn; jede Ziffer stammt aus $\{0; 1; \ldots; 9\}$.

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Beispiel: Lotto „Spiel 77“

- „Spiel 77“ ist eine Endziffernlotterie.
- Auf dem Spielschein ist eine siebenstellige Losnummer vorgegeben.
- Je mehr Endziffern der Losnummer mit denen der gezogenen Gewinnzahl übereinstimmen, desto höher der Gewinn; jede Ziffer stammt aus $\{0; 1; \ldots; 9\}$.
- Sei X die Zahl der übereinstimmenden Endziffern.
- Ereignis „keine Übersteinstimmung“:
  Die Ziffern der Gewinnzahl werden unabhängig voneinander von hinten nach vorn gezogen.

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Beispiel: Lotto „Spiel 77“

- „Spiel 77“ ist eine Endziffernlotterie.
- Auf dem Spielschein ist eine siebenstellige Losnummer vorgegeben.
- Je mehr Endziffern der Losnummer mit denen der gezogenen Gewinnzahl übereinstimmen, desto höher der Gewinn; jede Ziffer stammt aus $\{0; 1; \ldots; 9\}$.
- Sei X die Zahl der übereinstimmenden Endziffern.
- Ereignis „keine Übersteinstimmung“: $P(X = 0) = \frac{9}{10}$
  Die Ziffern der Gewinnzahl werden unabhängig voneinander von hinten nach vorn gezogen.
- Ereignis „Übereinstimmung der letzten Ziffer“:
  Die vorletzte Endziffer muss falsch sein.

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Beispiel: Lotto „Spiel 77“

- „Spiel 77“ ist eine Endziffernlotterie.
- Auf dem Spielschein ist eine siebenstellige Losnummer vorgegeben.
- Je mehr Endziffern der Losnummer mit denen der gezogenen Gewinnzahl übereinstimmen, desto höher der Gewinn; jede Ziffer stammt aus $\{0; 1; \ldots; 9\}$.
- Sei X die Zahl der übereinstimmenden Endziffern.
- Ereignis „keine Übersteinstimmung“: $P(X = 0) = \frac{9}{10}$
  Die Ziffern der Gewinnzahl werden unabhängig voneinander von hinten nach vorn gezogen.
- Ereignis „Übereinstimmung der letzten Ziffer“: $P(X = 1) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{9}{100}$
  Die vorletzte Endziffer muss falsch sein.
- Ereignis „genau i richtige Endziffern“:

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Beispiel: Lotto „Spiel 77“

- „Spiel 77“ ist eine Endziffernlotterie.
- Auf dem Spielschein ist eine siebenstellige Losnummer vorgegeben.
- Je mehr Endziffern der Losnummer mit denen der gezogenen Gewinnzahl übereinstimmen, desto höher der Gewinn; jede Ziffer stammt aus $\{0; 1; \ldots; 9\}$.
- Sei X die Zahl der übereinstimmenden Endziffern.
- Ereignis „keine Übersteinstimmung“: $P(X = 0) = \frac{9}{10}$
  Die Ziffern der Gewinnzahl werden unabhängig voneinander von hinten nach vorn gezogen.
- Ereignis „Übereinstimmung der letzten Ziffer“: $P(X = 1) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{9}{100}$
  Die vorletzte Endziffer muss falsch sein.
- Ereignis „genau i richtige Endziffern“: $P(X = x_i) = \frac{9}{10^{i+1}}$
  Die $(i+1)$-te Endziffer muss falsch, die i folgenden richtig sein.
- Für $i \in \{0; 1; \ldots; 7\}$ ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:
  Die Summe der Wahrscheinlichkeiten ist 1.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{9}{1000}$	$\frac{9}{10.000}$	$\frac{9}{100.000}$	$\frac{9}{1.000.000}$	$\frac{9}{10.000.000}$	$\frac{1}{10.000.000}$

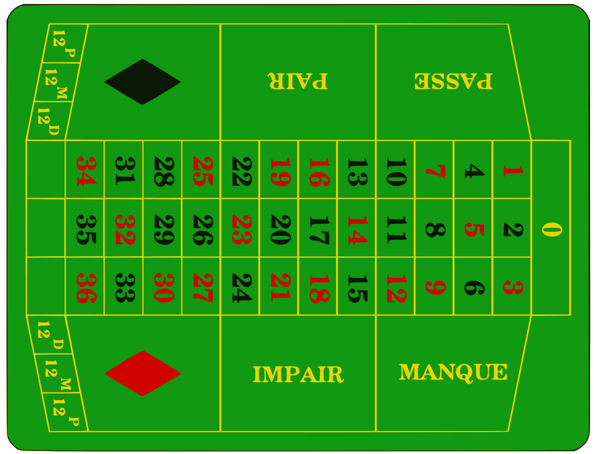
Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Veranschaulichung: Ergebnisraum, Zufallsgröße, Wahrscheinlichkeitsverteilung

Beispiel: Französisches Roulette

Ergebnisraum:

$\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_m\}$



ω_i, ($i \in \{1; 2; \ldots; m\}$), sind die möglichen Spielergebnisse

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

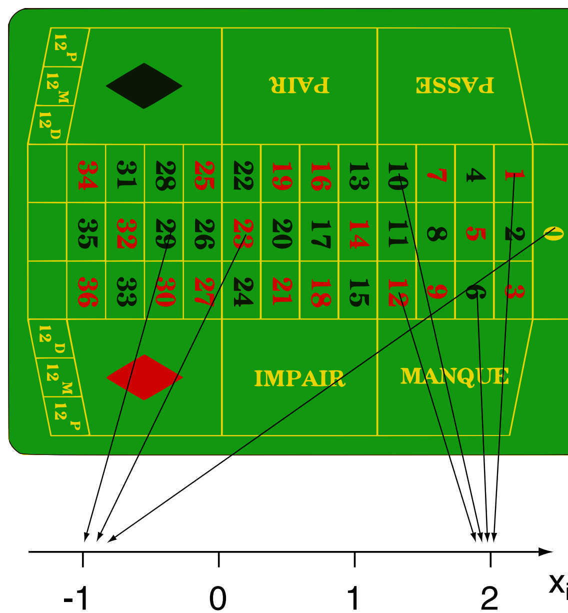
Veranschaulichung: Ergebnisraum, Zufallsgröße, Wahrscheinlichkeitsverteilung

Beispiel: Französisches Roulette

Ergebnisraum:

$\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_m\}$

ω_i, ($i \in \{1; 2; \ldots; m\}$), sind die möglichen Spielergebnisse



Zufallsgröße:

$X : \Omega \rightarrow W$

mit $X(\omega) = x$

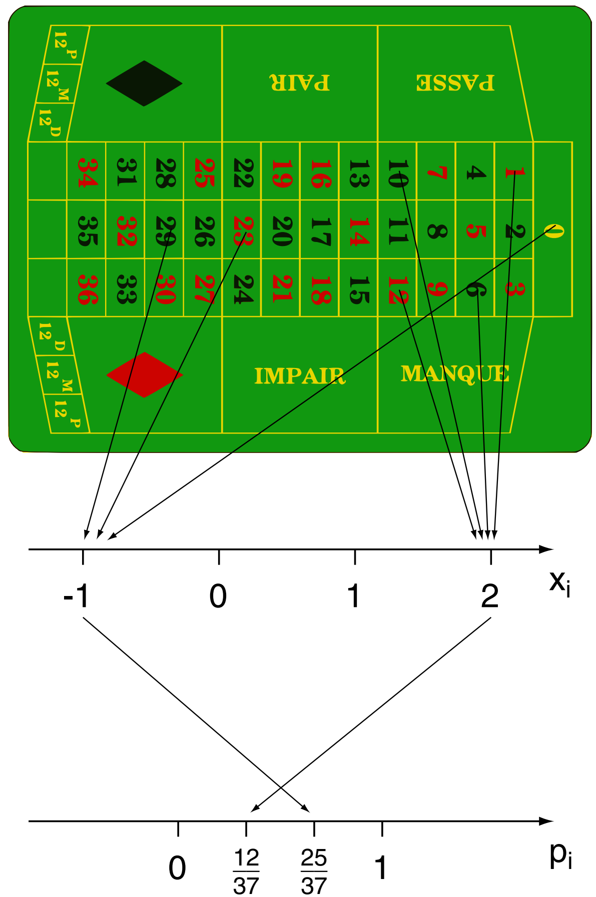
X ist der mögliche Reingewinn beim Setzen auf „1. Dutzend“, W die Menge aller möglichen Reingewinne.

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Veranschaulichung: Ergebnisraum, Zufallsgröße, Wahrscheinlichkeitsverteilung

Beispiel: Französisches Roulette



Ergebnisraum:
$\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_m\}$

ω_i, ($i \in \{1; 2; \ldots; m\}$), sind die möglichen Spielergebnisse

Zufallsgröße:
$X : \Omega \rightarrow W$
mit $X(\omega) = x$

X ist der mögliche Reingewinn beim Setzen auf „1. Dutzend“, W die Menge aller möglichen Reingewinne.

Wahrscheinlichkeitsverteilung:
$P_X : W \rightarrow\ ]0; 1[$
mit $x_i \mapsto P(X = x_i) = p_i$

P_X ordnet den verschiedenen Reingewinnen x_i Wahrscheinlichkeiten p_i zu.

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

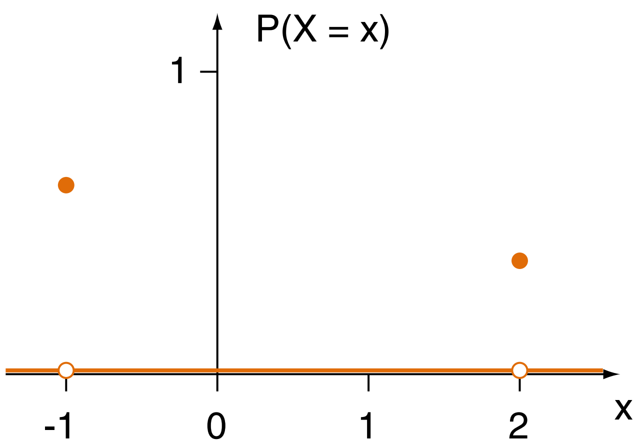
Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Veranschaulichung: Graph und Stabdiagramm

- Der Graph der Wahrscheinlichkeitsverteilung besteht aus den Punkten $(x_i; P(X = x_i))$ mit $i \in \{1; \ldots ; k\}$.

Beispiel: Französisches Roulette (Fortsetzung)

- Graph und Stabdiagramm der Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Reingewinn bei Einsatz einer Geldeinheit auf „1. Dutzend“:



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

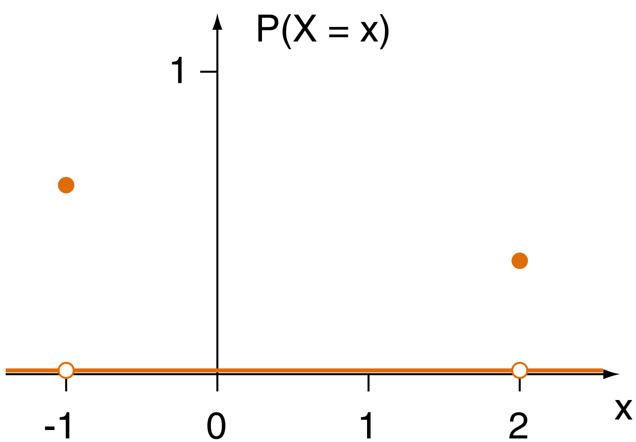
Wahrscheinlichkeitsverteilungen

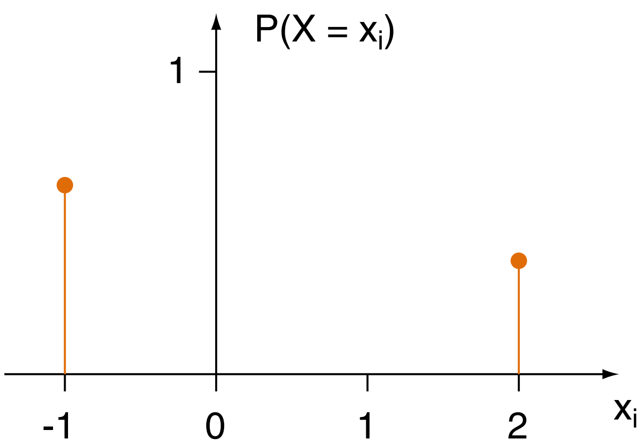
Veranschaulichung: Graph und Stabdiagramm

- Der Graph der Wahrscheinlichkeitsverteilung besteht aus den Punkten $(x_i; P(X = x_i))$ mit $i \in \{1; \ldots; k\}$.
- Größere Anschaulichkeit verschafft die Darstellung der Ordinaten als Stäbe.

Beispiel: Französisches Roulette (Fortsetzung)

- Graph und Stabdiagramm der Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Reingewinn bei Einsatz einer Geldeinheit auf „1. Dutzend“:





[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

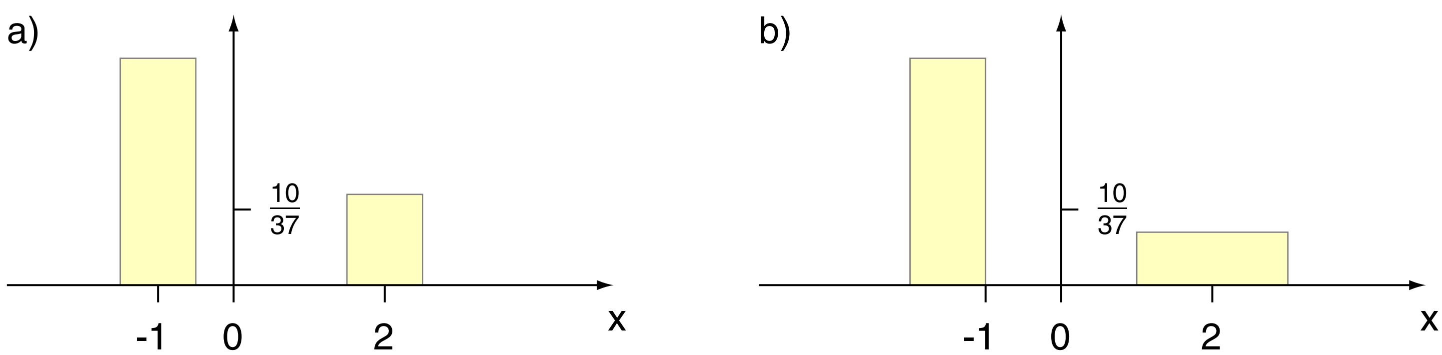
Veranschaulichung: Histogramm

- Eine Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit vielen Werten ist oft besser in einem Histogramm zu überblicken, das Wahrscheinlichkeiten als Flächen darstellt.

Beispiel: Französisches Roulette (Fortsetzung)

- Alternative Histogramme der Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Reingewinn bei Einsatz einer Geldeinheit auf „1. Dutzend“:

x_i	-1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{25}{37}$	$\frac{12}{37}$



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

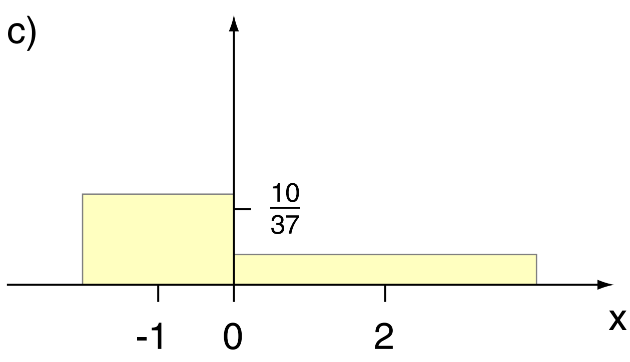
Veranschaulichung: Histogramm

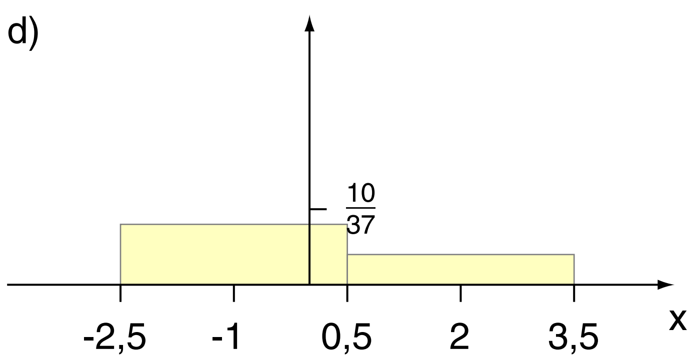
- Eine Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit vielen Werten ist oft besser in einem Histogramm zu überblicken, das Wahrscheinlichkeiten als Flächen darstellt.

Beispiel: Französisches Roulette (Fortsetzung)

- Alternative Histogramme der Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Reingewinn bei Einsatz einer Geldeinheit auf „1. Dutzend“:

x_i	-1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{25}{37}$	$\frac{12}{37}$





[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Veranschaulichung: Histogramm

Konstruktion eines Histogramms:

1. Auswahl eines Intervalls $[a_1; a_m]$ auf der Zahlengerade, das alle Werte der Zufallsgröße X überdeckt.

2. Hinzunahme weiterer Punkte wird das Intervall in Teilintervalle $]a_i; a_{i+1}]$ zerlegt.

3. Über jedem Teilintervall $]a_i; a_{i+1}]$ wird ein Rechteck errichtet, dessen Flächeninhalt gleich der Wahrscheinlichkeit $P(a_i < X \leq a_{i+1})$ ist.

- $P(a_i < X \leq a_{i+1})$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallsgröße X Werte aus dem Teilintervall $]a_i; a_{i+1}]$ annimmt.

- Jede *Säule* repräsentiert die Wahrscheinlichkeit, dass Werte der Zufallsgröße X in dem von der Breite der Säule überspannten Bereich liegen.

Bemerkungen:

- Histrogrammdarstellungen sind nicht eindeutig, da sie von der gewählten Unterteilung abhängig sind: Die Summe der Flächeninhalte der Säulen muss 1 sein.
- Meist werden gleich lange/breite Teilintervalle gewählt, so dass alle Säulen die gleiche Breite haben.
- Histogramm (a) ist vermutlich am „natürlichsten“ für die meisten Betrachter, da auf der y-Achse die Wahrscheinlichkeiten 1:1 durch die Säulenhöhen abgelesen werden können.
- Histogramm (d) ist die *äquidistante Einteilung*, die in vielen Zusammenhängen auch ein recht natürliches Erscheinungsbild hat, wenn das zugrundeliegende Intervall auf der Zahlengeraden in gleich breite, direkt aneinandergrenzende interessante „Ereignisintervalle“ zerlegt werden kann. Im Beispiel ist die äquidistante Darstellung durch die tatsächlich nicht vorhandene direkte Nachbarschaft der einzigen beiden möglichen Ereignisse „$X = -1$“ und „$X = 2$“ für viele schwerer überschaubar als Histogramm (a).
- Der Vorteil von Histogrammen gegenüber Stabdiagrammen ist, dass Flächen für Menschen „zugänglicher“ als Stäbe sind.

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Dichtefunktion eines Histogramms

- Sei $x \in]a_i; a_{i+1}]$ ein Punkt in einem Intervall eines Histogramms.
- Sei $d(x)$ die Höhe der Säule über x, so gilt:

$$P(a_i < X \leq a_{i+1}) = (a_{i+1} - a_i) \cdot d(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad d(x) = \frac{P(a_i < X \leq a_{i+1})}{a_{i+1} - a_i}\,.$$

- Die Funktion d gibt an, welcher Anteil der Wahrscheinlichkeit auf die Längeneinheit des Intervalls $]a_i; a_{i+1}]$ entfällt.
- Man bezeichnet die in den einzelnen Intervallen konstante Funktion d als Dichtefunktion des Histogramms.

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

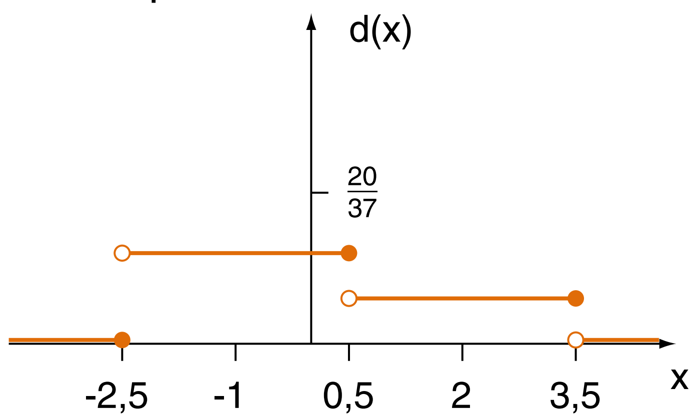
Dichtefunktion eines Histogramms

Beispiel: Französisches Roulette (Fortsetzung)

- Histogramm (d) zur Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Reingewinn bei Einsatz einer Geldeinheit auf „1. Dutzend“ lässt sich durch folgende Dichtefunktion beschreiben:

$$d(x) = \begin{cases} \frac{25}{37\cdot 3} & \text{für } x \in \,]-2{,}5; 0{,}5], \\ \frac{12}{37\cdot 3} & \text{für } x \in \,]0{,}5; 3{,}5], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Darstellung von d als Graph:



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Lotto „Spiel 77“

- Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass genau i Endziffern einer Losnummer mit der Gewinnzahl übereinstimmen ist $P(X = i) = \frac{9}{10^{i+1}}$.
- Wie wahrscheinlich sind mindestens (höchstens) i Endziffern richtig?

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Lotto „Spiel 77“

- Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass genau i Endziffern einer Losnummer mit der Gewinnzahl übereinstimmen ist $P(X = i) = \frac{9}{10^{i+1}}$.
- Wie wahrscheinlich sind mindestens (höchstens) i Endziffern richtig?
- Ereignis „mindestens 1 richtige Endziffer“:
  $P(X = 1) = \frac{1}{10}$.

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Lotto „Spiel 77“

- Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass genau i Endziffern einer Losnummer mit der Gewinnzahl übereinstimmen ist $P(X = i) = \frac{9}{10^{i+1}}$.
- Wie wahrscheinlich sind mindestens (höchstens) i Endziffern richtig?
- Ereignis „mindestens 1 richtige Endziffer“: $P(X \geq 1) = \frac{1}{10}$
  $P(X = 1) = \frac{1}{10}$. Die anderen Endziffern sind für dieses Ereignis unerheblich.
- Ereignis „keine richtige Endziffer“:

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Lotto „Spiel 77“

- Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass genau i Endziffern einer Losnummer mit der Gewinnzahl übereinstimmen ist $P(X = i) = \frac{9}{10^{i+1}}$.
- Wie wahrscheinlich sind mindestens (höchstens) i Endziffern richtig?
- Ereignis „mindestens 1 richtige Endziffer“: $P(X \geq 1) = \frac{1}{10}$
  $P(X = 1) = \frac{1}{10}$. Die anderen Endziffern sind für dieses Ereignis unerheblich.
- Ereignis „keine richtige Endziffer“: $P(X = 0) = 1 - \frac{1}{10}$
- Ereignis „mindestens 2 richtige Endziffern“:
- Ereignis „höchstens 1 richtige Endziffer“:

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Lotto „Spiel 77"

- Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass genau i Endziffern einer Losnummer mit der Gewinnzahl übereinstimmen ist $P(X = i) = \frac{9}{10^{i+1}}$.
- Wie wahrscheinlich sind mindestens (höchstens) i Endziffern richtig?
- Ereignis „mindestens 1 richtige Endziffer": $P(X \geq 1) = \frac{1}{10}$
  $P(X = 1) = \frac{1}{10}$. Die anderen Endziffern sind für dieses Ereignis unerheblich.
- Ereignis „keine richtige Endziffer": $P(X = 0) = 1 - \frac{1}{10}$
- Ereignis „mindestens 2 richtige Endziffern": $P(X \geq 2) = \left(\frac{1}{10}\right)^2$
- Ereignis „höchstens 1 richtige Endziffer": $P(X \leq 1) = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^2$
- Verallgemeinerung zum Ereignis „$X \geq i + 1$" und zum Gegenereignis „$X \leq i$":

  $$P(X \geq i + 1) = \left(\frac{1}{10}\right)^{i+1} \qquad \text{und} \qquad P(X \leq i) = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{i+1}$$

  für $i \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
- Für das sichere Ereignis „$X \leq 7$" gilt $P(X \leq 7) = 1$.

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Lotto „Spiel 77“

- Ereignis „mindestens 2 und höchstens 5 richtige Endziffern“:

$$P(2 \leq X \leq 5) \;=\; P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Lotto „Spiel 77“

- Ereignis „mindestens 2 und höchstens 5 richtige Endziffern“:

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 5) &= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= P(X \leq 5) - P(X \leq 1) \end{aligned}$$

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Lotto „Spiel 77“

- Ereignis „mindestens 2 und höchstens 5 richtige Endziffern“:

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 5) &= P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5) \\ &= P(X \leq 5) - P(X \leq 1) \;=\; 1-\left(\frac{1}{10}\right)^6 - 1 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 \\ &= 10^{-2} - 10^{-6} \;=\; \frac{9999}{1.000.000}\,. \end{aligned}$$

➜ Summen lokaler Wahrscheinlichkeiten $P(a \leq X \leq b)$ für Ereignisse in Intervallform ($a, b \in \mathbf{R}$) können mit $P(X \leq a)$ und $P(X \leq b)$ bestimmt werden.

Verteilungsfunktionen
Beispiel: Lotto „Spiel 77“

- Ereignis „mindestens 2 und höchstens 5 richtige Endziffern“:

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 5) &= P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) \\ &= P(X \leq 5) - P(X \leq 1) \;=\; 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^6 - 1 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 \\ &= 10^{-2} - 10^{-6} \;=\; \frac{9999}{1.000.000}\,. \end{aligned}$$

➜ Summen lokaler Wahrscheinlichkeiten $P(a \leq X \leq b)$ für Ereignisse in Intervallform ($a, b \in \mathbf{R}$) können mit $P(X \leq a)$ und $P(X \leq b)$ bestimmt werden.

- Ereignis „genau 3 richtige Endziffern“:

$$P(X=3) \;=$$

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Lotto „Spiel 77“

- Ereignis „mindestens 2 und höchstens 5 richtige Endziffern“:

$$
\begin{aligned}
P(2 \le X \le 5) &= P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) \\
&= P(X \le 5) - P(X \le 1) \;=\; 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^6 - 1 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 \\
&= 10^{-2} - 10^{-6} \;=\; \frac{9999}{1.000.000} \,.
\end{aligned}
$$

➜ Summen lokaler Wahrscheinlichkeiten $P(a \le X \le b)$ für Ereignisse in Intervallform ($a, b \in \mathbf{R}$) können mit $P(X \le a)$ und $P(X \le b)$ bestimmt werden.

- Ereignis „genau 3 richtige Endziffern“:

$$
\begin{aligned}
P(X=3) &= P(X \le 3) - P(X \le 2) \;=\; 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^4 - 1 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 \\
&= 10^{-3} - 10^{-4} \;=\; \frac{9}{10.000} \,.
\end{aligned}
$$

➜ Analog gilt:

$$
P(X=i) = P(X \le i) - P(X \le i-1) \,.
$$

Verteilungsfunktionen

Definition 3 (Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße)

Sei X eine Zufallsgröße mit der Wertemenge $W = \{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$. Dann heißt die für alle $x \in \mathbf{R}$ definierte Funktion F_X mit

$$F_X : x \mapsto P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

(kumulative) Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$.

Bemerkungen:

- Die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ erhält man durch Addition aller Werte $P(X = x_i)$, für die $x_i \leq x$ erfüllt ist. Das erklärt das ergänzende Adjektiv „kumulativ“, das meist weglassen wird.
- Liegt nur eine Zufallsgröße vor, wird statt F_X oft einfach F geschrieben.
- Aus dem Stabdiagramm einer Wahrscheinlichkeitsverteilung lässt sich leicht der Graph der Verteilungsfunktion (und umgekehrt) konstruieren.

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Dreifacher Münzwurf

- Sei Zufallsgröße X die Anzahl der Köpfe:

ω	ZZZ	ZZK	ZKZ	KZZ	ZKK	KZK	KKZ	KKK
$X(\omega)$	0	1	1	1	2	2	2	3

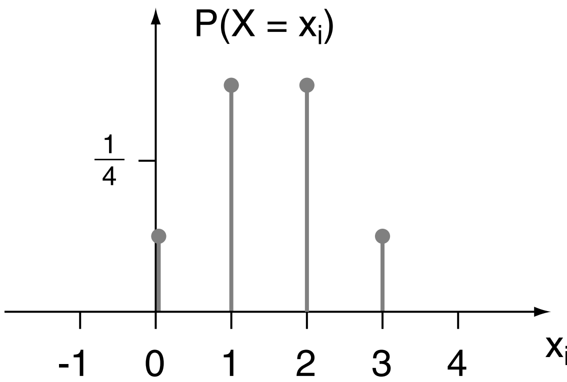
Verteilungsfunktionen

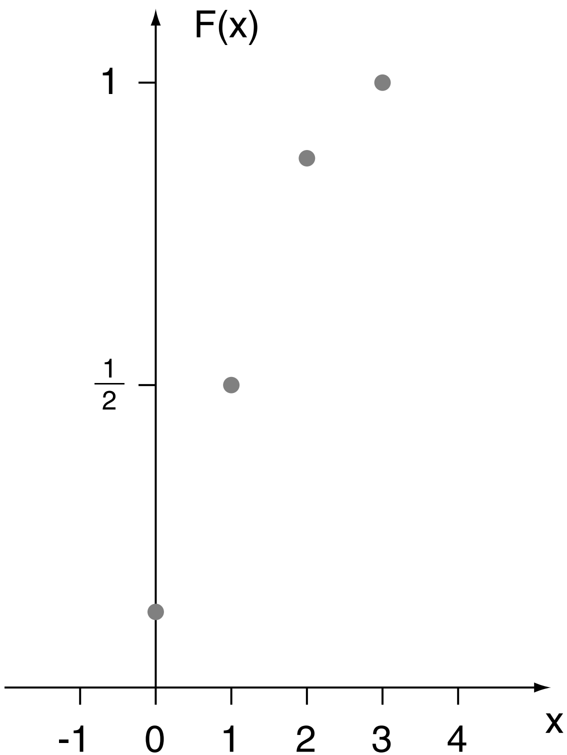
Beispiel: Dreifacher Münzwurf

- Sei Zufallsgröße X die Anzahl der Köpfe:

ω	ZZZ	ZZK	ZKZ	KZZ	ZKK	KZK	KKZ	KKK
$X(\omega)$	0	1	1	1	2	2	2	3

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
$F(x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$





[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Dreifacher Münzwurf

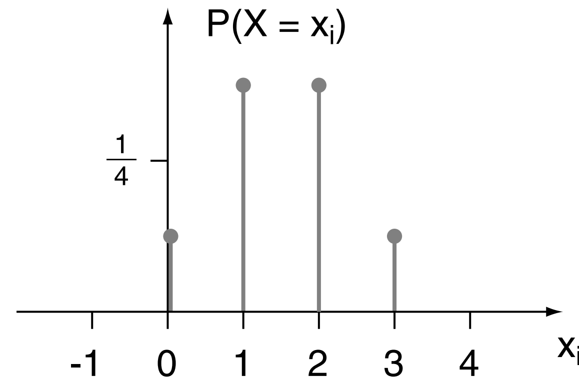
- Sei Zufallsgröße X die Anzahl der Köpfe:

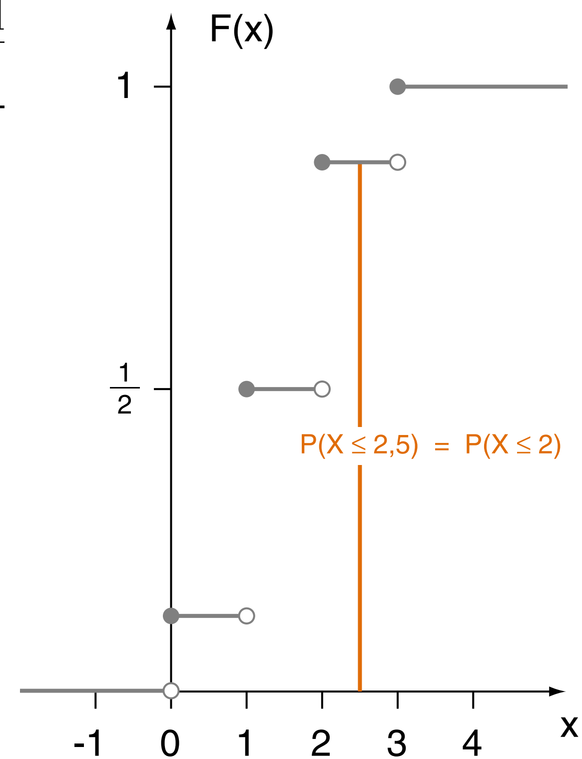
ω	ZZZ	ZZK	ZKZ	KZZ	ZKK	KZK	KKZ	KKK
$X(\omega)$	0	1	1	1	2	2	2	3

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
$F(x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$

$x \in \mathbf{R}$	$]-\infty;0[$	$[0;1[$	$[1;2[$	$[2;3[$	$[3;\infty[$
$F(x)$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$

- Da X nur die Werte 0, 1, 2 und 3 annehmen kann, ist z.B. $P(X \leq 2{,}5) = P(X = 2)$.
- Für alle $x \in [2;3[$: $P(X \leq x) = P(X \leq 2)$





[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Dreifacher Münzwurf

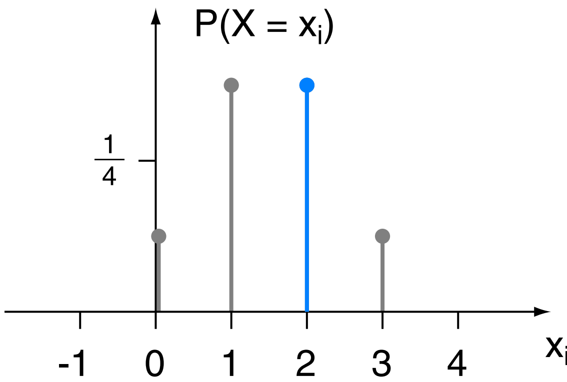
- Sei Zufallsgröße X die Anzahl der Köpfe:

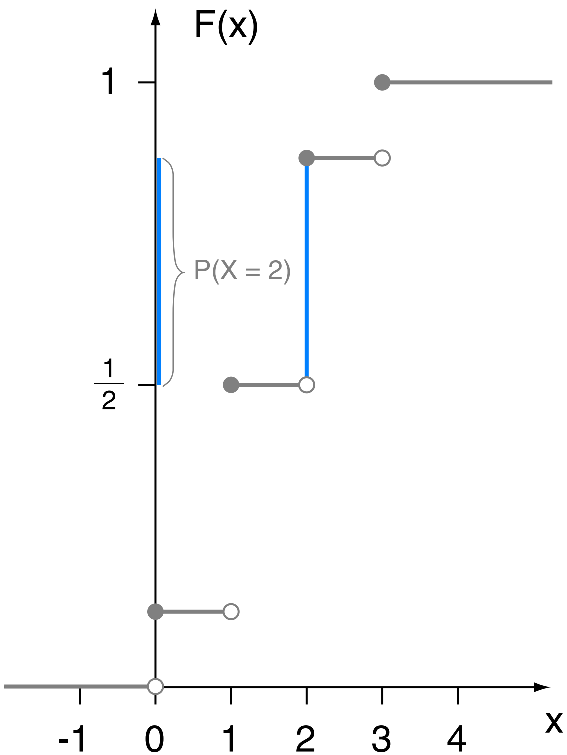
ω	ZZZ	ZZK	ZKZ	KZZ	ZKK	KZK	KKZ	KKK
$X(\omega)$	0	1	1	1	2	2	2	3

x_i	0	1	2	3
$P(X{=}x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
$F(x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$

$x \in \mathbf{R}$	$]{-\infty}; 0[$	$[0;1[$	$[1;2[$	$[2;3[$	$[3;\infty[$
$F(x)$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$

- Da X nur die Werte 0, 1, 2 und 3 annehmen kann, ist z.B. $P(X \leq 2{,}5) = P(X = 2)$.
- Für alle $x \in [2;3[$: $P(X \leq x) = P(X \leq 2)$
- Die Höhe des Sprungs von $F(x)$ an der Stelle x_i entspricht $P(X = x_i)$.





[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Dreifacher Münzwurf

- Sei Zufallsgröße X die Anzahl der Köpfe:

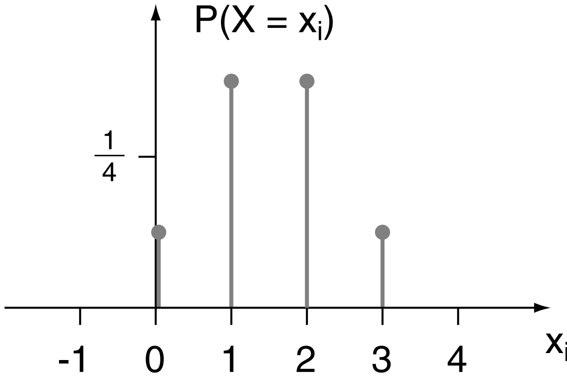
ω	ZZZ	ZZK	ZKZ	KZZ	ZKK	KZK	KKZ	KKK
$X(\omega)$	0	1	1	1	2	2	2	3

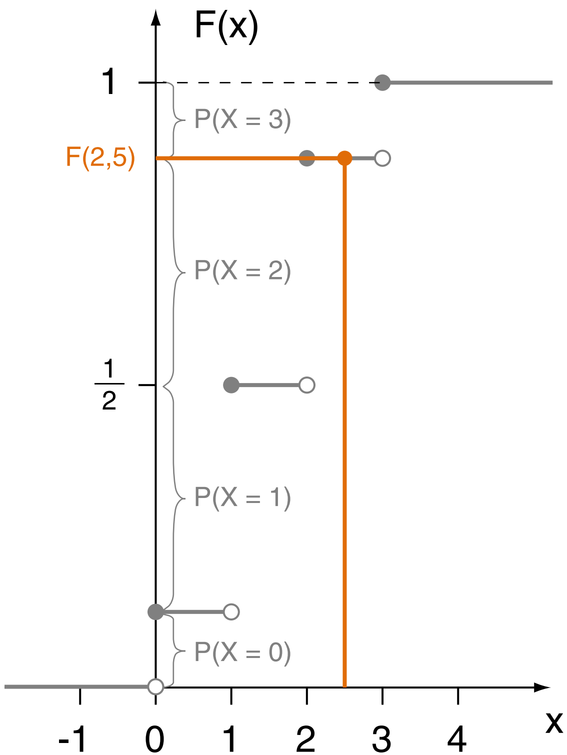
x_i	0	1	2	3
$P(X{=}x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
$F(x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$

$x \in \mathbf{R}$	$]{-\infty}; 0[$	$[0; 1[$	$[1; 2[$	$[2; 3[$	$[3; \infty[$
$F(x)$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$

- Da X nur die Werte 0, 1, 2 und 3 annehmen kann, ist z.B. $P(X \leq 2{,}5) = P(X = 2)$.
- Für alle $x \in [2; 3[$: $P(X \leq x) = P(X \leq 2)$
- Die Höhe des Sprungs von $F(x)$ an der Stelle x_i entspricht $P(X = x_i)$.
- Die Ordinate zu $F(2{,}5)$ setzt sich z.B. aus den Sprunghöhen bei 0, 1 und 2 zusammen:

$$F(2{,}5) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \; .$$





[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Verteilungsfunktionen

Eigenschaften

Theoretisch ist es gleichgültig, ob die Wahrscheinlichkeitsverteilung oder die Verteilungsfunktion bekannt sind:

- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung erhält man aus der Verteilungsfunktion durch Subtraktion zweier Werte der Verteilungsfunktion:

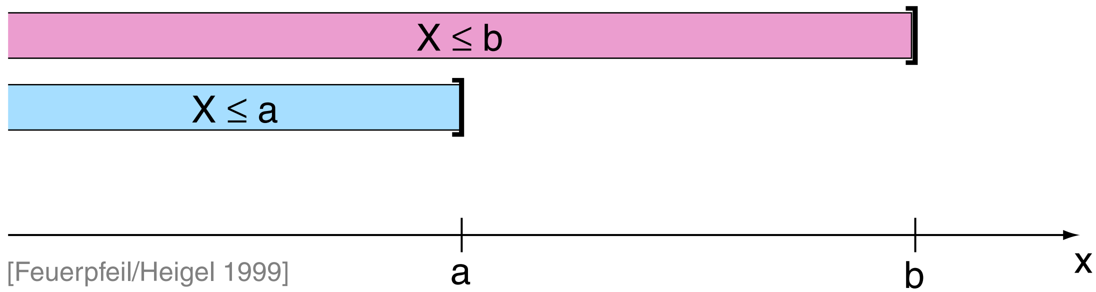
$$P(X = x_i) \quad = \quad F(x_i) - F(x_{i-1})\ .$$

- Die Verteilungsfunktion erhält man aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung durch Addition aufeinanderfolgender Werte der Wahrscheinlichkeitsverteilung, ausgehend vom Anfangspunkt x_1 bis zum vorgegebenen Endpunkt x_i:

$$F(x_i) \quad = \quad \sum_{j=1}^{i} P(X = x_j)\ .$$

Verteilungsfunktionen

Eigenschaften

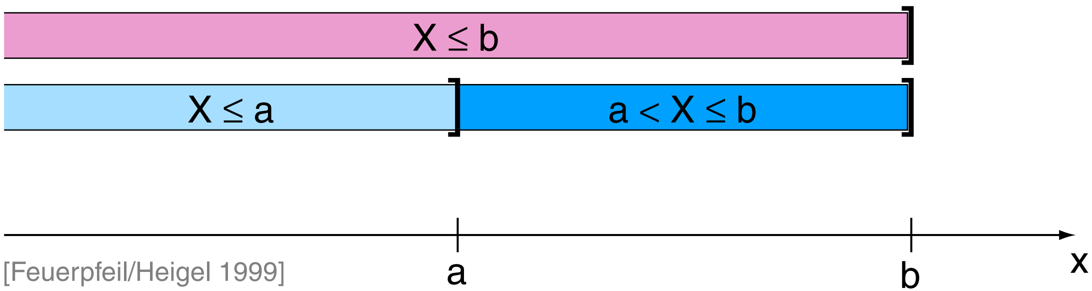


[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Seien $X \leq a$: $\{\omega : X(\omega) \leq a\} \subseteq \Omega$ und $X \leq b$: $\{\omega : X(\omega) \leq b\} \subseteq \Omega$ Ereignisse.
  Die Ereignisse, dass eine auf Ω definierte Zufallsgröße X höchstens den Wert a (b) annimmt.

Verteilungsfunktionen

Eigenschaften



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Seien $X \leq a$: $\{\omega : X(\omega) \leq a\} \subseteq \Omega$ und $X \leq b$: $\{\omega : X(\omega) \leq b\} \subseteq \Omega$ Ereignisse.
  Die Ereignisse, dass eine auf Ω definierte Zufallsgröße X höchstens den Wert a (b) annimmt.

- $\{\omega : a < X(\omega) \leq b\} \subseteq \Omega$ beschreibt analog das Ereignis $a < X \leq b$.

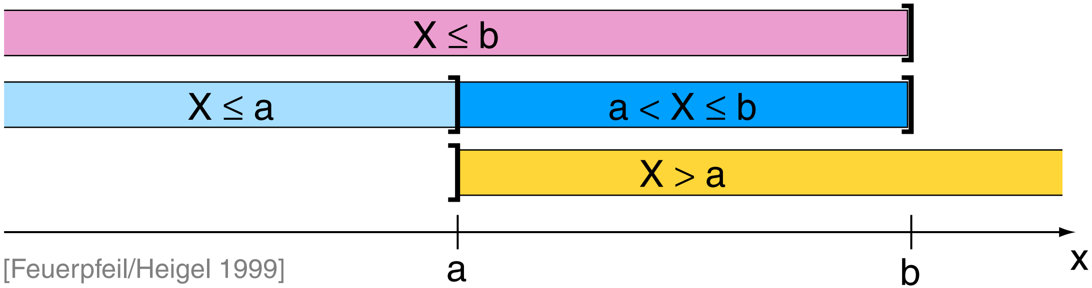
- Das Ereignis $X \leq b$ lässt sich aus $X \leq a$ und $a < X \leq b$ zusammensetzen:

$$P(X \leq b) \;=\; P(X \leq a) + P(a < X \leq b) \quad \text{(Additionsregel)}$$

so dass

$$P(a < X \leq b) \;=\; P(X \leq b) - P(X \leq a) \;=\; F(b) - F(a)\ .$$

Verteilungsfunktionen
Eigenschaften



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Seien $X \leq a$: $\{\omega : X(\omega) \leq a\} \subseteq \Omega$ und $X \leq b$: $\{\omega : X(\omega) \leq b\} \subseteq \Omega$ Ereignisse.
  Die Ereignisse, dass eine auf Ω definierte Zufallsgröße X höchstens den Wert a (b) annimmt.

- $\{\omega : a < X(\omega) \leq b\} \subseteq \Omega$ beschreibt analog das Ereignis $a < X \leq b$.

- Das Ereignis $X \leq b$ lässt sich aus $X \leq a$ und $a < X \leq b$ zusammensetzen:

$$P(X \leq b) \;=\; P(X \leq a) + P(a < X \leq b) \qquad \text{(Additionsregel)}$$

  so dass

$$P(a < X \leq b) \;=\; P(X \leq b) - P(X \leq a) \;=\; F(b) - F(a)\ .$$

- Außerdem gilt

$$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)\ ,$$

  da $X > a$ das Gegenereignis von $X \leq a$ ist.

Verteilungsfunktionen

Zusammen mit Monotonie und Stetigkeit erhält man

Satz 4 (Eigenschaften der Verteilungsfunktion)

Die Verteilungsfunktion F einer Zufallsgröße X mit Wertemenge $W = \{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$ ist eine monoton steigende, rechtsseitig stetige *Treppenfunktion* mit den *Sprungstellen* x_1, x_2, ..., x_k und den *Sprunghöhen* $P(X = x_1)$, $P(X = x_2)$, ..., $P(X = x_k)$. Die wichtigsten Eigenschaften der Verteilungsfunktion F sind:

$$\begin{aligned} P(X > a) &= 1 - F(a) \;, \\ P(a < X \leq b) &= F(b) - F(a) \;, \\ P(X = x_{i+1}) &= F(x_{i+1}) - F(x_i) \;. \end{aligned}$$

Bemerkung:

- Die Formeln zeigen, dass sich Berechnungen von Wahrscheinlichkeiten von durch Intervallen dargestellten Ereignissen leichter mit der Verteilungsfunktion durchführen lassen, als mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Lebensversicherung

- Versicherungsprämien hängen von Risikogruppen (u.a. Geschlecht, Alter) ab.
- Wie wahrscheinlich stirbt eine 50 Jahre alte Person im Alter von 60 bis 65 vollen Jahren?

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Lebensversicherung

- Versicherungsprämien hängen von Risikogruppen (u.a. Geschlecht, Alter) ab.
- Wie wahrscheinlich stirbt eine 50 Jahre alte Person im Alter von 60 bis 65 vollen Jahren?

Sterbetafel Deutschland 2018/20:

Vollendetes Lebensjahr	**Überlebende** weiblich	männlich
⋮		
49	98.006	96.561
50	97.841	96.277
51	97.661	95.968
52	97.458	95.624
53	97.243	95.242
54	97.002	94.812
55	96.735	94.338
56	96.434	93.801
57	96.108	93.207
58	95.747	92.548
59	95.347	91.833
60	94.905	91.035
61	94.418	90.165
62	93.891	89.210
63	93.316	88.162
64	92.685	87.020
65	91.999	85.790
66	91.261	84.473
⋮		

[Statistisches Bundesamt]

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Lebensversicherung

- Versicherungsprämien hängen von Risikogruppen (u.a. Geschlecht, Alter) ab.
- Wie wahrscheinlich stirbt eine 50 Jahre alte Person im Alter von 60 bis 65 vollen Jahren?
- Wahrscheinlichkeit, dass das Sterbealter X bzw. Y eines/r 50-jährigen mindestens 66 Jahre ist:

$$P(X \geq 66) = \frac{91.261}{97.841} \text{ bzw. } P(Y \geq 66) = \frac{84.473}{96.277} \,.$$

- Werte der Verteilungsfunktion für $X, Y \leq 65$:

$F_X(65) = 1 - P(X \geq 66)$ bzw. $F_Y(65)$ analog

Sterbetafel Deutschland 2018/20:

Vollendetes Lebensjahr	**Überlebende** weiblich	**Überlebende** männlich
⋮		
49	98.006	96.561
50	97.841	96.277
51	97.661	95.968
52	97.458	95.624
53	97.243	95.242
54	97.002	94.812
55	96.735	94.338
56	96.434	93.801
57	96.108	93.207
58	95.747	92.548
59	95.347	91.833
60	94.905	91.035
61	94.418	90.165
62	93.891	89.210
63	93.316	88.162
64	92.685	87.020
65	91.999	85.790
66	91.261	84.473
⋮		

[Statistisches Bundesamt]

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Lebensversicherung

- Versicherungsprämien hängen von Risikogruppen (u.a. Geschlecht, Alter) ab.
- Wie wahrscheinlich stirbt eine 50 Jahre alte Person im Alter von 60 bis 65 vollen Jahren?
- Wahrscheinlichkeit, dass das Sterbealter X bzw. Y eines/r 50-jährigen mindestens 66 Jahre ist:

$$P(X \geq 66) = \frac{91.261}{97.841} \text{ bzw. } P(Y \geq 66) = \frac{84.473}{96.277}\,.$$

- Werte der Verteilungsfunktion für $X, Y \leq 65$:

$F_X(65) = 1 - P(X \geq 66)$ bzw. $F_Y(65)$ analog

- $$\begin{aligned} P(60 \leq X \leq 65) &= F_X(65) - F_X(59) \\ &= 1 - \frac{91.999}{97.841} - \left(1 - \frac{95.347}{97.841}\right) \\ &\approx 3.4\% \end{aligned}$$

- $P(60 \leq Y \leq 65) \approx 6.3\%$

Sterbetafel Deutschland 2018/20:

Vollendetes Lebensjahr	**Überlebende** weiblich	männlich
⋮		
49	98.006	96.561
50	97.841	96.277
51	97.661	95.968
52	97.458	95.624
53	97.243	95.242
54	97.002	94.812
55	96.735	94.338
56	96.434	93.801
57	96.108	93.207
58	95.747	92.548
59	95.347	91.833
60	94.905	91.035
61	94.418	90.165
62	93.891	89.210
63	93.316	88.162
64	92.685	87.020
65	91.999	85.790
66	91.261	84.473
⋮		

[Statistisches Bundesamt]

Bemerkungen:

- Eine Sterbetafel zählt, wie viele von 100.000 Neugeborenen ein bestimmtes Mindestalter in vollen Jahren erreichen.

Kapitel PTS:V

V. Zufallsgrößen und Maßzahlen

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Französisches Roulette

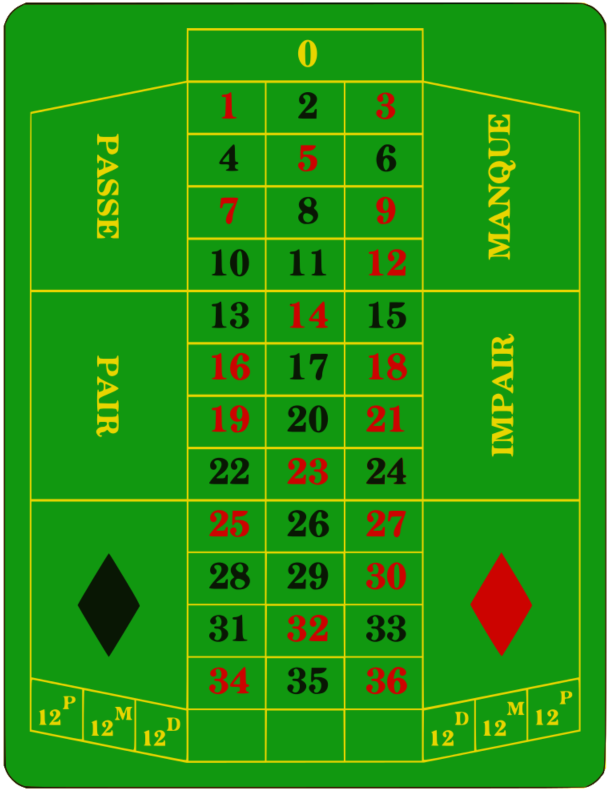
- Eine Frau setzt eine Geldeinheit auf $A =$ „1. Dutzend“, ihr Mann eine auf $B =$ „1. Querreihe“.

- Reingewinn für Ereignis A als Zufallsgröße:

$$X : \omega \mapsto \begin{cases} 2 & \text{für } \omega \in \{1; 2; \ldots; 12\} = A, \\ -1 & \text{für } \omega \in \{0; 13; \ldots; 36\} = \bar{A}. \end{cases}$$

- Reingewinn für Ereignis B als Zufallsgröße:

$$Y : \omega \mapsto \begin{cases} 11 & \text{für } \omega \in \{1; 2; 3\} = B, \\ -1 & \text{für } \omega \in \{0; 4; \ldots; 36\} = \bar{B}. \end{cases}$$



- Fallunterscheidung:

  1. Beide nehmen an derselben Ausspielung teil.
  2. Beide nehmen an unterschiedlichen Ausspielungen teil.

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Französisches Roulette (Fortsetzung)

Fall 1 (selbe Ausspielung): sie setzt eine Geldeinheit auf A, er auf B:

$A =$ „1. Dutzend“, $B =$ „1. Querreihe“; X ist Reingewinn für A, Y Reingewinn für B.

Ereignis	**Mengendarstellung**	**Wahrscheinlichkeit**
„Beide verlieren“ ($X = -1 \wedge Y = -1$)	$\omega \in \{0; 13; \ldots; 36\} = \bar{A} \cap \bar{B}$	$P(X = -1 \wedge Y = -1) = \frac{25}{37}$
„Sie gewinnt, er verliert“ ($X = 2 \wedge Y = -1$)	$\omega \in \{4; 5; \ldots; 12\} = A \cap \bar{B}$	$P(X = 2 \wedge Y = -1) = \frac{9}{37}$
„Sie verliert, er gewinnt“ ($X = -1 \wedge Y = 11$)	$\omega \in \emptyset = \bar{A} \cap B$	$P(X = -1 \wedge Y = 11) = 0$
„Beide gewinnen“ ($X = 2 \wedge Y = 11$)	$\omega \in \{1; 2; 3\} = A \cap B$	$P(X = 2 \wedge Y = 11) = \frac{3}{37}$

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Französisches Roulette (Fortsetzung)

Fall 1 (selbe Ausspielung): sie setzt eine Geldeinheit auf A, er auf B:
$A =$ „1. Dutzend“, $B =$ „1. Querreihe“; X ist Reingewinn für A, Y Reingewinn für B.

- Verliert der Mann ($Y = -1$), kann die Frau entweder auch verlieren ($X = -1 \wedge Y = -1$) oder gewinnen ($X = 2 \wedge Y = -1$).

- Da diese beiden Ereignisse unvereinbar sind, gilt:

$$P(Y = -1) \; = \; P(X = -1 \wedge Y = -1) + P(X = 2 \wedge Y = -1) \; = \; \frac{25}{37} + \frac{9}{37} \; = \; \frac{34}{37}\,.$$

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Französisches Roulette (Fortsetzung)

Fall 1 (selbe Ausspielung): sie setzt eine Geldeinheit auf A, er auf B:
$A =$ „1. Dutzend“, $B =$ „1. Querreihe“; X ist Reingewinn für A, Y Reingewinn für B.

- Verliert der Mann ($Y = -1$), kann die Frau entweder auch verlieren ($X = -1 \wedge Y = -1$) oder gewinnen ($X = 2 \wedge Y = -1$).
- Da diese beiden Ereignisse unvereinbar sind, gilt:

$$P(Y = -1) \;=\; P(X = -1 \wedge Y = -1) + P(X = 2 \wedge Y = -1) \;=\; \frac{25}{37} + \frac{9}{37} \;=\; \frac{34}{37}\,.$$

- Analoge Überlegungen für $P(Y = 11)$, $P(X = -1)$ und $P(X = 2)$ führen zur Vierfeldertafel:

y_j \ x_i	-1	2	$P(Y = y_j)$
-1	$\frac{25}{37}$	$\frac{9}{37}$	$\frac{34}{37}$
11	0	$\frac{3}{37}$	$\frac{3}{37}$
$P(X = x_i)$	$\frac{25}{37}$	$\frac{12}{37}$	1

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Französisches Roulette (Fortsetzung)

Fall 1 (selbe Ausspielung): sie setzt eine Geldeinheit auf A, er auf B:
$A =$ „1. Dutzend“, $B =$ „1. Querreihe“; X ist Reingewinn für A, Y Reingewinn für B.

- Da $P(X = -1 \mid Y = 11) \neq P(X = -1)$, sind die Ereignisse $X = -1$ und $Y = 11$ abhängig. Dies ergibt sich auch aus

$$P(X = -1 \wedge Y = 11) = 0 \quad \neq \quad P(X = -1) \cdot P(Y = 11) = \frac{25}{37} \cdot \frac{3}{37}\,.$$

- Abhängigkeit von $X = -1$ und $Y = 11$ anschaulich: Wenn die Frau verliert ($\omega \in \{0; 13; \ldots; 36\}$), so verliert wegen $\{1; 2; 3\} \subset \{1; 2; \ldots; 12\}$ auch der Mann.

- Das Ereignis $X = -1$ schließt also das Ereignis $Y = 11$ aus.

➜ In diesem Fall werden X und Y als *abhängig* bezeichnet.

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Französisches Roulette (Fortsetzung)

Fall 2 (unterschiedliche Ausspielung): sie setzt eine Geldeinheit auf A, er auf B:
$A =$ „1. Dutzend“, $B =$ „1. Querreihe“; X ist Reingewinn für A, Y Reingewinn für B.

- Wegen der unterschiedlichen Ausspielungen sind A und B unabhängig.
  Das gilt auch für A und $\bar{B}$, $\bar{A}$ und B, sowie $\bar{A}$ und $\bar{B}$ (Unabhängigkeit von Gegenereignissen).

- Es ergibt sich folgende Vierfeldertafel / Multiplikationstabelle:

y_j \ x_i	-1	2	$P(Y = y_j)$
-1	$\frac{25}{37} \cdot \frac{34}{37}$	$\frac{12}{37} \cdot \frac{34}{37}$	$\frac{34}{37}$
11	$\frac{25}{37} \cdot \frac{3}{37}$	$\frac{12}{37} \cdot \frac{3}{37}$	$\frac{3}{37}$
$P(X = x_i)$	$\frac{25}{37}$	$\frac{12}{37}$	1

- Die Summe der jeweiligen Randwahrscheinlichkeiten ist 1.
  Ein Hinweis, aber kein Beweis, dass kein Rechenfehler vorliegt.

➜ In diesem Fall werden X und Y als *unabhängig* bezeichnet.

Multiple Zufallsgrößen

Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung

- Es liegt nahe, den Begriff der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße auf zwei verschiedene Zufallsgrößen X und Y auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ zu übertragen.

- Zwei Zufallsgrößen X und Y auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ werden als gleich bezeichnet, wenn sie als Funktionen von ω gleich sind:

$$X(\omega) = Y(\omega) \text{ für jedes } \omega \in \Omega$$

Multiple Zufallsgrößen

Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung

- Es liegt nahe, den Begriff der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße auf zwei verschiedene Zufallsgrößen X und Y auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ zu übertragen.
- Zwei Zufallsgrößen X und Y auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ werden als gleich bezeichnet, wenn sie als Funktionen von ω gleich sind:

$$X(\omega) = Y(\omega) \text{ für jedes } \omega \in \Omega$$

Beispiel: Zweifacher Laplace-Würfelwurf.

- $\Omega = \{(i; k) : i, k \in \{1; 2; \ldots; 6\}\}$
- X sei die Augenzahl des ersten, Y die des zweiten Wurfs
- $X(\omega) \neq Y(\omega)$, da im Allgemeinen $i \neq k$ ist
- X und Y haben jedoch die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung
  Gleichheit der Wahrscheinlichkeitsverteilungen bedeutet nicht Gleichheit von Zufallsgrößen.

Multiple Zufallsgrößen

Definition 5 (Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung)

Seien X und Y zwei Zufallsgrößen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ mit $W_X = \{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$ und $W_Y = \{y_1; y_2; \ldots; y_l\}$. Dann heißt die Funktion

$$P_{X,Y} : (x_i; y_j) \mapsto P(X = x_i \wedge Y = y_j)$$

mit $(x_i; y_j) \in W_X \times W_Y$ gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und Y.

Multiple Zufallsgrößen

Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung

- Zur Beschreibung der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_{X,Y}$ zweier Zufallsgrößen X und Y kann eine Mehrfeldertafel verwendet werden.
  Die Zahlen in den Feldern sind die Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i \wedge Y = y_j)$.

Multiple Zufallsgrößen

Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung

- Zur Beschreibung der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_{X,Y}$ zweier Zufallsgrößen X und Y kann eine Mehrfeldertafel verwendet werden.
  Die Zahlen in den Feldern sind die Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i \wedge Y = y_j)$.

Berechnung der Einzelverteilungen P_X und P_Y aus $P_{X,Y}$:

- $X = x_i$ tritt genau dann ein, wenn eines der paarweise unvereinbaren Ereignisse $X = x_i \wedge Y = y_1, \;\ldots,\; X = x_i \wedge Y = y_l$ eintritt (analog für $Y = y_j$).

- Daraus folgt:

$$P(X = x_i) \;=\; \sum_{j=1}^{l} P(X = x_i \wedge Y = y_j) \qquad \text{(Spaltensumme)},$$

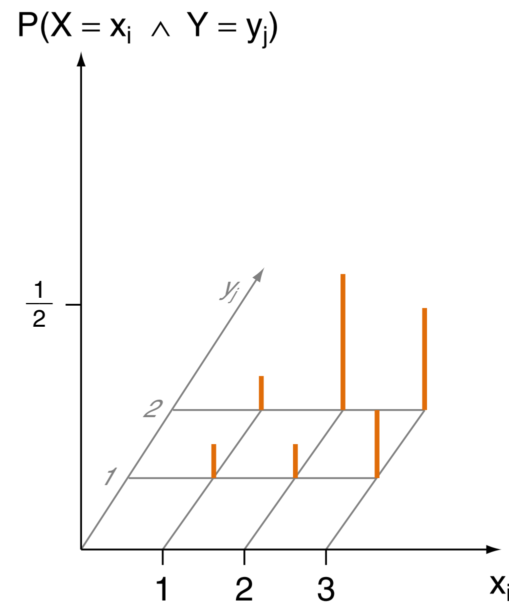
$$P(Y = y_j) \;=\; \sum_{i=1}^{k} P(X = x_i \wedge Y = y_j) \qquad \text{(Zeilensumme)}.$$

- Diese an den Rändern der Mehrfeldertafel stehenden Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$ und $P(Y = y_j)$ heißen Randwahrscheinlichkeiten.
  Die Summen der Einzelverteilungen muss jeweils 1 ergeben.

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung als Mehrfeldertafel

y_j \ x_i	1	2	3
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

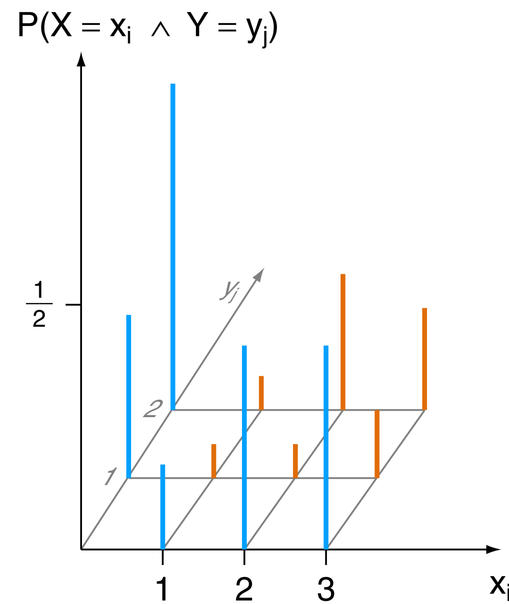


[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung als Mehrfeldertafel

$y_j \backslash x_i$	1	2	3	$P(Y = y_i)$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	1



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Einzelverteilung für X (Spaltensummen):

- $P(X = 1) = P(X = 1 \wedge Y = 1) + P(X = 1 \wedge Y = 2) = \frac{1}{6}$
- $P(X = 2) = P(X = 2 \wedge Y = 1) + P(X = 2 \wedge Y = 2) = \frac{5}{12}$
- $P(X = 3) = P(X = 3 \wedge Y = 1) + P(X = 3 \wedge Y = 2) = \frac{5}{12}$

Einzelverteilung für Y (Zeilensummen):

- $P(Y = 1) = P(X = 1 \wedge Y = 1) + P(X = 2 \wedge Y = 1) + P(X = 3 \wedge Y = 1) = \frac{1}{3}$
- $P(Y = 2) = P(X = 1 \wedge Y = 2) + P(X = 2 \wedge Y = 2) + P(X = 3 \wedge Y = 2) = \frac{2}{3}$

Multiple Zufallsgrößen

Definition 6 (Abhängigkeit und Unabhängigkeit von zwei Zufallsgrößen)

Zwei auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ definierte Zufallsgrößen X und Y mit den Wertemengen $W_X = \{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$ und $W_Y = \{y_1; y_2; \ldots; y_l\}$ heißen stochastisch unabhängig, wenn für *alle* $(x_i; y_j) \in W_X \times W_Y$ die Multiplikationsregel

$$P(X = x_i \wedge Y = y_j) \;=\; P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$$

gilt. Sonst heißen sie stochastisch abhängig.

Bemerkungen:

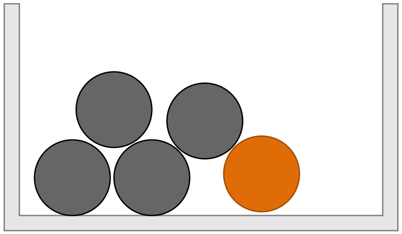
- Dieselbe intuitive Vorstellung wie bei der Unabhängigkeit von Ereignissen führt zur Definition der Unabhängigkeit zweier Zufallsgrößen.
- Die Unabhängigkeit von mehr als zwei Zufallsgrößen lässt sich analog definieren. Für drei Zufallsgrößen muss also gelten:

$$P(X = x_i \wedge Y = y_j \wedge Z = z_k) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) \cdot P(Z = z_k) \quad \text{für alle } x_i, y_j, z_k.$$

- Zwei Zufallsgrößen X und Y werden als unabhängig bezeichnet, wenn sie ihre Werte unabhängig voneinander annehmen können, d.h. wenn die durch $X = x_i$ und $Y = y_j$ beschriebenen Ereignisse für alle i, j unabhängig sind.
- Die Unabhängigkeit von Zufallsgrößen wird in Anwendungen meist durch Überlegungen begründet, die auf dem umgangssprachlichen Begriff der Unabhängigkeit beruhen. Beispielsweise können Zufallsgrößen, die zu unabhängig voneinander durchgeführten Teilexperimenten eines Gesamtzufallsexperiments gehören, üblicherweise als unabhängig im Sinne der Definition angesehen werden.
- Das obige Roulette-Beispiel zeigt Beispiele für abhängige und unabhängige Zufallsgrößen.
- Die Mehrfeldertafel bei zwei unabhängigen Zufallsgrößen ist eine Multiplikationstabelle.
- Auch bei Zufallsgrößen wird oft von (Un-)Abhängigkeit gesprochen, wenn im Zusammenhang klar ist, dass stochastische (Un-)Abhängigkeit gemeint ist.
- Urnenexperimente werden oft zur Veranschaulichung der Begriffe der Abhängigkeit und Unabhängigkeit genutzt.

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Ziehung aus einer Urne

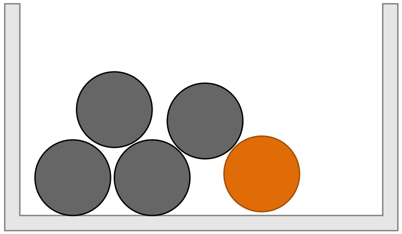


[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Aus einer Urne mit einer roten und vier schwarzen Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln gezogen.
- Sei X die Zahl der roten Kugeln beim ersten Zug und Y die beim zweiten.

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Ziehung aus einer Urne

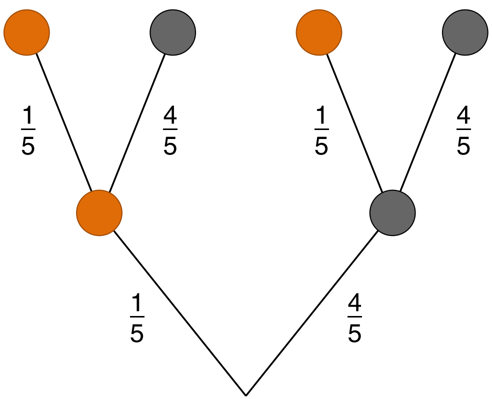


[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Aus einer Urne mit einer roten und vier schwarzen Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln gezogen.
- Sei X die Zahl der roten Kugeln beim ersten Zug und Y die beim zweiten.

Fall 1: Ziehung mit Zurücklegen

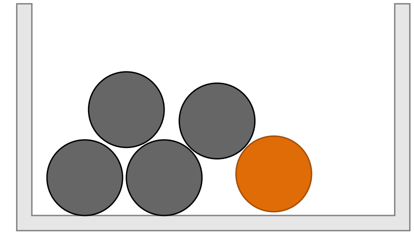
- Herleitung der Mehrfeldertabelle für $W_X = W_Y = \{0; 1\}$:



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Ziehung aus einer Urne

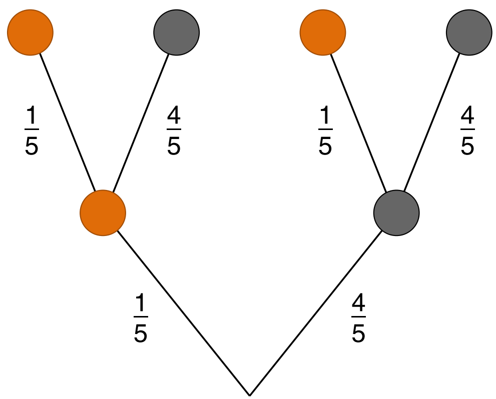


[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Aus einer Urne mit einer roten und vier schwarzen Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln gezogen.
- Sei X die Zahl der roten Kugeln beim ersten Zug und Y die beim zweiten.

Fall 1: Ziehung mit Zurücklegen

- Herleitung der Mehrfeldertabelle für $W_X = W_Y = \{0; 1\}$:



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

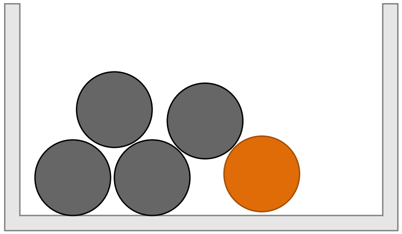
➜

y_j \ x_i	0	1	$P(Y = y_j)$
0	$\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5}$	$\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$
1	$\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

- Es gilt hier die Multiplikationsregel für alle Wertepaare.
  Nach dem Zurücklegen der ersten gezogenen Kugel wird die Urne gemischt.

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Ziehung aus einer Urne

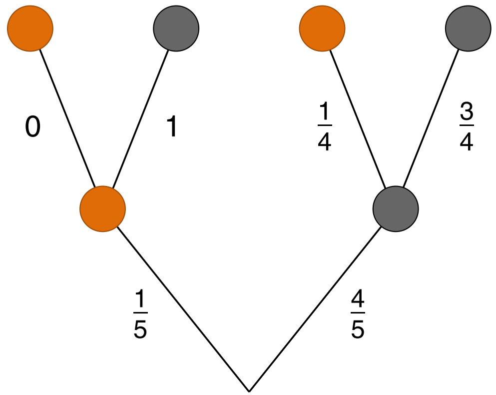


[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Aus einer Urne mit einer roten und vier schwarzen Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln gezogen.
- Sei X die Zahl der roten Kugeln beim ersten Zug und Y die beim zweiten.

Fall 2: Ziehung ohne Zurücklegen

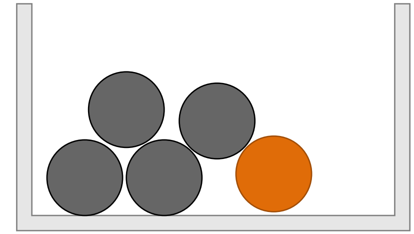
- Herleitung der Mehrfeldertabelle für $W_X = W_Y = \{0; 1\}$:



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Ziehung aus einer Urne

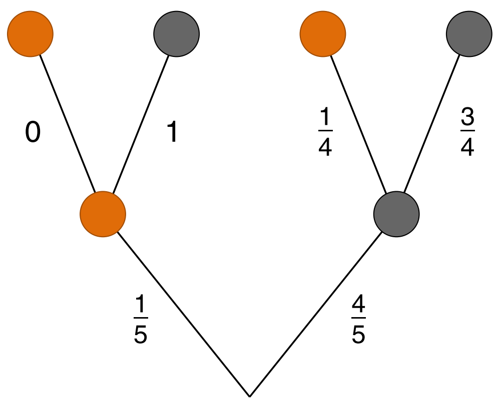


[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Aus einer Urne mit einer roten und vier schwarzen Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln gezogen.
- Sei X die Zahl der roten Kugeln beim ersten Zug und Y die beim zweiten.

Fall 2: Ziehung ohne Zurücklegen

- Herleitung der Mehrfeldertabelle für $W_X = W_Y = \{0; 1\}$:



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

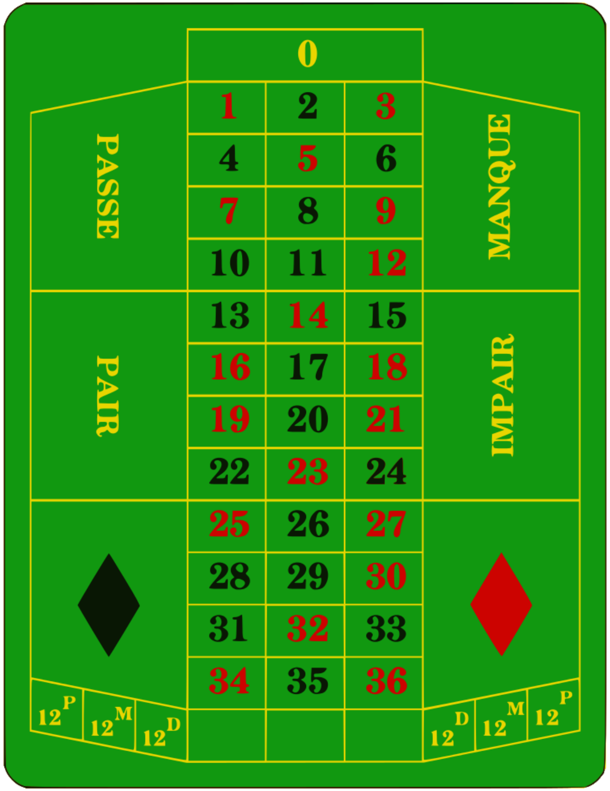
$\rightarrow$

$y_j \setminus x_i$	0	1	$P(Y = y_j)$
0	$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4}$	$\frac{1}{5} \cdot 1$	$\frac{4}{5}$
1	$\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{5} \cdot 0$	$\frac{1}{5}$
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

- Z.B. verletzt $P(X = 0 \wedge Y = 0) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \neq \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = P(X = 0) \cdot P(Y = 0)$ die Multiplikationsregel. Außerdem: das Ziehen einer roten Kugel im ersten Zug.

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Französisches Roulette



- Jemand setzt 1 Euro auf $A =$ „1. Dutzend“
- Reingewinn X in Euro (Netto):

$$X : \omega \mapsto \begin{cases} 2 & \text{für } \omega \in \{1; 2; \ldots; 12\} = A, \\ -1 & \text{für } \omega \in \{0; 13; \ldots; 36\} = \bar{A}. \end{cases}$$

- Auszahlung Y in Euro (Brutto):

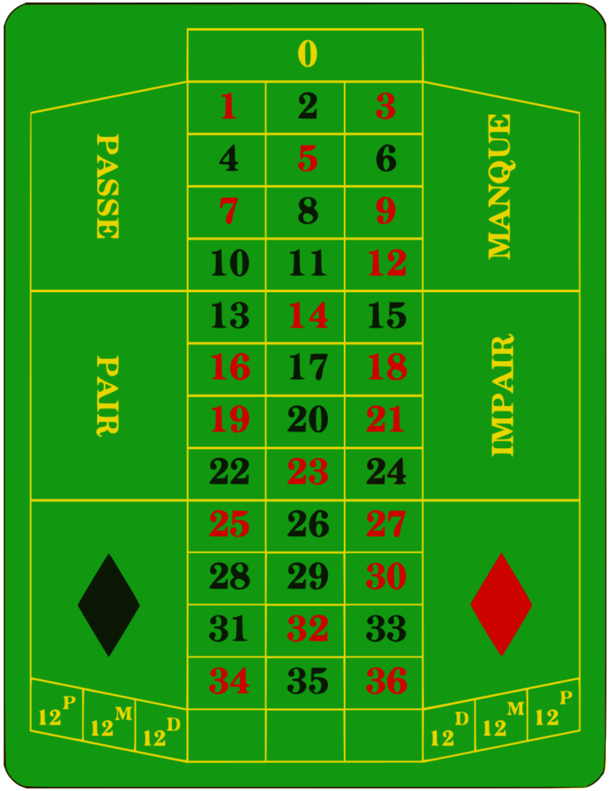
$$Y : \omega \mapsto \begin{cases} 3 & \text{für } \omega \in \{1; 2; \ldots; 12\} = A, \\ 0 & \text{für } \omega \in \{0; 13; \ldots; 36\} = \bar{A}. \end{cases}$$

- Es gilt: $Y(\omega) = X(\omega) + 1$ bzw. $Y = X + 1$
- Sei Z die Auszahlung in Cent, dann gilt:

$Z(\omega) = 100 \cdot Y(\omega) = 100 \cdot X(\omega) + 100$ bzw. kurz $Z = 100 \cdot Y = 100 \cdot X + 100$

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Französisches Roulette



- Jemand setzt 1 Euro auf $A =$ „1. Dutzend“
- Reingewinn X in Euro (Netto):

$$X : \omega \mapsto \begin{cases} 2 & \text{für } \omega \in \{1; 2; \ldots; 12\} = A, \\ -1 & \text{für } \omega \in \{0; 13; \ldots; 36\} = \bar{A}. \end{cases}$$

- Auszahlung Y in Euro (Brutto):

$$Y : \omega \mapsto \begin{cases} 3 & \text{für } \omega \in \{1; 2; \ldots; 12\} = A, \\ 0 & \text{für } \omega \in \{0; 13; \ldots; 36\} = \bar{A}. \end{cases}$$

- Es gilt: $Y(\omega) = X(\omega) + 1$ bzw. $Y = X + 1$
- Sei Z die Auszahlung in Cent, dann gilt:

$Z(\omega) = 100 \cdot Y(\omega) = 100 \cdot X(\omega) + 100$ bzw. kurz $Z = 100 \cdot Y = 100 \cdot X + 100$

- Mit X sind auch Y und Z Zufallsgrößen:

$$P(X = 2) = P(Y = 3) = P(Z = 300) = \frac{12}{37}$$

$$P(X = -1) = P(Y = 0) = P(Z = 0) = \frac{25}{37}$$

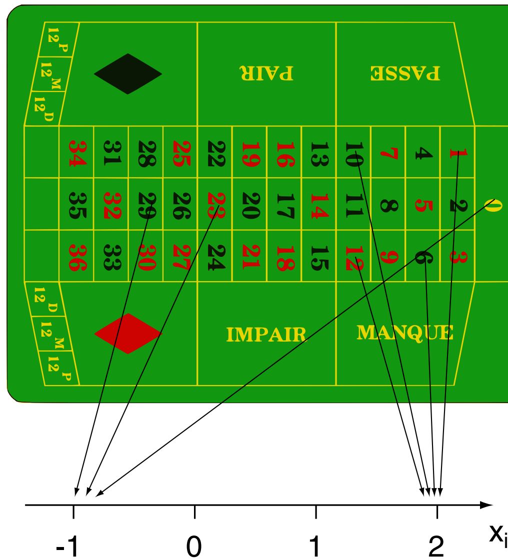
Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Französisches Roulette

Ergebnisraum:

$\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_m\}$

ω_i, ($i \in \{1; 2; \ldots; m\}$), sind die möglichen Spielergebnisse



Zufallsgröße X

X ist der Reingewinn in Euro beim Setzen auf „1. Dutzend“.

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

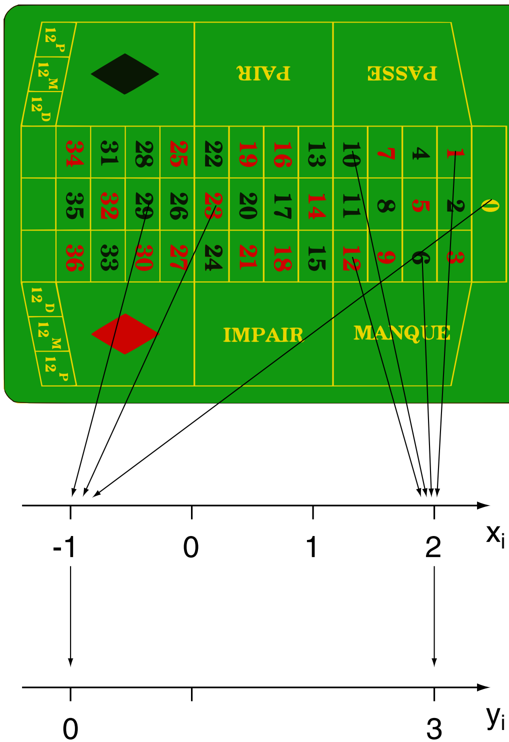
Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Französisches Roulette

Ergebnisraum:

$\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_m\}$

ω_i, ($i \in \{1; 2; \ldots; m\}$), sind die möglichen Spielergebnisse



Zufallsgröße X

X ist der Reingewinn in Euro beim Setzen auf „1. Dutzend“.

Zufallsgröße Y

Y ist der Bruttogewinn in Euro beim Setzen auf „1. Dutzend“.

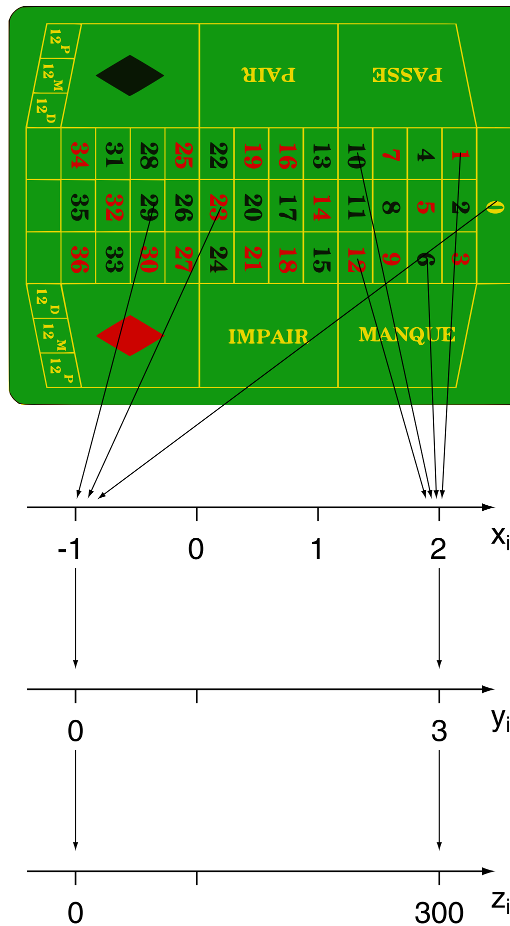
[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Französisches Roulette

Ergebnisraum:
$\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_m\}$

ω_i, ($i \in \{1; 2; \ldots; m\}$), sind die möglichen Spielergebnisse



Zufallsgröße X

X ist der Reingewinn in Euro beim Setzen auf „1. Dutzend“.

Zufallsgröße Y

Y ist der Bruttogewinn in Euro beim Setzen auf „1. Dutzend“.

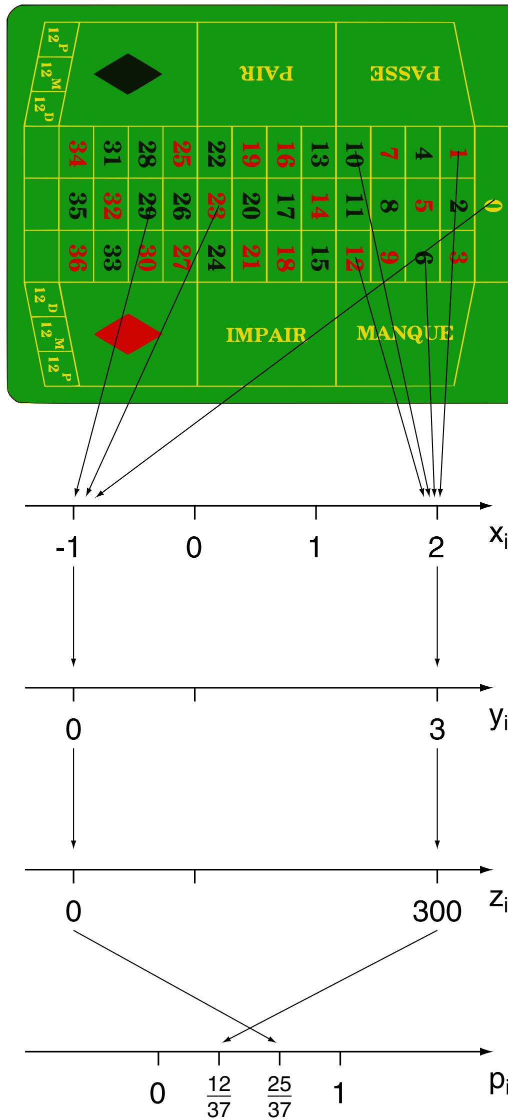
Zufallsgröße Z

Z ist der Bruttogewinn in Cent beim Setzen auf „1. Dutzend“.

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Französisches Roulette



Ergebnisraum:
$\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_m\}$

ω_i, ($i \in \{1; 2; \ldots; m\}$), sind die möglichen Spielergebnisse

Zufallsgröße X

X ist der Reingewinn in Euro beim Setzen auf „1. Dutzend“.

Zufallsgröße Y

Y ist der Bruttogewinn in Euro beim Setzen auf „1. Dutzend“.

Zufallsgröße Z

Z ist der Bruttogewinn in Cent beim Setzen auf „1. Dutzend“.

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Multiple Zufallsgrößen

Verallgemeinerung

- Mit $X(\omega)$ ist auch
$$Y(\omega) \;=\; a \cdot X(\omega) + b \quad \text{für} \quad a, b \in \mathbf{R}$$
eine Funktion auf Ω und damit auch eine Zufallsgröße auf Ω.

- Allgemein ist mit $X(\omega)$ jede reellwertige Funktion g mit
$$Y(\omega) = g(X(\omega)), \quad \text{bzw. kurz} \quad Y = g(X)$$
ebenfalls eine Zufallsgröße auf Ω.

- Das Urbild von g ist die Wertemenge W_X der Zufallsgröße X, die Bildmenge die Wertemenge $W_Y = \{y_j : y_j = g(x_i)\}$ der Zufallsgröße Y.

- Dabei können verschiedene x_i gleiche Bildpunkte y_j abgebildet werden.
g ist surjektiv, aber nicht unbedingt injektiv.

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Würfeln

- Ein Glücksspiel mit zwei Laplace-Würfeln verspricht bei 40 Cent Einsatz

3 Euro bei Augensumme 12,	1 Euro bei Augensumme 10,
2 Euro bei Augensumme 11,	0 Euro sonst.

- Die Zufallsgröße X auf $\Omega = \{(i;k) : i,k \in \{1;2;3;4;5;6\}\}$ kennzeichne die Augensumme; also $X((i;k)) = i + k$.

Multiple Zufallsgrößen
Beispiel: Würfeln

- Ein Glücksspiel mit zwei Laplace-Würfeln verspricht bei 40 Cent Einsatz

  3 Euro bei Augensumme 12, 1 Euro bei Augensumme 10,

  2 Euro bei Augensumme 11, 0 Euro sonst.

- Die Zufallsgröße X auf $\Omega = \{(i;k) : i,k \in \{1;2;3;4;5;6\}\}$ kennzeichne die Augensumme; also $X((i;k)) = i + k$.

- Seien Y der Brutto- und Z der Nettogewinn in Euro als Funktionen von X:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3
Z	$-0{,}4$	$-0{,}4$	$-0{,}4$	$-0{,}4$	$-0{,}4$	$-0{,}4$	$-0{,}4$	$-0{,}4$	$0{,}6$	$1{,}6$	$2{,}6$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Würfeln

- Ein Glücksspiel mit zwei Laplace-Würfeln verspricht bei 40 Cent Einsatz

  3 Euro bei Augensumme 12, 1 Euro bei Augensumme 10,

  2 Euro bei Augensumme 11, 0 Euro sonst.

- Die Zufallsgröße X auf $\Omega = \{(i;k) : i,k \in \{1;2;3;4;5;6\}\}$ kennzeichne die Augensumme; also $X((i;k)) = i + k$.

- Seien Y der Brutto- und Z der Nettogewinn in Euro als Funktionen von X:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3
Z	$-0{,}4$	$-0{,}4$	$-0{,}4$	$-0{,}4$	$-0{,}4$	$-0{,}4$	$-0{,}4$	$-0{,}4$	$0{,}6$	$1{,}6$	$2{,}6$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

- Abbildung der Wahrscheinlichkeitsverteilung für X auf Z:

  Einige x_i fallen auf $z_k = -0{,}4$ zusammen.

z_k	$-0{,}4$	$0{,}6$	$1{,}6$	$2{,}6$
$P(Z = z_k)$	$\frac{30}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Bemerkungen:

- Ob sich das Glücksspiel für die Bank lohnt bleibt bis zu diesem Punkt unklar. Mit Hilfe des Erwartungswerts kann dies geklärt werden.

Multiple Zufallsgrößen
Verallgemeinerung

Aus der Analysis: Wenn f und g reelle Funktionen einer reellen Variablen x aus einer gemeinsamen Definitionsmenge sind, dann beispielsweise auch:

$$f + g, \quad f - g, \quad f \cdot g \quad \text{und} \quad \frac{f}{g} \text{ für } g \neq 0 \,.$$

Satz 7 (Verknüpfung von Zufallsgrößen)

Sind X und Y Zufallsgrößen auf dem Ergebnisraum Ω (also auch Funktionen auf Ω), so gilt dies auch für $X + Y$, $X - Y$, $X \cdot Y$, $\frac{X}{Y}$ (für $Y \neq 0$) und $a \cdot X + b \cdot Y$ mit $a, b \in \mathbf{R}$.

Bemerkungen:

- Allgemein wird durch die Verknüpfung $g(X_1, X_2, \ldots, X_n) = Y$ der Zufallsgrößen X_i $(i \in \{1; 2; \ldots; n\})$ auf dem Ergebnisraum Ω eine neue Zufallsgröße Y gebildet, wenn g eine reelle Funktion der n Zufallsgrößen ist.

- Von besonderem Interesse in der Stochastik sind Summen von *unabhängigen* Zufallsgrößen und deren Wahrscheinlichkeitsverteilungen, wie schon beim Augensummenparadoxon gesehen. Ein anderes Beispiel ist das folgende einfache Modell zur Wachstumsverteilung von Lebewesen.

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Wachstumsverteilung

- Das Wachstum eines Lebewesens ist weitgehend durch seine Ernährung sowie den Sauerstoffgehalt und die Temperatur im Lebensbereich bestimmt.
- Jeder dieser Faktoren bewirkt Laplace-verteilt und unabhängig von den anderen eine Veränderung der Normkörperlänge um -2, -1, 0, 1, 2 Einheiten.
- Seien X, Y, Z unabhängige Zufallsgrößen mit gleichen Einzelverteilungen:

x_i	-2	-1	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

- Gesucht ist die Verteilung für die Veränderung der Körperlänge: $V = X + Y + Z$
- Analog zum Schema des Augensummenparadoxon ergibt sich:

  Vergleichen Sie die entsprechende Übungsaufgabe.

v_i	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	± 6
$P(V = v_i)$	$0{,}152$	$0{,}144$	$0{,}120$	$0{,}080$	$0{,}048$	$0{,}024$	$0{,}008$

Bemerkungen:

- Dieses die Wirklichkeit sehr vergröbernde Modell passt erstaunlich gut zur Verteilung, die man unter Annahme einer Normalverteilung bekommen würde.

Kapitel PTS:V

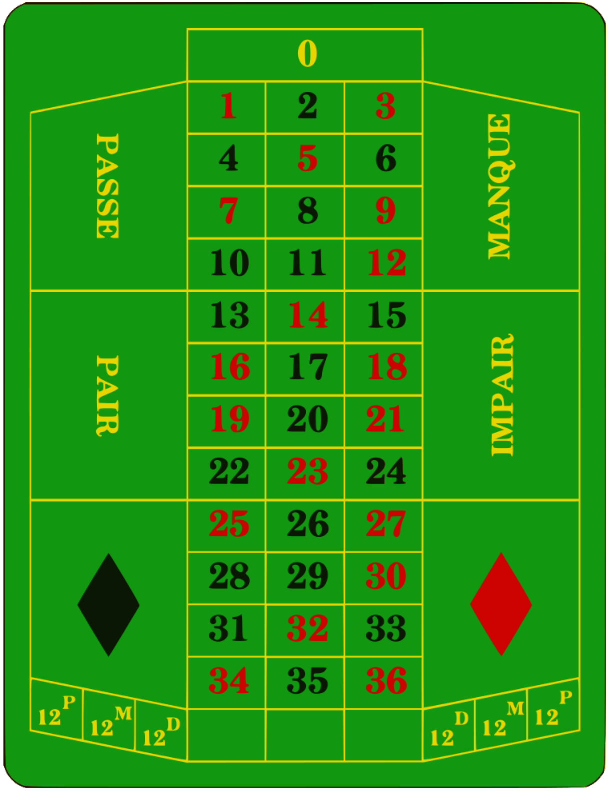
V. Zufallsgrößen und Maßzahlen

- Zufallsgrößen
- Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Verteilungsfunktionen
- Multiple Zufallsgrößen
- Erwartungswerte
- Varianz und Standardabweichung
- Das $\sqrt{n}$-Gesetz
- Schätzwerte für Erwartungswert und Standardabweichung

Erwartungswerte

Beispiel: Französisches Roulette

- Spielbanken erzielen Gewinne, weil die angebotenen Glücksspiele nicht „fair“ sind.



Erwartungswerte

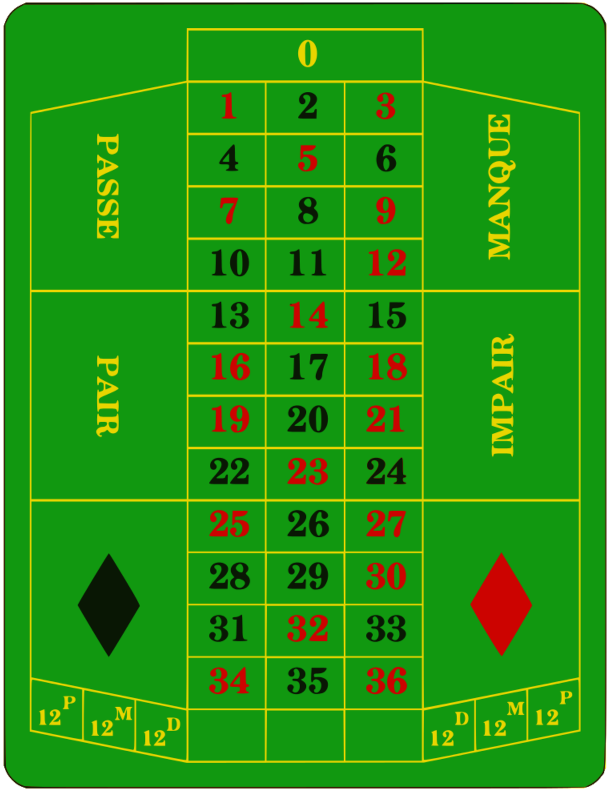
Beispiel: Französisches Roulette

- Spielbanken erzielen Gewinne, weil die angebotenen Glücksspiele nicht „fair“ sind.

- Bankgewinn bei Einsatz 1 Euros auf „Rot“:

$$X : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } \omega \in \{0; 2; \ldots; 35\}\ , \\ -1 & \text{für } \omega \in \{1; 3; \ldots; 36\}\ . \end{cases}$$

- $P(X = 1) = \frac{19}{37} > P(X = -1) = \frac{18}{37}$



Erwartungswerte

Beispiel: Französisches Roulette

- Spielbanken erzielen Gewinne, weil die angebotenen Glücksspiele nicht „fair“ sind.

- Bankgewinn bei Einsatz 1 Euros auf „Rot“:

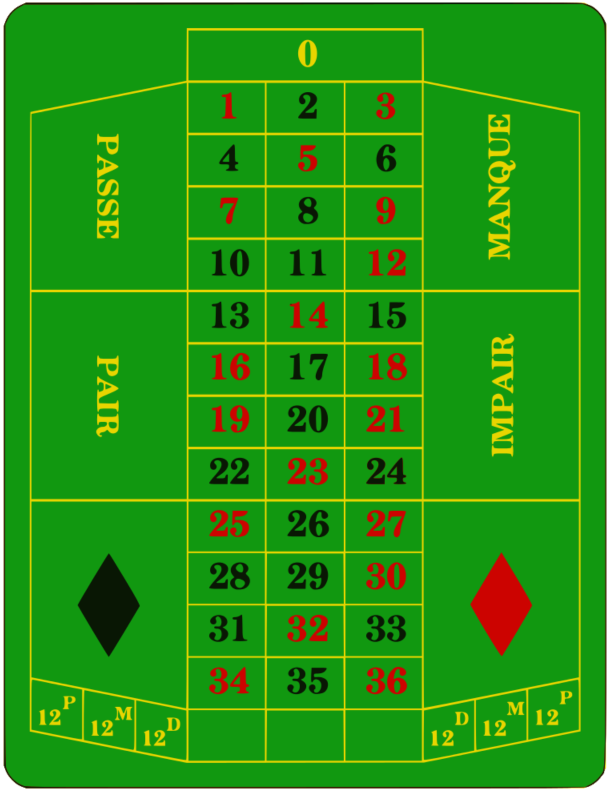
$$X : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } \omega \in \{0; 2; \ldots; 35\}\ , \\ -1 & \text{für } \omega \in \{1; 3; \ldots; 36\}\ . \end{cases}$$

- $P(X = 1) = \frac{19}{37} \ > \ P(X = -1) = \frac{18}{37}$

- Bei n Spielen gibt es n_1 Bankgewinne und n_2 Bankverluste mit $n = n_1 + n_2$.

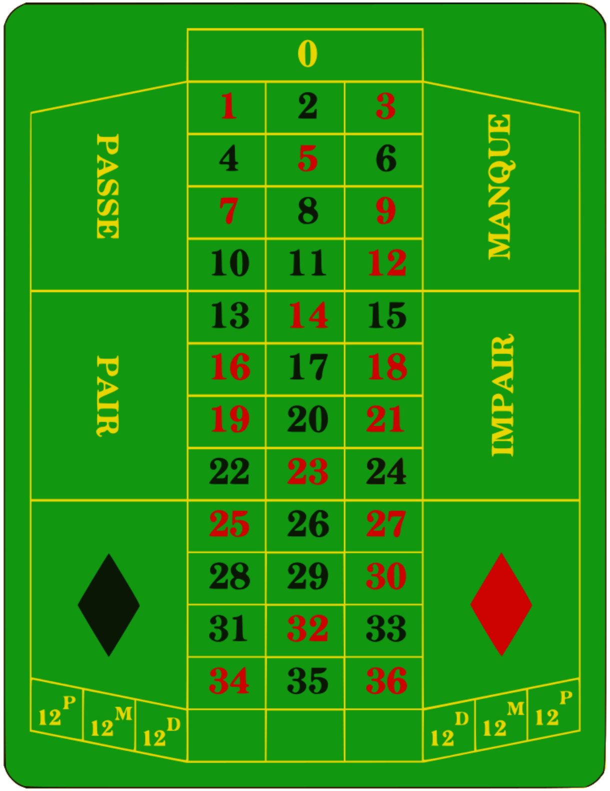
- Mittlerer Bankgewinn $\bar{x}$ pro Spiel:

$$\bar{x} \ = \ \frac{1 \cdot n_1 + (-1) \cdot n_2}{n} \ = \ 1 \cdot \frac{n_1}{n} + (-1) \cdot \frac{n_2}{n}$$



Erwartungswerte

Beispiel: Französisches Roulette



- Spielbanken erzielen Gewinne, weil die angebotenen Glücksspiele nicht „fair“ sind.
- Bankgewinn bei Einsatz 1 Euros auf „Rot“:

$$X : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } \omega \in \{0; 2; \ldots; 35\}\ , \\ -1 & \text{für } \omega \in \{1; 3; \ldots; 36\}\ . \end{cases}$$

- $P(X = 1) = \frac{19}{37} \; > \; P(X = -1) = \frac{18}{37}$
- Bei n Spielen gibt es n_1 Bankgewinne und n_2 Bankverluste mit $n = n_1 + n_2$.
- Mittlerer Bankgewinn $\bar{x}$ pro Spiel:

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot n_1 + (-1) \cdot n_2}{n} = 1 \cdot \frac{n_1}{n} + (-1) \cdot \frac{n_2}{n} = 1 \cdot \frac{19}{37} + (-1) \cdot \frac{18}{37} = \frac{1}{37} \approx 2{,}7 \text{ Cent}\ .$$

- Bei großem n sind die relativen Häufigkeiten $\frac{n_1}{n} \approx \frac{19}{37}$ und $\frac{n_2}{n} \approx \frac{18}{37}$.
  Hintergrund: Statistisches Gesetz der großen Zahlen.

Bemerkungen:

- Die Bank erzielt an jedem eingesetzten Euro auf Rot bzw. Schwarz bei ausreichend vielen Spielen einen Gewinn von $2{,}7$ Cent. Analoge Überlegungen gelten auch für andere Setzmöglichkeiten, für andere Spiele in Casinos sowie beim Lotto.

- Das Geschäftsprinzip von Spielbanken und Lottogesellschaften ist folglich, so viele Kunden wie möglich anzulocken – im Schnitt wird die Spielbank bzw. die Lottogesellschaft pro Geschäftsjahr einen erheblichen Gewinn einfahren.

Erwartungswerte

Definition 8 (Erwartungswert einer Zufallsgröße)

Für eine Zufallsgröße X über dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ mit Wertemenge $W = \{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$ heißt die Funktion

$$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_k \cdot P(X = x_k)$$

Erwartungswert von X; oft auch kurz geschrieben als

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot P(X = x_i) \; .$$

Bemerkungen:

- Statt $E(X)$ schreibt man auch $\mu(X)$ oder kurz μ, wenn man nur eine Zufallsgröße betrachtet; bei mehreren Zufallsgrößen X_i ist auch die Bezeichnung $E(X_i) = \mu_i$ üblich.
- Christiaan Huygens (1629–1695, niederländischer Wissenschaftler) benutzte den Begriff des Erwartungswertes in seinem Buch „De Ratiociniis in Ludo Aleae".
- Der Begriff *Erwartungswert* stammt aus dem Bereich der Glücksspiele.

  Man möchte wissen, wie die Gewinn- bzw. Verlustchancen für Spielende bzw. die Bank verteilt sind. Ein Spiel heißt *fair*, wenn als Einsatz gerade jener Betrag verlangt wird, der sich als Erwartungswert der Auszahlung Y an Spielende ergibt, also wenn $E(Y) =$ Einsatz gilt bzw. $E(Z) = 0$ für den Nettogewinn $Z = Y -$ Einsatz.

  Ist $E(Z) > 0$, so ist das Spiel für Spielende *günstig*; ist $E(Z) = 0$, so ist das Spiel *fair*; ist $E(Z) < 0$, so ist das Spiel für Spielende *ungünstig*.

- Eine anschauliche Deutung des Erwartungswertes einer Zufallsgröße ist, ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung als Massenverteilung zu interpretieren, also den Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$ punktförmige Massen m_i zuzuordnen, deren Gesamtmasse 1 ist. Dann gibt $E(X)$ die „Koordinate" des Schwerpunktes an.

Bemerkungen: (Fortsetzung)

- Für manche Zwecke ist eine zweite Darstellungsform von $E(X)$ günstiger. Sind die $\{\omega_i\}$ die verschiedenen Elementarereignisse des Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega; P)$, über dem die Zufallsgröße X definiert ist, so gilt offensichtlich

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} X(\omega_j) \cdot P(\{\omega_j\}) \ ,$$

  wobei m die Mächtigkeit von Ω und $k \leq m$ ist.

- Der Erwartungswert ist ein Teil einer ganzen „Kette“ von Kenngrößen zur Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße. Allgemein bezeichnet man $E(X^k)$ als Moment der k-ten Ordnung oder k-tes Moment der Zufallsgröße X, wenn $E(X^k)$ existiert. Das k-te absolute Moment ist entsprechend $E(|X|^k)$.

- Der Begriff der Momente stammt von der Betrachtung von Kräftegleichgewichten bei Waagen ab und wurde wohl schon im 16. Jahrhundert dort verwendet.

  Die Existenz der Momente bestimmter Ordnung liefert Informationen zur Verteilung der Wahrscheinlichkeitsmasse: 1-tes Moment als Erwartungswert, 2-tes Moment als Quasi-Anzeichen dafür, wie verschieden/verzerrt die Werte sind, usw.

  Die Varianz ist noch ein Repräsentant sogenannter zentraler Momente.

Erwartungswerte

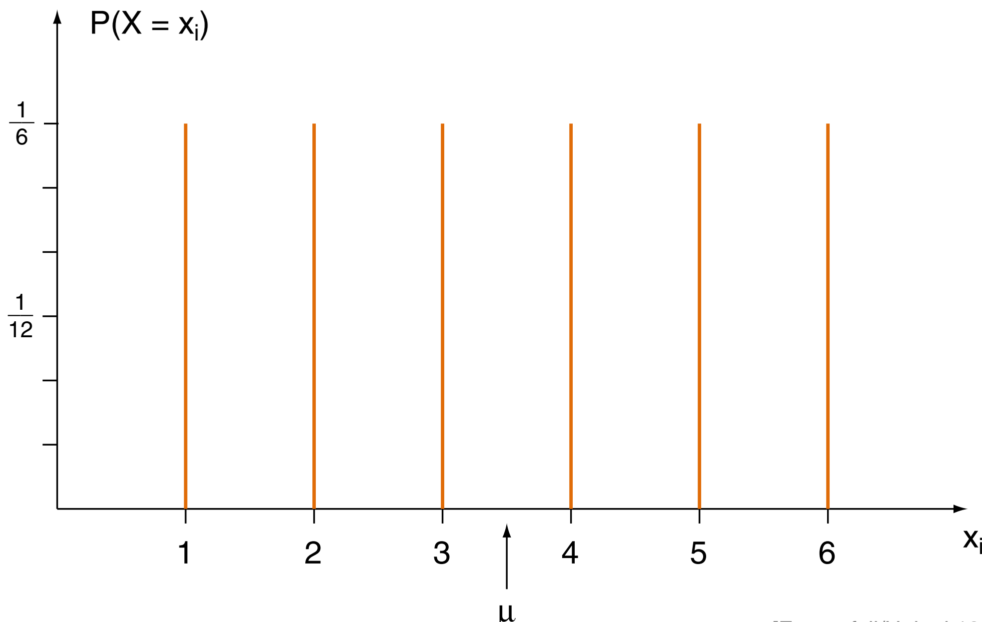
Beispiel: Augenzahl X beim Werfen eines Laplace-Würfels

- Alle sechs Ergebnisse treten mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ ein, so dass

$$E(X) \;=\; 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6 \cdot \frac{1}{6} \;=\; 3{,}5 \;.$$

- Der Erwartungswert muss kein ein Element der Wertemenge von X sein, wird aber als Mittelwert längerer Wurfserien näherungsweise erwartet: $E(X) \approx 3{,}5$.

- Veranschaulichung in Analogie zum Schwerpunkt der Massenverteilung:



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Erwartungswerte

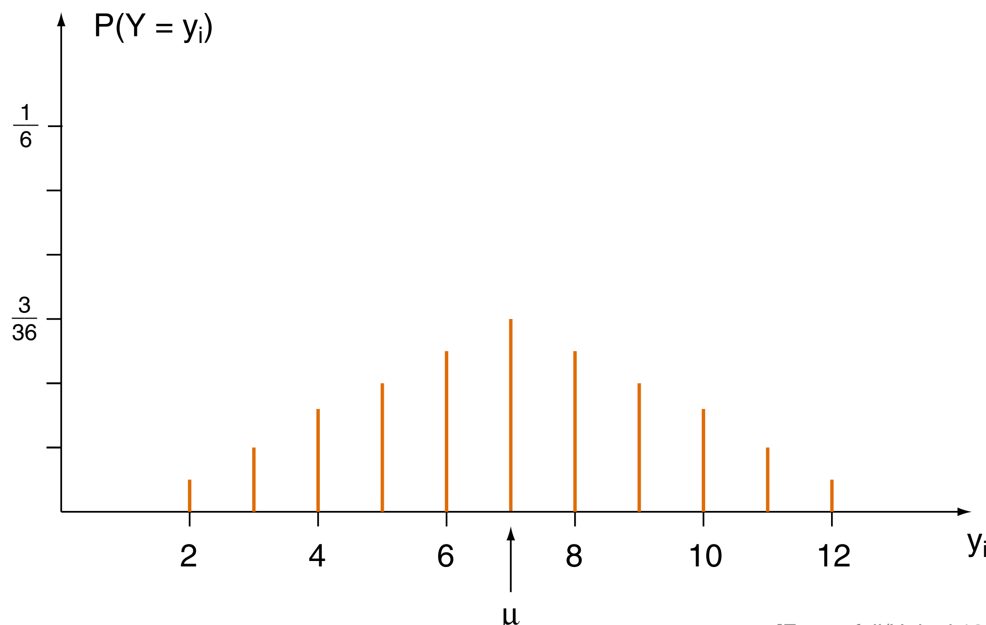
Beispiel: Augensumme Y beim zweimaligen Laplace-Würfelwurf

- Aufgrund der Augensummenverteilung ergibt sich

$$E(Y) = (2+12)\cdot\frac{1}{36}+(3+11)\cdot\frac{2}{36}+(4+10)\cdot\frac{3}{36}+(5+9)\cdot\frac{4}{36}+(6+8)\cdot\frac{5}{36}+7\cdot\frac{6}{36} = 7.$$

- Der Erwartungswert der Augensumme Y eines zweimaligen Würfelwurfs ist genau doppelt so groß wie die Augenzahl X eines einmaligen Wurfs.

- Veranschaulichung in Analogie zum Schwerpunkt der Massenverteilung:



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Erwartungswerte

Beispiel: Münzwurfglücksspiel

- Spieler:in A wirft drei Laplace-Münzen, Spieler:in B zwei.
- Die Spieler:in, bei deren Münzen mehr Köpfe fallen, erhält alle fünf, bei gleicher Zahl an Köpfen bekommt sie B.
- Ist das Spiel für A günstig, ungünstig, oder ist es fair?

Erwartungswerte

Beispiel: Münzwurfglücksspiel

- Spieler:in A wirft drei Laplace-Münzen, Spieler:in B zwei.
- Die Spieler:in, bei deren Münzen mehr Köpfe fallen, erhält alle fünf, bei gleicher Zahl an Köpfen bekommt sie B.
- Ist das Spiel für A günstig, ungünstig, oder ist es fair?
- In der entsprechenden Übungsaufgabe wurde gezeigt, dass A mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ eine größere Zahl an Köpfen wirft als B.
- Die Gegenwahrscheinlichkeit ist somit auch $\frac{1}{2}$ und es ergibt sich für den Nettogewinn Z von A daher

$$E(Z) \;=\; 2 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{2} \;=\; -\frac{1}{2}\,.$$

- Das Spiel ist für A also nicht günstig.

Erwartungswerte

Rechenregeln: Konstante

Ist eine Zufallsgröße X derart „degeneriert“, dass sie nur einen einzigen Wert $a \in \mathbf{R}$ mit $P(X = a) = 1$ annimmt, gilt

Satz 9 (Erwartungswert einer Konstanten)

Der Erwartungswert einer Konstanten $a \in \mathbf{R}$ ist gleich dieser Konstanten: $E(a) = a$.

Erwartungswerte

Rechenregeln: Linearität

- Zufallsgrößen können Funktionen anderer Zufallsgrößen sein:
  Y kann als Skalierung der Werte von X interpretiert werden.

$$Y = aX + b \quad \text{für } a, b \in \mathbf{R}$$

- Seien $a = \frac{1}{2}$ und $b = 2$, so dass $Y = \frac{1}{2}X + 2$, dann ergibt sich für eine Zufallsgröße X mit Wertemenge $W_X = \{-4; -2; 0; 2; 4\}$ folgende Zuordnung:

x_i	-4	-2	0	2	4
$\frac{1}{2}x_i + 2$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
y_i	0	1	2	3	4

- Gegeben eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für X, wird man erwarten, dass in der neuen Skala $E(Y) = \frac{1}{2}E(X) + 2$.

- Verallgemeinert:

$$E(Y) = aE(X) + b$$

Erwartungswerte

Rechenregeln: Linearität

Satz 10 (Linearität des Erwartungswertes)

Sei X eine Zufallsgröße auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$. Dann gilt für $aX + b$ mit $a,b \in \mathbf{R}$:

$$E(aX + b) = aE(X) + b \; .$$

Erwartungswerte

Rechenregeln: Linearität

Satz 10 (Linearität des Erwartungswertes)

Sei X eine Zufallsgröße auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$. Dann gilt für $aX + b$ mit $a,b \in \mathbf{R}$:

$$E(aX + b) = aE(X) + b \; .$$

Herleitung:

- Seien X und $Y = aX + b$ für $a, b \in \mathbf{R}$ Zufallsgrößen.
- Es gilt $y_i = ax_i + b$ und $P(Y = y_i) = P(X = x_i)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} E(aX + b) \; &= \; E(Y) \; = \; \sum_{i=1}^{k} y_i P(Y = y_i) \; = \; \sum_{i=1}^{k} (ax_i + b) P(X = x_i) \\ &= \; a \sum_{i=1}^{k} x_i P(X = x_i) \; + \; b \sum_{i=1}^{k} P(X = x_i) \\ &= \; aE(X) + b \; , \quad \text{da } b \sum_{i=1}^{k} P(X = x_i) = b \cdot 1 \text{ im letzten Schritt.} \end{aligned}$$

Erwartungswerte

Rechenregeln: Additivität / Summenregel

Was ist der Erwartungswert $E(X + Y)$ der Summe zweier Zufallsgrößen?

Erwartungswerte

Rechenregeln: Additivität / Summenregel

Was ist der Erwartungswert $E(X+Y)$ der Summe zweier Zufallsgrößen?

Fall 1: X und Y sind unabhängig

- Der Erwartungswert der Augensumme beim zweimaligen Würfeln entspricht der Summe der Erwartungswerte jedes Wurfs.

Fall 2: X und Y sind abhängig.

- Sei $Y = X$, dann sind X und Y total abhängig und es gilt:

$$E(X+Y) \;=\; E(X+X) \;=\; E(2X) \;=\; 2 \cdot E(X) \;=\; E(X) + E(X)\,.$$

Erwartungswerte

Rechenregeln: Additivität / Summenregel

Satz 11 (Addivität des Erwartungswertes / Summenregel)

Der Erwartungswert der Summe zweier abhängiger oder unabhängiger Zufallsgrößen X, Y auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ ist gleich der Summe der Erwartungswerte:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \ .$$

Erwartungswerte

Rechenregeln: Additivität / Summenregel

Satz 11 (Addivität des Erwartungswertes / Summenregel)

Der Erwartungswert der Summe zweier abhängiger oder unabhängiger Zufallsgrößen X, Y auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ ist gleich der Summe der Erwartungswerte:

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)\ .$$

Herleitung:

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \sum_{i=1}^{m} (X(\omega_i) + Y(\omega_i)) \cdot P(\{\omega_i\}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} X(\omega_i) \cdot P(\{\omega_i\}) + \sum_{i=1}^{m} Y(\omega_i) \cdot P(\{\omega_i\}) \\ &= E(X) + E(Y) \end{aligned}$$

Bemerkung:

- Dank dieser Summenregel kann man sich manchmal die mühsame Konstruktion der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung und der Summenverteilung ersparen, wenn es nur um den Erwartungswert der Summe geht.

Erwartungswerte

Rechenregeln: Additivität / Summenregel

Mit den Sätzen 10 und 11 folgt

Satz 12 (Erwartungswert einer Linearkombination von Zufallsgrößen)

Für den Erwartungswert der Linearkombination $a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n$ ($a_i \in \mathbf{R}$) von n abhängigen oder unabhängigen Zufallsgrößen X_i auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ gilt:

$$E(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n) \;=\; a_1 E(X_1) + a_2 E(X_2) + \ldots + a_n E(X_n)\ .$$

Erwartungswerte

Beispiel: Medizinische Pooling-Tests

- Es sollen n Personen auf das Vorliegen einer Krankheit getestet werden.
- Um Zeit- und Kosten zu sparen, werden Teile jeder Probe gemischt und der Test auf das Gemisch angewendet.
- Ist der Test für das Gemisch positiv, werden die n Proben einzeln untersucht.
- Wie viele Untersuchungen sind bei festem n im Schnitt durchzuführen, wenn p die Wahrscheinlichkeit ist, dass eine Einzelprobe positiv ist?

Erwartungswerte

Beispiel: Medizinische Pooling-Tests

- Es sollen n Personen auf das Vorliegen einer Krankheit getestet werden.
- Um Zeit- und Kosten zu sparen, werden Teile jeder Probe gemischt und der Test auf das Gemisch angewendet.
- Ist der Test für das Gemisch positiv, werden die n Proben einzeln untersucht.
- Wie viele Untersuchungen sind bei festem n im Schnitt durchzuführen, wenn p die Wahrscheinlichkeit ist, dass eine Einzelprobe positiv ist?

- Sei X die Anzahl der notwendigen Untersuchungen.
- $X = 1$ („alle n Proben sind negativ“): $P(X = 1) = (1 - p)^n$
- $X = n + 1$ („mindestens 1 Probe ist positiv“): $P(X = n + 1) = 1 - (1 - p)^n$
- Daraus folgt:

$$E(X) \;=\; 1 \cdot (1 - p)^n + (n + 1) \cdot (1 - (1 - p)^n) \;=\; n + 1 - n(1 - p)^n \,.$$

Erwartungswerte

Beispiel: Medizinische Pooling-Tests

- Es sollen $N > n$ Personen getestet werden.
- Bei welcher Aufteilung der N Proben in m Gruppen zu je n Proben, so dass $N = m \cdot n$, wird die Anzahl an Probenuntersuchungen minimal?

Erwartungswerte

Beispiel: Medizinische Pooling-Tests

- Es sollen $N > n$ Personen getestet werden.
- Bei welcher Aufteilung der N Proben in m Gruppen zu je n Proben, so dass $N = m \cdot n$, wird die Anzahl an Probenuntersuchungen minimal?
- Sei X_i die Anzahl der notwendigen Untersuchungen in Gruppe i.
- Dann ist

$$\begin{aligned} E(X_1 + X_2 + \ldots + X_m) &= m \cdot E(X) = \frac{N}{n} \cdot E(X) \\ &= \frac{N}{n} \cdot (n + 1 - n(1-p)^n) \\ &= N \cdot \left(\frac{1}{n} + 1 - (1-p)^n \right) . \end{aligned}$$

Erwartungswerte

Beispiel: Medizinische Pooling-Tests

- Es sollen $N > n$ Personen getestet werden.
- Bei welcher Aufteilung der N Proben in m Gruppen zu je n Proben, so dass $N = m \cdot n$, wird die Anzahl an Probenuntersuchungen minimal?
- Sei X_i die Anzahl der notwendigen Untersuchungen in Gruppe i.
- Dann ist
$$\begin{aligned} E(X_1 + X_2 + \ldots + X_m) &= m \cdot E(X) = \frac{N}{n} \cdot E(X) \\ &= \frac{N}{n} \cdot (n + 1 - n(1-p)^n) \\ &= N \cdot \left(\frac{1}{n} + 1 - (1-p)^n \right) . \end{aligned}$$
- Gesucht: Dasjenige n, das die letzte Klammer für ein gegebenes p minimiert.
- Beispiel: $p = 1\%$ (positive Tests sind selten)

n	2	5	10	**11**	12	20
$1 + \frac{1}{n} - (1-p)^n$	0,5199	0,2490	0,19562	**0,19557**	0,1969	0,2321

Bemerkungen:

- Bestimmung der Extremwerte:
  - Nullstellen der ersten Ableitung zeigen einen oder mehrere Extremwerte an, z.B. n_0.
  - Ist der Wert der zweiten Ableitung beim Extremwert n_0 kleiner als 0, handelt es sich um ein lokales Maximum.
- Plot der ersten Ableitung für das Beispiel $p = 1\%$.

Erwartungswerte

Rechenregeln: Multiplikativität / Produktregel

Was ist der Erwartungswert $E(X \cdot Y)$ des Produkts zweier Zufallsgrößen?

Erwartungswerte

Rechenregeln: Multiplikativität / Produktregel

Was ist der Erwartungswert $E(X \cdot Y)$ des Produkts zweier Zufallsgrößen?

Fall 1: X und Y sind unabhängig.

x_i, y_i, z_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$P(Z_1 = z_i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

- Beispiel: Zweifacher Münzwurf.
- X steht für die erste zweier Münzen, wobei $X = 0$ Kopf und $X = 1$ Zahl denotiert.
- Y steht analog für die zweite Münze.
- $Z_1 = X \cdot Y$ ist das Produkt beider.
- Da $E(X) = E(Y) = \frac{1}{2}$ und $E(Z_1) = \frac{1}{4} = E(X) \cdot E(Y)$, liegt die Vermutung nahe, dass unabhängige Zufallsvariablen multiplikativ sind.

Erwartungswerte

Rechenregeln: Multiplikativität / Produktregel

Was ist der Erwartungswert $E(X \cdot Y)$ des Produkts zweier Zufallsgrößen?

Fall 1: X und Y sind unabhängig.

$x_i,\, y_i,\, z_i$	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$P(Z_1 = z_i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
$P(Z_2 = z_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- Beispiel: Zweifacher Münzwurf.
- X steht für die erste zweier Münzen, wobei $X = 0$ Kopf und $X = 1$ Zahl denotiert.
- Y steht analog für die zweite Münze.
- $Z_1 = X \cdot Y$ ist das Produkt beider.
- Da $E(X) = E(Y) = \frac{1}{2}$ und $E(Z_1) = \frac{1}{4} = E(X) \cdot E(Y)$, liegt die Vermutung nahe, dass unabhängige Zufallsvariablen multiplikativ sind.

Fall 2: X und Y sind abhängig.

- Seien die Münzen am Rand zu einer fairen „Doppelmünze“ verschweißt (Z_2).
- Da $X = Y$, ist $E(Z_2) = E(X \cdot X) = E(X^2) = E(X) = \frac{1}{2} \neq E(X) \cdot E(X) = \frac{1}{4}$.
- Das widerlegt, dass die Produktregel allgemein gültig ist.

Erwartungswerte

Rechenregeln: Multiplikativität / Produktregel

Satz 13 (Multiplikativität des Erwartungswertes / Produktregel)

Der Erwartungswert des Produktes zweier unabhängiger Zufallsgrößen X, Y auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ ist gleich dem Produkt der Erwartungswerte:

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)\ .$$

Satz 13 (Multiplikativität des Erwartungswertes / Produktregel)

Der Erwartungswert des Produktes zweier unabhängiger Zufallsgrößen X, Y auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ ist gleich dem Produkt der Erwartungswerte:

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) \; .$$

Herleitung:

- Seien $W_X = \{x_1; \ldots ; x_k\}$ und $W_Y = \{y_1; \ldots ; y_l\}$ Wertemenge zweier unabhängiger Zufallsgrößen X und Y mit $p_i = P(X = x_i)$ und $q_j = P(Y = y_j)$:

$$\begin{aligned}
E(X \cdot Y) &= \quad x_1 y_1 p_1 q_1 + x_1 y_2 p_1 q_2 + \ldots + x_1 y_l p_1 q_l \\
&\quad + x_2 y_1 p_2 q_1 + x_2 y_2 p_2 q_2 + \ldots + x_2 y_l p_2 q_l \\
&\qquad \vdots \\
&\quad + x_k y_1 p_k q_1 + x_k y_2 p_k q_2 + \ldots + x_k y_l p_k q_l \\
&= (x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k) \cdot (y_1 q_1 + y_2 q_2 + \ldots + y_l q_l) \\
&= E(X) \cdot E(Y) \; .
\end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Die Umkehrung von Satz 13 gilt nicht (siehe Übungsaufgabe).
- Die Produktregel kann auf beliebig viele unabhängige Zufallsgrößen verallgemeinert werden.

Kapitel PTS:V

V. Zufallsgrößen und Maßzahlen

- Zufallsgrößen
- Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Verteilungsfunktionen
- Multiple Zufallsgrößen
- Erwartungswerte
- Varianz und Standardabweichung
- Das $\sqrt{n}$-Gesetz
- Schätzwerte für Erwartungswert und Standardabweichung

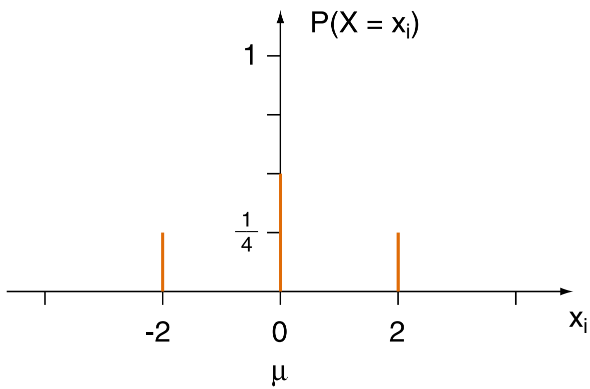
Varianz und Standardabweichung
Beispiel: Zwei Zufallsgrößen

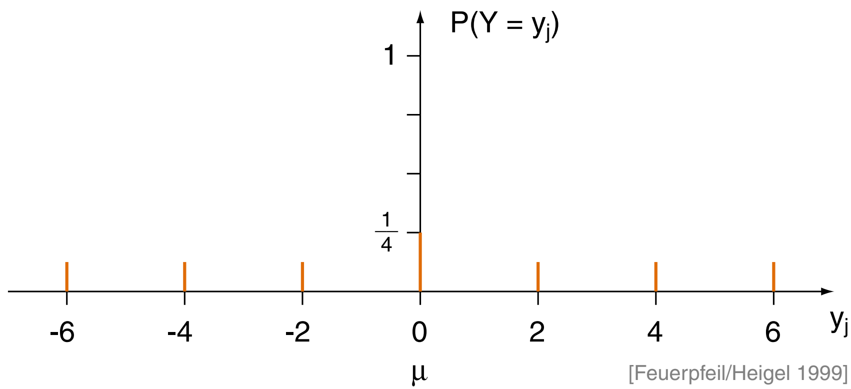
- Seien X und Y Zufallsgrößen mit folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen:

x_i	-2	0	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

y_j	-6	-4	-2	0	2	4	6
$P(Y = y_j)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

- Wegen der Symmetrie der Verteilungen zum Nullpunkt gilt: $E(X) = E(Y) = 0$





[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Trotz des gleichen Erwartungswertes unterscheiden sich die Verteilungen von X und Y wesentlich: die Werte von Y schwanken stärker als die von X.

- Man sagt: Y besitzt eine größere Streuung bzw. Variabilität als X.

Varianz und Standardabweichung

Begriffsbildung

- Sei X eine Zufallsgröße mit $W_X = \{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$.
- Was ist ein geeignetes Maß für die Variabilität von X?

Varianz und Standardabweichung

Begriffsbildung

- Sei X eine Zufallsgröße mit $W_X = \{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$.
- Was ist ein geeignetes Maß für die Variabilität von X?

- Schwankungsbreite:

  $x_k - x_1$, wobei x_k der größte und x_1 der kleinste Wert in W_X ist.

- Dieses Maß lässt die Verteilung der Werte weitgehend unberücksichtigt.

Varianz und Standardabweichung

Begriffsbildung

- Sei X eine Zufallsgröße mit $W_X = \{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$.
- Was ist ein geeignetes Maß für die Variabilität von X?

- Schwankungsbreite:

$$x_k - x_1, \text{ wobei } x_k \text{ der größte und } x_1 \text{ der kleinste Wert in } W_X \text{ ist.}$$

- Dieses Maß lässt die Verteilung der Werte weitgehend unberücksichtigt.

- Zufällige Abweichungen vom Erwartungswert nach oben und nach unten:

$$Z_1 = X - \mu \text{ mit } W_{Z_1} = \{x_1 - \mu; x_2 - \mu; \ldots; x_k - \mu\}$$

- W_X wird nur durch W_{Z_1} ersetzt: Was ist interessant an der Verteilung von Z_1?

Varianz und Standardabweichung

Begriffsbildung

- Sei X eine Zufallsgröße mit $W_X = \{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$.
- Was ist ein geeignetes Maß für die Variabilität von X?
- Schwankungsbreite:

$$x_k - x_1, \text{ wobei } x_k \text{ der größte und } x_1 \text{ der kleinste Wert in } W_X \text{ ist.}$$

- Dieses Maß lässt die Verteilung der Werte weitgehend unberücksichtigt.
- Zufällige Abweichungen vom Erwartungswert nach oben und nach unten:

$$Z_1 = X - \mu \text{ mit } W_{Z_1} = \{x_1 - \mu; x_2 - \mu; \ldots; x_k - \mu\}$$

- W_X wird nur durch W_{Z_1} ersetzt: Was ist interessant an der Verteilung von Z_1?
- Interessant ist ihre *mittlere Abweichung* bzw. ihr Erwartungswert $E(Z_1)$.
- Es gilt jedoch $E(Z_1) = E(X - \mu) = E(X) - \mu = \mu - \mu = 0$.
- Z_1 ist aufgrund dieser Eigenschaft des Erwartungswerts ungeeignet.

Varianz und Standardabweichung

Begriffsbildung

- Zufällige Abweichungen vom Erwartungswert als Entfernung:

$$Z_2 = |X - \mu| \text{ mit } W_{Z_2} = \{|x_1 - \mu|; |x_2 - \mu|; \ldots; |x_k - \mu|\}$$

- Die Variabilität der Beispielzufallsgrößen X und Y wird damit unterscheidbar:

$$E(|X - 0|) = 1 \quad \text{und} \quad E(|Y - 0|) = 3$$

Varianz und Standardabweichung

Begriffsbildung

- Zufällige Abweichungen vom Erwartungswert als Entfernung:

$$Z_2 = |X - \mu| \text{ mit } W_{Z_2} = \{|x_1 - \mu|; |x_2 - \mu|; \ldots; |x_k - \mu|\}$$

- Die Variabilität der Beispielzufallsgrößen X und Y wird damit unterscheidbar:

$$E(|X - 0|) = 1 \quad \text{und} \quad E(|Y - 0|) = 3$$

- Zufällige Abweichungen vom Erwartungswert als Potenzen:

$$Z_3 = |X - \mu|^r \text{ oder } Z_4 = (X - \mu)^r \text{ mit } r > 0$$

- Der Erwartungswert $E((X - \mu)^2)$ der quadratischen Abweichung hat sich unter allen denkbaren Maßen durchgesetzt:
  - Additivität (Beweist folgt)
  - Aufhebung der Vorzeichenunterschiede der Werte von $(X - \mu)$
  - Verstärkung großer Variabilitäten im Vergleich zu kleinen.
  - Eine formale Rechtfertigung folgt.

Varianz und Standardabweichung

Definition 14 (Varianz einer Zufallsgröße)

Sei X eine Zufallsgröße auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ mit der Wertemenge $W = \{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$ und $E(X) = \mu$. Dann heißt

$$\text{Var}(X) = E((X-\mu)^2) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$$

Varianz von X.

Varianz und Standardabweichung

Definition 14 (Varianz einer Zufallsgröße)

Sei X eine Zufallsgröße auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ mit der Wertemenge $W = \{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$ und $E(X) = \mu$. Dann heißt

$$\text{Var}(X) = E((X-\mu)^2) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$$

Varianz von X.

Herleitung:

- Da $E(Y) = \sum_{i=1}^{k} y_j \cdot P(Y = y_j)$ wirkt die Definition für $Y = (X-\mu)^2$ plausibel.
- Problem: Symmetrisch zu μ liegende x-Werte werden auf ein y_j abgebildet.
- Idee: Fallunterscheidung und schrittweises Vorgehen.
  - Fall 1: Keine zwei Werte $x, x' \in W_X$ liegen symmetrisch zu μ.
  - Fall 2: Genau zwei Werte $x, x' \in W_X$ liegen symmetrisch zu μ.
  - Fall 3: Mehr als ein Wertepaar aus W_X liegen symmetrisch zu μ.

Varianz und Standardabweichung

Begriffsbildung

Herleitung: (Fortsetzung)

1. Keine zwei Werte $x, x' \in W_X$ liegen symmetrisch zu μ:
   - Alle $y_i = (x_i - \mu)^2$ sind verschieden und da $P(Y = y_i) = P(X = x_i)$ gilt

$$E(Y) \;=\; \sum_{i=1}^{k} y_j \cdot P(Y = y_j) \;=\; \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)\;.$$

Varianz und Standardabweichung

Begriffsbildung

Herleitung: (Fortsetzung)

1. Keine zwei Werte $x, x' \in W_X$ liegen symmetrisch zu μ:
   - Alle $y_i = (x_i - \mu)^2$ sind verschieden und da $P(Y = y_i) = P(X = x_i)$ gilt

$$E(Y) \;=\; \sum_{i=1}^{k} y_j \cdot P(Y = y_j) \;=\; \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)\;.$$

2. Genau zwei Werte $x, x' \in W_X$ liegen symmetrisch zu μ:
   - Dann ist $(x - \mu)^2 = (x' - \mu)^2 = c$ und $P(Y = c) = P(X = x) + P(X = x')$.
   - Weil

$$\begin{aligned} c \cdot P(Y = c) \;&=\; c \cdot (P(X = x) + P(X = x')) \\ &=\; c \cdot P(X = x) + c \cdot P(X = x') \\ &=\; (x - \mu)^2 \cdot P(X = x) + (x' - \mu)^2 \cdot P(X = x') \end{aligned}$$

gilt

$$E(Y) \;=\; \sum_{i=1}^{k} y_j \cdot P(Y = y_j) \;=\; \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)\;.$$

Varianz und Standardabweichung

Begriffsbildung

Herleitung: (Fortsetzung)

1. Keine zwei Werte $x, x' \in W_X$ liegen symmetrisch zu μ:
   - Alle $y_i = (x_i - \mu)^2$ sind verschieden und da $P(Y = y_i) = P(X = x_i)$ gilt

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{k} y_j \cdot P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i) .$$

2. Genau zwei Werte $x, x' \in W_X$ liegen symmetrisch zu μ:
   - Dann ist $(x - \mu)^2 = (x' - \mu)^2 = c$ und $P(Y = c) = P(X = x) + P(X = x')$.
   - Weil

$$\begin{aligned} c \cdot P(Y = c) &= c \cdot (P(X = x) + P(X = x')) \\ &= c \cdot P(X = x) + c \cdot P(X = x') \\ &= (x - \mu)^2 \cdot P(X = x) + (x' - \mu)^2 \cdot P(X = x') \end{aligned}$$

   gilt

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{k} y_j \cdot P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i) .$$

3. Mehr als Paare von Werten aus W_X liegen symmetrisch zu μ: Analog zu 2.

Bemerkungen:

- Zutreffender wäre in Analogie zum Erwartungswert ggf. die Bezeichnung Varianzwert – diese Bezeichnung hat sich aber nicht durchgesetzt.
- Die Maßeinheit der Varianz ist das Quadrat der Einheit, in der X gemessen wird.
- Um eine der Varianz ähnliche Maßzahl zu erhalten, die dieselbe Einheit wie X hat wird die Wurzel gezogen.

Varianz und Standardabweichung

Definition 15 (Standardabweichung einer Zufallsgröße)

Als Standardabweichung einer Zufallsgröße X auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ bezeichnet man die Zahl

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}\ .$$

Bemerkungen:

- Betrachtet man nur eine Zufallsgröße, so wird oft σ geschrieben, bei mehreren Zufallsgrößen X_i entsprechend σ_i. Varianzen werden gelegentlich als σ^2 bzw. σ_i^2 notiert.
- Vereinbarung: Wenn $\sigma(X)$ geschrieben wird, dann auch $\mu(X)$ und umgekehrt.
- Allgemein heißen die $\mu^{(k)} = E((X-\mu)^k)$ und $\bar{\mu}^{(k)} = E(|X-\mu|^k)$ zentrale Momente und zentrale absolute Momente k-ter Ordnung, da sie am Mittelwert zentriert sind.
- Das erste zentrale absolute Moment $\bar{\mu}^{(1)} = E(|X-\mu|)$ ist die *mittlere absolute Abweichung*.
- Die Varianz ist das zweite zentrale Moment.
- Das dritte zentrale Moment wird oft mit der Standardabweichung normiert und ergibt dann als drittes *normiertes/standardisiertes Moment*

$$E\left(\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right)$$

  ein Maß für die Schiefe (engl. „skewness“) der Verteilung. Es wird oft genutzt, um die Abweichung von einer symmetrischen Verteilung anzugeben.
- Das vierte standardisierte Moment

$$E\left(\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4\right)$$

  ist ein Maß für die Wölbung der Verteilung. Es wird oft genutzt, um die Abweichung von einer Normalverteilung anzugeben.
- Schiefe und Wölbung werden oft auch als höhere Momente bezeichnet.

Varianz und Standardabweichung

Beispiel: Zwei Zufallsgrößen (Fortsetzung)

- Seien X und Y die Zufallsgrößen des obigen Beispiels:

$$\text{Var}(X) = (-2-0)^2 \cdot \frac{1}{4} + (0-0)^2 \cdot \frac{1}{2} + (2-0)^2 \cdot \frac{1}{4} = 2$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) = {} & (-6-0)^2 \cdot \frac{1}{8} + (-4-0)^2 \cdot \frac{1}{8} + (-2-0)^2 \cdot \frac{1}{8} + (0-0)^2 \cdot \frac{1}{4} \\ & + (2-0)^2 \cdot \frac{1}{8} + (4-0)^2 \cdot \frac{1}{8} + (6-0)^2 \cdot \frac{1}{8} = 14 \end{aligned}$$

Varianz und Standardabweichung

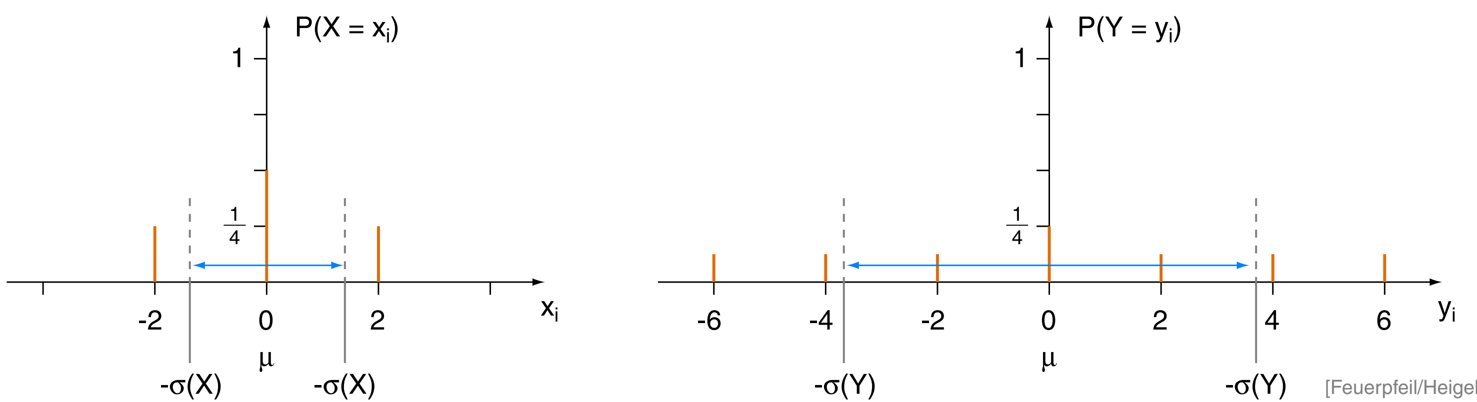
Beispiel: Zwei Zufallsgrößen (Fortsetzung)

- Seien X und Y die Zufallsgrößen des obigen Beispiels:

$$\text{Var}(X) = (-2-0)^2 \cdot \frac{1}{4} + (0-0)^2 \cdot \frac{1}{2} + (2-0)^2 \cdot \frac{1}{4} = 2$$

$$\begin{aligned}\text{Var}(Y) = & (-6-0)^2 \cdot \frac{1}{8} + (-4-0)^2 \cdot \frac{1}{8} + (-2-0)^2 \cdot \frac{1}{8} + (0-0)^2 \cdot \frac{1}{4} \\ & + (2-0)^2 \cdot \frac{1}{8} + (4-0)^2 \cdot \frac{1}{8} + (6-0)^2 \cdot \frac{1}{8} = 14\end{aligned}$$

- Dementsprechend sind $\sigma(X) = \sqrt{2} \approx 1{,}4$ und $\sigma(Y) = \sqrt{14} \approx 3{,}7$:
  Die Breite der Streuung um den Nullpunkt $(= \mu(X) = \mu(Y))$ zeigt die Ungleichheit der Varianzen an, was sich auch in der Standardabweichung widerspiegelt.



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Varianz und Standardabweichung

Rechenregeln: Konstante

Ist eine Zufallsgröße X derart „degeneriert“, dass sie nur einen einzigen Wert $a \in \mathbf{R}$ mit $P(X = a) = 1$ annimmt, ist ihre Varianz $\text{Var}(X) = 0$.

Hat eine Zufallsgröße X die Varianz $\text{Var}(X) = 0$, folgt direkt aus der Definition der Varianz, dass die Zufallsgröße degeneriert ist.

Daraus folgt

Satz 16 (Varianz einer Konstanten)

Die Varianz einer Zufallsgröße ist genau dann 0, wenn eine degenerierte Verteilung mit $P(X = a) = 1$ für ein $a \in \mathbf{R}$ vorliegt.

Varianz und Standardabweichung

Rechenregeln: „Linearität“

Satz 17 („Linearität“ der Varianz und Standardabweichung)

Für beliebige $a, b \in \mathbf{R}$ und eine Zufallsgröße X gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(aX+b) &= a^2 \cdot \mathrm{Var}(X) \\ \sigma(aX+b) &= |a| \cdot \sigma(X)\ . \end{aligned}$$

Varianz und Standardabweichung

Rechenregeln: „Linearität“

Satz 17 („Linearität“ der Varianz und Standardabweichung)
Für beliebige $a, b \in \mathbf{R}$ und eine Zufallsgröße X gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(aX+b) &= a^2 \cdot \mathrm{Var}(X) \\ \sigma(aX+b) &= |a| \cdot \sigma(X) \ . \end{aligned}$$

Herleitung:

- Sei $Y = aX + b$ für $a, b \in \mathbf{R}$ und $a \neq 0$.
- Es gilt $y_i = ax_i + b$ und $P(Y = y_i) = P(X = x_i)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(aX+b) \ = \ \mathrm{Var}(Y) &= \sum_{i=1}^{k} (y_i - \mu(Y))^2 P(Y = y_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (ax_i + b - (a\mu(X) + b))^2 \cdot P(X = x_i) \\ &= a^2 \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu(X))^2 \cdot P(X = x_i) \ = \ a^2 \mathrm{Var}(X) \ . \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Die Zufallsgröße $Y = aX + b$ kann als Neuskalierung der Werte von X interpretiert werden. Die Beziehung $\sigma(aX + b) = |a| \cdot \sigma(X)$ sagt dann: die Standardabweichung ändert sich bei einer linearen Transformation im gleichen Maße wie die Einheit von X.
- $P(Y = y_i) = P(X = x_i)$, da keine zwei x-Werte auf ein und denselben y-Wert abgebildet werden ($a \neq 0$).
- Für $a = 1$ gilt Var$(X + b) =$ Var(X) und $\sigma(X + b) = \sigma(X)$. Diese Eigenschaft ist nachvollziehbar, da durch $X + b$ die Punkte von X nur um b Einheiten verschoben werden. Die Werte streuen also um den Erwartungswert $\mu + b$ von $X + b$ genauso wie die Werte von X um μ.

Varianz und Standardabweichung

Exkurs: Standardisierung von Zufallsgrößen

Nutzen:

- Erkennung der Struktur eines Histogramms mit weit vom Nullpunkt entferntem Erwartungswert und breiter Streuung.
- Vergleich von Histogrammen mit sehr unterschiedlichen Maßzahlen.

Varianz und Standardabweichung

Exkurs: Standardisierung von Zufallsgrößen

Nutzen:

- Erkennung der Struktur eines Histogramms mit weit vom Nullpunkt entferntem Erwartungswert und breiter Streuung.
- Vergleich von Histogrammen mit sehr unterschiedlichen Maßzahlen.

Ziele:

- Verschieben des Erwartungswerts in den Nullpunkt einer neuen Skala.
- Festsetzen der Einheit der Skala, so dass die Standardabweichung den Wert 1 bekommt.

Varianz und Standardabweichung

Exkurs: Standardisierung von Zufallsgrößen

Nutzen:

- Erkennung der Struktur eines Histogramms mit weit vom Nullpunkt entferntem Erwartungswert und breiter Streuung.
- Vergleich von Histogrammen mit sehr unterschiedlichen Maßzahlen.

Ziele:

- Verschieben des Erwartungswerts in den Nullpunkt einer neuen Skala.
- Festsetzen der Einheit der Skala, so dass die Standardabweichung den Wert 1 bekommt.

Vorgehen für $a \in \mathbf{R}^+$ und $b \in \mathbf{R}$:

$$Z = aX + b$$

so dass

$$\mu(Z) = 0$$

$$\sigma(Z) = 1$$

Varianz und Standardabweichung

Exkurs: Standardisierung von Zufallsgrößen

Nutzen:

- Erkennung der Struktur eines Histogramms mit weit vom Nullpunkt entferntem Erwartungswert und breiter Streuung.
- Vergleich von Histogrammen mit sehr unterschiedlichen Maßzahlen.

Ziele:

- Verschieben des Erwartungswerts in den Nullpunkt einer neuen Skala.
- Festsetzen der Einheit der Skala, so dass die Standardabweichung den Wert 1 bekommt.

Vorgehen für $a \in \mathbf{R}^+$ und $b \in \mathbf{R}$:

$$Z = aX + b$$

so dass

$$\mu(Z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot \mu(X) + b = 0$$

$$\sigma(Z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot \sigma(X) = 1$$

Varianz und Standardabweichung

Exkurs: Standardisierung von Zufallsgrößen

Nutzen:

- Erkennung der Struktur eines Histogramms mit weit vom Nullpunkt entferntem Erwartungswert und breiter Streuung.
- Vergleich von Histogrammen mit sehr unterschiedlichen Maßzahlen.

Ziele:

- Verschieben des Erwartungswerts in den Nullpunkt einer neuen Skala.
- Festsetzen der Einheit der Skala, so dass die Standardabweichung den Wert 1 bekommt.

Vorgehen für $a \in \mathbf{R}^+$ und $b \in \mathbf{R}$:

$$Z = aX + b$$

so dass

$$\mu(Z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot \mu(X) + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = -\frac{\mu(X)}{\sigma(X)}$$

$$\sigma(Z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot \sigma(X) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{\sigma(X)}$$

Varianz und Standardabweichung

Exkurs: Standardisierung von Zufallsgrößen

Nutzen:

- Erkennung der Struktur eines Histogramms mit weit vom Nullpunkt entferntem Erwartungswert und breiter Streuung.
- Vergleich von Histogrammen mit sehr unterschiedlichen Maßzahlen.

Ziele:

- Verschieben des Erwartungswerts in den Nullpunkt einer neuen Skala.
- Festsetzen der Einheit der Skala, so dass die Standardabweichung den Wert 1 bekommt.

Vorgehen für $a \in \mathbf{R}^+$ und $b \in \mathbf{R}$:

$$Z = aX + b \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{X - \mu(X)}{\sigma(X)}$$

so dass

$$\mu(Z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot \mu(X) + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = -\tfrac{\mu(X)}{\sigma(X)}$$

$$\sigma(Z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot \sigma(X) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \tfrac{1}{\sigma(X)}$$

Varianz und Standardabweichung

Definition 18 (Standardisierte Zufallsgröße)

Sei X eine Zufallsgröße mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung $\sigma > 0$. Dann heißt die Zufallsgröße

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

die zu X gehörige standardisierte Zufallsgröße.

Bemerkungen:

- Jede nicht degenerierte Zufallsgröße lässt sich standardisieren, andernfalls ist σ 0.
- Vergleiche die obigen Bemerkungen zu den standardisierten zentralen Momenten.

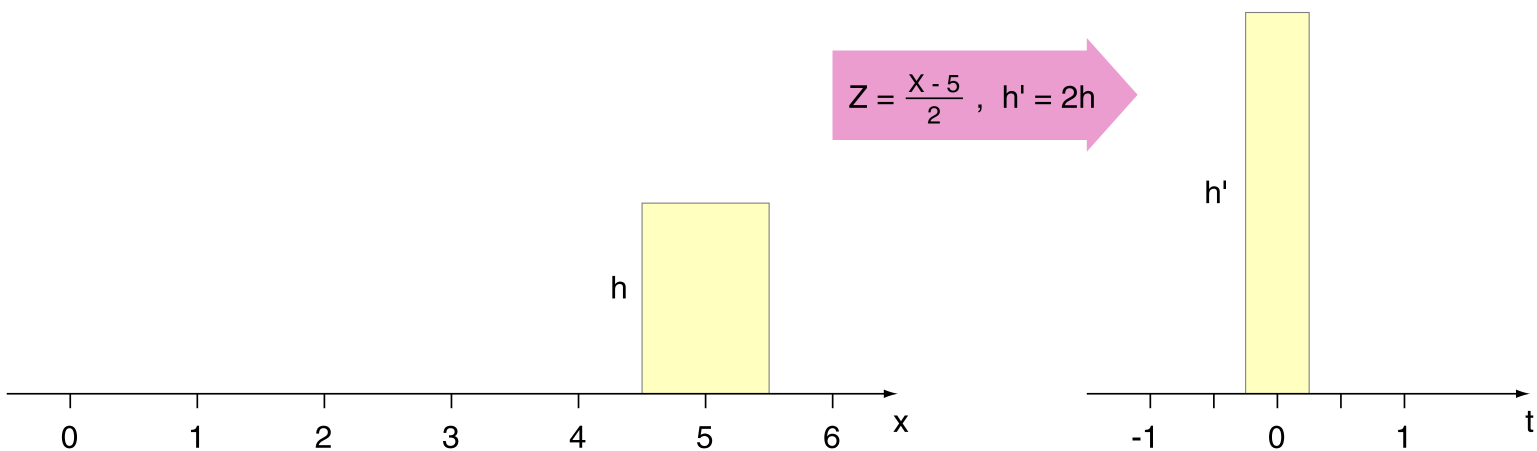
Varianz und Standardabweichung

Exkurs: Standardisierung von Zufallsgrößen

Standardisierung von Histgrammen:

- In Histogrammen repräsentieren Rechtecksinhalte Wahrscheinlichkeiten.
- Ändert sich bei $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ der Wert von X um 1, so ändert sich Z um $\frac{1}{\sigma}$.
- Nach der Standardisierung müssen ihre ursprünglichen Höhen mit dem Faktor σ gestreckt werden, damit ihre Flächen gleich bleiben.

Beispiel: Histogrammrechteck mit $\mu = 5$ und $\sigma = 2$.



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Varianz und Standardabweichung

Rechenregeln: Verschiebungsregel

Die Berechnung der Varianz gelingt oft leichter als mit der „großen“ Summe ihrer Definition 15:

Satz 19 (Verschiebungsregel)

Für die Varianz σ^2 einer Zufallsgröße X gilt:

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 \ .$$

Varianz und Standardabweichung

Rechenregeln: Verschiebungsregel

Die Berechnung der Varianz gelingt oft leichter als mit der „großen“ Summe ihrer Definition 15:

Satz 19 (Verschiebungsregel)

Für die Varianz σ^2 einer Zufallsgröße X gilt:

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 \,.$$

Herleitung:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 = \text{Var}(X) &= E((X-\mu)^2) \\
&= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \\
&= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \qquad \text{(Satz 9 und 12, } E(X)=\mu\text{)} \\
&= E(X^2) - \mu^2 \,.
\end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Diese wichtige und sehr oft angewendete Regel heißt Verschiebungsregel, weil sich $\sigma^2 = E((X-\mu)^2)$ bis auf die Konstante μ^2 durch $E(X^2)$ ausdrücken lässt, also eine Verschiebung von $E(X^2)$ um μ^2.

- Die Verschiebungsregel in allgemeinerer Form mit $c \in \mathbf{R}$ lautet (siehe Übungsaufgabe):

  $$\sigma^2 = E((X-c)^2) - (\mu - c)^2 \ .$$

  Oft ist es einfacher, $E((X-c)^2)$ bei geeignetem c zu berechnen, als $E(X^2)$. Sind die x_i beispielsweise recht große Zahlen, die man nicht schnell im Kopf quadrieren kann, wird c so gewählt, dass die absoluten Differenzen $|x_i - c|$ möglichst klein sind.

- In der Analogie der Masseverteilung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung (Erwartungswert als Schwerpunkt der Masseanordnung) entspricht die Varianz dem *Trägheitsmoment* der Masseverteilung bzgl. des Masseschwerpunktes μ. Die Verschiebungsregel ist in allgemeiner Form dann das Analogon des Steinerschen Satzes für Trägheitsmomente.

Varianz und Standardabweichung

Rechenregeln: Verschiebungsregel

Beispiel: Würfeln

- Sei X die Augenzahl beim Werfen eines Laplace-Würfels.
- Erwartungswert: $\mu = 3{,}5 = \frac{7}{2}$
- Anwendung der Verschiebungsregel:

$$\sigma^2 \;=\; \frac{1}{6} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) - \left(\frac{7}{2}\right)^2 \;=\; \frac{35}{12}$$

- Die Berechnung der Varianz nach Definition 14 ist aufwändiger.

Varianz und Standardabweichung

Rechenregeln: Additivität / Summenregel

Was ist die Varianz Var$(X+Y)$ der Summe zweier Zufallsgrößen?

Fall 1: X und Y sind unabhängig

- Sei $E(X)=E(Y)=0$, so dass Var$(X)=E(X^2)$ und Var$(Y)=E(Y^2)$:

$$
\begin{aligned}
\text{Var}(X+Y) &= E((X+Y)^2)-(E(X+Y))^2 && \text{(Verschiebungsregel für } Z=X+Y\text{)}\\
&= E((X+Y)^2) && (E(X)=E(Y)=E(X+Y)=0)\\
&= E(X^2+2XY+Y^2) &&\\
&= E(X^2)+2\cdot E(X\cdot Y)+E(Y^2) && \text{(Additivität Erwartungswert)}\\
&= E(X^2)+2\cdot E(X)\cdot E(Y)+E(Y^2) && \text{(Produktregel Erwartungswert)}\\
&= E(X^2)+E(Y^2) && (E(X)=E(Y)=E(X)\cdot E(Y)=0)\\
&= \text{Var}(X)+\text{Var}(Y) &&
\end{aligned}
$$

- Wenn $E(X)\neq 0$ oder $E(Y)\neq 0$ unterscheidet sich $X+Y$ nur um eine additive Konstantate, die nach Satz 17 keinen Einfluss auf die Varianz hat.

Varianz und Standardabweichung

Rechenregeln: Additivität / Summenregel

Was ist die Varianz Var$(X + Y)$ der Summe zweier Zufallsgrößen?

Fall 2: X und Y sind abhängig

- Sei $Y = X$ und X nicht degeneriert (Var$(X) \neq 0$):

$$\text{Var}(X + X) \;=\; \text{Var}(2X) \;=\; 2^2\text{Var}(X) \;\neq\; \text{Var}(X) + \text{Var}(X)$$

Varianz und Standardabweichung

Rechenregeln: Additivität / Summenregel

Satz 20 (Additivität der Varianz / Summenregel)

Die Varianz einer Summe zweier unabhängiger Zufallsgrößen X und Y auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ ist gleich der Summe ihrer Varianzen:

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)\ .$$

Varianz und Standardabweichung

Rechenregeln: Additivität / Summenregel

Satz 20 (Additivität der Varianz / Summenregel)

Die Varianz einer Summe zweier unabhängiger Zufallsgrößen X und Y auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ ist gleich der Summe ihrer Varianzen:

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) \ .$$

Mit Sätzen 17 und 20 lässt sich die Summenregel für die Varianz auch auf eine Linearkombination von n Zufallsgrößen übertragen:

Satz 21 (Varianz einer Linearkombination von Zufallsgrößen)

Für die Varianz der Linearkombination $a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$ ($a_i \in \mathbf{R}$) von n unabhängigen Zufallsgrößen X_i auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ gilt:

$$\text{Var}(a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n) = \text{Var}(a_1X_1) + \text{Var}(a_2X_2) + \ldots + \text{Var}(a_nX_n) \ .$$

Bemerkungen:

- Die Additivität der Varianz für unabhängige Zufallsgrößen entdeckte im Jahr 1853 Irénée-Jules Bienaymé (1796–1878, französischer Wahrscheinlichkeitstheoretiker und Statistiker).
- Im Unterschied zum Erwartungswert ist die Varianz kein lineares Funktionssymbol, da $\text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}(X) \neq a\text{Var}(X) + b$.
- Im Würfel-Beispiel wurde gezeigt, dass die Varianz der Augenzahl eines Wurfs $\frac{35}{12}$ ist. Bei zwei Würfen ist sie gemäß Summenregel $\frac{70}{12}$ und damit doppelt so hoch. Eine direkte Berechnung wird mit der Zahl der Würfe / Würfel immer aufwändiger.
- Das wichtigste Argument für die Varianz als Maß für die Variabilität einer Zufallsgröße ist ihre Additivität. Da die Varianz der Summe von unabhängigen Zufallsgrößen die Summe der Einzelvarianzen ist, bietet sie in vielen praktischen Situationen einen wesentlichen Rechenvorteil gegenüber alternativen Maßen, was wohl ein entscheidender Grund dafür war, dass sich die Varianz auch in der Theorie durchgesetzt hat.

Varianz und Standardabweichung

Beispiel: Münzwurfglücksspiel

- Es werden je eine faire 5-Cent-, 2-Cent- und 1-Cent-Münze geworfen.
- Alle Münzen, die „Zahl“ zeigen erhält der Spielende.
- Der Spieleinsatz je Wurf der drei Münzen („Dreierwurf“) beträgt 5 Cent.
- Was sind der Erwartungswert und die Varianz des Reingewinns der Bank?

Varianz und Standardabweichung

Beispiel: Münzwurfglücksspiel

- Es werden je eine faire 5-Cent-, 2-Cent- und 1-Cent-Münze geworfen.
- Alle Münzen, die „Zahl“ zeigen erhält der Spielende.
- Der Spieleinsatz je Wurf der drei Münzen („Dreierwurf“) beträgt 5 Cent.
- Was sind der Erwartungswert und die Varianz des Reingewinns der Bank?

- Seien $\Omega_i = \{\mathtt{K}; \mathtt{Z}\}$ $(i \in \{1; 2; 3\})$ Ergebnisräume der Einzelwürfe.
- Seien X_i entsprechende Zufallsgrößen für Verlust / Gewinn des Spielenden:

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega = \mathtt{K} \\ 1 & \text{für } \omega = \mathtt{Z} \end{cases}$$

- Sei Y Zufallsgröße des Reingewinns der Bank nach jedem Dreierwurf:

$$Y = 5 - 5 \cdot X_1 - 2 \cdot X_2 - 1 \cdot X_3$$

Varianz und Standardabweichung

Beispiel: Münzwurfglücksspiel

Mögliche Ergebnisse, Wahrscheinlichkeiten und Werte für die X_i und Y:

5 Cent	2 Cent	1 Cent	p	X_1	X_2	X_3	Y
K	K	K	$\frac{1}{8}$	0	0	0	5
K	K	Z	$\frac{1}{8}$	0	0	1	4
K	Z	K	$\frac{1}{8}$	0	1	0	3
K	Z	Z	$\frac{1}{8}$	0	1	1	2
Z	K	K	$\frac{1}{8}$	1	0	0	0
Z	K	Z	$\frac{1}{8}$	1	0	1	-1
Z	Z	K	$\frac{1}{8}$	1	1	0	-2
Z	Z	Z	$\frac{1}{8}$	1	1	1	-3

Varianz und Standardabweichung

Beispiel: Münzwurfglücksspiel

Mögliche Ergebnisse, Wahrscheinlichkeiten und Werte für die X_i und Y:

5 Cent	2 Cent	1 Cent	p	X_1	X_2	X_3	Y
K	K	K	$\frac{1}{8}$	0	0	0	5
K	K	Z	$\frac{1}{8}$	0	0	1	4
K	Z	K	$\frac{1}{8}$	0	1	0	3
K	Z	Z	$\frac{1}{8}$	0	1	1	2
Z	K	K	$\frac{1}{8}$	1	0	0	0
Z	K	Z	$\frac{1}{8}$	1	0	1	-1
Z	Z	K	$\frac{1}{8}$	1	1	0	-2
Z	Z	Z	$\frac{1}{8}$	1	1	1	-3

Abhängigkeit / Unabhängigkeit:

- Die X_i sind in allen Kombinationen unabhängig; aber nicht von Y:

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1 \wedge Y = -3) &= P(X_1 = 1 \wedge X_2 = 1 \wedge X_3 = 1) \\ &= P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 1) \cdot P(X_3 = 1) \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{8} \quad \neq \quad \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{8} = P(X_1 = 1) \cdot P(Y = -3)\ . \end{aligned}$$

- Anschaulich: $X_1 = 1$ folgt aus $Y \leq 0$, so dass X_1 abhängig von Y sein muss.

Varianz und Standardabweichung

Beispiel: Münzwurfglücksspiel

Mögliche Ergebnisse, Wahrscheinlichkeiten und Werte für die X_i und Y:

5 Cent	2 Cent	1 Cent	p	X_1	X_2	X_3	Y
K	K	K	$\frac{1}{8}$	0	0	0	5
K	K	Z	$\frac{1}{8}$	0	0	1	4
K	Z	K	$\frac{1}{8}$	0	1	0	3
K	Z	Z	$\frac{1}{8}$	0	1	1	2
Z	K	K	$\frac{1}{8}$	1	0	0	0
Z	K	Z	$\frac{1}{8}$	1	0	1	-1
Z	Z	K	$\frac{1}{8}$	1	1	0	-2
Z	Z	Z	$\frac{1}{8}$	1	1	1	-3

Erwartungswert und Varianz von X_i:

$$E(X_i) = 0 \cdot \tfrac{1}{2} + 1 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\,,$$

$$\text{Var}(X_i) = \left(0 - \tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \tfrac{1}{2} + \left(1 - \tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}\,.$$

Varianz und Standardabweichung

Beispiel: Münzwurfglücksspiel

Mögliche Ergebnisse, Wahrscheinlichkeiten und Werte für die X_i und Y:

5 Cent	2 Cent	1 Cent	p	X_1	X_2	X_3	Y
K	K	K	$\frac{1}{8}$	0	0	0	5
K	K	Z	$\frac{1}{8}$	0	0	1	4
K	Z	K	$\frac{1}{8}$	0	1	0	3
K	Z	Z	$\frac{1}{8}$	0	1	1	2
Z	K	K	$\frac{1}{8}$	1	0	0	0
Z	K	Z	$\frac{1}{8}$	1	0	1	-1
Z	Z	K	$\frac{1}{8}$	1	1	0	-2
Z	Z	Z	$\frac{1}{8}$	1	1	1	-3

Erwartungswert und Varianz von X_i:

$$E(X_i) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,,$$

$$\text{Var}(X_i) = \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\,.$$

Erwartungswert und Varianz von Y: (Anwendung der Verschiebungsregel)

$$E(Y) = 5 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{1}{8} - 1 \cdot \frac{1}{8} - 2 \cdot \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{8} = 1\,,$$

$$\text{Var}(Y) = 5^2 \cdot \frac{1}{8} + 4^2 \cdot \frac{1}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} + 2^2 \cdot \frac{1}{8} + 0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{1}{8} + 2^2 \cdot \frac{1}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} - 1^2 = 7{,}5\,.$$

Varianz und Standardabweichung

Beispiel: Münzwurfglücksspiel

Mögliche Ergebnisse, Wahrscheinlichkeiten und Werte für die X_i und Y:

5 Cent	2 Cent	1 Cent	p	X_1	X_2	X_3	Y
K	K	K	$\frac{1}{8}$	0	0	0	5
K	K	Z	$\frac{1}{8}$	0	0	1	4
K	Z	K	$\frac{1}{8}$	0	1	0	3
K	Z	Z	$\frac{1}{8}$	0	1	1	2
Z	K	K	$\frac{1}{8}$	1	0	0	0
Z	K	Z	$\frac{1}{8}$	1	0	1	-1
Z	Z	K	$\frac{1}{8}$	1	1	0	-2
Z	Z	Z	$\frac{1}{8}$	1	1	1	-3

Erwartungswert und Varianz von Y: (Anwendung übriger Rechenregeln)

$$\begin{aligned}
E(Y) &= E(5-5X_1-2X_2-1X_3) = 5-5\cdot E(X_1)-2\cdot E(X_2)-1\cdot E(X_3)\\
&= 5-5\cdot\tfrac{1}{2}-2\cdot\tfrac{1}{2}-1\cdot\tfrac{1}{2} \;=\; 1\,,\\
\text{Var}(Y) &= \text{Var}(5-5X_1-2X_2-1X_3) = \text{Var}(-5X_1-2X_2-1X_3)\\
&= (-5)^2\cdot\text{Var}(X_1)+(-2)^2\cdot\text{Var}(X_2)+(-1)^2\cdot\text{Var}(X_3)\\
&= (-5)^2\cdot\tfrac{1}{4}+(-2)^2\cdot\tfrac{1}{4}+(-1)^2\cdot\tfrac{1}{4} \;=\; 7{,}5\,.
\end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Ob das Berechnen des Erwartungswertes und der Varianz einer zusammengesetzten Zufallsgröße Y aus der Tabelle oder aus den Erwartungswerten und den Varianzen der einzelnen Zufallsgrößen X_i „einfacher“ oder schneller ist, hängt sicher von Art und Umfang des Experiments ab.

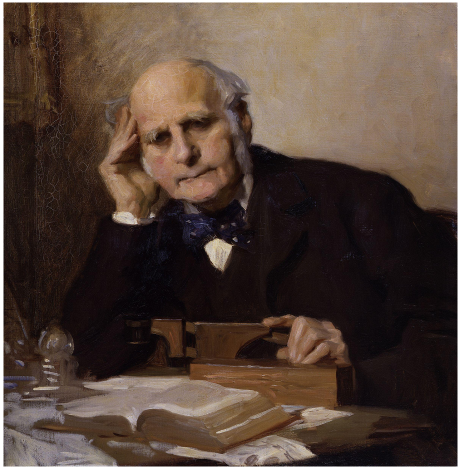
Kapitel PTS:V

V. Zufallsgrößen und Maßzahlen

- ❑ Zufallsgrößen
- ❑ Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- ❑ Verteilungsfunktionen
- ❑ Multiple Zufallsgrößen
- ❑ Erwartungswerte
- ❑ Varianz und Standardabweichung
- ❑ Das $\sqrt{n}$-Gesetz
- ❑ Schätzwerte für Erwartungswert und Standardabweichung

Das $\sqrt{n}$-Gesetz

Beispiel: Schätzwettbewerb

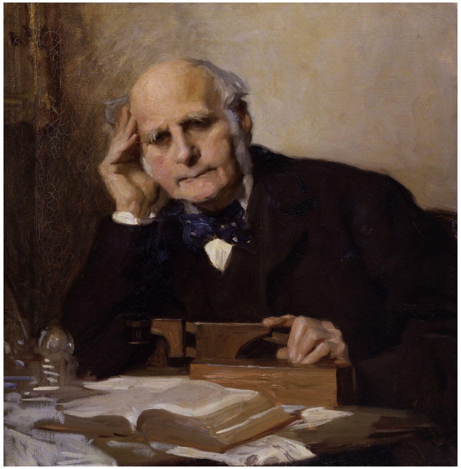


Sir Francis Galton (1822–1911, englischer Wissenschaftler) machte im Jahr 1906 folgende Beobachtung:

- Auf einer Nutztiermesse gab es einen Wettbewerb, das Schlachtgewicht eines Ochsen zu schätzen.
- Das tatsächliche Gewicht betrug 1198 Pfund.
- Es wurden rund 800 Schätzungen eingereicht, von denen 787 regulär waren.
- Der zunächst von Galton bestimmte Median der Schätzungen wich mit 1207 Pfund um weniger als 1% hiervon ab. [Nature 1907]

Das $\sqrt{n}$-Gesetz

Beispiel: Schätzwettbewerb



Sir Francis Galton (1822–1911, englischer Wissenschaftler) machte im Jahr 1906 folgende Beobachtung:

- Auf einer Nutztiermesse gab es einen Wettbewerb, das Schlachtgewicht eines Ochsen zu schätzen.
- Das tatsächliche Gewicht betrug 1198 Pfund.
- Es wurden rund 800 Schätzungen eingereicht, von denen 787 regulär waren.
- Der zunächst von Galton bestimmte Median der Schätzungen wich mit 1207 Pfund um weniger als 1% hiervon ab. [Nature 1907]
- Der Mittelwert der Schätzungen war fast korrekt: 1197 Pfund. [Nature 1907]
- Was hat es damit auf sich?

Das $\sqrt{n}$-Gesetz

Begriffsbildung: Messfehler

- Messinstrumente und Messungen mit ihnen sind fehlerbehaftet aufgrund
  - physikalischer Grenzen
  - begrenzter Messgenauigkeit
  - defekter Geräte und Materialien
  - falscher Anwendung

Das $\sqrt{n}$-Gesetz

Begriffsbildung: Messfehler

- Messinstrumente und Messungen mit ihnen sind fehlerbehaftet aufgrund
  - physikalischer Grenzen
  - begrenzter Messgenauigkeit
  - defekter Geräte und Materialien
  - falscher Anwendung

- Messfehler werden in systematische und unsystematische Fehler eingeteilt:
  - ein Quecksilber-Thermometer dessen Skala im Röhrchen „verrutscht“ ist
  - ein Thermometer, das zu nah an der Heizung oder in direkter Sonne misst
  - eine Armbanduhr, die die Dauer eines Tages auf die Minute genau misst
    Gemeint ist: Die Standardabweichung ist eine Minute.
  - Menschen, die eine Gewichtsschätzung nach „Augenmaß“ abgeben

Das $\sqrt{n}$-Gesetz

Begriffsbildung: Messfehler

- Messinstrumente und Messungen mit ihnen sind fehlerbehaftet aufgrund
  - physikalischer Grenzen
  - begrenzter Messgenauigkeit
  - defekter Geräte und Materialien
  - falscher Anwendung

- Messfehler werden in systematische und unsystematische Fehler eingeteilt:
  - ein Quecksilber-Thermometer dessen Skala im Röhrchen „verrutscht" ist
  - ein Thermometer, das zu nah an der Heizung oder in direkter Sonne misst
  - eine Armbanduhr, die die Dauer eines Tages auf die Minute genau misst
    Gemeint ist: Die Standardabweichung ist eine Minute.
  - Menschen, die eine Gewichtsschätzung nach „Augenmaß" abgeben

Das $\sqrt{n}$-Gesetz

Begriffsbildung: Messfehler

- Messinstrumente und Messungen mit ihnen sind fehlerbehaftet aufgrund
  - physikalischer Grenzen
  - begrenzter Messgenauigkeit
  - defekter Geräte und Materialien
  - falscher Anwendung
- Messfehler werden in systematische und unsystematische Fehler eingeteilt:
  - ein Quecksilber-Thermometer dessen Skala im Röhrchen „verrutscht“ ist
  - ein Thermometer, das zu nah an der Heizung oder in direkter Sonne misst
  - eine Armbanduhr, die die Dauer eines Tages auf die Minute genau misst
    Gemeint ist: Die Standardabweichung ist eine Minute.
  - Menschen, die eine Gewichtsschätzung nach „Augenmaß“ abgeben
- Systematische Fehler treten deterministisch, unsystematische zufällig auf.
- Systematische Fehler müssen manuell erkannt und eliminiert werden.
- Unsystematische Fehler können aufgrund physikalischer, technologischer, und/oder finanzieller Grenzen nicht zur Perfektion eliminiert werden.

Das $\sqrt{n}$-Gesetz

Begriffsbildung

- Wie kann man mit ungenauen Messgeräten dennoch genau messen?
- Erfahrungstatsache: Zufällige (unsystematische) Fehler in Einzelmessungen werden durch Mittelwertbildung mehrfacher Messungen kompensiert.
  Vorgehen nach dem Prinzip „Viel hilft viel“ bzw. Ausnutzung der „Weisheit der Vielen“.

Das $\sqrt{n}$-Gesetz

Begriffsbildung

- Wie kann man mit ungenauen Messgeräten dennoch genau messen?
- Erfahrungstatsache: Zufällige (unsystematische) Fehler in Einzelmessungen werden durch Mittelwertbildung mehrfacher Messungen kompensiert.
  Vorgehen nach dem Prinzip „Viel hilft viel“ bzw. Ausnutzung der „Weisheit der Vielen“.

Mathematische Präzisierung:

- Sie X eine Zufallsgröße, die eine Messung oder Beobachtung beschreibt.
- Die zugrundeliegende Messung wird n-mal unabhängig wiederholt.
- Die Gewährleistung der Unabhängigkeit der Messungen ist fallabhängig.

Das $\sqrt{n}$-Gesetz

Begriffsbildung

- Wie kann man mit ungenauen Messgeräten dennoch genau messen?
- Erfahrungstatsache: Zufällige (unsystematische) Fehler in Einzelmessungen werden durch Mittelwertbildung mehrfacher Messungen kompensiert.
  Vorgehen nach dem Prinzip „Viel hilft viel“ bzw. Ausnutzung der „Weisheit der Vielen“.

Mathematische Präzisierung:

- Sie X eine Zufallsgröße, die eine Messung oder Beobachtung beschreibt.
- Die zugrundeliegende Messung wird n-mal unabhängig wiederholt.
- Die Gewährleistung der Unabhängigkeit der Messungen ist fallabhängig.
- Beispiel: Messung einer Länge durch
  – Anlegen eines Lineals und zehnmaliges Ablesen.
  – zehnmaliges Anlegen eines Lineals und Ablesen.
  – zehn Personen mit eigenem Lineal ohne zwischenzeitliche Absprache.
- Unabhängige Messungen kompensieren unerkannte systematische Fehler.

Das $\sqrt{n}$-Gesetz
Begriffsbildung

- Die Zufallsgröße X_i kennzeichne die i-te Messung ($i \in \{1; 2; \ldots; n\}$).
- Aufgrund der Unabhängigkeit der X_i sind sie gleich verteilt, so dass gilt:

$$E(X_i) = \mu \qquad \text{und} \qquad \text{Var}(X_i) = \sigma^2 \ .$$

- Für das arithmetische Mittel

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

der Einzelmessungen X_i folgt mit den Sätzen 12, 17 und 21

$$E(\bar{X}) = \mu, \qquad \text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \qquad \text{und} \qquad \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ .$$

Das $\sqrt{n}$-Gesetz
Begriffsbildung

- Die Zufallsgröße X_i kennzeichne die i-te Messung ($i \in \{1; 2; \ldots; n\}$).
- Aufgrund der Unabhängigkeit der X_i sind sie gleich verteilt, so dass gilt:

$$E(X_i) = \mu \qquad \text{und} \qquad \text{Var}(X_i) = \sigma^2\ .$$

- Für das arithmetische Mittel

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

der Einzelmessungen X_i folgt mit den Sätzen 12, 17 und 21

$$E(\bar{X}) = \mu, \qquad \text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \qquad \text{und} \qquad \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ .$$

Satz 22 ($\sqrt{n}$-Gesetz)

Haben n unabhängige Zufallsgrößen X_i die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ, dann gilt für das arithmetische Mittel $\bar{X}$:

$$E(\bar{X}) = \mu \qquad \text{und} \qquad \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ .$$

Bemerkungen:

- Interpretiert man σ als Maß für die Ungenauigkeit der Einzelmessungen X_i, bzw. σ^2 als mittleren quadratischen Fehler der Einzelmessung, so wird mit $\bar{X}$ der vor den Messungen unbekannte Erwartungswert μ besser geschätzt, da die Ungenauigkeit $\sigma(\bar{X})$ um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{n}}$ kleiner ist als σ.

- Je größer n ist, desto mehr Messungen werden gemittelt und umso weniger sollte der Mittelwert um den Erwartungswert streuen. Die Beeinflussung der einzelnen Messergebnisse durch Zufälligkeiten kann also durch die Akkumulation von Messergebnissen deutlich verringert werden.

- Für die Tatsache, dass der Fehler des arithmetischen Mittels von der Größe $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ist, hat sich die Bezeichnung $\sqrt{n}$-Gesetz (Wurzel-n-Gesetz) eingebürgert.

- Das $\sqrt{n}$-Gesetz bestätigt die (intuitive) Erfahrung, dass die Genauigkeit einer Messung durch Mittelwertbildung mit zunehmender Anzahl von Einzelmessungen steigt. Auch bei noch so ungenauen Messgeräten (sofern sie frei von systematischen Fehlern sind, also $E(\bar{X}) = E(X_i) = \mu$) lässt sich durch Mittelwertbildung eine Messung im Prinzip genauer gestalten, als dies selbst mit einem sehr genauen Messgerät bei einer Einzelmessung möglich ist.

- Praktisch ist es aber oft nicht ganz so einfach: Für eine Verdopplung der Genauigkeit genügen nach dem $\sqrt{n}$-Gesetz vier Messungen, für eine Steigerung um eine Zehnerpotenz müssen es aber schon 100 Messungen sein, usw.

Das $\sqrt{n}$-Gesetz

Beispiel: Meinungsumfragen

- Im Vorlauf der Bundestagswahl 2009 erschien ein Patt (je 50% der Sitze) zwischen den beiden politisch gegenüberstehenden Lagern möglich.
- Eine Befragung von 1000 Bürger:innen ergab ein Ergebnis von 52:48 für eine Koalition.
- Die „Messgenauigkeit" der Umfrage von $\frac{1}{\sqrt{1000}} \approx 0{,}03$ entspricht $\pm 3\%$.
- Die Umfrageergebnisse könnten also auch eine mit Zufallsfehler behaftete Messung für ein 49:51-Ergebnis sein, unabhängig von ihrer Repräsentativität.

Schätzwerte für Erwartungswert und Standardabweichung

Begriffsbildung

- Die Berechnung von μ und σ setzt voraus, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X bekannt ist.
- Für Ergebnisräume mit Laplace-Annahme kann sie meist konstruiert werden.
- Liegt X die Messung einer physikalischen Größe zugrunde, können die Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$ meist nur näherungsweise durch die relativen Häufigkeiten $h_n(X = x_i) = h_i$ bei n Messungen bestimmt werden.

Schätzwerte für Erwartungswert und Standardabweichung
Begriffsbildung

- Die Berechnung von μ und σ setzt voraus, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X bekannt ist.
- Für Ergebnisräume mit Laplace-Annahme kann sie meist konstruiert werden.
- Liegt X die Messung einer physikalischen Größe zugrunde, können die Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$ meist nur näherungsweise durch die relativen Häufigkeiten $h_n(X = x_i) = h_i$ bei n Messungen bestimmt werden.
- Ein Schätzwert für μ ist der arithmetische Mittelwert

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot h_i \ .$$

- Ein Schätzwert für σ ist die (empirische) Standardabweichung

$$s = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 \cdot h_i} \ .$$

Bemerkungen:

- Die Standardabweichung s ist ein Maß für die Streuung der Messwerte um den Mittelwert, also für die *Ungenauigkeit der Messreihe*. Man nennt sie oft auch mittlerer quadratischer Fehler der Messung, obwohl auch das eigentlich „ungenau" ist, da es ja eigentlich die Wurzel des mittleren quadratischen Fehlers ist (das Englische „root mean square error" ist präziser).
- Ein Maß für die *Ungenauigkeit des Mittelwertes* ist $\frac{s}{\sqrt{n}}$, wobei n die Anzahl der Messwerte ist.
- Liegen Messungen verschiedener Größen X und Y vor, so bezeichnet man Mittelwert und Standardabweichung auch oft als $m(X)$ und $m(Y)$ (manchmal auch M) bzw. $s(X)$ und $s(Y)$.