

Kapitel L:IV

IV. Nichtklassische Logiken

- ❑ Fuzzy-Mengen
- ❑ Modifizierer für Fuzzy-Mengen
- ❑ Operationen auf Fuzzy-Mengen
- ❑ Fuzzy-Inferenz
- ❑ Defuzzifizierung

Fuzzy-Inferenz

Aussagenlogik versus Fuzzy-Logik

Aussagenlogische Regel: $a \rightarrow b$

- ❑ Definiert einen Bezug zwischen zwei Aussagen.
- ❑ Aussagen stehen für Wahrheitswerte, d.h. klassische Mengen.

Fuzzy-Regel: $A \rightarrow B$

- ❑ Definiert einen Bezug zwischen zwei Aussagen.
- ❑ Aussagen stehen für *Fuzzy-Mengen*.

Syntax: kein Unterschied zwischen klassischer Logik und Fuzzy-Logik.

Semantik in der Fuzzy-Logik:

- ❑ Information über die Prämisse ist unscharf.
- ❑ Beziehung zwischen Prämisse und Konklusion ist unscharf.

Welche Information resultiert für die Konklusion?

Bemerkungen:

- ❑ Für die Definition der unscharfen Implikation gibt es verschiedene Ansätze, die die logische Repräsentation der Implikation bzw. ihre semantischen Eigenschaften in die Fuzzy-Logik übertragen:
 - S-Implikation:
 $a \rightarrow b \approx \neg a \vee b$ und $I(A, B) = S(C(A), B)$
 - QL-Implikation:
 $a \rightarrow b \approx \neg a \vee (a \wedge b)$ und $I(A, B) = S(C(A), T(A, B))$
 - R-Implikationen $\mathfrak{I}(a \rightarrow b) = \max\{z \in \{0, 1\} \mid \min(\mathfrak{I}(x), z) \leq \mathfrak{I}(y)\}$ und $I(A, B) = \sup\{z \in [0, 1] \mid T(A, z) \leq B\}$
- ❑ Mit der Auswahl von C -dualen T-Normen T und T-Conormen S ergeben sich eine Vielzahl von unscharfen Implikationsdefinitionen.
- ❑ Wichtig ist, dass alle drei Definitionen extensional sind in dem Sinne, dass die Ergebnisse nicht von den konkreten (scharfen) Werten der Grundbereiche der Fuzzy-Mengen abhängig sind, sondern nur von den Werten für μ_A und μ_B .

Fuzzy-Inferenz

Generalisierter Modus Ponens

Seien A', A Fuzzy-Mengen über X und B', B Fuzzy-Mengen über Y . Dann beschreibt der generalisierte Modus Ponens (GMP) folgenden Zusammenhang:

$$A' \text{ AND } (\text{IF } A \text{ THEN } B) \mid_{\text{Fuzzy}} B'$$

Fuzzy-Inferenz

Generalisierter Modus Ponens

Seien A', A Fuzzy-Mengen über X und B', B Fuzzy-Mengen über Y . Dann beschreibt der generalisierte Modus Ponens (GMP) folgenden Zusammenhang:

$$A' \text{ AND } (\text{IF } A \text{ THEN } B) \mid_{\text{Fuzzy}} B'$$

Idee: eine Regel bestimmt einen funktionalen Operator, der die Fuzzy-Menge A' (d.h. $\mu_{A'}$) auf die Fuzzy-Menge B' (d.h. $\mu_{B'}$) abbildet. Eine Regel wird hier als Relation über $X \times Y$ aufgefasst:

$$B' = A' \circ R,$$

wobei R die Fuzzy-Relation für die Regel bezeichnet. Zugehörigkeitsfunktionen für Relationen werden über den Minimum-Operator bestimmt.

Fuzzy-Inferenz

Generalisierter Modus Ponens (Fortsetzung)

Problematik im diskreten Fall.

Es gilt $A' \subseteq A$ und $B' \subseteq B$, und sei $A' = \{a'_2, a'_3\} \subseteq A$, z.B. $\{0.7/180cm, 0.8/190cm\}$, und sei $B' = \{b'_2, b'_3\} \subseteq B$, z.B. $\{0.6/70kg, 0.8/80kg\}$.

1. Welcher Zusammenhang gilt zwischen A' und B' ?

$$a'_i \rightsquigarrow b'_j, \quad i, j \in \{2, 3\}$$

2. Welcher Zusammenhang gilt zwischen A und B ?

$$a_i \rightsquigarrow b_j, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}$$

3. In welcher Stärke gilt ein Zusammenhang?

$$\text{grad}(a_i \rightsquigarrow b_j)$$

Fuzzy-Inferenz

Generalisierter Modus Ponens (Fortsetzung)

Beispiel:

- $\text{height} = \{\text{small}, \text{medium}, \text{tall}\}$
- $\text{weight} = \{\text{low}, \text{medium}, \text{heavy}\}$
- $\text{height_is_tall} = \{a_1, a_2, a_3\} = \{0.6/170\text{cm}, 0.8/180\text{cm}, 0.9/190\text{cm}\}$
- $\text{weight_is_heavy} = \{b_1, b_2, b_3\} = \{0.5/60\text{kg}, 0.7/70\text{kg}, 0.9/80\text{kg}\}$
- IF height_is_tall THEN weight_is_heavy

Fragen:

- Ist mit der Regel aus $\text{height_is_very_tall}$ auch $\text{weight_is_very_heavy}$ herleitbar?
- Ist mit der Regel auch aus height_is_small etwas herleitbar?

Fuzzy-Inferenz

Generalisierter Modus Ponens (Fortsetzung)

Definition 5 (Compositional Rule of Inference, CRI [Zadeh 1973])

Für eine Regel „IF A THEN B “ mit Fuzzy-Mengen A, A' über X und B über Y wird die Fuzzy Menge B' über Y definiert durch:

$$\mu_{B'}(y) := \sup\{\min(\mu_{A'}(x), \min(\mu_A(x), \mu_B(y))) \mid x \in X\} \quad \text{für } y \in Y$$

Lokale Korrektheit:

Im Falle $A' = A$ ergibt sich $B' = B$. Die lokale Korrektheit ist gegeben, falls z.B.

$$\sup\{\mu_A(x) \mid x \in X\} = 1$$

Fuzzy-Inferenz

Max-Min-Inferenz [Mamdani 1977]

Im diskreten Fall lässt sich die Fuzzy-Relation für die Regel R : IF A THEN B durch eine Matrix beschreiben:

- Aufstellung der Menge aller Paare für zwei Fuzzy-Mengen $A = (\mu_A(x_1), \dots)$ und $B = (\mu_B(y_1), \dots)$ über diskreten Grundbereichen X bzw. Y :

$$M_R = \begin{pmatrix} \mu_R(x_1, y_1) & \mu_R(x_1, y_2) & \dots \\ \mu_R(x_2, y_1) & \mu_R(x_2, y_2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

- $\mu_R(x_i, y_j)$ ist der Grad, mit dem x_i und y_j über die Regel in Beziehung stehen.
- Mit Darstellung von A' als Vektor und Regel R als Matrix ergibt sich B' durch „Fuzzy-Vektor-Matrix-Multiplikation“.
- Statt des Supremum kann in der Definition CRI der Maximum Operator gewählt werden.

Fuzzy-Inferenz

Vektor-Matrix-Multiplikation

In der Algebra:

$$\begin{matrix} x \\ 1 \times n \end{matrix} \cdot \begin{matrix} A \\ n \times p \end{matrix} = \begin{matrix} y \\ 1 \times p \end{matrix} \quad \text{also} \quad y_j = \sum_{i=1}^n x_i a_{ij}$$

Fuzzy-Vektor-Matrix-Multiplikation \circ :

- paarweise Multiplikation führt zu paarweiser Minimum-Bildung
- Summation führt zu Maximum-Bildung

Fuzzy-Inferenz

Vektor-Matrix-Multiplikation

In der Algebra:

$$\begin{matrix} x & \cdot & A & = & y \\ 1 \times n & & n \times p & & 1 \times p \end{matrix} \quad \text{also} \quad y_j = \sum_{i=1}^n x_i a_{ij}$$

Fuzzy-Vektor-Matrix-Multiplikation \circ :

- paarweise Multiplikation führt zu paarweiser Minimum-Bildung
- Summation führt zu Maximum-Bildung

Für eine Regel IF A THEN B :

- A , A' und B sind auf X bzw. Y definierte Fuzzy-Mengen
- $A = (a_1, a_2, \dots, a_n); \quad a_i = \mu_A(x_i)$
 $A' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_n); \quad a'_i = \mu_{A'}(x_i)$
 $B = (b_1, b_2, \dots, b_p); \quad b_i = \mu_B(y_i)$
- $1 \times p$ -Matrix: $A' \circ M_R = B'$, mit $b'_j = \max\{\min(a'_i, \min(a_i, b_j)) \mid 1 \leq i \leq n\}$

Fuzzy-Inferenz

Vektor-Matrix-Multiplikation

Beispiel:

Sei $A' = (0.2, 0.4, 0.6, 1)$ und

$$M_R = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.8 \\ 0.6 & 0.8 & 0.6 \\ 0.8 & 0.6 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} b'_1 &= \max\{\min\{0.2, 0.1\}, \min\{0.4, 0.6\}, \min\{0.6, 0.8\}, \min\{1, 0\}\} \\ &= \max\{0.1, 0.4, 0.6, 0\} \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b'_2 &= \max\{0.2, 0.4, 0.6, 0.5\} \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b'_3 &= \max\{0.2, 0.4, 0.5, 0.5\} \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

Fuzzy-Inferenz

Max-Min-Inferenz

Als Implikations-Operator wird \min verwendet:

$$m_{ij} = \text{grad}(a_i \rightarrow b_j) = \min(a_i, b_j)$$

Sind die Fuzzy-Mengen A , B und A' über diskreten Grundbereichen gegeben, so kann der durch A' induzierte Vektor B' durch die Fuzzy-Vektor-Matrix-Multiplikation ermittelt werden:

$$B' = A' \circ M$$

$$b'_j = \max\{\min(a'_i, m_{ij}) \mid 1 \leq i \leq n\}$$

Fuzzy-Inferenz

Max-Min-Inferenz

Beispiel:

- $A = \text{normal_temperature}$ ist Fuzzy-Menge auf Grundbereich X .
- $B = \text{medium_velocity}$ ist Fuzzy-Menge auf Grundbereich Y .
- $\underbrace{\text{IF temperature is normal}}_{\text{IF } A} \quad \underbrace{\text{THEN velocity is medium}}_{\text{THEN } B}$
- $A = \text{normal_temperature} = (0/100, 0.5/125, 1/150, 0.5/175, 0/200)$
- $B = \text{medium_velocity} = (0/10, 0.6/20, 1/30, 0.6/40, 0/50)$

Fuzzy-Inferenz

Max-Min-Inferenz

Beispiel (Fortsetzung):

$$M = (m_{ij}) = (\min\{a_i, b_j\}) = \begin{pmatrix} \min\{0, 0\} & \min\{0, 0.6\} & \min\{0, 1\} & \min\{0, 0.6\} & \min\{0, 0\} \\ \min\{0.5, 0\} & \min\{0.5, 0.6\} & \min\{0.5, 1\} & \min\{0.5, 0.6\} & \min\{0.5, 0\} \\ \min\{1, 0\} & \dots & & & \\ \dots & & & & \\ \dots & & & & \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.6 & 1 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Weiterhin sei $A' = (0/100, 1.0/125, 0/150, 0/175, 0/200)$.

A' repräsentiert einen scharfen Temperaturwert von 125 Grad mit Zugehörigkeitswert 0.5 zur Fuzzy-Menge `normal_temperature`.

Fuzzy-Inferenz

Max-Min-Inferenz

Beispiel (Fortsetzung):

Durch Vektor-Matrix-Multiplikation ergibt sich $B' = A' \circ M$ mit

$$b'_j = \max_{1 \leq i \leq n} \{\min\{a'_i, m_{ij}\}\}$$

Man erhält:

$$b'_1 = \max\{\min\{0, 0\}, \min\{1.0, 0\}, \min\{0, 0\}, \min\{0, 0\}, \min\{0, 0\}\}$$

$$b'_2 = \dots$$

...

$$B' = (0/10, 0.5/20, 0.5/30, 0.5/40, 0/50)$$

Vektor-Matrix-Multiplikation führt das Gewünschte aus:

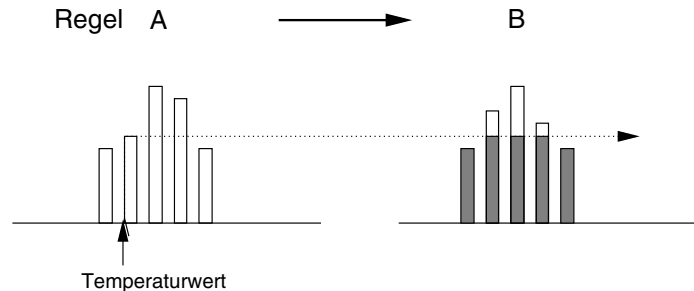
- Konstruktion von B' auf Basis von A' und $A \rightarrow B$
- Konstruktion von $B' \subseteq B$ auf Basis von $A' \subseteq A$ und $A \rightarrow B$

Fuzzy-Inferenz

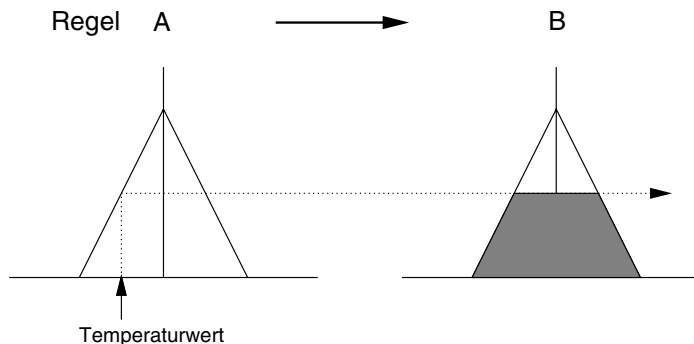
Max-Min-Inferenz

Spezialfall: A' gegeben durch scharfen (Mess-)Wert aus Grundbereich X . Die induzierte Fuzzy-Menge B' ist eine abgeschnittene Kopie von B , dessen Höhe durch A' definiert ist.

Diskrete Situation:



Kontinuierliche Situation:



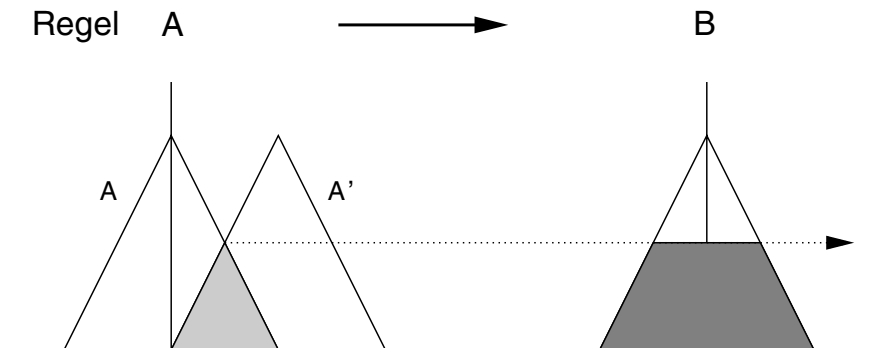
Fuzzy-Inferenz

Max-Min-Inferenz

$$A' \wedge (A \rightarrow B) \big|_{\text{Fuzzy}} B' \quad \equiv \quad A' \circ M = B' = (0, 0.5, 0.5, 0.5, 0)$$

Ist der Input A' für die Regel IF A THEN B in unscharfer Form gegeben, so wird durch die Max-Min-Inferenz

1. das Faktum A' durch „Durchschnittsbildung“ (Minimum bzw. Konjunktion) mit der Prämisse A der Regel verrechnet,
2. das Supremum ein einzelner Wert ermittelt und
3. zum „Abschneiden“ der Zugehörigkeitsfunktion von B in der Regel verwendet:



Bemerkungen:

- ❑ Das Abschneiden zur Bildung der induzierten Fuzzy-Menge ist charakteristisch für die Max-Min-Inferenz.
- ❑ $A' = (0, 1.0, 0, 0, 0)$ resultiert aus dem scharfen Wert 125.
- ❑ Besteht A' aus einem scharfen (einzelnen) Wert x_k , kann direkt die Fuzzy-Mengen-Repräsentation von B , $\mu_B(y)$, benutzt werden, um B' auszurechnen:

$$B' = (\min(\mu_A(x_k), \mu_B(y_1)) / y_1, \dots)$$

$$\mu_A(125) = 0.5$$

$$B' = (\min\{0.5, 0\}, \min\{0.5, 0.6\}, \dots) = (0, 0.5, 0.5, 0.5, 0)$$

Fuzzy-Inferenz

Max-Produkt-Inferenz

Anstelle der t-Norm $\min(x, y)$ für die Konjunktion kann auch das algebraische Produkt $x \cdot y$ verwendet werden.

- Als Implikations-Operator wird wieder die Konjunktion verwendet, also ebenfalls das Produkt:

$$m_{ij} = \text{grad}(a_i \rightarrow b_j) = a_i \cdot b_j$$

im Fall diskreter Grundbereiche.

- Sind die Fuzzy-Mengen A , B und A' über diskreten Grundbereichen gegeben, so kann der durch A' induzierte Vektor B' durch die Fuzzy-Vektor-Matrix-Multiplikation ermittelt werden:

$$B' = A' \circ M$$

$$b'_j = \max\{a'_i \cdot m_{ij} \mid 1 \leq i \leq n\}$$

Fuzzy-Inferenz

Max-Produkt-Inferenz

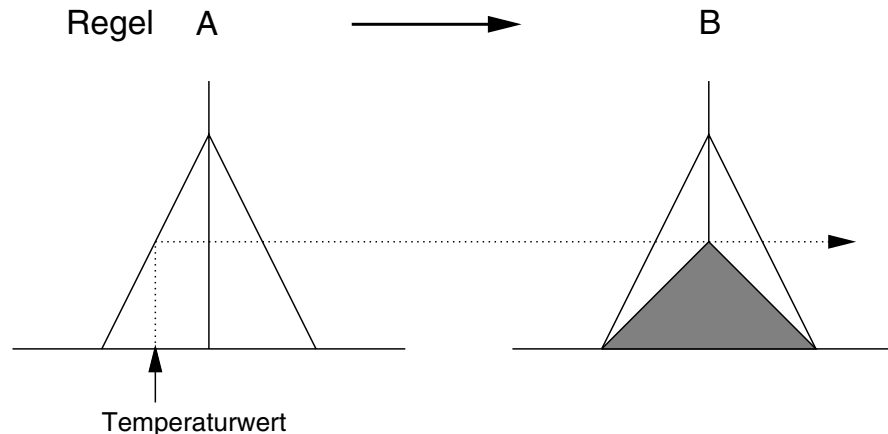
Beispiel:

$$A = (0, 0.5, 1, 0.5, 0)$$

$$B = (0, 0.6, 1, 0.6, 0)$$

$$M = (m_{ij}) = (a_i \cdot b_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.5 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.6 & 1 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.5 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für einen scharfen Wert $A' = (0, 1.0, 0, 0, 0)$ ergibt die Vektor-Matrix-Multiplikation \circ die Fuzzy-Menge $B' = (0, 0.3, 0.5, 0.3, 0)$. B' ist eine verkleinerte Version von B .



Bemerkungen:

- ❑ Max-Produkt-Inferenz erhält mehr Information als Max-Min-Inferenz.
- ❑ Besteht A' aus einem scharfen (einzelnen) Wert x_k , kann direkt die Fuzzy-Mengen-Repräsentation von B , $\mu_B(y)$, benutzt werden, um B' auszurechnen:

$$B' = (\mu_A(x_k) \cdot \mu_B(y_1)) / y_1, \dots)$$

$$\mu_A(125) = 0.5$$

$$B' = 0.5 \cdot (0, 0.6, 1, 0.6, 0) = (0, 0.3, 0.5, 0.3, 0)$$

- ❑ Für die Zusammenfassung von komplexen Prämissen in Regeln muss nicht unbedingt das dazu passende duale Paar von T-Norm und T-Conorm für Konjunktion und Disjunktion, also $T(x, y) = x \cdot y$, $S(x, y) = x + y - x \cdot y$ gewählt werden. Auch die min und max sind möglich.

Fuzzy-Inferenz

Regeln mit mehreren Prämissen

Sei R : IF A AND B THEN C eine Fuzzy-Regel und die Fuzzy-Mengen A , B und C auf den Grundbereichen X , Y und Z definiert.

Vorgehensweise:

1. Definition von zwei Verknüpfungsmatrizen M_{AC} und M_{BC} .
2. Gegeben sei A' als konkreter Input für A und B' für B , dann können zwei induzierte Fuzzy-Mengen $C_{A'}$ und $C_{B'}$ unabhängig voneinander berechnet werden:

$$A' \circ M_{AC} = C_{A'}$$

$$B' \circ M_{BC} = C_{B'}$$

3. Die Verknüpfung in der Regel R definiert die Verknüpfung der Fuzzy-Mengen $C_{A'}$ und $C_{B'}$. Bei AND-Verknüpfung:

$$C' = (A' \circ M_{AC}) \wedge (B' \circ M_{BC}) = C_{A'} \wedge C_{B'}$$

Fuzzy-Inferenz

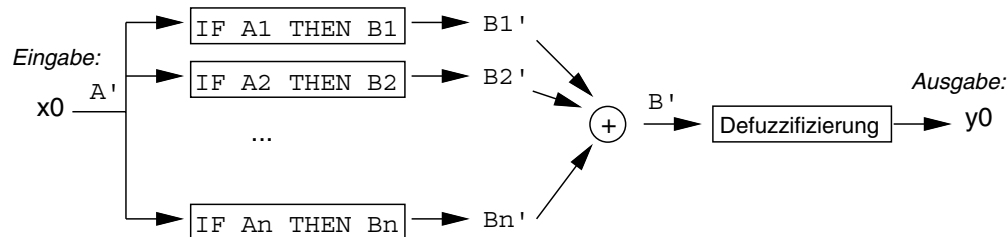
Multiple Regeln

Beispiel:

Gegeben sind n Fuzzy-Regeln mit den Fuzzy-Mengen A_i über dem Grundbereich X und B_i über Y in den Prämissen bzw. Konklusionen. Sei A' über X die Fuzzy-Menge einer scharfen Eingabe – resultierend z. B. aus einer Messung.

1. Jede Fuzzy-Inferenz mit Regel R_i induzierte eine Fuzzy-Menge B'_i .
2. Die Resultate der Regeln werden in B' zusammengefasst:

$$\begin{aligned} B' &= B'_1 \cup B'_2 \cup \dots \cup B'_n \\ &= \int_X \max(\mu_{B_1}(x), \mu_{B_2}(x), \dots, \mu_{B_n}(x)) / x \end{aligned}$$



Gibt es sinnvollere Methoden zur Zusammenfassung?

Bemerkungen:

- ❑ Grundsätzlich kann nicht vorausgesetzt werden, dass alle Regeln nach derselben Inferenzmethode ausgewertet werden.
- ❑ Wir betrachten hier nur den Ansatz, mit einzelnen Regeln zu inferieren und die Ergebnisse zusammenzufügen. Stichwort: lokale Inferenz
- ❑ Alternativ kann man auch die gesamte Regelmenge zu einer „Super-Relation“ zusammenfügen und dann mit dem Input inferieren. Stichwort: globale Inferenz

Fuzzy-Inferenz

Multiple Regeln

Zusammenfassung der Ergebnismengen einzelner Regeln:

- ❑ „Winner takes it all.“

Vereinigung der induzierten Fuzzy-Mengen [Mamdani]

- ❑ „One man, one vote.“

Punktweise beschränkte Summe der Zugehörigkeitswerte

- ❑ Regeln können ihrer Bedeutung entsprechend gewichtet werden. Die Gewichtung wird bei der Zusammenfassung berücksichtigt.

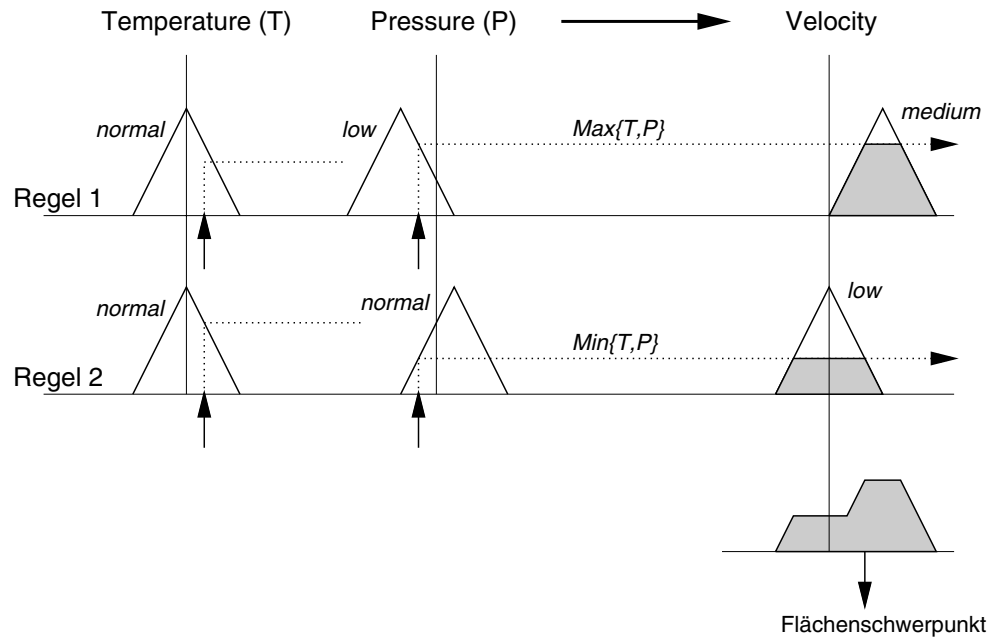
Fuzzy-Inferenz

Multiple Regeln

Beispiel:

R_1 : IF temperature is normal OR pressure is low
THEN velocity is medium

R_2 : IF temperature is normal AND pressure is normal
THEN velocity is low



Inferenz-Operator ist Max-Min-Inferenz.

Defuzzifizierung

Defuzzifizierung ist die Generierung scharfer Werte einer induzierten Fuzzy-Menge B' , Grundbereich Y .

Möglichkeiten:

1. Max-Methode:

Wähle das (erste) $y_0 \in Y$ als scharfen Wert, für das $\mu_{B'}(y_0)$ maximal ist.

2. Mittelwert-Max-Methode:

Wähle als scharfen Wert das arithmetische Mittel der Werte $y \in Y$, für die $\mu_{B'}(y)$ maximal ist.

3. Flächenschwerpunkt-Methode:

Wähle das $y_0 \in Y$ als scharfen Wert, das sich durch eine Projektion des Flächenschwerpunktes der Zugehörigkeitsfunktion $\mu_{B'}$ ergibt:

$$y_0 = \frac{\int_Y y \cdot \mu_{B'}(y) dy}{\int_Y \mu_{B'}(y) dy}$$

Bemerkungen:

- ❑ Defuzzifizierung spielt eine wichtige Rolle, wenn mehrere Regeln die gleiche linguistische Variable betreffen.
- ❑ Die Flächenschwerpunktmethode (COG Center of Gravity) wird mit der Vereinigung zur Aggrgierung der Ergebnisse mehrerer Regeln kombiniert.