

# Kapitel ADS:V

## V. Suchen

- Binary Search Tree
- AVL Tree
- Red-Black Tree
- B-Tree

# Binary Search Tree

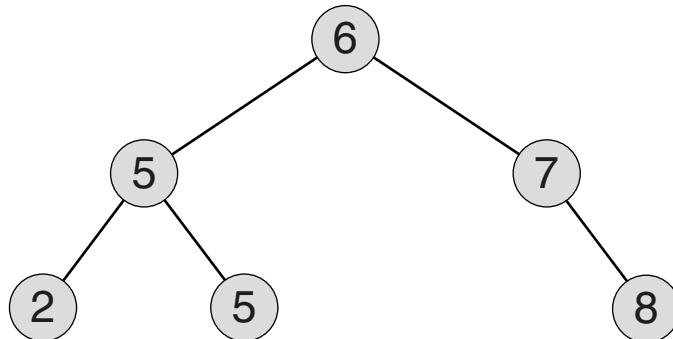
## Definition

Ein Binärbaum  $T$  heißt Binary Search Tree (*Binärer Suchbaum*), wenn jeder seiner Knoten  $x$  folgende Bedingung erfüllt:

$$y.\text{key} \leq x.\text{key} \leq z.\text{key}$$

wobei  $y$  ein Knoten im linken Teilbaum von  $x$  ist und  $z$  ein Knoten im rechten.

Beispiel:



# Binary Search Tree

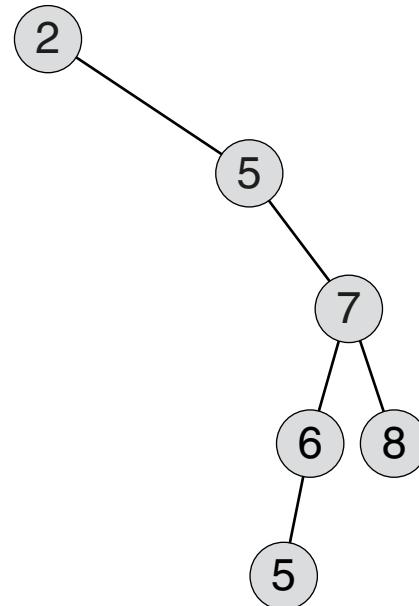
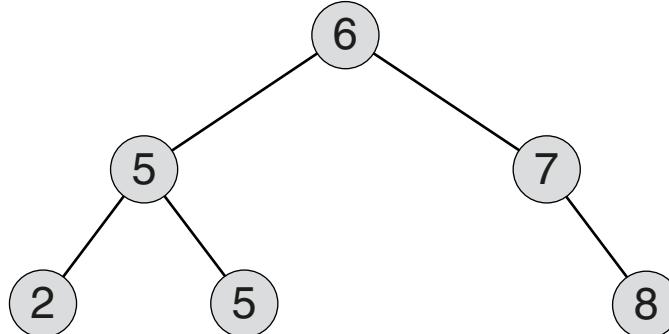
## Definition

Ein Binärbaum  $T$  heißt Binary Search Tree (*Binärer Suchbaum*), wenn jeder seiner Knoten  $x$  folgende Bedingung erfüllt:

$$y.\text{key} \leq x.\text{key} \leq z.\text{key}$$

wobei  $y$  ein Knoten im linken Teilbaum von  $x$  ist und  $z$  ein Knoten im rechten.

Beispiel:



# Binary Search Tree

## Implementierung

- Link-basierter Binärbaum

## Manipulation

- Knoten in Sortierreihenfolge besuchen  
Traversierung des Baumes mit DFS-Traverse (in-order).
- Knoten suchen (*Search*)  
Einen Knoten mit vorgegebenem Schlüssel suchen.
- Minimum, Maximum, oder Nachfolger (*Successor*) bestimmen  
Den Knoten mit kleinstem, größten oder nächstgrößten Sortierschlüssel bestimmten.
- Knoten einfügen (*Insert*)  
Einen Knoten an der richtigen Stelle im Baum einfügen.
- Knoten löschen (*Delete*)  
Einen bestimmten Knoten aus dem Baum löschen.
- Knoten verändern  
Den Schlüssel eines bestimmten Knotens ändern.

## Bemerkungen:

- ❑ Die Bedingung, die ein Binary Search Tree erfüllen muss, wird auch „Binary Search Tree Property“ genannt.
- ❑ Die Implementierung eines Binary Search Tree ist link-basiert, damit alle Manipulationsoperationen effizient umsetzbar sind.
- ❑ Wenn die Menge zu durchsuchender Elemente statisch ist, genügt es, sie Array-basiert zu speichern, zu sortieren und die binäre Suche anzuwenden.

# Binary Search Tree

## Manipulation: Suche

Algorithmus: Tree Search.

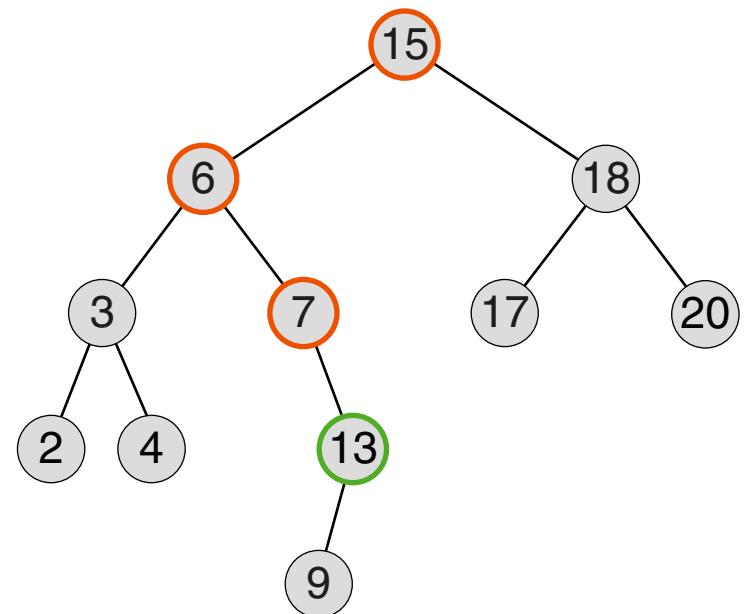
Eingabe:  $x$ . Wurzel eines Binary Search Tree  $T$ .  
 $k$ . Gesuchter Schlüssel.

Ausgabe: Knoten, der  $k$  als Schlüssel hat, oder  $\text{NIL}$ .

*TreeSearch*( $x, k$ )

```
1. WHILE  $x \neq \text{NIL}$  AND  $k \neq x.\text{key}$  THEN  
2.   IF  $k < x.\text{key}$  THEN  
3.      $x = x.\text{left}$   
4.   ELSE  
5.      $x = x.\text{right}$   
6.   ENDIF  
7. ENDDO  
8. return( $x$ )
```

Beispiel: *TreeSearch*( $T.\text{root}, 13$ )



# Binary Search Tree

## Manipulation: Suche

Algorithmus: Tree Search.

Eingabe: *x*. Wurzel eines Binary Search Tree *T*.  
*k*. Gesuchter Schlüssel.

Ausgabe: Knoten, der *k* als Schlüssel hat, oder *NIL*.

*TreeSearch(x, k)*

1. **WHILE** *x*  $\neq$  *NIL* **AND** *k*  $\neq$  *x.key* **THEN**
2.     **IF** *k*  $<$  *x.key* **THEN**
3.         *x* = *x.left*
4.     **ELSE**
5.         *x* = *x.right*
6.     **ENDIF**
7. **ENDDO**
8. **return**(*x*)

Laufzeit:

- Iterationen der While-Schleife:  
Längster Pfad von der Wurzel zu einem Blattknoten.
- $O(h)$ , wobei  $h$  die Baumhöhe ist.

# Binary Search Tree

## Manipulation: Minimum

Algorithmus: Tree Minimum.

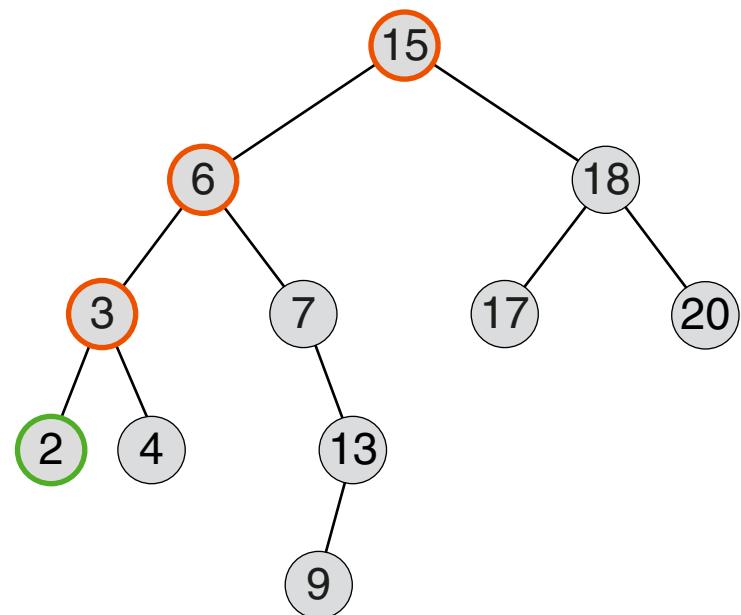
Eingabe:  $x$ . Wurzel eines Binary Search Tree  $T$ .

Ausgabe: Knoten mit dem kleinsten Schlüssel.

*TreeMinimum( $x$ )*

1. **WHILE**  $x.left \neq NIL$  **DO**
2.    $x = x.left$
3. **ENDDO**
4. **return**( $x$ )

Beispiel: *TreeMinimum( $T.root$ )*



# Binary Search Tree

## Manipulation: Maximum

Algorithmus: Tree Maximum.

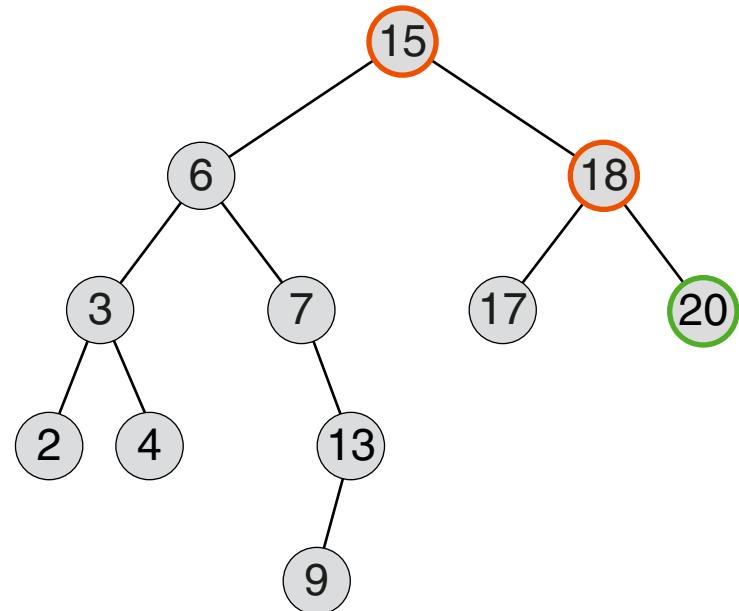
Eingabe:  $x$ . Wurzel eines Binary Search Tree  $T$ .

Ausgabe: Knoten mit dem größten Schlüssel.

*TreeMaximum( $x$ )*

1. **WHILE**  $x.right \neq NIL$  **DO**
2.    $x = x.right$
3. **ENDDO**
4. **return**( $x$ )

Beispiel: *TreeMaximum( $T.root$ )*



# Binary Search Tree

## Manipulation: Maximum

Algorithmus: Tree Maximum.

Eingabe:  $x$ . Wurzel eines Binary Search Tree  $T$ .

Ausgabe: Knoten mit dem größten Schlüssel.

*TreeMaximum( $x$ )*

1. **WHILE**  $x.right \neq NIL$  **DO**
2.      $x = x.right$
3. **ENDDO**
4. **return**( $x$ )

Laufzeit:

- Iterationen der While-Schleife:  
Längster rechter Pfad von der Wurzel zu einem Blattknoten.
- $O(h)$ , wobei  $h$  die Baumhöhe ist.
- Analog für *TreeMinimum*.

# Binary Search Tree

## Manipulation: Nachfolger

Algorithmus: Tree Successor.

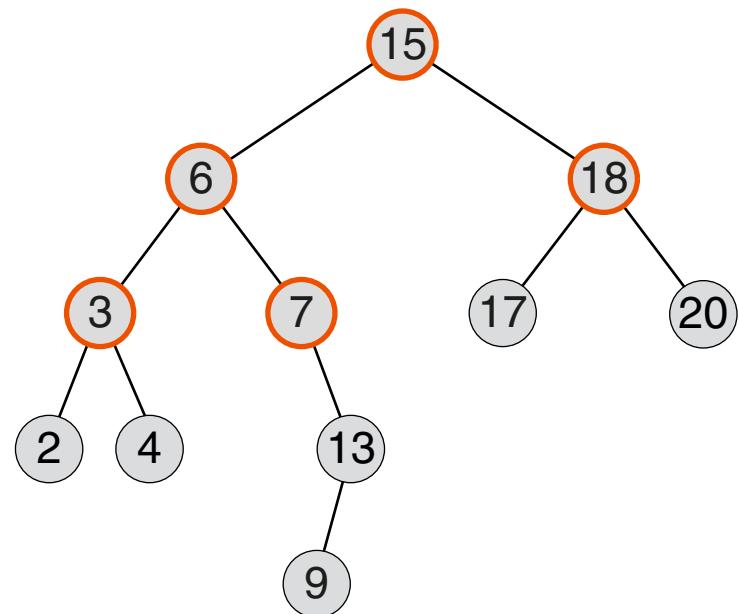
Eingabe:  $x$ . Knoten eines Binary Search Tree  $T$ .

Ausgabe: Knoten mit dem nächstgrößten Schlüssel, oder  $NIL$ .

*TreeSuccessor( $x$ )*

```
1. IF  $x.right \neq NIL$  THEN  
2.   return(TreeMinimum( $x.right$ ))  
3. ENDIF  
4.  $y = x.parent$   
5. WHILE  $y \neq NIL$  AND  $x == y.right$  DO  
6.    $x = y$   
7.    $y = y.parent$   
8. ENDDO  
9. return( $y$ )
```

Beispiel: *TreeSuccessor( $x$ )*



# Binary Search Tree

## Manipulation: Nachfolger

Algorithmus: Tree Successor.

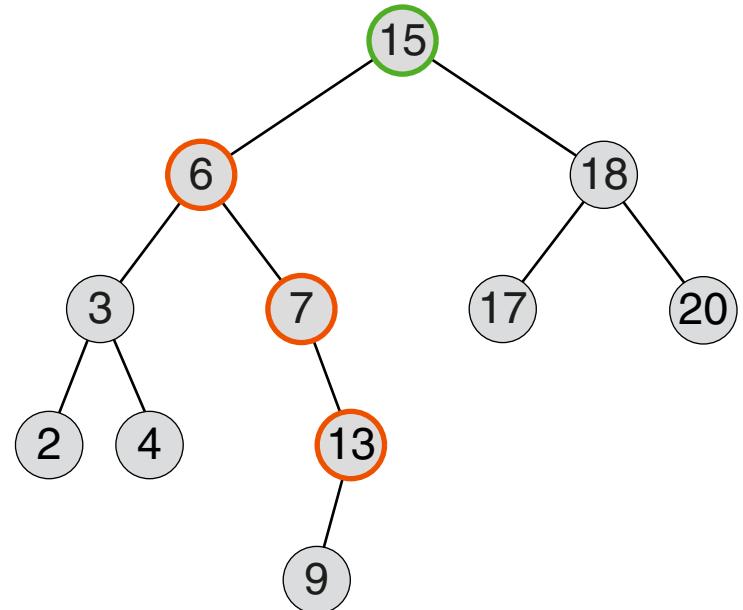
Eingabe:  $x$ . Knoten eines Binary Search Tree  $T$ .

Ausgabe: Knoten mit dem nächstgrößten Schlüssel, oder  $NIL$ .

*TreeSuccessor( $x$ )*

```
1. IF  $x.right \neq NIL$  THEN  
2.   return(TreeMinimum( $x.right$ ))  
3. ENDIF  
4.  $y = x.parent$   
5. WHILE  $y \neq NIL$  AND  $x == y.right$  DO  
6.    $x = y$   
7.    $y = y.parent$   
8. ENDDO  
9. return( $y$ )
```

Beispiel: *TreeSuccessor( $x$ )*,  $x.key = 13$



# Binary Search Tree

## Manipulation: Nachfolger

Algorithmus: Tree Successor.

Eingabe:  $x$ . Knoten eines Binary Search Tree  $T$ .

Ausgabe: Knoten mit dem nächstgrößten Schlüssel, oder  $NIL$ .

*TreeSuccessor( $x$ )*

1. **IF**  $x.right \neq NIL$  **THEN**
2.     *return(TreeMinimum( $x.right$ ))*
3. **ENDIF**
4.      $y = x.parent$
5. **WHILE**  $y \neq NIL$  **AND**  $x == y.right$  **DO**
6.          $x = y$
7.          $y = y.parent$
8. **ENDDO**
9.     *return( $y$ )*

Laufzeit:

- Iterationen der While-Schleife:  
Längster Pfad von der Wurzel zu einem Blattknoten
- $O(h)$ , wobei  $h$  die Baumhöhe ist.

# Binary Search Tree

## Manipulation: Einfügen

Algorithmus: Tree Insert.

Eingabe:  $T$ . Binary Search Tree.  
 $z$ . Einzufügender Knoten mit Schlüssel  $k$ .

Ausgabe: Um  $z$  erweiterter Binary Search Tree.

Vorgehen:

- Finde den Elter des einzufügenden Knotens.
- Wenn der Baum leer ist, füge den Knoten als neue Wurzel ein.
- Andernfalls, füge den Knoten gemäß der Binary Search Tree Property als linkes oder rechts Kind des gefundenen Elterknotens ein.

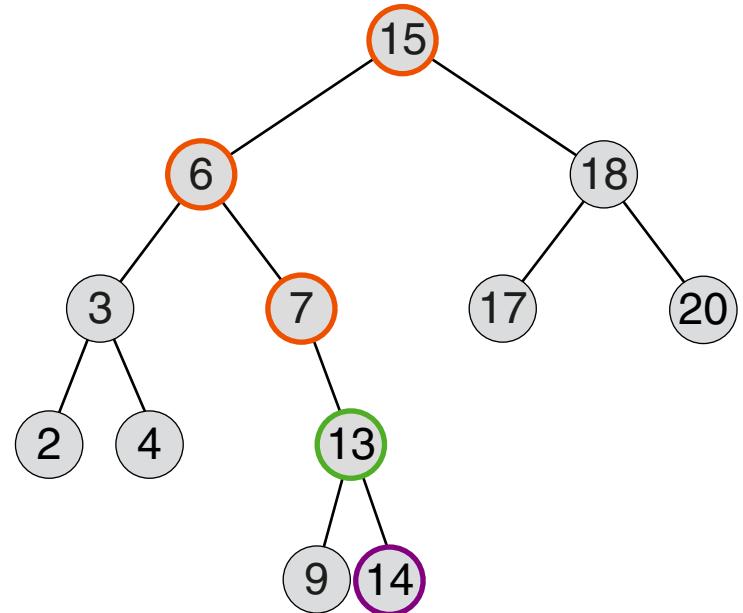
# Binary Search Tree

## Manipulation: Einfügen

*TreeInsert*( $T, z$ )

```
1.   $y = \text{NIL}$ 
2.   $x = T.\text{root}$ 
3.  WHILE  $x \neq \text{NIL}$  DO
4.       $y = x$ 
5.      IF  $z.\text{key} < x.\text{key}$  THEN
6.           $x = x.\text{left}$ 
7.      ELSE
8.           $x = x.\text{right}$ 
9.      ENDIF
10.     ENDDO
11.      $z.\text{parent} = y$ 
12.     IF  $y == \text{NIL}$  THEN
13.          $T.\text{root} = z$ 
14.     ELSE IF  $z.\text{key} < y.\text{key}$  THEN
15.          $y.\text{left} = z$ 
16.     ELSE
17.          $y.\text{right} = z$ 
18.     ENDIF
```

Beispiel: *TreeInsert*( $T, z$ ),  $z.\text{key} = 14$



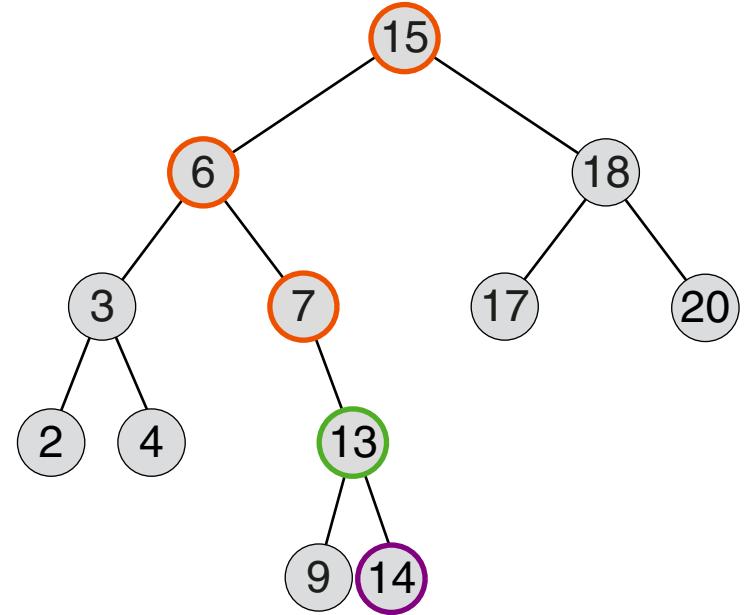
# Binary Search Tree

## Manipulation: Einfügen

*TreeInsert*( $T, z$ )

```
1.   $y = \text{NIL}$ 
2.   $x = T.\text{root}$ 
3.  WHILE  $x \neq \text{NIL}$  DO
4.       $y = x$ 
5.      IF  $z.\text{key} < x.\text{key}$  THEN
6.           $x = x.\text{left}$ 
7.      ELSE
8.           $x = x.\text{right}$ 
9.      ENDIF
10.     ENDDO
11.      $z.\text{parent} = y$ 
12.     IF  $y == \text{NIL}$  THEN
13.          $T.\text{root} = z$ 
14.     ELSE IF  $z.\text{key} < y.\text{key}$  THEN
15.          $y.\text{left} = z$ 
16.     ELSE
17.          $y.\text{right} = z$ 
18.     ENDIF
```

Beispiel: *TreeInsert*( $T, z$ ),  $z.\text{key} = 14$



Laufzeit:

- Iterationen der While-Schleife:  
Längster Pfad von der Wurzel zu einem Blattknoten
- $O(h)$ , wobei  $h$  die Baumhöhe ist.

# Binary Search Tree

Manipulation: Löschen [Red-Black Tree]

Algorithmus: Transplant.

Eingabe:  $T$ . Binary Search Tree.

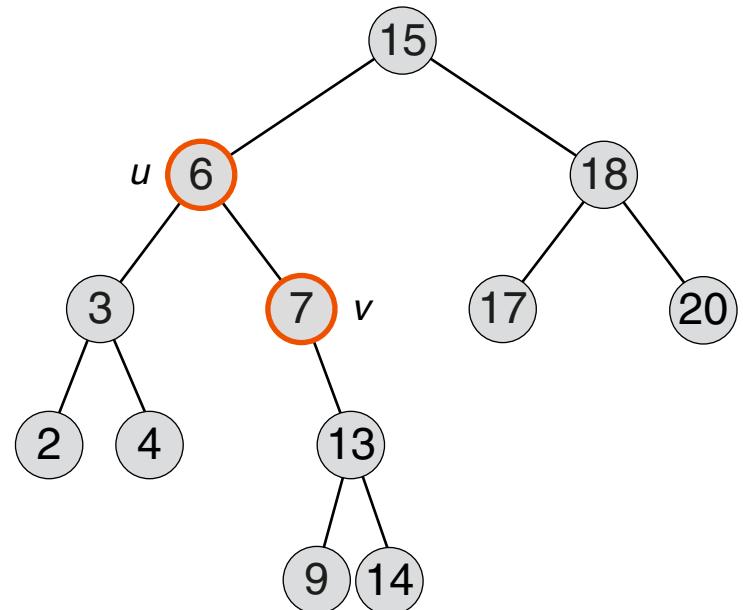
$u, v$ . Wurzeln von Teilbäumen von  $T$ ; ggf.  $v = \text{NIL}$ .

Ausgabe: Binärbaum, bei dem  $u$  durch  $v$  ersetzt wurde.

*Transplant( $T, u, v$ )*

1. **IF**  $u.parent == \text{NIL}$  **THEN**
2.      $T.root = v$
3. **ELSE IF**  $u == u.parent.left$  **THEN**
4.      $u.parent.left = v$
5. **ELSE**
6.      $u.parent.right = v$
7. **ENDIF**
8. **IF**  $v \neq \text{NIL}$  **THEN**
9.      $v.parent = u.parent$
10. **ENDIF**

Beispiel: *Transplant( $T, u, v$ )*



# Binary Search Tree

Manipulation: Löschen [Red-Black Tree]

Algorithmus: Transplant.

Eingabe:  $T$ . Binary Search Tree.

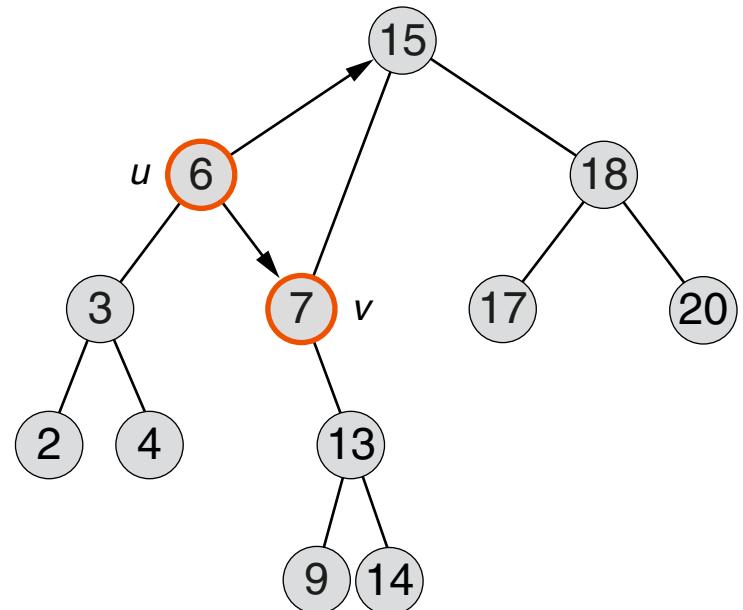
$u, v$ . Wurzeln von Teilbäumen von  $T$ ; ggf.  $v = \text{NIL}$ .

Ausgabe: Binärbaum, bei dem  $u$  durch  $v$  ersetzt wurde.

*Transplant( $T, u, v$ )*

1. **IF**  $u.parent == \text{NIL}$  **THEN**
2.    $T.root = v$
3. **ELSE IF**  $u == u.parent.left$  **THEN**
4.    $u.parent.left = v$
5. **ELSE**
6.    $u.parent.right = v$
7. **ENDIF**
8. **IF**  $v \neq \text{NIL}$  **THEN**
9.    $v.parent = u.parent$
10. **ENDIF**

Beispiel: *Transplant( $T, u, v$ )*



# Binary Search Tree

Manipulation: Löschen [Red-Black Tree]

Algorithmus: Transplant.

Eingabe:  $T$ . Binary Search Tree.

$u, v$ . Wurzeln von Teilbäumen von  $T$ ; ggf.  $v = NIL$ .

Ausgabe: Binärbaum, bei dem  $u$  durch  $v$  ersetzt wurde.

*Transplant( $T, u, v$ )*

1. **IF**  $u.parent == NIL$  **THEN**
2.      $T.root = v$
3. **ELSE IF**  $u == u.parent.left$  **THEN**
4.      $u.parent.left = v$
5. **ELSE**
6.      $u.parent.right = v$
7. **ENDIF**
8. **IF**  $v \neq NIL$  **THEN**
9.      $v.parent = u.parent$
10. **ENDIF**

Laufzeit:

- Alle Anweisungen sind in  $O(1)$ .
- $O(1)$  Gesamlaufzeit.

# Binary Search Tree

## Manipulation: Löschen

Algorithmus: Tree Delete.

Eingabe:  $T$ . Binary Search Tree.  
 $z$ . Zu löschernder Knoten.

Ausgabe: Binary Search Tree, bei dem  $z$  gelöscht wurde.

Fallunterscheidung:

1.  $z$  hat keine Kinder.

Ersetze  $z$  bei seinem Elter durch  $T.nil$ .

2.  $z$  hat ein Kind.

Ersetze  $z$  bei seinem Elter durch (a) sein rechtes bzw. (b) sein linkes Kind.

3.  $z$  hat zwei Kinder.

(a)  $z$ s Nachfolger  $y$  ist sein rechtes Kind.

Ersetze  $z$  durch  $y$ .

(b)  $z$ s Nachfolger  $y$  ist ein anderer Knoten seinem rechten Teilbaum.

Ersetze  $y$  durch sein rechtes Kind und mache  $y$  zur Wurzel von  $z$ s rechtem Teilbaum.

Ersetze  $z$  durch  $y$ .

# Binary Search Tree

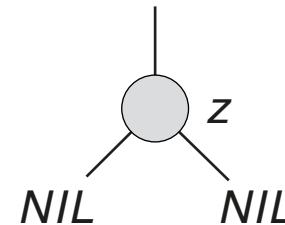
## Manipulation: Löschen

*TreeDelete*( $T, z$ )

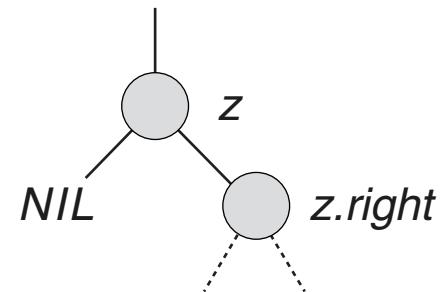
1. **IF**  $z.left == NIL$  **THEN**
2.     *Transplant*( $T, z, z.right$ )
3. **ELSE IF**  $z.right == NIL$  **THEN**
4.     *Transplant*( $T, z, z.left$ )
5. **ELSE**
6.      $y = \text{TreeMinimum}(z.right)$
7.     **IF**  $y.parent \neq z$  **THEN**
8.         *Transplant*( $T, y, y.right$ )
9.          $y.right = z.right$
10.         $y.right.parent = y$
11.     **ENDIF**
12.     *Transplant*( $T, z, y$ )
13.      $y.left = z.left$
14.      $y.left.parent = y$
15. **ENDIF**

Fälle:

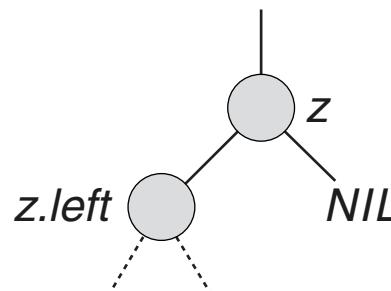
1.



2a.



2b.



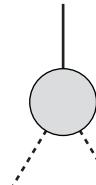
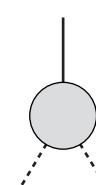
# Binary Search Tree

## Manipulation: Löschen

*TreeDelete*( $T, z$ )

1. **IF**  $z.left == NIL$  **THEN**
2.     *Transplant*( $T, z, z.right$ )
3. **ELSE IF**  $z.right == NIL$  **THEN**
4.     *Transplant*( $T, z, z.left$ )
5. **ELSE**
6.      $y = TreeMinimum(z.right)$
7.     **IF**  $y.parent \neq z$  **THEN**
8.         *Transplant*( $T, y, y.right$ )
9.          $y.right = z.right$
10.         $y.right.parent = y$
11.     **ENDIF**
12.     *Transplant*( $T, z, y$ )
13.      $y.left = z.left$
14.      $y.left.parent = y$
15. **ENDIF**

Fälle:

1.   $z.right$
- 2a.   $z.left$
- 2b.   $z.right$

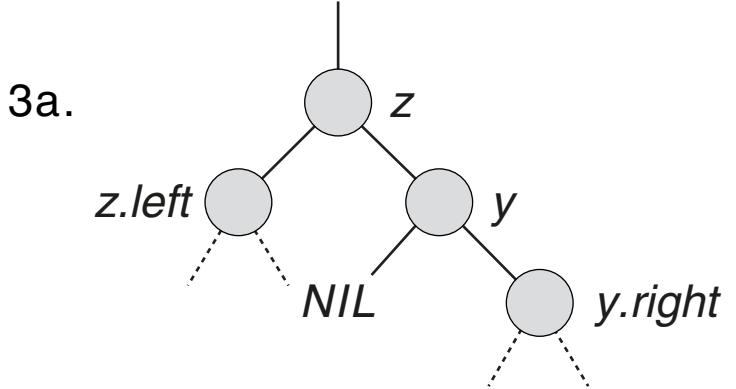
# Binary Search Tree

## Manipulation: Löschen

*TreeDelete*( $T, z$ )

1. **IF**  $z.left == NIL$  **THEN**
2.     *Transplant*( $T, z, z.right$ )
3. **ELSE IF**  $z.right == NIL$  **THEN**
4.     *Transplant*( $T, z, z.left$ )
5. **ELSE**
6.      $y = \text{TreeMinimum}(z.right)$
7.     **IF**  $y.parent \neq z$  **THEN**
8.         *Transplant*( $T, y, y.right$ )
9.          $y.right = z.right$
10.          $y.right.parent = y$
11.     **ENDIF**
12.     *Transplant*( $T, z, y$ )
13.      $y.left = z.left$
14.      $y.left.parent = y$
15. **ENDIF**

Fälle:



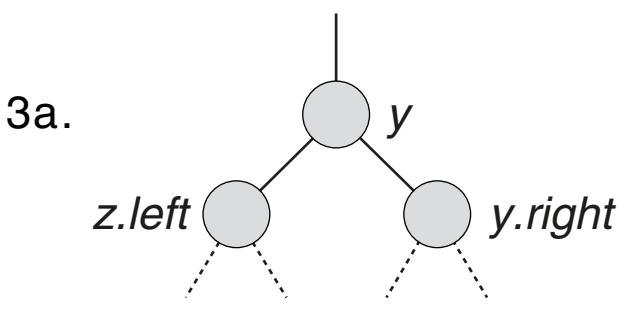
# Binary Search Tree

## Manipulation: Löschen

*TreeDelete*( $T, z$ )

1. **IF**  $z.left == NIL$  **THEN**
2.     *Transplant*( $T, z, z.right$ )
3. **ELSE IF**  $z.right == NIL$  **THEN**
4.     *Transplant*( $T, z, z.left$ )
5. **ELSE**
6.      $y = \text{TreeMinimum}(z.right)$
7.     **IF**  $y.parent \neq z$  **THEN**
8.         *Transplant*( $T, y, y.right$ )
9.          $y.right = z.right$
10.          $y.right.parent = y$
11.     **ENDIF**
12.     *Transplant*( $T, z, y$ )
13.      $y.left = z.left$
14.      $y.left.parent = y$
15. **ENDIF**

Fälle:



# Binary Search Tree

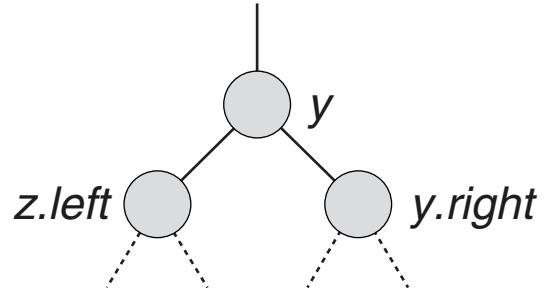
## Manipulation: Löschen

*TreeDelete*( $T, z$ )

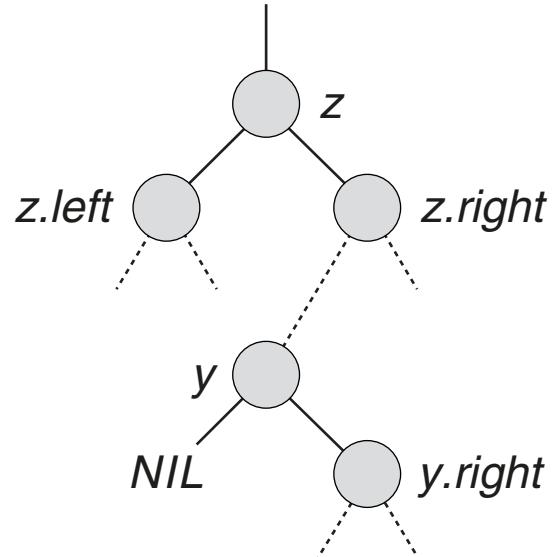
1. **IF**  $z.left == NIL$  **THEN**
2.     *Transplant*( $T, z, z.right$ )
3. **ELSE IF**  $z.right == NIL$  **THEN**
4.     *Transplant*( $T, z, z.left$ )
5. **ELSE**
6.      $y = \text{TreeMinimum}(z.right)$
7.     **IF**  $y.parent \neq z$  **THEN**
8.         *Transplant*( $T, y, y.right$ )
9.          $y.right = z.right$
10.         $y.right.parent = y$
11.     **ENDIF**
12.     *Transplant*( $T, z, y$ )
13.      $y.left = z.left$
14.      $y.left.parent = y$
15. **ENDIF**

Fälle:

3a.



3b.



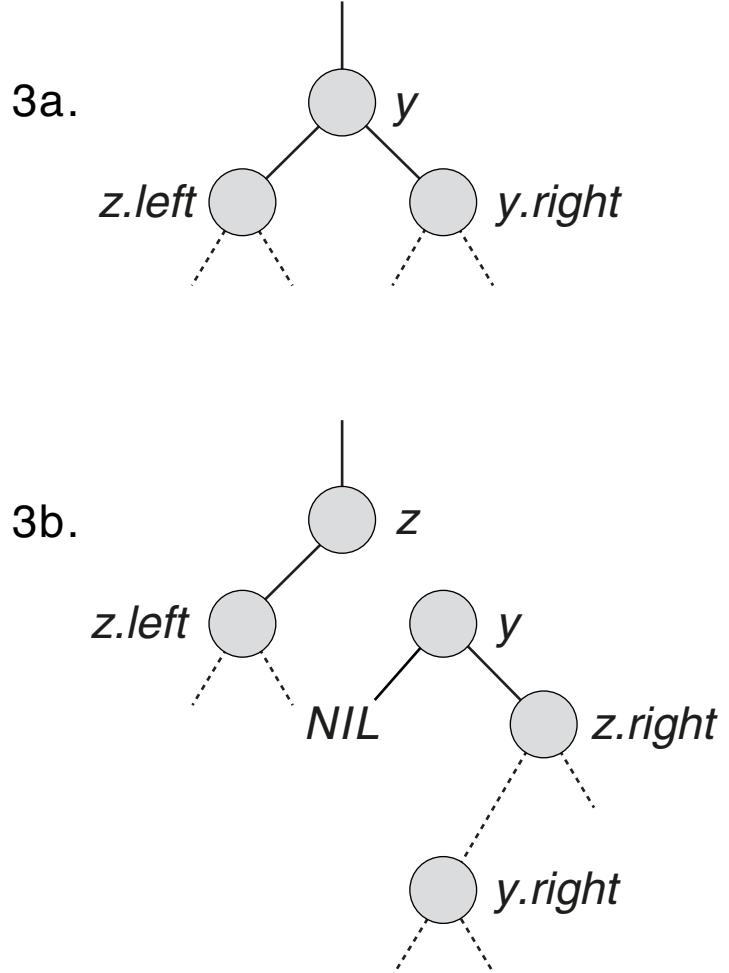
# Binary Search Tree

## Manipulation: Löschen

*TreeDelete*( $T, z$ )

1. **IF**  $z.left == NIL$  **THEN**
2.     *Transplant*( $T, z, z.right$ )
3. **ELSE IF**  $z.right == NIL$  **THEN**
4.     *Transplant*( $T, z, z.left$ )
5. **ELSE**
6.      $y = \text{TreeMinimum}(z.right)$
7.     **IF**  $y.parent \neq z$  **THEN**
8.         *Transplant*( $T, y, y.right$ )
9.          $y.right = z.right$
10.         $y.right.parent = y$
11.     **ENDIF**
12.     *Transplant*( $T, z, y$ )
13.      $y.left = z.left$
14.      $y.left.parent = y$
15. **ENDIF**

Fälle:



# Binary Search Tree

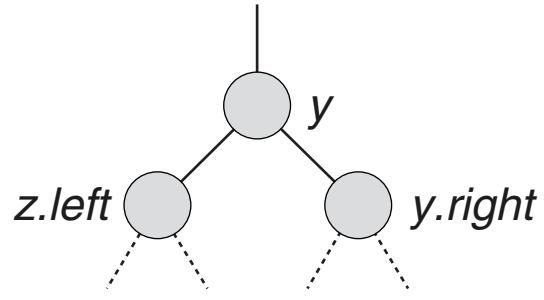
## Manipulation: Löschen

*TreeDelete*( $T, z$ )

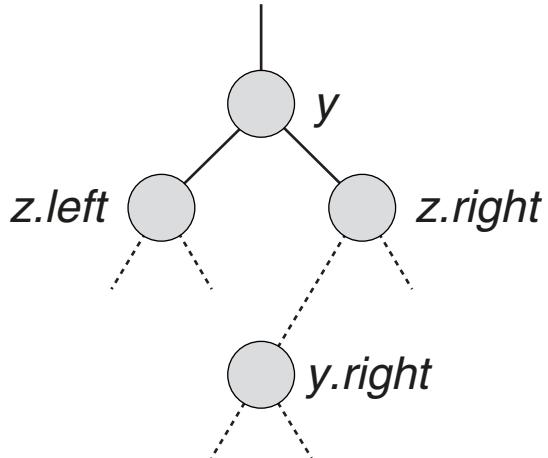
1. **IF**  $z.left == NIL$  **THEN**
2.     *Transplant*( $T, z, z.right$ )
3. **ELSE IF**  $z.right == NIL$  **THEN**
4.     *Transplant*( $T, z, z.left$ )
5. **ELSE**
6.      $y = \text{TreeMinimum}(z.right)$
7.     **IF**  $y.parent \neq z$  **THEN**
8.         *Transplant*( $T, y, y.right$ )
9.          $y.right = z.right$
10.         $y.right.parent = y$
11.     **ENDIF**
12.     *Transplant*( $T, z, y$ )
13.      $y.left = z.left$
14.      $y.left.parent = y$
15. **ENDIF**

Fälle:

3a.



3b.



# Binary Search Tree

## Manipulation: Löschen

*TreeDelete*( $T, z$ )

1. **IF**  $z.left == NIL$  **THEN**
2.     *Transplant*( $T, z, z.right$ )
3. **ELSE IF**  $z.right == NIL$  **THEN**
4.     *Transplant*( $T, z, z.left$ )
5. **ELSE**
6.      $y = \text{TreeMinimum}(z.right)$
7.     **IF**  $y.parent \neq z$  **THEN**
8.         *Transplant*( $T, y, y.right$ )
9.          $y.right = z.right$
10.         $y.right.parent = y$
11.     **ENDIF**
12.     *Transplant*( $T, z, y$ )
13.      $y.left = z.left$
14.      $y.left.parent = y$
15. **ENDIF**

Laufzeit:

- Alle Zeilen außer Zeile 6 sind  $O(1)$ .
- Laufzeit von *TreeMinimum* ist  $O(h)$ .
- $O(h)$ , wobei  $h$  die Baumhöhe ist.

# Binary Search Tree

## Laufzeit

Die Laufzeit aller Manipulationsoperationen ist von der Höhe des Baums abhängig.

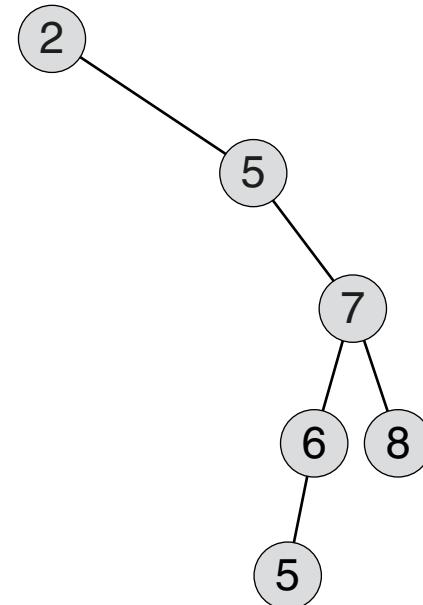
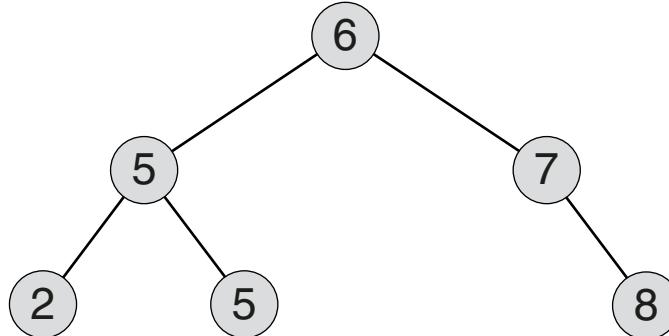
Best Case:

- **Balancierter** Baum.
  
- $h \approx \lg n \rightarrow T(n) = O(\lg n)$ .

Worst Case:

- Alle inneren Knoten vom Grad 1.
  
- $h \approx n \rightarrow T(n) = O(n)$ .

Beispiel:



# Binary Search Tree

## Laufzeit (Fortsetzung)

Average Case:

- Zufälliger Binary Search Tree mit  $n$  verschiedenen Knoten.
- $E[h] = \lg n \rightarrow T(n) = O(\lg n)$ .

Beweisidee: Probabilistische Analyse der erwarteten Baumhöhe nach einer Sequenz zufälliger Einfügeoperationen.

## Konstruktion

- Sei  $A$  eine Folge von  $n$  Schlüsseln.
- Wähle eine zufällige Permutation der Schlüssel in  $A$ .
- Füge die Schlüssel gemäß der Reihenfolge der Permutation nacheinander in einen leeren Binary Search Tree  $T$  ein.
- Weiteres Einfügen von Elementen in nicht-zufälliger Reihenfolge oder Löschen von Elementen machen den Binary Search Tree unzufällig.

# AVL Tree

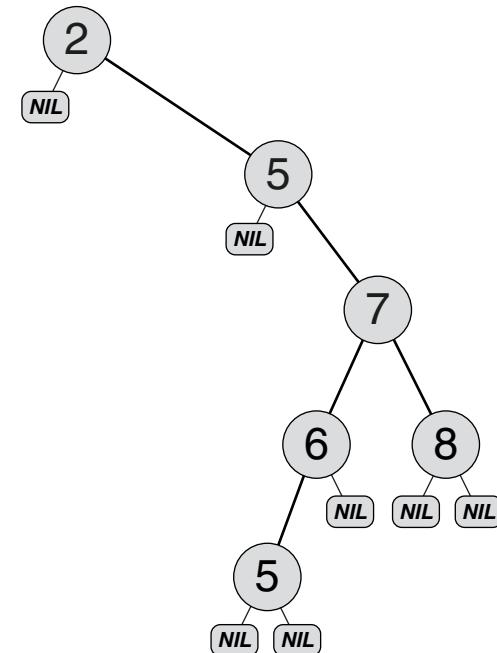
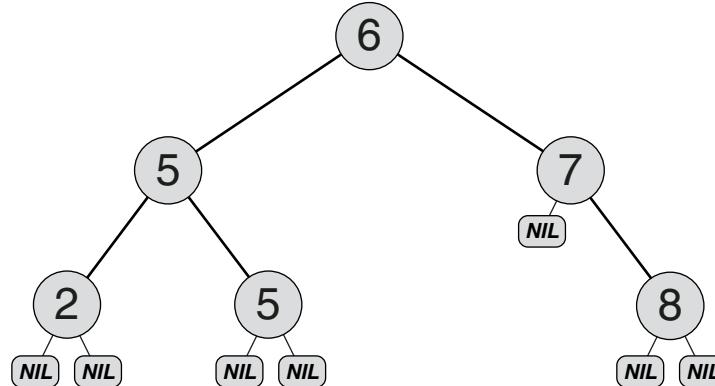
## Definition

Ein Binary Search Tree ist ein AVL Tree, wenn für jeden internen Knoten  $x$  gilt

$$-1 \leq bf(x) \leq 1,$$

wobei  $bf(x) = h(x.\text{right}) - h(x.\text{left})$  der Balancefaktor von  $x$  und  $h(x)$  seine Höhe ist.

Beispiele:



# AVL Tree

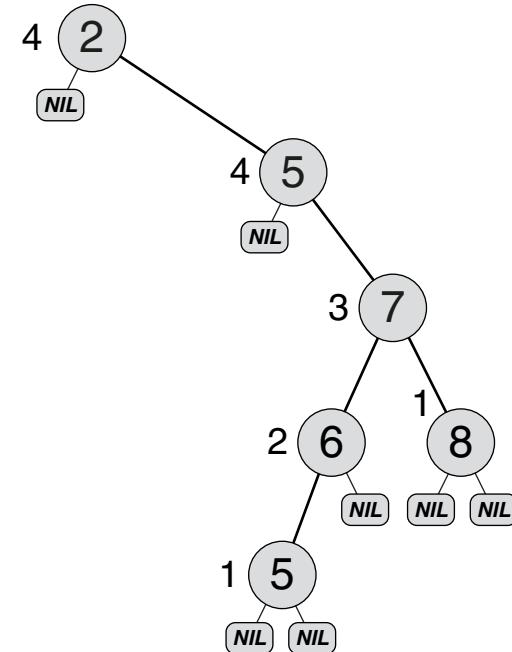
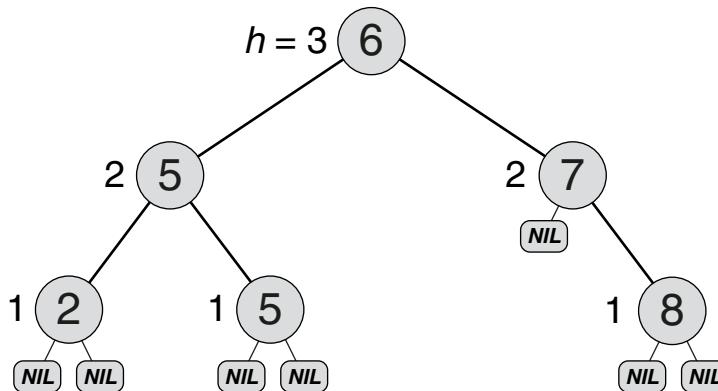
## Definition

Ein Binary Search Tree ist ein AVL Tree, wenn für jeden internen Knoten  $x$  gilt

$$-1 \leq bf(x) \leq 1,$$

wobei  $bf(x) = h(x.\text{right}) - h(x.\text{left})$  der Balancefaktor von  $x$  und  $h(x)$  seine Höhe ist.

Beispiele:



# AVL Tree

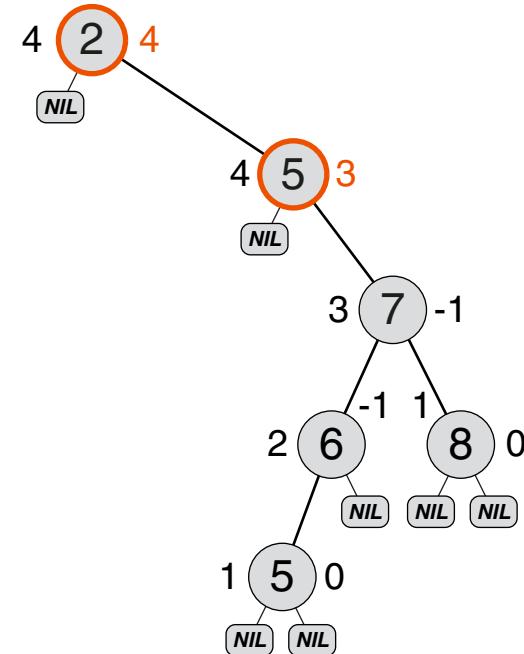
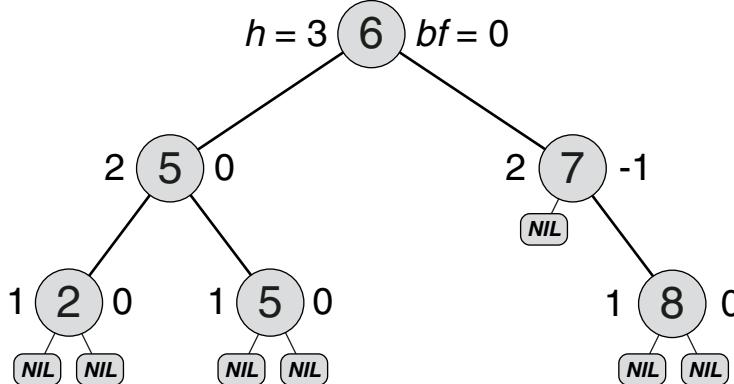
## Definition

Ein Binary Search Tree ist ein AVL Tree, wenn für jeden internen Knoten  $x$  gilt

$$-1 \leq bf(x) \leq 1,$$

wobei  $bf(x) = h(x.\text{right}) - h(x.\text{left})$  der Balancefaktor von  $x$  und  $h(x)$  seine Höhe ist.

Beispiele:



# AVL Tree

## Satz 1

Ein AVL Tree mit  $n$  Knoten hat eine Höhe  $h \leq 2 \lg n = O(\lg n)$ .

# AVL Tree

## Satz 1

Ein AVL Tree mit  $n$  Knoten hat eine Höhe  $h \leq 2 \lg n = O(\lg n)$ .

Beweis:

Behauptung: Der AVL Tree mit Wurzel  $x$  hat  $\geq 2^{h(x)/2}$  Knoten.

# AVL Tree

## Satz 1

Ein AVL Tree mit  $n$  Knoten hat eine Höhe  $h \leq 2 \lg n = O(\lg n)$ .

Beweis:

Behauptung: Der AVL Tree mit Wurzel  $x$  hat  $\geq 2^{h(x)/2}$  Knoten.

Für die Wurzel  $x$  eines AVL Trees mit  $n$  Knoten gilt:

$$\begin{aligned} n &\geq 2^{h(x)/2} \quad (\text{Behauptung}) \\ \Leftrightarrow \lg n &\geq h(x)/2 \\ \Leftrightarrow 2 \lg n &\geq h(x) \quad \square \end{aligned}$$

# AVL Tree

## Höhe eines AVL Tree

Behauptung: Der AVL Tree mit Wurzel  $x$  hat  $\geq 2^{h(x)/2}$  Knoten.

Idee: Abschätzung der minimalen Zahl an Knoten eines AVL Trees der Höhe  $h$ .

Beispiel:



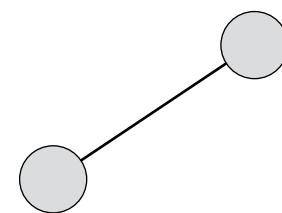
# AVL Tree

## Höhe eines AVL Tree

Behauptung: Der AVL Tree mit Wurzel  $x$  hat  $\geq 2^{h(x)/2}$  Knoten.

Idee: Abschätzung der minimalen Zahl an Knoten eines AVL Trees der Höhe  $h$ .

Beispiel:



- Ein minimaler AVL Tree hat  $bf(x) \neq 0$  für alle Knoten  $x$ .

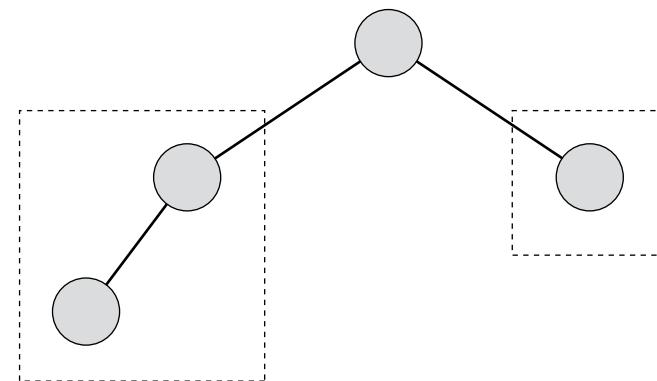
# AVL Tree

## Höhe eines AVL Tree

Behauptung: Der AVL Tree mit Wurzel  $x$  hat  $\geq 2^{h(x)/2}$  Knoten.

Idee: Abschätzung der minimalen Zahl an Knoten eines AVL Trees der Höhe  $h$ .

Beispiel:



- Ein minimaler AVL Tree hat  $bf(x) \neq 0$  für alle Knoten  $x$ .
- Jedes Kind der Wurzel eines minimalen AVL Trees ist ein minimaler AVL Tree.

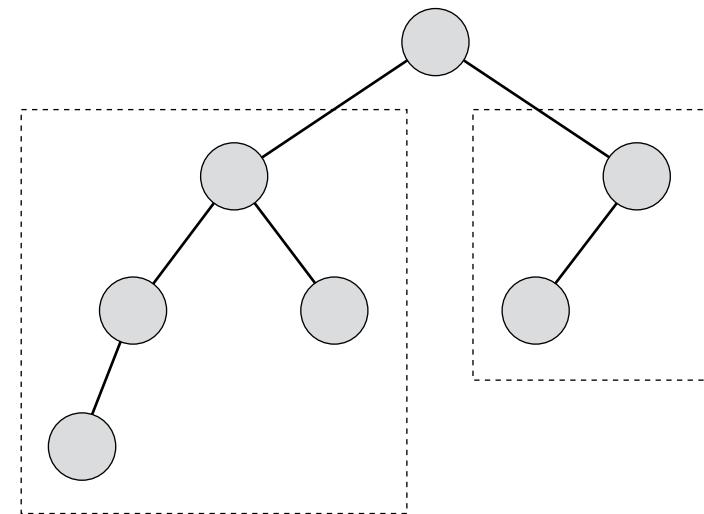
# AVL Tree

## Höhe eines AVL Tree

Behauptung: Der AVL Tree mit Wurzel  $x$  hat  $\geq 2^{h(x)/2}$  Knoten.

Idee: Abschätzung der minimalen Zahl an Knoten eines AVL Trees der Höhe  $h$ .

Beispiel:



- Ein minimaler AVL Tree hat  $bf(x) \neq 0$  für alle Knoten  $x$ .
- Jedes Kind der Wurzel eines minimalen AVL Trees ist ein minimaler AVL Tree.

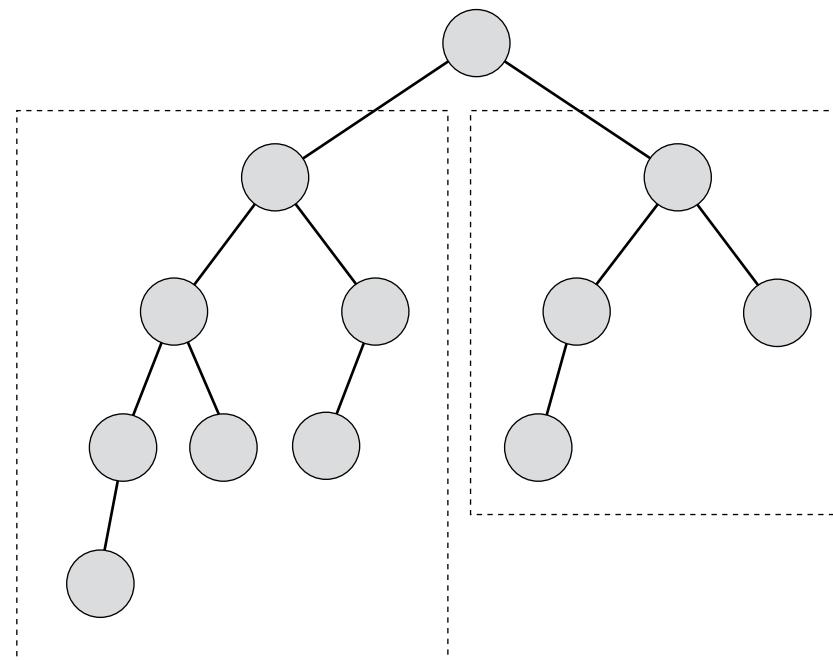
# AVL Tree

## Höhe eines AVL Tree

Behauptung: Der AVL Tree mit Wurzel  $x$  hat  $\geq 2^{h(x)/2}$  Knoten.

Idee: Abschätzung der minimalen Zahl an Knoten eines AVL Trees der Höhe  $h$ .

Beispiel:



- Ein minimaler AVL Tree hat  $bf(x) \neq 0$  für alle Knoten  $x$ .
- Jedes Kind der Wurzel eines minimalen AVL Trees ist ein minimaler AVL Tree.

# AVL Tree

## Höhe eines AVL Tree

Behauptung: Der AVL Tree mit Wurzel  $x$  hat  $\geq 2^{h(x)/2}$  Knoten.

Idee: Abschätzung der minimalen Zahl an Knoten eines AVL Trees der Höhe  $h$ .

Sei  $n(h)$  die Zahl der Knoten eines minimalen AVL Trees der Höhe  $h$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} n(h) &= 1 + n(h-1) + n(h-2) \\ \Rightarrow n(h) &> 2n(h-2) \\ \Rightarrow n(h) &> 2^i n(h-2i) && (\text{für } i > 0) \\ \Rightarrow n(h) &\geq 2^{h/2} n(0) && (\text{so dass } h-2i = 0) \\ \Rightarrow n(h) &\geq 2^{h/2} \quad \square \end{aligned}$$

## Bemerkungen:

- Ein minimaler AVL Tree der Höhe  $h$  hat  $F_{h+3} - 1$  Knoten, wobei  $F_i$  die  $i$ -te Fibonacci-Zahl ist.  
Nach Formel von Moivre-Binet ist

$$F_i = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^i - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^i \right) \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^i - 1 \right),$$

so dass

$$n(h) \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{h+3} - 1 \right) - 1.$$

Nach  $h$  aufgelöst folgt

$$h \leq 1.4405 \lg(n + 2) - 0.3277.$$

# AVL Tree

## Manipulation

Algorithmen, die von Binary Search Trees geerbt werden:

- Knoten in Sortierreihenfolge besuchen  
Traversierung des Baumes mit DFS-Traverse (in-order).
- Knoten suchen (*Search*)  
Einen Knoten mit vorgegebenem Schlüssel suchen.
- Minimum, Maximum, oder Nachfolger (*Successor*) bestimmen  
Den Knoten mit kleinstem, größten oder nächstgrößten Sortierschlüssel bestimmten.
- Knoten verändern  
Den Schlüssel eines bestimmten Knotens ändern.

## Laufzeit

- Die Algorithmen haben Laufzeit  $O(h)$ , wobei  $h$  die Höhe des Binary Search Tree ist.
- Auf AVL Trees benötigen sie daher  $O(\lg n)$  Zeit.

# AVL Tree

## Manipulation

Algorithmen, die auf AVL Trees zugeschnitten sind:

- Knoten einfügen (*Insert*)

Einen Knoten an der richtigen Stelle im Baum einfügen.

- Knoten löschen (*Delete*)

Einen bestimmten Knoten aus dem Baum löschen.

Jedes Einfügen oder Löschen eines Knotens erfordert gegebenenfalls die Wiederherstellung der AVL Tree-Bedingung:

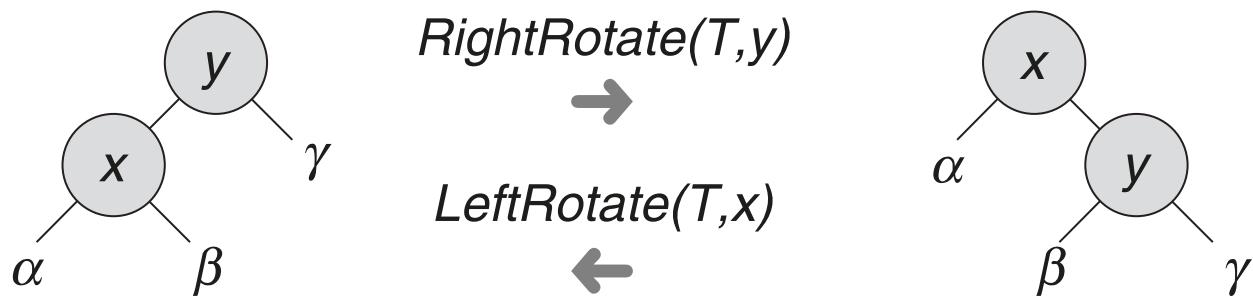
- Einfügen / Löschen eines Knotens kann die Höhe seiner Vorgänger verändern.

- Das kann den Balancefaktor verändern und die AVL-Bedingung verletzen.

→ Der AVL Tree muss gegebenenfalls rekonfiguriert werden.

# AVL Tree

## Manipulation: Rotation



- Grundlegende Rekonfigurationsoperation für **Binary Search Trees**.
- Hält die Binary Search Tree-Bedingung aufrecht.
- Ändert die Reihenfolge einer In-Order-Traversierung nicht.
- Rechts- und Linksrotation sind inverse Operationen zueinander.

# AVL Tree

## Manipulation: Rotation

Algorithmus: Left Rotate.

Eingabe:  $T$ . Binary Search Tree.

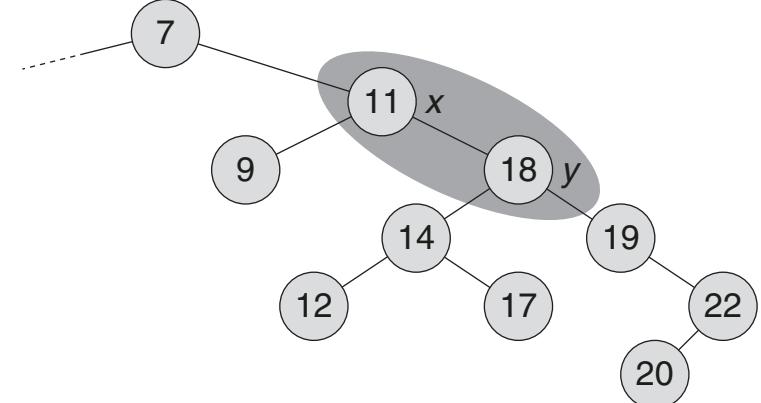
$x$ . Wurzel eines Teilbaums von  $T$ , wobei  $x.right \neq NIL$  bzw.  $T.nil$

Ausgabe: Binary Search Tree, dessen Teilbaum  $x$  linkes Kind von  $x.right$  ist.

**LeftRotate**( $T, x$ )

1.  $y = x.right$
2.  $x.right = y.left$
3. **IF**  $y.left \neq T.nil$  **THEN**
4.    $y.left.parent = x$
5. **ENDIF**
6.  $y.parent = x.parent$
7. **IF**  $x.parent == T.nil$  **THEN**
8.    $T.root = y$
9. **ELSE IF**  $x == x.parent.left$  **THEN**
10.    $x.parent.left = y$
11. **ELSE**
12.    $x.parent.right = y$
13. **ENDIF**
14.  $y.left = x$
15.  $x.parent = y$

Beispiel:



Laufzeit:

$$\square \quad T(n) = O(1)$$

# AVL Tree

## Manipulation: Rotation

Algorithmus: Left Rotate.

Eingabe:  $T$ . Binary Search Tree.

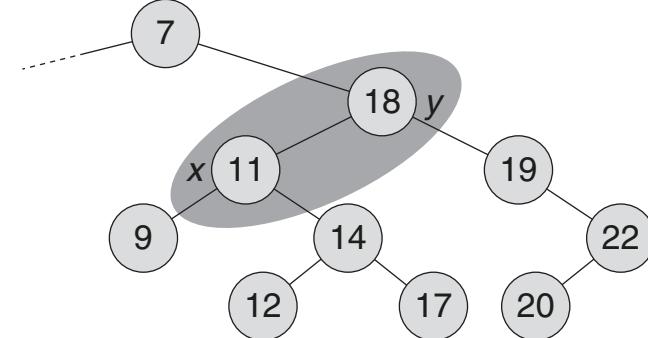
$x$ . Wurzel eines Teilbaums von  $T$ , wobei  $x.right \neq NIL$  bzw.  $T.nil$

Ausgabe: Binary Search Tree, dessen Teilbaum  $x$  linkes Kind von  $x.right$  ist.

**LeftRotate( $T, x$ )**

1.  $y = x.right$
2.  $x.right = y.left$
3. **IF**  $y.left \neq T.nil$  **THEN**
4.    $y.left.parent = x$
5. **ENDIF**
6.  $y.parent = x.parent$
7. **IF**  $x.parent == T.nil$  **THEN**
8.    $T.root = y$
9. **ELSE IF**  $x == x.parent.left$  **THEN**
10.    $x.parent.left = y$
11. **ELSE**
12.    $x.parent.right = y$
13. **ENDIF**
14.  $y.left = x$
15.  $x.parent = y$

Beispiel:



Laufzeit:

$$\square \quad T(n) = O(1)$$

# AVL Tree

## Manipulation: Einfügen

Algorithmus: AVL Insert.

Eingabe:  $T$ . AVL Tree.  
 $\quad z$ . Einzufügender Knoten mit Schlüssel  $k$ .

Ausgabe: Um  $z$  erweiterter AVL Tree.

# AVL Tree

## Manipulation: Einfügen

Algorithmus: AVL Insert.

Eingabe:  $T$ . AVL Tree.  
 $z$ . Einzufügender Knoten mit Schlüssel k.

Ausgabe: Um  $z$  erweiterter AVL Tree.

$\text{AVLInsert}(T, z)$

1.  $\text{TreeInsert}(T, z)$
2.  $\text{AVLInsertFixup}(T, z)$

# AVL Tree

## Manipulation: Einfügen

Algorithmus: AVL Insert.

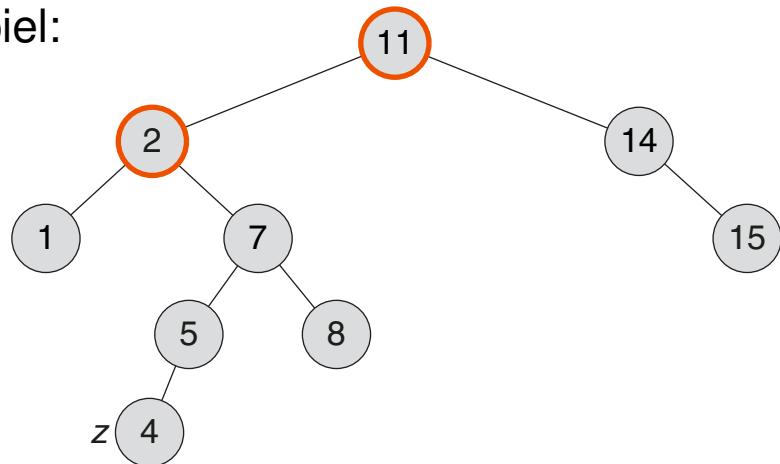
Eingabe:  $T$ . AVL Tree.  
 $z$ . Einzufügender Knoten mit Schlüssel  $k$ .

Ausgabe: Um  $z$  erweiterter AVL Tree.

$\text{AVLInsert}(T, z)$

1.  $\text{TreeInsert}(T, z)$
2.  $\text{AVLInsertFixup}(T, z)$

Beispiel:



# AVL Tree

## Manipulation: Einfügen

Algorithmus: AVL Insert Fixup.

Eingabe:  $T$ . Potentiell invalider AVL Tree.

$z$ . Knoten, der die Invalidität verursacht.

Ausgabe: Valider AVL Tree.

# AVL Tree

## Manipulation: Einfügen

Algorithmus: AVL Insert Fixup.

Eingabe:  $T$ . Potentiell invalider AVL Tree.  
 $z$ . Knoten, der die Invalidität verursacht.

Ausgabe: Valider AVL Tree.

$\text{AVLInsertFixup}(T, z)$ :

1. Aktualisiere den Balancefaktor  $bf(z)$  von  $z$ .

2. Fallunterscheidung:

(a)  $bf(z) = 0$ : Terminiere.

(b)  $bf(z) = \pm 1$ : Fahre mit  $z = z.parent$  bei Schritt 1 fort.

(c)  $bf(z) = \pm 2$ : Fahre bei Schritt 3 fort.

3. Fallunterscheidung:

(a)  $bf(z) = -2$  und  $bf(z.left) = -1$ :  $\text{RightRotate}(z)$

(b)  $bf(z) = -2$  und  $bf(z.left) = +1$ :  $\text{LeftRotate}(z.left)$ , dann  $\text{RightRotate}(z)$

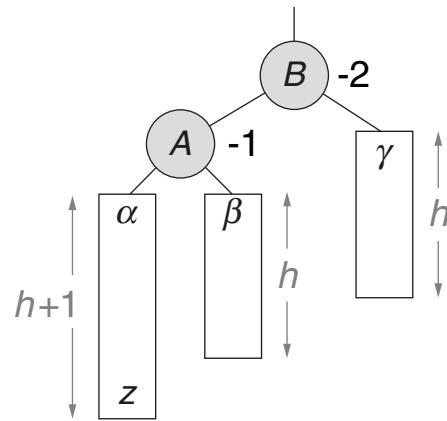
(c)  $bf(z) = +2$  und  $bf(z.right) = -1$ :  $\text{RightRotate}(z.right)$ , dann  $\text{LeftRotate}(z)$

(d)  $bf(z) = +2$  und  $bf(z.right) = +1$ :  $\text{LeftRotate}(z)$

# AVL Tree

## Manipulation: Einfügen

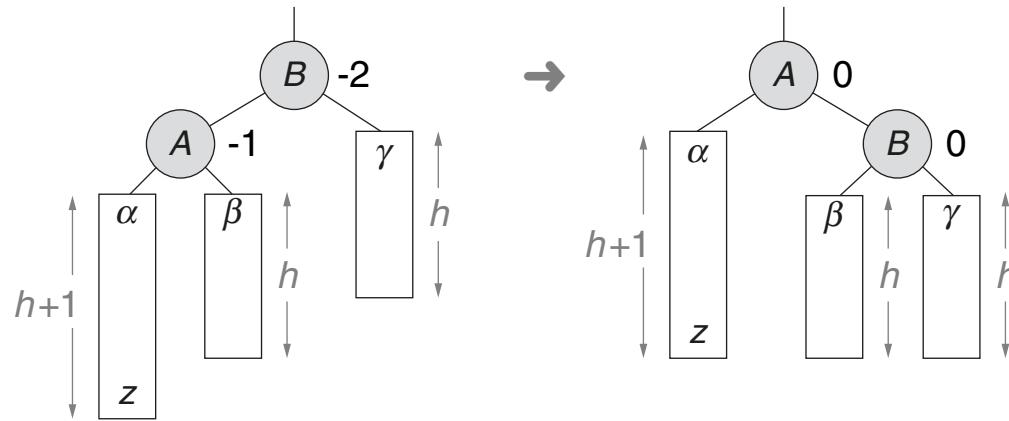
Beispiel: Fall 3a



# AVL Tree

## Manipulation: Einfügen

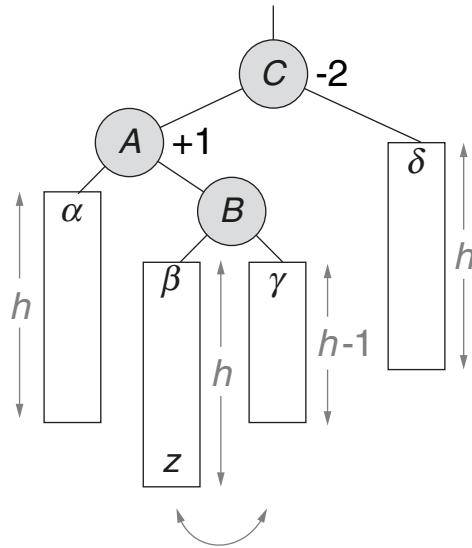
Beispiel: Fall 3a



# AVL Tree

## Manipulation: Einfügen

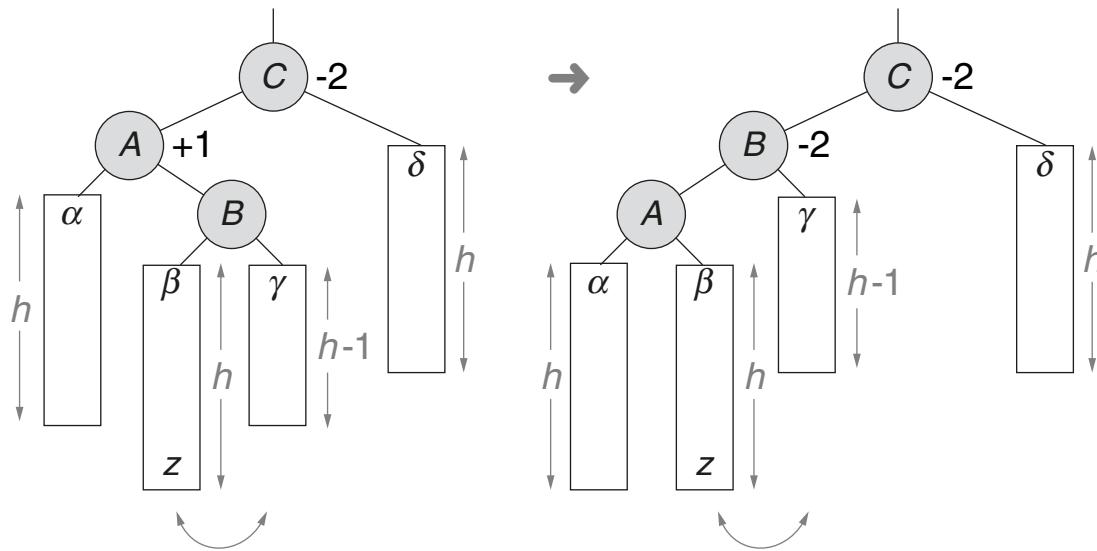
Beispiel: Fall 3b



# AVL Tree

## Manipulation: Einfügen

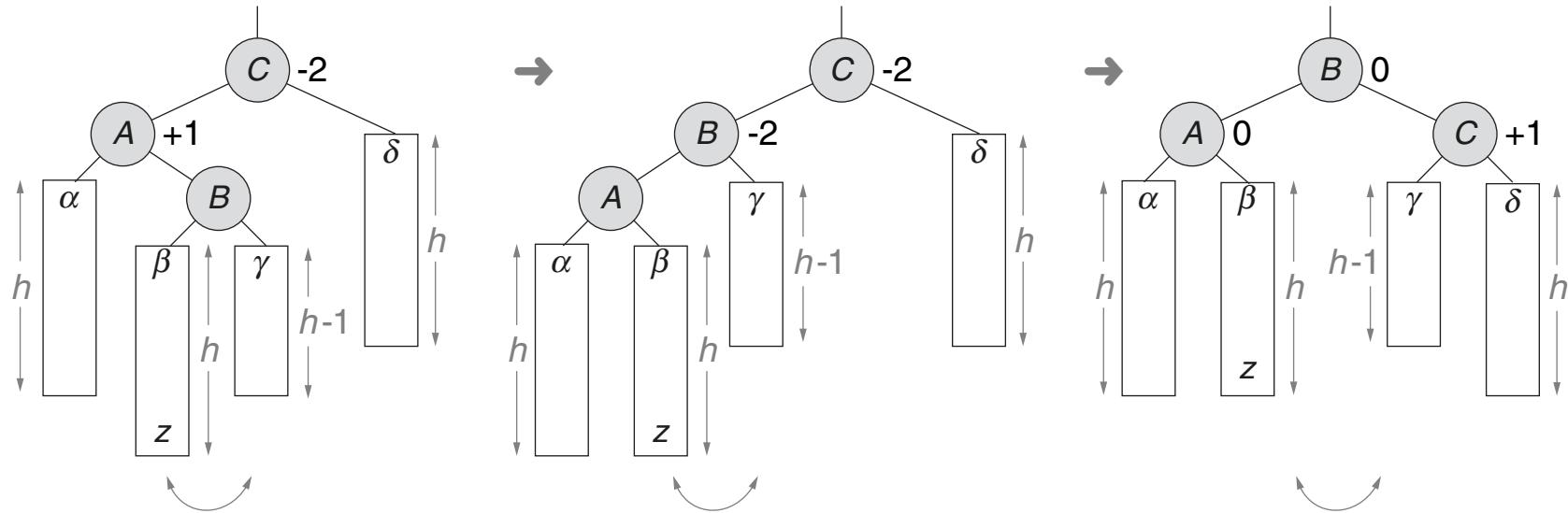
Beispiel: Fall 3b



# AVL Tree

## Manipulation: Einfügen

Beispiel: Fall 3b



# AVL Tree

## Manipulation: Löschen

Algorithmus: AVL Delete.

Eingabe:  $T$ . AVL Tree.

$z$ . Zu löschernder Knoten.

Ausgabe: AVL Tree, beim  $z$  gelöscht wurde.

# AVL Tree

## Manipulation: Löschen

Algorithmus: AVL Delete.

Eingabe:  $T$ . AVL Tree.

$z$ . Zu löschernder Knoten.

Ausgabe: AVL Tree, beim  $z$  gelöscht wurde.

$\text{AVLDelete}(T, z)$

1.  $z = \underline{\text{TreeDelete}}(T, z)$
2.  $\text{AVLDeleteFixup}(T, z)$

# AVL Tree

## Manipulation: Löschen

Algorithmus: AVL Delete.

Eingabe:  $T$ . AVL Tree.

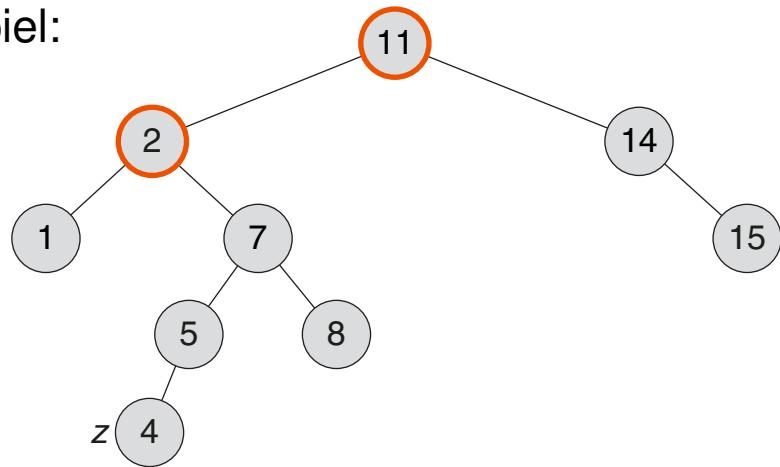
$z$ . Zu löschernder Knoten.

Ausgabe: AVL Tree, beim  $z$  gelöscht wurde.

**AVLDelete**( $T, z$ )

1.  $z = \underline{\text{TreeDelete}}(T, z)$
2. **AVLDeleteFixup**( $T, z$ )

Beispiel:



- Modifiziere *TreeInsert*, so dass der Vaterknoten des Knotens, durch den  $z$  ersetzt wurde zurückgegeben wird.
- Korrigiere eventuelle Verletzungen der AVL Tree-Bedingung ausgehend von  $z$ .

# AVL Tree

## Manipulation: Einfügen

Algorithmus: AVL Delete Fixup.

Eingabe:  $T$ . Potentiell invalider AVL Tree.

$z$ . Knoten, der die Invalidität verursacht.

Ausgabe: Valider AVL Tree.

# AVL Tree

## Manipulation: Einfügen

Algorithmus: AVL Delete Fixup.

Eingabe:  $T$ . Potentiell invalider AVL Tree.  
 $z$ . Knoten, der die Invalidität verursacht.

Ausgabe: Valider AVL Tree.

$\text{AVLDeleteFixup}(T, z)$ :

1. Aktualisiere den Balancefaktor  $bf(z)$  von  $z$ .

2. Fallunterscheidung:

(a)  $bf(z) = 0$ : Fahre mit  $z = z.parent$  bei Schritt 1 fort.

(b)  $bf(z) = \pm 1$ : Terminiere.

(c)  $bf(z) = \pm 2$ : Fahre bei Schritt 3 fort.

3. Fallunterscheidung:

(a)  $bf(z) = +2$  und  $bf(z.right) \in \{0, +1\}$ :  $\text{LeftRotate}(z)$

(b)  $bf(z) = +2$  und  $bf(z.right) = -1$ :  $\text{RightRotate}(z.right)$ , dann  $\text{LeftRotate}(z)$

(c)  $bf(z) = -2$  und  $bf(z.left) = +1$ :  $\text{LeftRotate}(z.left)$ , dann  $\text{RightRotate}(z)$

(d)  $bf(z) = -2$  und  $bf(z.left) \in \{-1, 0\}$ :  $\text{RightRotate}(z)$

4. Falls  $bf(z) = 0$ , fahre mit  $z = z.parent$  bei Schritt 1 fort.

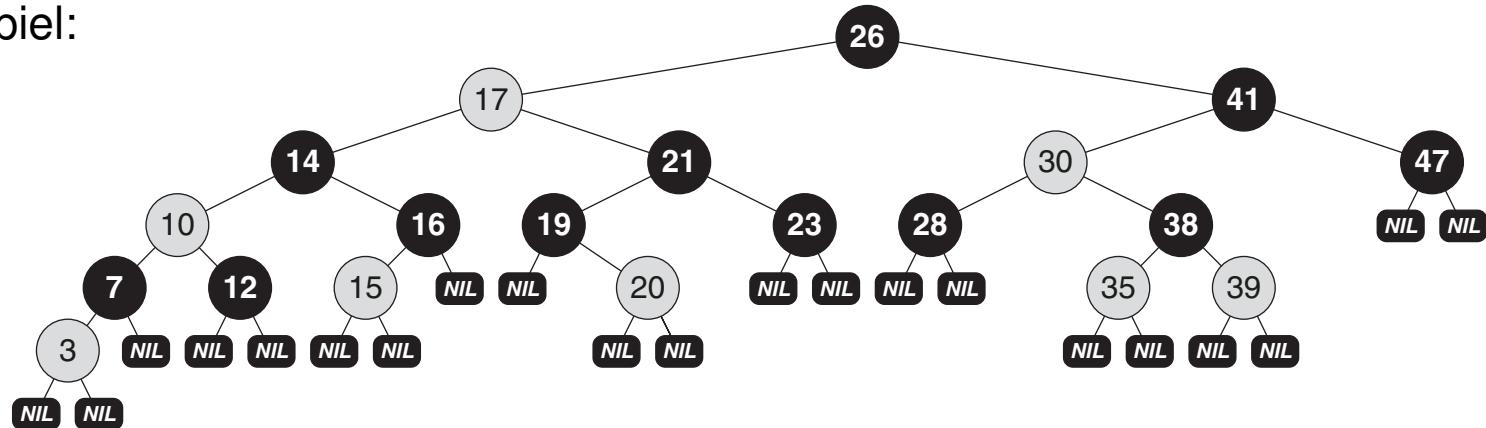
# Red-Black Tree

## Definition

Ein Red-Black Tree  $T$  (*Rot-Schwarz-Baum*) ist ein Binary Search Tree, dessen Knoten „gefärbt“ sind, so dass folgende Bedingungen erfüllt werden:

1. Ein Knoten ist rot oder schwarz; die Wurzel und alle Blätter sind schwarz.

Beispiel:



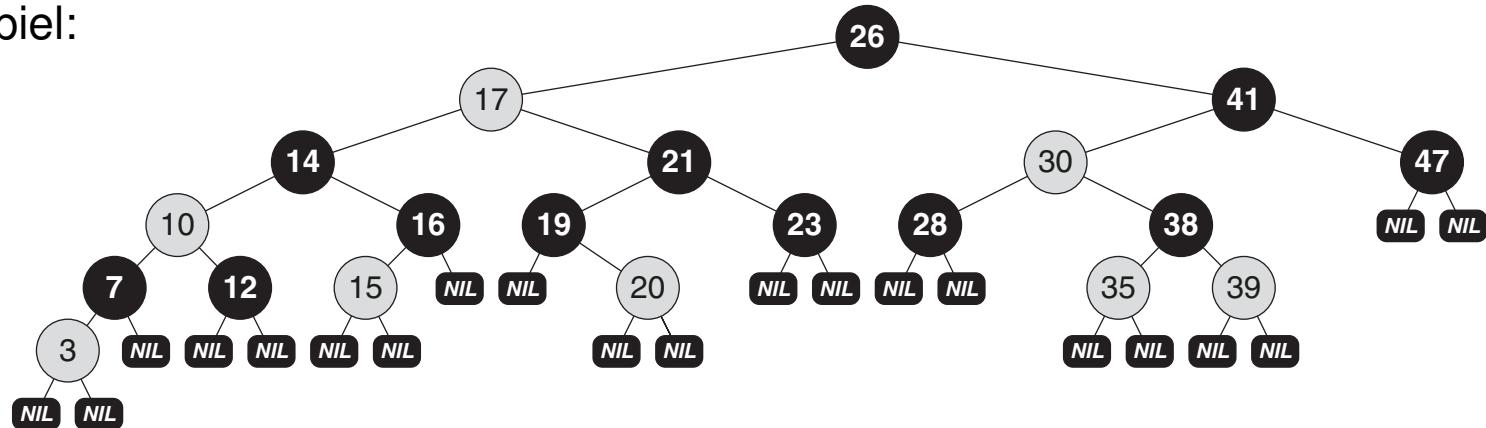
# Red-Black Tree

## Definition

Ein Red-Black Tree  $T$  (*Rot-Schwarz-Baum*) ist ein Binary Search Tree, dessen Knoten „gefärbt“ sind, so dass folgende Bedingungen erfüllt werden:

1. Ein Knoten ist rot oder schwarz; die Wurzel und alle Blätter sind schwarz.
2. Wenn ein Knoten rot ist, sind seine Kinder schwarz.

Beispiel:



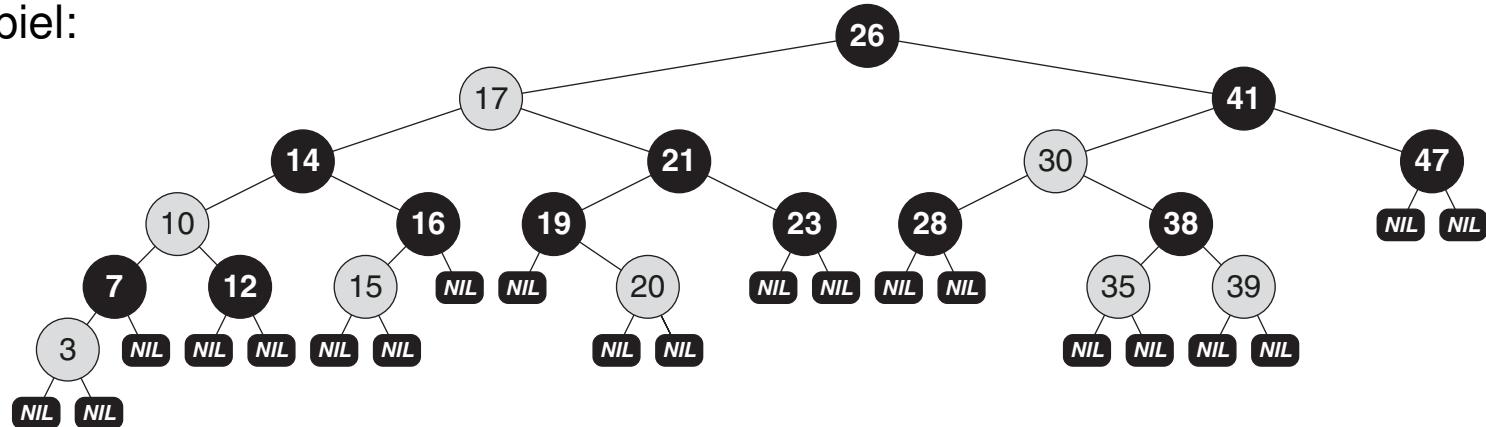
## Red-Black Tree

## Definition

Ein Red-Black Tree  $T$  (*Rot-Schwarz-Baum*) ist ein Binary Search Tree, dessen Knoten „gefärbt“ sind, so dass folgende Bedingungen erfüllt werden:

1. Ein Knoten ist rot oder schwarz; die Wurzel und alle Blätter sind schwarz.
  2. Wenn ein Knoten rot ist, sind seine Kinder schwarz.
  3. Für jeden Knoten gilt, dass all seine Pfade zu Blättern gleich viele schwarze Knoten enthalten.

## Beispiel:



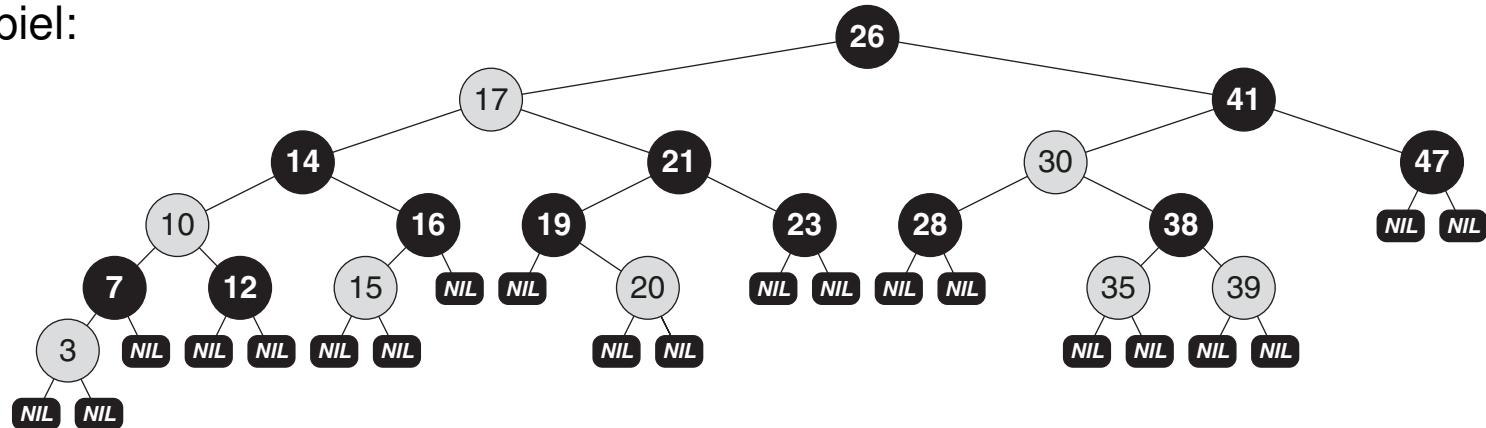
# Red-Black Tree

## Definition

Ein Red-Black Tree  $T$  (*Rot-Schwarz-Baum*) ist ein Binary Search Tree, dessen Knoten „gefärbt“ sind, so dass folgende Bedingungen erfüllt werden:

1. Ein Knoten ist rot oder schwarz; die Wurzel und alle Blätter sind schwarz.
  2. Wenn ein Knoten rot ist, sind seine Kinder schwarz.
  3. Für jeden Knoten gilt, dass all seine Pfade zu Blättern gleich viele schwarze Knoten enthalten.

## Beispiel:

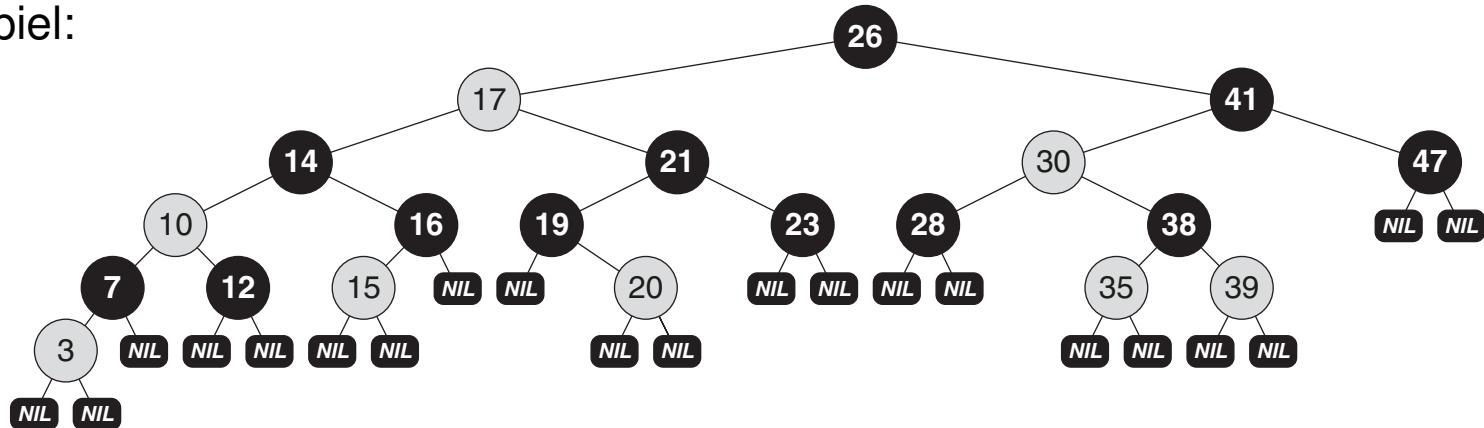


# Red-Black Tree

## Satz 2

Ein Red-Black Tree mit  $n$  internen Knoten hat eine Höhe  $h \leq 2 \lg(n + 1) = O(\lg n)$ .

Beispiel:



# Red-Black Tree

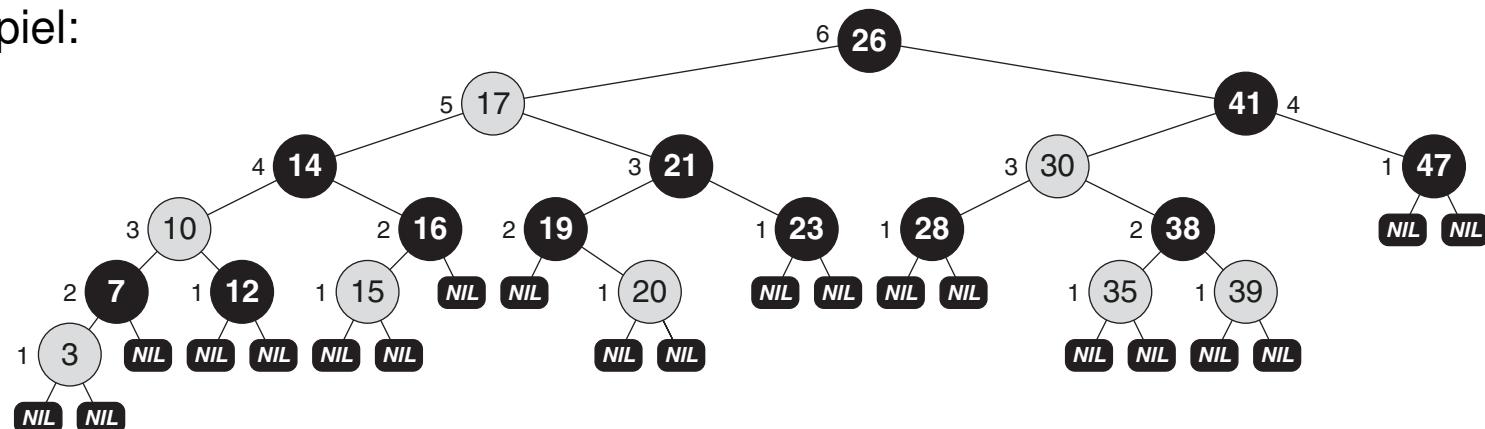
## Satz 2

Ein Red-Black Tree mit  $n$  internen Knoten hat eine Höhe  $h \leq 2 \lg(n + 1) = O(\lg n)$ .

Beweis:

Sei  $h(x)$  die Höhe eines Knotens  $x$ ; der längste Pfad von  $x$  zu einem Blatt.

Beispiel:



# Red-Black Tree

## Satz 2

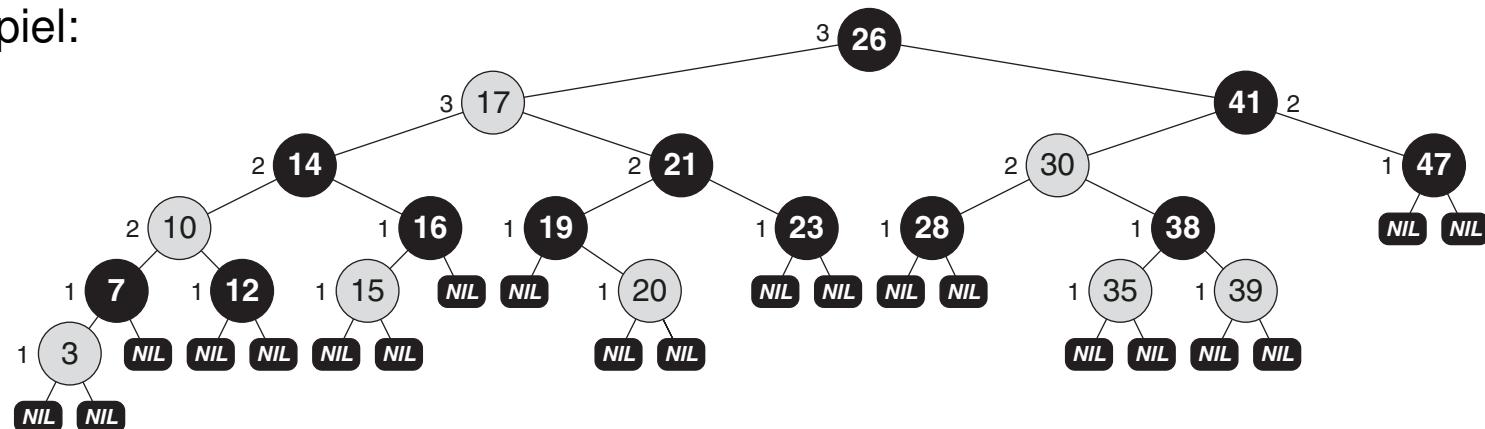
Ein Red-Black Tree mit  $n$  internen Knoten hat eine Höhe  $h \leq 2 \lg(n + 1) = O(\lg n)$ .

Beweis:

Sei  $h(x)$  die Höhe eines Knotens  $x$ ; der längste Pfad von  $x$  zu einem Blatt.

Sei  $bh(x)$  die Schwarzhöhe (*black-height*) von  $x$  gemäß Bedingung 3: Die Zahl der schwarzen Knoten von  $x$  zu einem Blatt (exklusive  $x$ ).

Beispiel:



# Red-Black Tree

## Satz 2

Ein Red-Black Tree mit  $n$  internen Knoten hat eine Höhe  $h \leq 2 \lg(n + 1) = O(\lg n)$ .

Beweis:

Sei  $h(x)$  die Höhe eines Knotens  $x$ ; der längste Pfad von  $x$  zu einem Blatt.

Sei  $bh(x)$  die Schwarzhöhe (*black-height*) von  $x$  gemäß Bedingung 3: Die Zahl der schwarzen Knoten von  $x$  zu einem Blatt (exklusive  $x$ ).

Behauptung 1: Jeder Knoten  $x$  mit Höhe  $h(x)$  hat Schwarzhöhe  $bh(x) \geq h(x)/2$ .

Behauptung 2: Der Teilbaum mit Wurzel  $x$  hat  $\geq 2^{bh(x)} - 1$  interne Knoten.

# Red-Black Tree

## Satz 2

Ein Red-Black Tree mit  $n$  internen Knoten hat eine Höhe  $h \leq 2 \lg(n + 1) = O(\lg n)$ .

Beweis:

Sei  $h(x)$  die Höhe eines Knotens  $x$ ; der längste Pfad von  $x$  zu einem Blatt.

Sei  $bh(x)$  die Schwarzhöhe (*black-height*) von  $x$  gemäß Bedingung 3: Die Zahl der schwarzen Knoten von  $x$  zu einem Blatt (exklusive  $x$ ).

Behauptung 1: Jeder Knoten  $x$  mit Höhe  $h(x)$  hat Schwarzhöhe  $bh(x) \geq h(x)/2$ .

Behauptung 2: Der Teilbaum mit Wurzel  $x$  hat  $\geq 2^{bh(x)} - 1$  interne Knoten.

Für die Wurzel  $x$  eines Red-Black Trees mit  $n$  Knoten gilt:

$$\begin{aligned} n &\geq 2^{bh(x)} - 1 && (\text{Behauptung 2}) \\ &\geq 2^{h(x)/2} - 1 && (\text{Behauptung 1}) \\ \Leftrightarrow n + 1 &\geq 2^{h(x)/2} \\ \Leftrightarrow \lg(n + 1) &\geq h(x)/2 \\ \Leftrightarrow 2 \lg(n + 1) &\geq h(x) && \square \end{aligned}$$

# Red-Black Tree

## Höhe eines Red-Black Tree

Behauptung 1: Jeder Knoten  $x$  mit Höhe  $h(x)$  hat Schwarzhöhe  $bh(x) \geq h(x)/2$ .

Gemäß Bedingung 2 sind keine zwei aufeinanderfolgenden Knoten auf einem Pfad von  $x$  zu einem Blatt rot, so dass  $\leq h(x)/2$  Knoten rot sein können, und damit  $\geq h(x)/2$  schwarz sein müssen.  $\square$

# Red-Black Tree

## Höhe eines Red-Black Tree

Behauptung 1: Jeder Knoten  $x$  mit Höhe  $h(x)$  hat Schwarzhöhe  $bh(x) \geq h(x)/2$ .

Gemäß Bedingung 2 sind keine zwei aufeinanderfolgenden Knoten auf einem Pfad von  $x$  zu einem Blatt rot, so dass  $\leq h(x)/2$  Knoten rot sein können, und damit  $\geq h(x)/2$  schwarz sein müssen.  $\square$

Behauptung 2: Der Teilbaum mit Wurzel  $x$  hat  $\geq 2^{bh(x)} - 1$  interne Knoten.

Induktionsanfang:

Sei  $x$  ein Knoten mit  $h(x) = 0$ :

$\Rightarrow x$  ist ein Blatt

$\Rightarrow bh(x) = 0$

$\Rightarrow 2^0 - 1 = 0$

$\leq$  Zahl interner Knoten  
des Teilbaums von  $x$

# Red-Black Tree

## Höhe eines Red-Black Tree

Behauptung 1: Jeder Knoten  $x$  mit Höhe  $h(x)$  hat Schwarzhöhe  $bh(x) \geq h(x)/2$ .

Gemäß Bedingung 2 sind keine zwei aufeinanderfolgenden Knoten auf einem Pfad von  $x$  zu einem Blatt rot, so dass  $\leq h(x)/2$  Knoten rot sein können, und damit  $\geq h(x)/2$  schwarz sein müssen.  $\square$

Behauptung 2: Der Teilbaum mit Wurzel  $x$  hat  $\geq 2^{bh(x)} - 1$  interne Knoten.

Induktionsanfang:

Sei  $x$  ein Knoten mit  $h(x) = 0$ :

$\Rightarrow x$  ist ein Blatt

$\Rightarrow bh(x) = 0$

$\Rightarrow 2^0 - 1 = 0$

$\leq$  Zahl interner Knoten  
des Teilbaums von  $x$

Induktionsschritt:

Sei  $x$  ein Knoten mit  $h(x) > 0$ :

$\Rightarrow x$  ist ein interner Knoten mit 2 Kindern

$\Rightarrow$  Jedes rote Kind hat Schwarzhöhe  $bh(x)$ ,  
jedes schwarze Kind  $bh(x) - 1$

$\Rightarrow$  Jedes Kind hat  $\geq 2^{bh(x)-1} - 1$  interne Knoten  
(gemäß Prämisse)

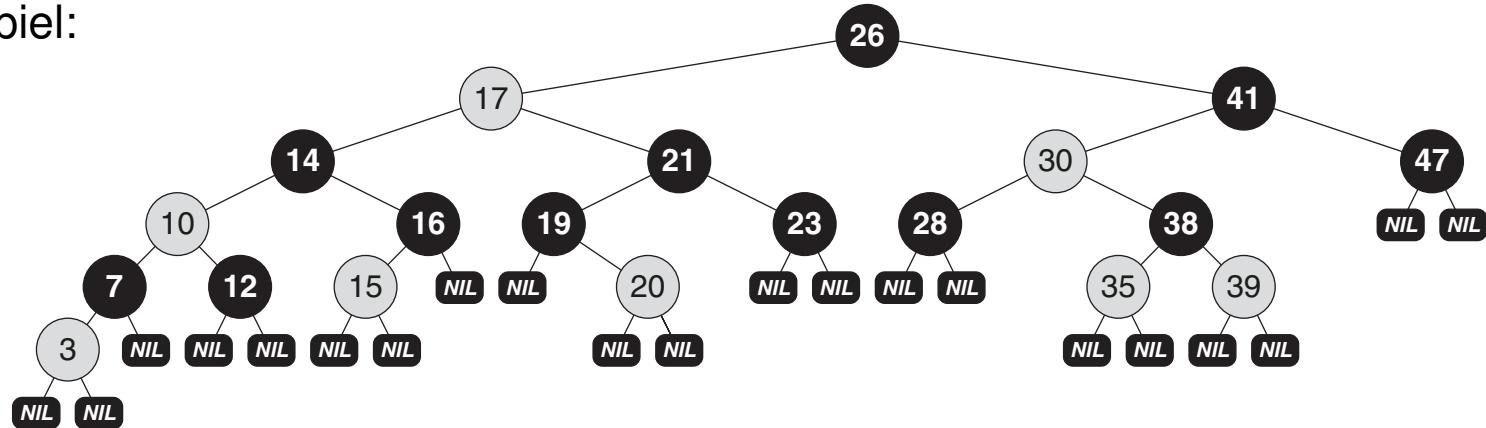
$\Rightarrow$  Zahl interner Knoten des Teilbaums von  $x$ :  
 $\geq 2 \cdot (2^{bh(x)-1} - 1) + 1 = 2^{bh(x)} - 1 \quad \square$

# Red-Black Tree

## Implementierung

- Es werden keine Schlüssel in Blättern gespeichert, alle sind *NIL*-Knoten.

Beispiel:

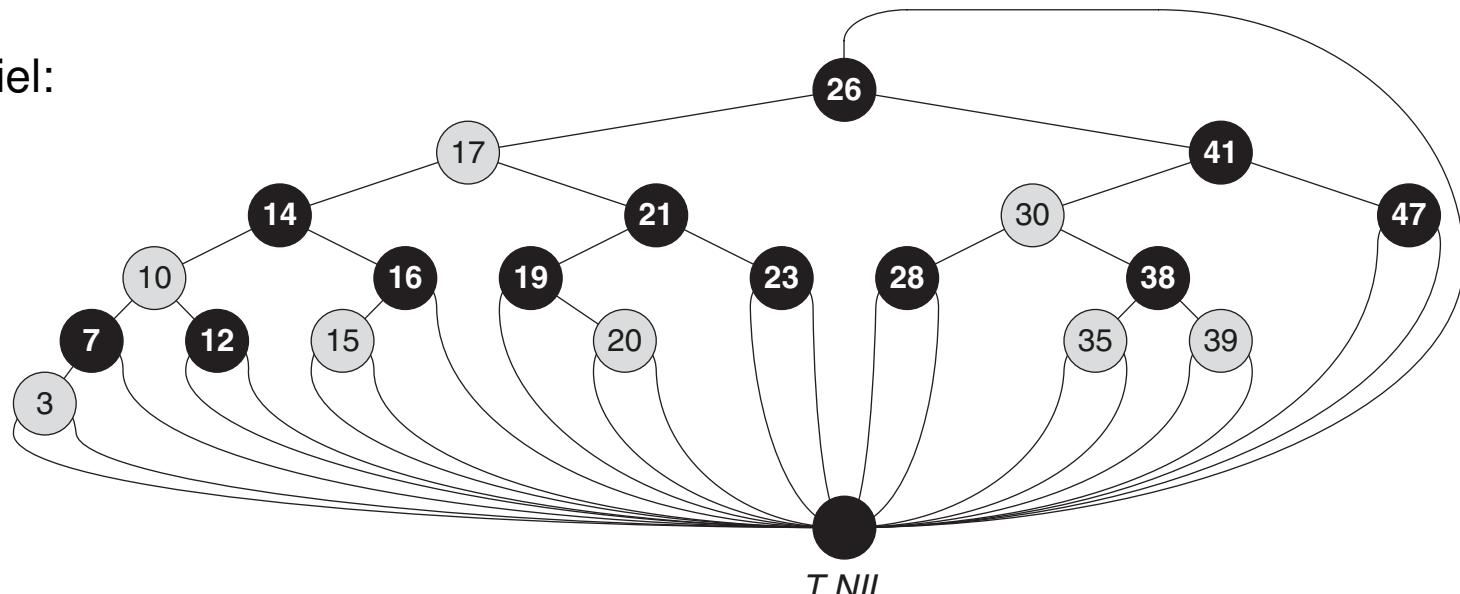


# Red-Black Tree

## Implementierung

- Es werden keine Schlüssel in Blättern gespeichert, alle sind *NIL*-Knoten.
- Nutzung eines Sentinel *T.nil*, um alle Blätter zu repräsentieren.
- Der Sentinel ist auch Elter der Wurzel.
- Die Farbe des Sentinel ist schwarz, alle anderen Attribute sind beliebig.

Beispiel:

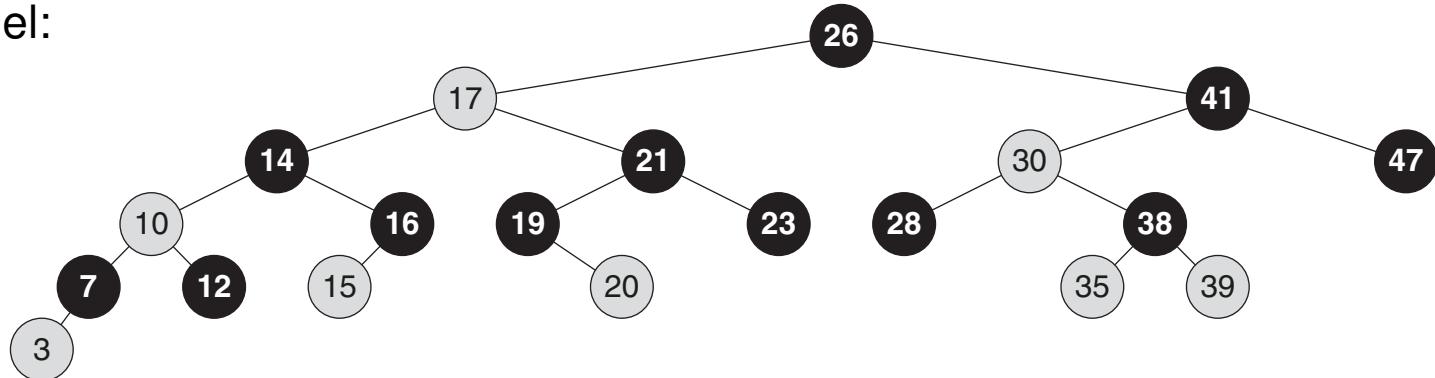


# Red-Black Tree

## Implementierung

- Es werden keine Schlüssel in Blättern gespeichert, alle sind *Nil*-Knoten.
- Nutzung eines Sentinel *T.nil*, um alle Blätter zu repräsentieren.
- Der Sentinel ist auch Elter der Wurzel.
- Die Farbe des Sentinel ist schwarz, alle anderen Attribute sind beliebig.
- Im Folgenden wird der Sentinel der Übersicht halber ausgeblendet.

Beispiel:



# Red-Black Tree

## Manipulation

Algorithmen, die von Binary Search Trees geerbt werden:

- Knoten in Sortierreihenfolge besuchen  
Traversierung des Baumes mit DFS-Traverse (in-order).
- Knoten suchen (*Search*)  
Einen Knoten mit vorgegebenem Schlüssel suchen.
- Minimum, Maximum, oder Nachfolger (*Successor*) bestimmen  
Den Knoten mit kleinstem, größten oder nächstgrößten Sortierschlüssel bestimmten.
- Knoten verändern  
Den Schlüssel eines bestimmten Knotens ändern.

## Laufzeit

- Die Algorithmen haben Laufzeit  $O(h)$ , wobei  $h$  die Höhe des Binary Search Tree ist.
- Auf Red-Black Trees benötigen sie daher  $O(\lg n)$  Zeit.

## Bemerkungen:

- Bei geerbten Algorithmen müssen Referenzen zu  $\text{NIL}$  durch  $T.\text{nil}$  ersetzt werden.

# Red-Black Tree

## Manipulation

Algorithmen, die auf Red-Black Trees zugeschnitten sind:

- Knoten einfügen (*Insert*)

Einen Knoten an der richtigen Stelle im Baum einfügen.

- Knoten löschen (*Delete*)

Einen bestimmten Knoten aus dem Baum löschen.

Jedes Einfügen oder Löschen eines Knotens erfordert gegebenenfalls die Wiederherstellung der Red-Black Tree-Bedingungen:

- Welche Farbe sollte ein einzufügender Knoten bekommen?

- Rot: Könnte Bedingung 2 verletzen.
- Schwarz: Könnte Bedingung 3 verletzen.

- Was geschieht, wenn ein Knoten einer Farbe gelöscht wird?

- Rot: Kein Problem, Bedingungen 1, 2, und 3 können nicht verletzt werden.
- Schwarz: Jede der Bedingungen könnte verletzt werden.

→ Der Red-Black Tree muss gegebenenfalls rekonfiguriert werden.

# Red-Black Tree

## Manipulation: Einfügen

Algorithmus: Red-Black Insert.

Eingabe:  $T$ . Red-Black-Tree.  
 $z$ . Einzufügender Knoten mit Schlüssel  $k$ .

Ausgabe: Um  $z$  erweiterter Red-Black Tree.

# Red-Black Tree

## Manipulation: Einfügen

Algorithmus: Red-Black Insert.

Eingabe:  $T$ . Red-Black-Tree.  
 $z$ . Einzufügender Knoten mit Schlüssel  $k$ .

Ausgabe: Um  $z$  erweiterter Red-Black Tree.

$RBInsert(T, z)$

1.  $TreeInsert(T, z)$
2.  $z.left = T.nil$
3.  $z.right = T.nil$
4.  $z.color = RED$
5.  $RBInsertFixup(T, z)$

# Red-Black Tree

## Manipulation: Einfügen

Algorithmus: Red-Black Insert.

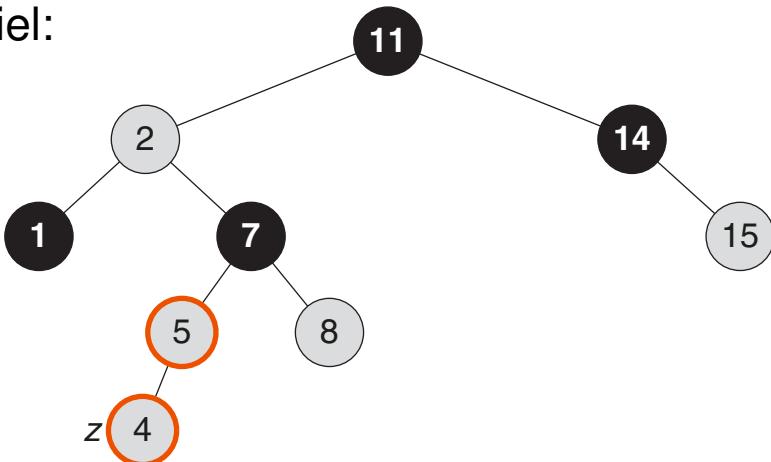
Eingabe:  $T$ . Red-Black-Tree.  
 $z$ . Einzufügender Knoten mit Schlüssel  $k$ .

Ausgabe: Um  $z$  erweiterter Red-Black Tree.

*RBInsert*( $T, z$ )

1. *TreeInsert*( $T, z$ )
2.  $z.left = T.nil$
3.  $z.right = T.nil$
4.  $z.color = RED$
5. *RBInsertFixup*( $T, z$ )

Beispiel:



- Nach dem Einfügen wird  $z$  rot gefärbt und anschließend eventuelle Verletzungen der Red-Black Tree-Bedingungen korrigiert.
- Ersetze in *TreeInsert* alle Referenzen zu *NIL* durch  $T.nil$ .

# Red-Black Tree

## Manipulation: Einfügen

Algorithmus: Red-Black Insert Fixup.

Eingabe:  $T$ . Potentiell invalider Red-Black Tree.  
 $z.$  Knoten, der die Invalidität verursacht.

Ausgabe: Valider Red-Black Tree.

# Red-Black Tree

## Manipulation: Einfügen

Algorithmus: Red-Black Insert Fixup.

Eingabe:  $T$ . Potentiell invalider Red-Black Tree.  
 $z$ . Knoten, der die Invalidität verursacht.

Ausgabe: Valider Red-Black Tree.

Fallunterscheidung:

1.  $z$  ist die Wurzel von  $T$ .  
Färbe die Wurzel schwarz.
2.  $z$ s Elter ist schwarz.  
Es ist nichts zu tun.
3.  $z$ s Elter ist rot und sein Onkel  $y$  ist rot.  
Färbe  $z$ s Großelter rot und dessen Kinder schwarz. Fahre beim Großelter fort.
4.  $z$ s Elter ist rot, sein Onkel  $y$  ist schwarz und  $z$  ist rechtes Kind.  
Linksrotation über  $z$ s Elter. Fahre mit  $z$ s vorigem Elter bei Fall 5 fort.
5.  $z$ s Elter ist rot, sein Onkel  $y$  ist schwarz und  $z$  ist linkes Kind.  
Färbe  $z$ s Elter schwarz und  $z$ s Großelter rot. Rechtsrotation über  $z$ s Großelter.

# Red-Black Tree

## Manipulation: Einfügen

Algorithmus: Red-Black Insert Fixup.

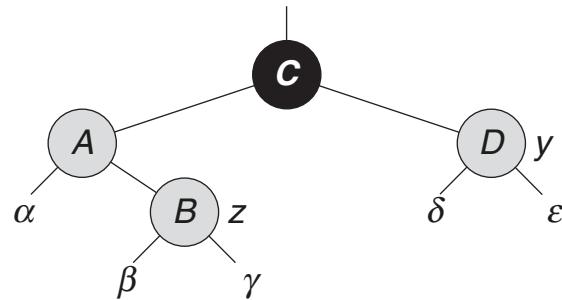
Eingabe:  $T$ . Potentiell invalider Red-Black Tree.  
 $z$ . Knoten, der die Invalidität verursacht.

Ausgabe: Valider Red-Black Tree.

Fallunterscheidung:

3.  $z$ 's Elter ist rot und sein Onkel  $y$  ist rot.

Färbe  $z$ 's Großelter rot und dessen Kinder schwarz. Fahre beim Großelter fort.



# Red-Black Tree

## Manipulation: Einfügen

Algorithmus: Red-Black Insert Fixup.

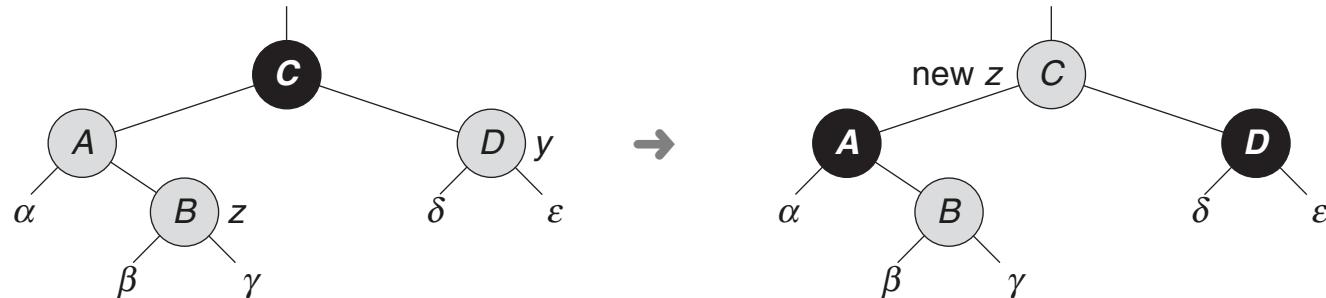
Eingabe:  $T$ . Potentiell invalider Red-Black Tree.  
 $z$ . Knoten, der die Invalidität verursacht.

Ausgabe: Valider Red-Black Tree.

Fallunterscheidung:

3.  $z$ 's Elter ist rot und sein Onkel  $y$  ist rot.

Färbe  $z$ 's Großelter rot und dessen Kinder schwarz. Fahre beim Großelter fort.



# Red-Black Tree

## Manipulation: Einfügen

Algorithmus: Red-Black Insert Fixup.

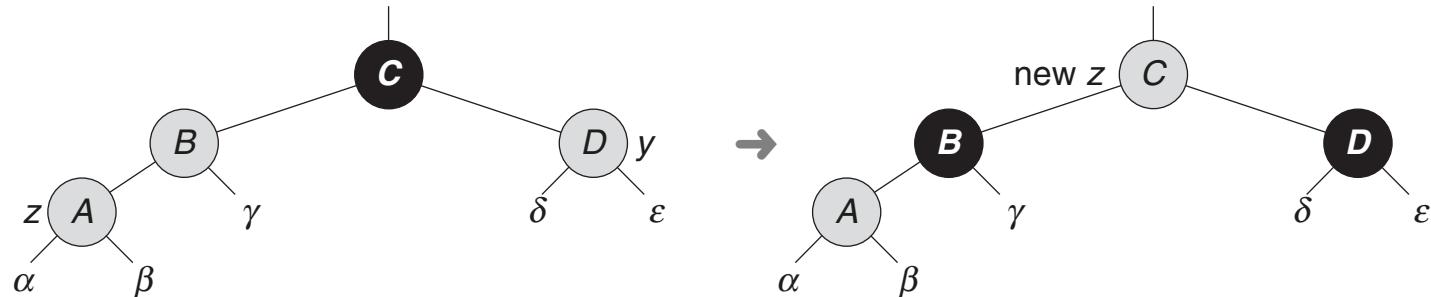
Eingabe:  $T$ . Potentiell invalider Red-Black Tree.  
 $z$ . Knoten, der die Invalidität verursacht.

Ausgabe: Valider Red-Black Tree.

Fallunterscheidung:

3.  $z$ 's Elter ist rot und sein Onkel  $y$  ist rot.

Färbe  $z$ 's Großelter rot und dessen Kinder schwarz. Fahre beim Großelter fort.



# Red-Black Tree

## Manipulation: Einfügen

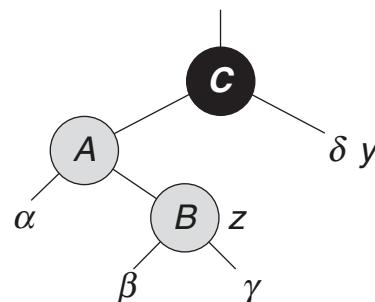
Algorithmus: Red-Black Insert Fixup.

Eingabe:  $T$ . Potentiell invalider Red-Black Tree.  
 $z$ . Knoten, der die Invalidität verursacht.

Ausgabe: Valider Red-Black Tree.

Fallunterscheidung:

4.  $z$ s Elter ist rot, sein Onkel  $y$  ist schwarz und  $z$  ist rechtes Kind.  
Linksrotation über  $z$ s Elter. Fahre mit  $z$ s vorigem Elter bei Fall 5 fort.
5.  $z$ s Elter ist rot, sein Onkel  $y$  ist schwarz und  $z$  ist linkes Kind.  
Färbe  $z$ s Elter schwarz und  $z$ s Großelter rot. Rechtsrotation über  $z$ s Großelter.



# Red-Black Tree

## Manipulation: Einfügen

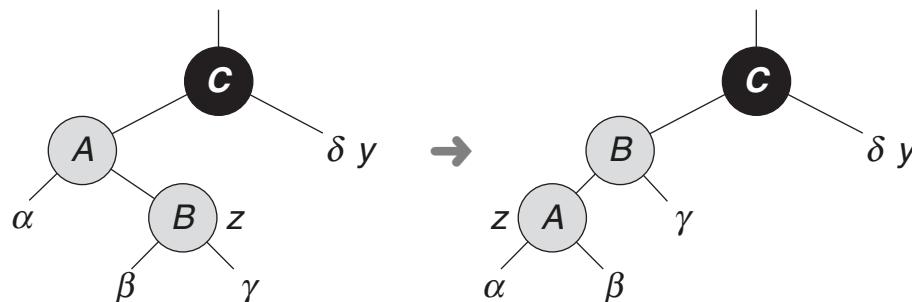
Algorithmus: Red-Black Insert Fixup.

Eingabe:  $T$ . Potentiell invalider Red-Black Tree.  
 $z$ . Knoten, der die Invalidität verursacht.

Ausgabe: Valider Red-Black Tree.

Fallunterscheidung:

4.  $z$ s Elter ist rot, sein Onkel  $y$  ist schwarz und  $z$  ist rechtes Kind.  
Linksrotation über  $z$ s Elter. Fahre mit  $z$ s vorigem Elter bei Fall 5 fort.
5.  $z$ s Elter ist rot, sein Onkel  $y$  ist schwarz und  $z$  ist linkes Kind.  
Färbe  $z$ s Elter schwarz und  $z$ s Großelter rot. Rechtsrotation über  $z$ s Großelter.



# Red-Black Tree

## Manipulation: Einfügen

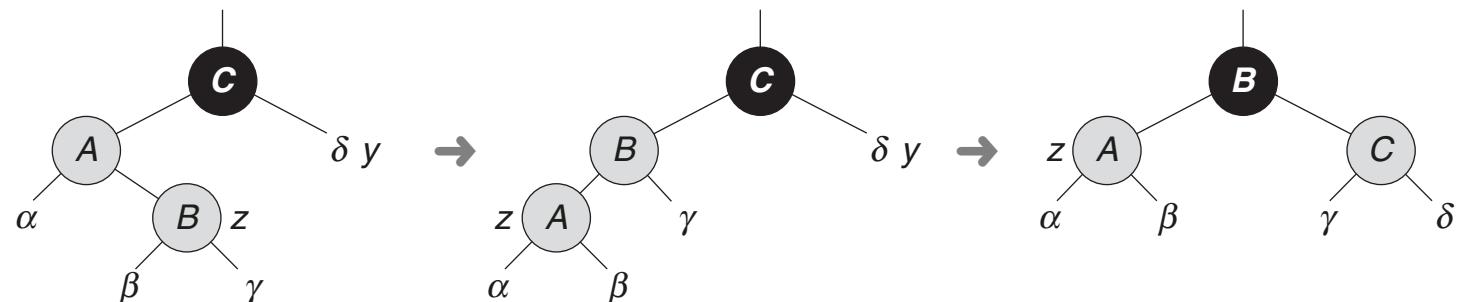
Algorithmus: Red-Black Insert Fixup.

Eingabe:  $T$ . Potentiell invalider Red-Black Tree.  
 $z$ . Knoten, der die Invalidität verursacht.

Ausgabe: Valider Red-Black Tree.

Fallunterscheidung:

4.  $z$ s Elter ist rot, sein Onkel  $y$  ist schwarz und  $z$  ist rechtes Kind.  
Linksrotation über  $z$ s Elter. Fahre mit  $z$ s vorigem Elter bei Fall 5 fort.
5.  $z$ s Elter ist rot, sein Onkel  $y$  ist schwarz und  $z$  ist linkes Kind.  
Färbe  $z$ s Elter schwarz und  $z$ s Großelter rot. Rechtsrotation über  $z$ s Großelter.



# Red-Black Tree

## Manipulation: Einfügen

*RBInsertFixup*( $T, z$ )

```
1. WHILE  $z.parent.color == RED$  DO
2.   IF  $z.parent == z.parent.parent.left$  THEN
3.      $y = z.parent.parent.right$ 
4.     IF  $y.color = RED$  THEN
5.        $z.parent.color = BLACK$ 
6.        $y.color = BLACK$ 
7.        $z.parent.parent.color = RED$ 
8.        $z = z.parent.parent$ 
9.     ELSE
10.      IF  $z == z.parent.right$  THEN
11.         $z = z.parent$ 
12.        LeftRotate( $T, z$ )
13.      ENDIF
14.       $z.parent.color = BLACK$ 
15.       $z.parent.parent.color = RED$ 
16.      RightRotate( $T, z.parent.parent$ )
17.    ENDIF
18.  ELSE
19.    // THEN-clause with "right" and "left" exchanged.
20.  ENDIF
21. ENDDO
22.  $T.root.color = BLACK$ 
```

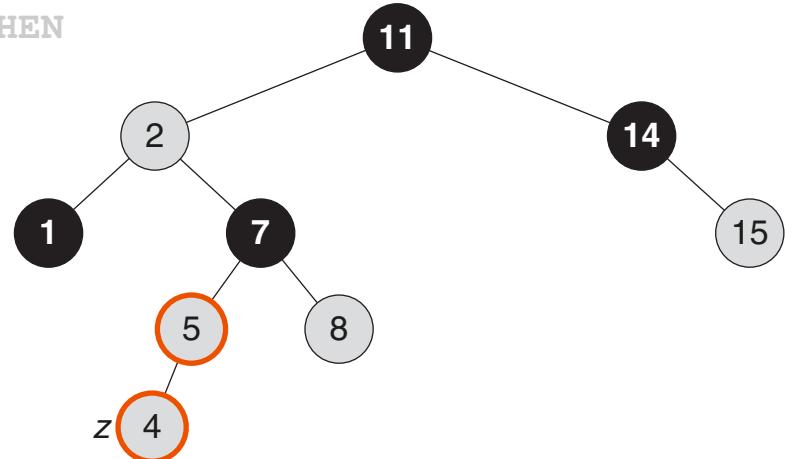
# Red-Black Tree

## Manipulation: Einfügen

*RBInsertFixup( $T, z$ )*

```
1. WHILE  $z.parent.color == RED$  DO
2.   IF  $z.parent == z.parent.parent.left$  THEN
3.      $y = z.parent.parent.right$ 
4.     IF  $y.color == RED$  THEN
5.        $z.parent.color = BLACK$ 
6.        $y.color = BLACK$ 
7.        $z.parent.parent.color = RED$ 
8.        $z = z.parent.parent$ 
9.     ELSE
10.      IF  $z == z.parent.right$  THEN
11.         $z = z.parent$ 
12.        LeftRotate( $T, z$ )
13.      ENDIF
14.       $z.parent.color = BLACK$ 
15.       $z.parent.parent.color = RED$ 
16.      RightRotate( $T, z.parent.parent$ )
17.    ENDIF
18.  ELSE
19.    // THEN-clause with "right" and "left" exchanged.
34.  ENDIF
35. ENDDO
36.  $T.root.color = BLACK$ 
```

Beispiel:



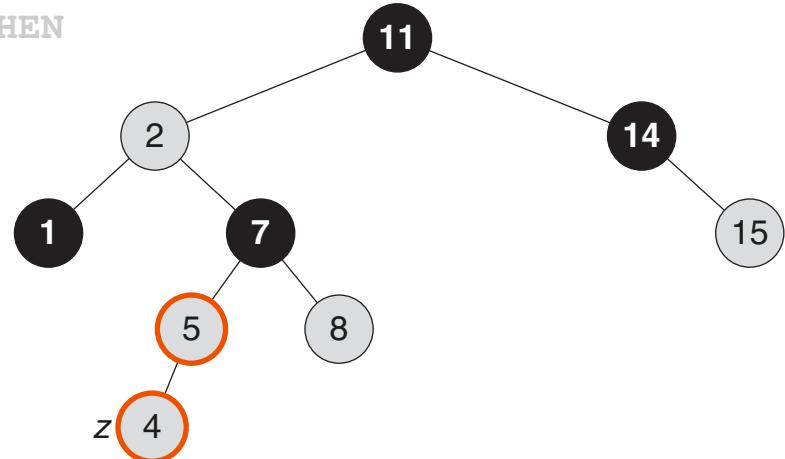
# Red-Black Tree

## Manipulation: Einfügen

*RBInsertFixup( $T, z$ )*

```
1. WHILE  $z.parent.color == RED$  DO
2.   IF  $z.parent == z.parent.parent.left$  THEN
3.      $y = z.parent.parent.right$ 
4.     IF  $y.color == RED$  THEN
5.        $z.parent.color = BLACK$ 
6.        $y.color = BLACK$ 
7.        $z.parent.parent.color = RED$ 
8.        $z = z.parent.parent$ 
9.     ELSE
10.      IF  $z == z.parent.right$  THEN
11.         $z = z.parent$ 
12.        LeftRotate( $T, z$ )
13.      ENDIF
14.       $z.parent.color = BLACK$ 
15.       $z.parent.parent.color = RED$ 
16.      RightRotate( $T, z.parent.parent$ )
17.    ENDIF
18.  ELSE
19.    // THEN-clause with "right" and "left" exchanged.
34.  ENDIF
35. ENDDO
36.  $T.root.color = BLACK$ 
```

Beispiel:



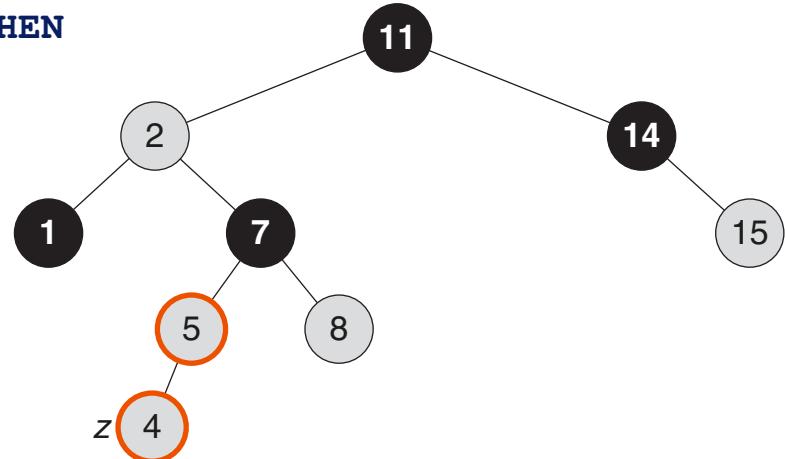
# Red-Black Tree

## Manipulation: Einfügen

*RBInsertFixup( $T, z$ )*

```
1. WHILE  $z.parent.color == RED$  DO
2.   IF  $z.parent == z.parent.parent.left$  THEN
3.      $y = z.parent.parent.right$ 
4.     IF  $y.color == RED$  THEN
5.        $z.parent.color = BLACK$ 
6.        $y.color = BLACK$ 
7.        $z.parent.parent.color = RED$ 
8.        $z = z.parent.parent$ 
9.     ELSE
10.      IF  $z == z.parent.right$  THEN
11.         $z = z.parent$ 
12.        LeftRotate( $T, z$ )
13.      ENDIF
14.       $z.parent.color = BLACK$ 
15.       $z.parent.parent.color = RED$ 
16.      RightRotate( $T, z.parent.parent$ )
17.    ENDIF
18.  ELSE
19.    // THEN-clause with "right" and "left" exchanged.
34.  ENDIF
35. ENDDO
36.  $T.root.color = BLACK$ 
```

Beispiel:



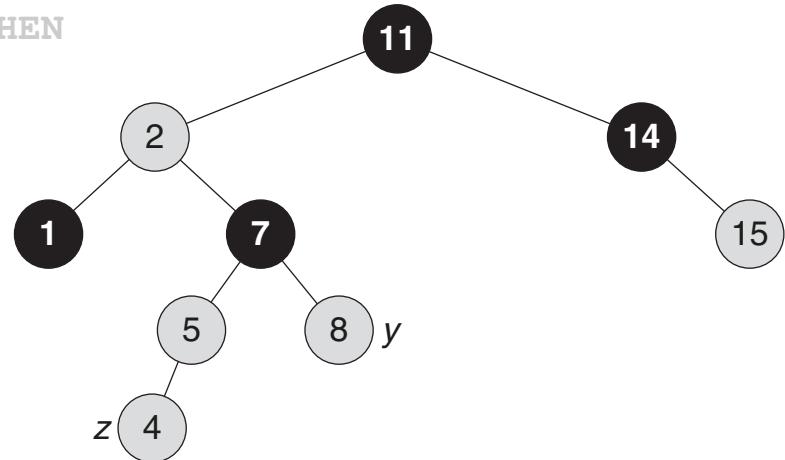
# Red-Black Tree

## Manipulation: Einfügen

*RBInsertFixup(T, z)*

```
1. WHILE z.parent.color == RED DO
2.   IF z.parent == z.parent.parent.left THEN
3.     y = z.parent.parent.right
4.     IF y.color = RED THEN
5.       z.parent.color = BLACK
6.       y.color = BLACK
7.       z.parent.parent.color = RED
8.       z = z.parent.parent
9.     ELSE
10.      IF z == z.parent.right THEN
11.        z = z.parent
12.        LeftRotate(T, z)
13.      ENDIF
14.      z.parent.color = BLACK
15.      z.parent.parent.color = RED
16.      RightRotate(T, z.parent.parent)
17.    ENDIF
18.  ELSE
19.    // THEN-clause with "right" and "left" exchanged.
34.  ENDIF
35. ENDDO
36. T.root.color = BLACK
```

Beispiel:



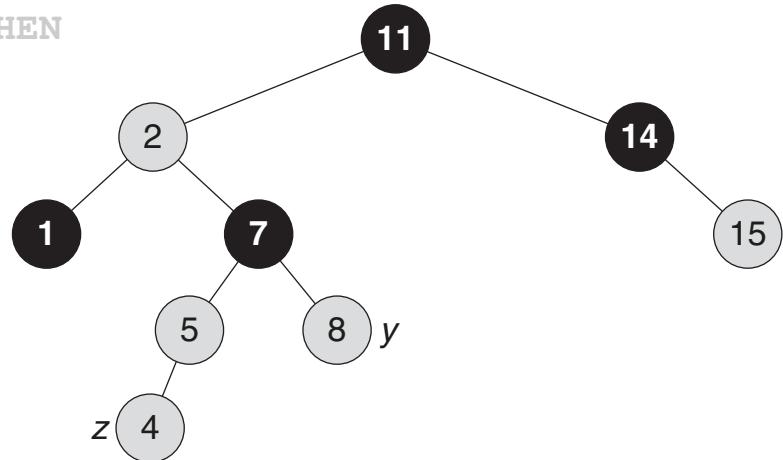
# Red-Black Tree

## Manipulation: Einfügen

*RBInsertFixup( $T, z$ )*

```
1. WHILE  $z.parent.color == RED$  DO
2.   IF  $z.parent == z.parent.parent.left$  THEN
3.      $y = z.parent.parent.right$ 
4.     IF  $y.color == RED$  THEN
5.        $z.parent.color = BLACK$ 
6.        $y.color = BLACK$ 
7.        $z.parent.parent.color = RED$ 
8.        $z = z.parent.parent$ 
9.     ELSE
10.      IF  $z == z.parent.right$  THEN
11.         $z = z.parent$ 
12.        LeftRotate( $T, z$ )
13.      ENDIF
14.       $z.parent.color = BLACK$ 
15.       $z.parent.parent.color = RED$ 
16.      RightRotate( $T, z.parent.parent$ )
17.    ENDIF
18.  ELSE
19.    // THEN-clause with "right" and "left" exchanged.
34.  ENDIF
35. ENDDO
36.  $T.root.color = BLACK$ 
```

Beispiel:



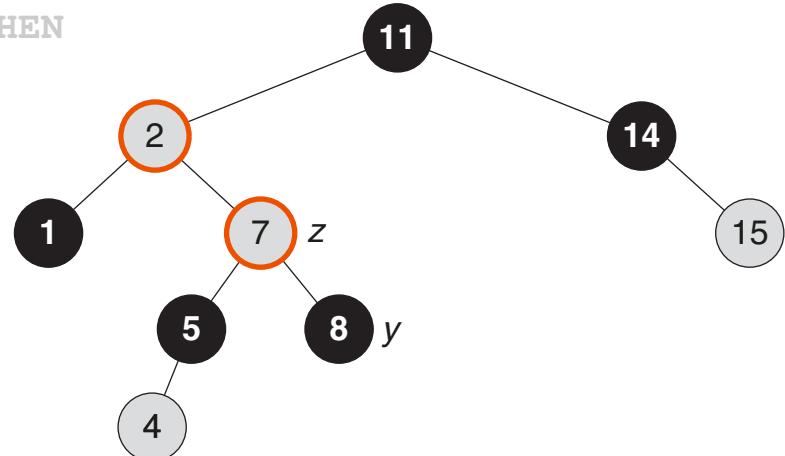
# Red-Black Tree

## Manipulation: Einfügen

*RBInsertFixup( $T, z$ )*

```
1. WHILE  $z.parent.color == RED$  DO
2.   IF  $z.parent == z.parent.parent.left$  THEN
3.      $y = z.parent.parent.right$ 
4.     IF  $y.color == RED$  THEN
5.        $z.parent.color = BLACK$ 
6.        $y.color = BLACK$ 
7.        $z.parent.parent.color = RED$ 
8.        $z = z.parent.parent$ 
9.     ELSE
10.      IF  $z == z.parent.right$  THEN
11.         $z = z.parent$ 
12.        LeftRotate( $T, z$ )
13.      ENDIF
14.       $z.parent.color = BLACK$ 
15.       $z.parent.parent.color = RED$ 
16.      RightRotate( $T, z.parent.parent$ )
17.    ENDIF
18.  ELSE
19.    // THEN-clause with "right" and "left" exchanged.
34.  ENDIF
35. ENDDO
36.  $T.root.color = BLACK$ 
```

Beispiel:



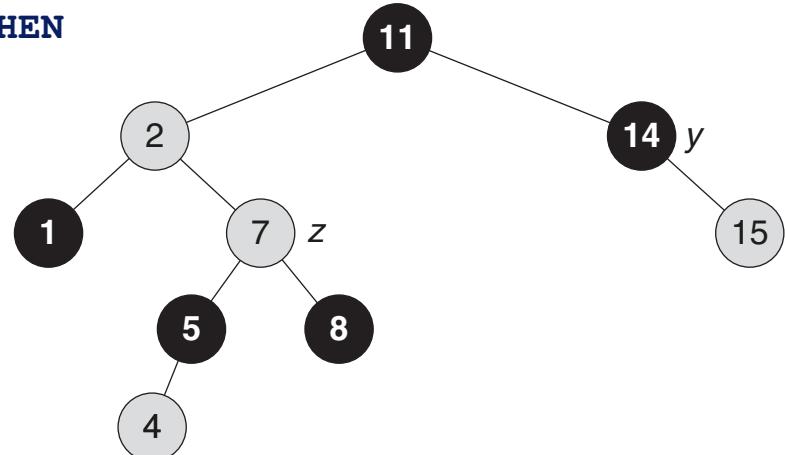
# Red-Black Tree

## Manipulation: Einfügen

*RBInsertFixup( $T, z$ )*

```
1. WHILE  $z.parent.color == RED$  DO
2.   IF  $z.parent == z.parent.parent.left$  THEN
3.      $y = z.parent.parent.right$ 
4.     IF  $y.color = RED$  THEN
5.        $z.parent.color = BLACK$ 
6.        $y.color = BLACK$ 
7.        $z.parent.parent.color = RED$ 
8.        $z = z.parent.parent$ 
9.     ELSE
10.      IF  $z == z.parent.right$  THEN
11.         $z = z.parent$ 
12.        LeftRotate( $T, z$ )
13.      ENDIF
14.       $z.parent.color = BLACK$ 
15.       $z.parent.parent.color = RED$ 
16.      RightRotate( $T, z.parent.parent$ )
17.    ENDIF
18.  ELSE
19.    // THEN-clause with "right" and "left" exchanged.
34.  ENDIF
35. ENDDO
36.  $T.root.color = BLACK$ 
```

Beispiel:



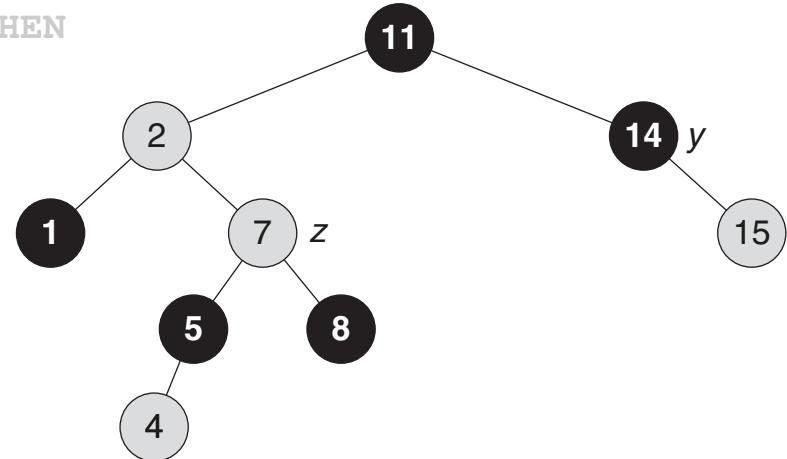
# Red-Black Tree

## Manipulation: Einfügen

*RBInsertFixup( $T, z$ )*

```
1. WHILE  $z.parent.color == RED$  DO
2.   IF  $z.parent == z.parent.parent.left$  THEN
3.      $y = z.parent.parent.right$ 
4.     IF  $y.color == RED$  THEN
5.        $z.parent.color = BLACK$ 
6.        $y.color = BLACK$ 
7.        $z.parent.parent.color = RED$ 
8.        $z = z.parent.parent$ 
9.     ELSE
10.      IF  $z == z.parent.right$  THEN
11.         $z = z.parent$ 
12.        LeftRotate( $T, z$ )
13.      ENDIF
14.       $z.parent.color = BLACK$ 
15.       $z.parent.parent.color = RED$ 
16.      RightRotate( $T, z.parent.parent$ )
17.    ENDIF
18.  ELSE
19.    // THEN-clause with "right" and "left" exchanged.
34.  ENDIF
35. ENDDO
36.  $T.root.color = BLACK$ 
```

Beispiel:



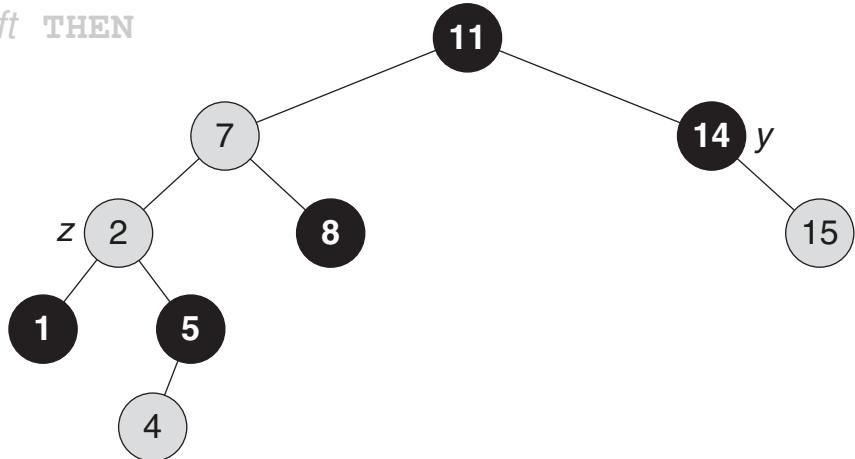
# Red-Black Tree

## Manipulation: Einfügen

*RBInsertFixup( $T, z$ )*

```
1. WHILE  $z.parent.color == RED$  DO
2.   IF  $z.parent == z.parent.parent.left$  THEN
3.      $y = z.parent.parent.right$ 
4.     IF  $y.color == RED$  THEN
5.        $z.parent.color = BLACK$ 
6.        $y.color = BLACK$ 
7.        $z.parent.parent.color = RED$ 
8.        $z = z.parent.parent$ 
9.     ELSE
10.      IF  $z == z.parent.right$  THEN
11.         $z = z.parent$ 
12.        LeftRotate( $T, z$ )
13.      ENDIF
14.       $z.parent.color = BLACK$ 
15.       $z.parent.parent.color = RED$ 
16.      RightRotate( $T, z.parent.parent$ )
17.    ENDIF
18.  ELSE
19.    // THEN-clause with "right" and "left" exchanged.
20.  ENDIF
21. ENDDO
22.  $T.root.color = BLACK$ 
```

Beispiel:



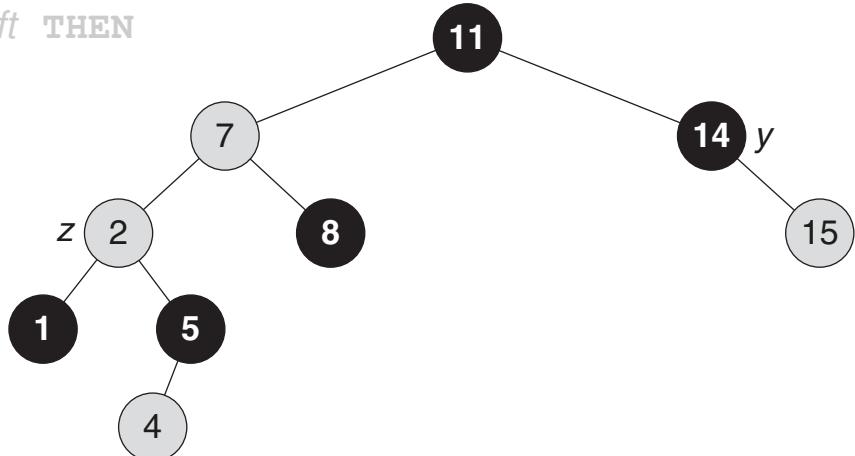
# Red-Black Tree

## Manipulation: Einfügen

*RBInsertFixup( $T, z$ )*

```
1. WHILE  $z.parent.color == RED$  DO
2.   IF  $z.parent == z.parent.parent.left$  THEN
3.      $y = z.parent.parent.right$ 
4.     IF  $y.color == RED$  THEN
5.        $z.parent.color = BLACK$ 
6.        $y.color = BLACK$ 
7.        $z.parent.parent.color = RED$ 
8.        $z = z.parent.parent$ 
9.     ELSE
10.      IF  $z == z.parent.right$  THEN
11.         $z = z.parent$ 
12.        LeftRotate( $T, z$ )
13.      ENDIF
14.       $z.parent.color = BLACK$ 
15.       $z.parent.parent.color = RED$ 
16.      RightRotate( $T, z.parent.parent$ )
17.    ENDIF
18.  ELSE
19.    // THEN-clause with "right" and "left" exchanged.
34.  ENDIF
35. ENDDO
36.  $T.root.color = BLACK$ 
```

Beispiel:



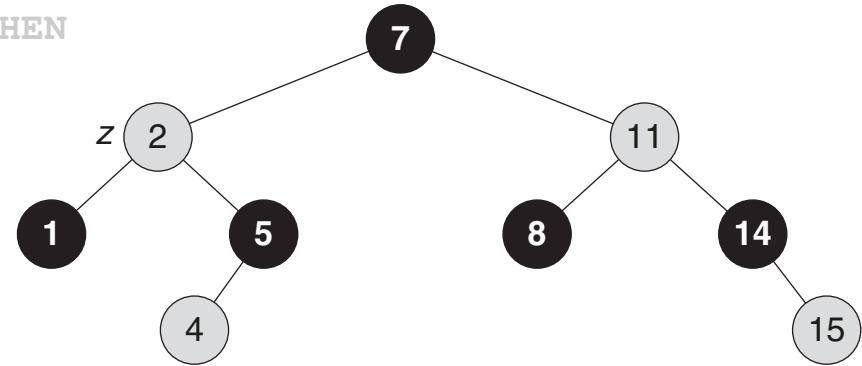
# Red-Black Tree

## Manipulation: Einfügen

*RBInsertFixup( $T, z$ )*

```
1. WHILE  $z.parent.color == RED$  DO
2.   IF  $z.parent == z.parent.parent.left$  THEN
3.      $y = z.parent.parent.right$ 
4.     IF  $y.color == RED$  THEN
5.        $z.parent.color = BLACK$ 
6.        $y.color = BLACK$ 
7.        $z.parent.parent.color = RED$ 
8.        $z = z.parent.parent$ 
9.     ELSE
10.      IF  $z == z.parent.right$  THEN
11.         $z = z.parent$ 
12.        LeftRotate( $T, z$ )
13.      ENDIF
14.       $z.parent.color = BLACK$ 
15.       $z.parent.parent.color = RED$ 
16.      RightRotate( $T, z.parent.parent$ )
17.    ENDIF
18.  ELSE
19.    // THEN-clause with "right" and "left" exchanged.
34.  ENDIF
35. ENDDO
36.  $T.root.color = BLACK$ 
```

Beispiel:



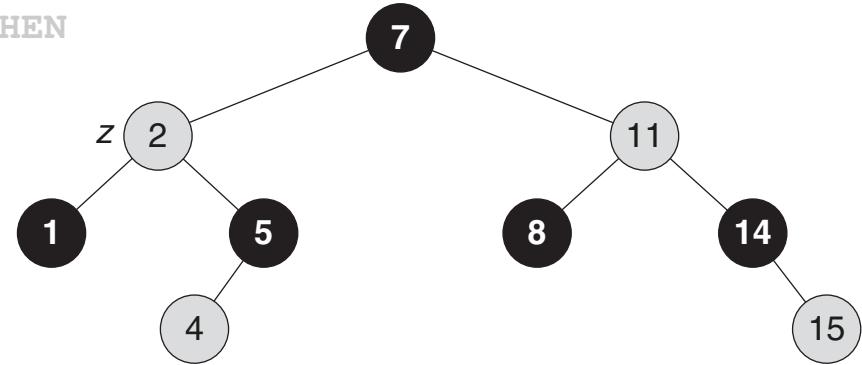
# Red-Black Tree

## Manipulation: Einfügen

*RBInsertFixup( $T, z$ )*

```
1. WHILE  $z.parent.color == RED$  DO
2.   IF  $z.parent == z.parent.parent.left$  THEN
3.      $y = z.parent.parent.right$ 
4.     IF  $y.color == RED$  THEN
5.        $z.parent.color = BLACK$ 
6.        $y.color = BLACK$ 
7.        $z.parent.parent.color = RED$ 
8.        $z = z.parent.parent$ 
9.     ELSE
10.      IF  $z == z.parent.right$  THEN
11.         $z = z.parent$ 
12.        LeftRotate( $T, z$ )
13.      ENDIF
14.       $z.parent.color = BLACK$ 
15.       $z.parent.parent.color = RED$ 
16.      RightRotate( $T, z.parent.parent$ )
17.    ENDIF
18.  ELSE
19.    // THEN-clause with "right" and "left" exchanged.
34.  ENDIF
35. ENDDO
36.  $T.root.color = BLACK$ 
```

Beispiel:



# Red-Black Tree

Manipulation: Löschen [Binary Search Tree]

Algorithmus: Red-Black Transplant.

Eingabe:  $T$ . Red-Black Tree.  
 $u, v$ . Wurzeln eines Teilbaums von  $T$

Ausgabe: Binärbaum, bei dem  $u$  durch  $v$  ersetzt wurde.

*RBTransplant*( $T, u, v$ )

1. **IF**  $u.parent == T.nil$  **THEN**
2.      $T.root = v$
3. **ELSE IF**  $u == u.parent.left$  **THEN**
4.      $u.parent.left = v$
5. **ELSE**
6.      $u.parent.right = v$
7. **ENDIF**
8.      $v.parent = u.parent$

Unterschiede zu *Transplant*:

- Zeile 1: Referenz zu *NIL* durch  $T.nil$  ersetzt.
- Die Zuweisung in Zeile 8 ist nicht mehr abhängig vom Elter: Nutzung des Sentinels.

# Red-Black Tree

## Manipulation: Löschen

Algorithmus: Tree Delete.

Eingabe:  $T$ . Red-Black Tree.  
 $z$ . Zu löschernder Knoten.

Ausgabe: Red-Black Tree, bei dem  $z$  gelöscht wurde.

Fallunterscheidung:

1.  $z$  hat keine Kinder.

Ersetze  $z$  bei seinem Elter durch  $T.nil$ .

2.  $z$  hat ein Kind.

Ersetze  $z$  bei seinem Elter durch (a) sein rechtes bzw. (b) sein linkes Kind.

3.  $z$  hat zwei Kinder.

(a)  $z$ s Nachfolger  $y$  ist sein rechtes Kind.

Ersetze  $z$  durch  $y$ .

(b)  $z$ s Nachfolger  $y$  ist ein anderer Knoten seinem rechten Teilbaum.

Ersetze  $y$  durch sein rechtes Kind und mache  $y$  zur Wurzel von  $z$ s rechtem Teilbaum.

Ersetze  $z$  durch  $y$ .

# Red-Black Tree

## Manipulation: Löschen

*RBDelete*( $T, z$ )

```
1.   $y = z$ 
2.   $yOriginalColor = y.color$ 
3.  IF  $z.left == T.nil$  THEN
4.     $x = z.right$ 
5.    RBTransplant( $T, z, z.right$ )
6.  ELSE IF  $z.right == T.nil$  THEN
7.     $x = z.left$ 
8.    RBTransplant( $T, z, z.left$ )
9.  ELSE
10.    $y = \text{TreeMinimum}(z.right)$ 
11.    $yOriginalColor = y.color$ 
12.    $x = y.right$ 
13.   IF  $y.parent == z$  THEN
14.      $x.parent = y$ 
15.   ELSE
16.     RBTransplant( $T, y, y.right$ )
17.      $y.right = z.right$ 
18.      $y.right.parent = y$ 
19.   ENDIF
20.   RBTransplant( $T, z, y$ )
21.    $y.left = z.left$ 
22.    $y.left.parent = y$ 
23.    $y.color = z.color$ 
24. ENDIF
25. IF  $yOriginalColor == BLACK$  THEN
26.   RBDeleteFixup( $T, x$ )
27. ENDIF
```

# Red-Black Tree

## Manipulation: Löschen

*RBDelete*( $T, z$ )

*RBDelete* „enthält“ *TreeDelete*.

```
1.   $y = z$ 
2.   $yOriginalColor = y.color$ 
3.  IF  $z.left == T.nil$  THEN
4.     $x = z.right$ 
5.    RBTransplant( $T, z, z.right$ )
6.  ELSE IF  $z.right == T.nil$  THEN
7.     $x = z.left$ 
8.    RBTransplant( $T, z, z.left$ )
9.  ELSE
10.    $y = \text{TreeMinimum}(z.right)$ 
11.    $yOriginalColor = y.color$ 
12.    $x = y.right$ 
13.   IF  $y.parent == z$  THEN
14.      $x.parent = y$ 
15.   ELSE
16.     RBTransplant( $T, y, y.right$ )
17.      $y.right = z.right$ 
18.      $y.right.parent = y$ 
19.   ENDIF
20.   RBTransplant( $T, z, y$ )
21.    $y.left = z.left$ 
22.    $y.left.parent = y$ 
23.    $y.color = z.color$ 
24. ENDIF
25. IF  $yOriginalColor == BLACK$  THEN
26.   RBDeleteFixup( $T, x$ )
27. ENDIF
```

# Red-Black Tree

## Manipulation: Löschen

*RBDelete*( $T, z$ )

```
1.   $y = z$ 
2.   $yOriginalColor = y.color$ 
3.  IF  $z.left == T.nil$  THEN
4.     $x = z.right$ 
5.    RBTransplant( $T, z, z.right$ )
6.  ELSE IF  $z.right == T.nil$  THEN
7.     $x = z.left$ 
8.    RBTransplant( $T, z, z.left$ )
9.  ELSE
10.    $y = \text{TreeMinimum}(z.right)$ 
11.    $yOriginalColor = y.color$ 
12.    $x = y.right$ 
13.   IF  $y.parent == z$  THEN
14.      $x.parent = y$ 
15.   ELSE
16.     RBTransplant( $T, y, y.right$ )
17.      $y.right = z.right$ 
18.      $y.right.parent = y$ 
19.   ENDIF
20.   RBTransplant( $T, z, y$ )
21.    $y.left = z.left$ 
22.    $y.left.parent = y$ 
23.    $y.color = z.color$ 
24. ENDIF
25. IF  $yOriginalColor == BLACK$  THEN
26.   RBDeleteFixup( $T, x$ )
27. ENDIF
```

*RBDelete* „enthält“ *TreeDelete*.

Dazu kommt Code zur Vorbereitung der Korrektur von  
Verletzungen der Red-Black Tree-Bedingungen.

# Red-Black Tree

## Manipulation: Löschen

*RBDelete*( $T, z$ )

```
1.   $y = z$ 
2.   $yOriginalColor = y.color$ 
3.  IF  $z.left == T.nil$  THEN
4.     $x = z.right$ 
5.    RBTransplant( $T, z, z.right$ )
6.  ELSE IF  $z.right == T.nil$  THEN
7.     $x = z.left$ 
8.    RBTransplant( $T, z, z.left$ )
9.  ELSE
10.    $y = TreeMinimum(z.right)$ 
11.    $yOriginalColor = y.color$ 
12.    $x = y.right$ 
13.   IF  $y.parent == z$  THEN
14.      $x.parent = y$ 
15.   ELSE
16.     RBTransplant( $T, y, y.right$ )
17.      $y.right = z.right$ 
18.      $y.right.parent = y$ 
19.   ENDIF
20.   RBTransplant( $T, z, y$ )
21.    $y.left = z.left$ 
22.    $y.left.parent = y$ 
23.    $y.color = z.color$ 
24. ENDIF
25. IF  $yOriginalColor == BLACK$  THEN
26.   RBDeleteFixup( $T, x$ )
27. ENDIF
```

*RBDelete* „enthält“ *TreeDelete*.

Dazu kommt Code zur Vorbereitung der Korrektur von Verletzungen der Red-Black Tree-Bedingungen.

- Hilfsvariablen  $y$  und  $yOriginalColor$ . Knoten, der fallabhängig gelöscht oder verschoben wird und seine initiale Farbe.
- Hilfsvariable  $x$ . Knoten, der  $y$  ersetzt;  $y$  sein einziges Kind oder  $T.nil$ .  $x$  ist Ursache für mögliche Verletzungen.
- Fälle 1 und 2.  
 $y = z$  wird durch  $x$  ersetzt.
- Fall 3.  
 $y$  wird durch  $x$  ersetzt, an die Stelle  $z$  verschenen und erhält  $z$  Farbe.

# Red-Black Tree

## Manipulation: Löschen

*RBDelete*( $T, z$ )

```
1.   $y = z$ 
2.   $yOriginalColor = y.color$ 
3.  IF  $z.left == T.nil$  THEN
4.     $x = z.right$ 
5.    RBTransplant( $T, z, z.right$ )
6.  ELSE IF  $z.right == T.nil$  THEN
7.     $x = z.left$ 
8.    RBTransplant( $T, z, z.left$ )
9.  ELSE
10.    $y = \text{TreeMinimum}(z.right)$ 
11.    $yOriginalColor = y.color$ 
12.    $x = y.right$ 
13.   IF  $y.parent == z$  THEN
14.      $x.parent = y$ 
15.   ELSE
16.     RBTransplant( $T, y, y.right$ )
17.      $y.right = z.right$ 
18.      $y.right.parent = y$ 
19.   ENDIF
20.   RBTransplant( $T, z, y$ )
21.    $y.left = z.left$ 
22.    $y.left.parent = y$ 
23.    $y.color = z.color$ 
24. ENDIF
25. IF  $yOriginalColor == BLACK$  THEN
26.   RBDeleteFixup( $T, x$ )
27. ENDIF
```

*RBDelete* „enthält“ *TreeDelete*.

Dazu kommt Code zur Vorbereitung der Korrektur von Verletzungen der Red-Black Tree-Bedingungen.

- Hilfsvariablen  $y$  und  $yOriginalColor$ . Knoten, der fallabhängig gelöscht oder verschoben wird und seine initiale Farbe.
- Hilfsvariable  $x$ . Knoten, der  $y$  ersetzt;  $y$  sein einziges Kind oder  $T.nil$ .  $x$  ist Ursache für mögliche Verletzungen.
- Fälle 1 und 2.  
 $y = z$  wird durch  $x$  ersetzt.
- Fall 3.  
 $y$  wird durch  $x$  ersetzt, an die Stelle  $z$ s verschoben und erhält  $z$ s Farbe.
- Vorbereitung der Korrektur von  $x$ . Setzen von  $x.parent$  auf den initialen Elter von  $y$ . Betrachte die letzte Zeile von *RBTransplant*.

# Red-Black Tree

## Manipulation: Löschen

Algorithmus: Red-Black Delete Fixup.

Eingabe:  $T$ . Potentiell invalider Red-Black-Tree.  
 $x$ . Knoten, der die Invalidität verursacht.

Ausgabe: Valider Red-Black-Tree.

Fallunterscheidung:

1.  $x$  ist Wurzel von  $T$  oder  $x$  ist rot.  
Färbe  $x$  schwarz.
2.  $x$  s Geschwister  $w$  ist rot.  
Färbe  $w$  schwarz und  $x$  s Elter rot. Linksrotation über  $x$  s Elter. Fahre bei Fällen 3, 4 oder 5 fort.
3.  $x$  s Geschwister  $w$  ist schwarz und beide Kinder von  $w$  sind schwarz.  
Färbe  $w$  rot und fahre bei  $x$  s Elter fort.
4.  $x$  s Geschwister  $w$  ist schwarz,  $w$  s linkes Kind rot und das rechte schwarz.  
Färbe  $w$  s linkes Kind schwarz und  $w$  rot. Rechtsrotation über  $w$ . Fahre bei Fall 5 fort.
5.  $x$  s Geschwister  $w$  ist schwarz und  $w$  s rechtes Kind rot.  
Färbe  $w$  wie  $x$  s Elter und den Elter und  $w$  s rechtes Kind schwarz. Linksrotation über  $x$  s Elter. Fahre bei  $x$  fort.

# Red-Black Tree

## Manipulation: Löschen

Algorithmus: Red-Black Delete Fixup.

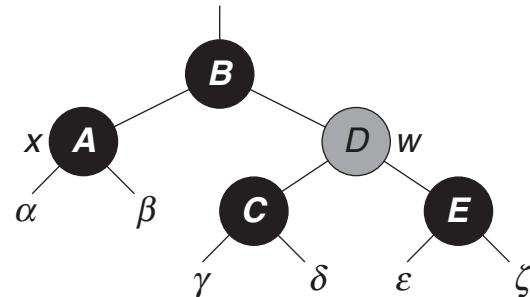
Eingabe:  $T$ . Potentiell invalider Red-Black-Tree.  
 $x$ . Knoten, der die Invalidität verursacht.

Ausgabe: Valider Red-Black-Tree.

Fallunterscheidung:

2.  $x$ ’s Geschwister  $w$  ist rot.

Färbe  $w$  schwarz und  $x$ ’s Elter rot. Linksrotation über  $x$ ’s Elter. Fahre bei Fällen 3, 4 oder 5 fort.



# Red-Black Tree

## Manipulation: Löschen

Algorithmus: Red-Black Delete Fixup.

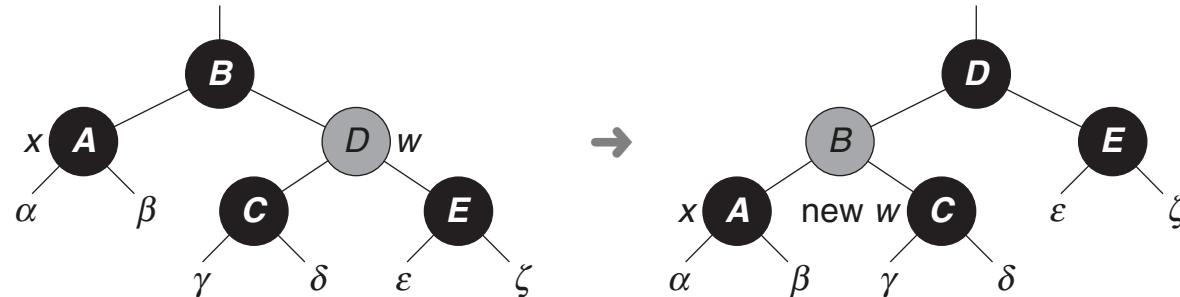
Eingabe:  $T$ . Potentiell invalider Red-Black-Tree.  
 $x$ . Knoten, der die Invalidität verursacht.

Ausgabe: Valider Red-Black-Tree.

Fallunterscheidung:

2.  $x$ s Geschwister  $w$  ist rot.

Färbe  $w$  schwarz und  $x$ s Elter rot. Linksrotation über  $x$ s Elter. Fahre bei Fällen 3, 4 oder 5 fort.



# Red-Black Tree

## Manipulation: Löschen

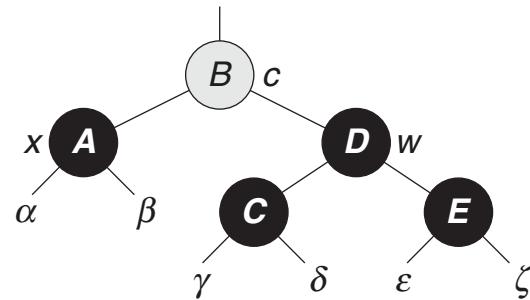
Algorithmus: Red-Black Delete Fixup.

Eingabe:  $T$ . Potentiell invalider Red-Black-Tree.  
 $x$ . Knoten, der die Invalidität verursacht.

Ausgabe: Valider Red-Black-Tree.

Fallunterscheidung:

3.  $xs$  Geschwister  $w$  ist schwarz und beide Kinder von  $w$  sind schwarz.  
Färbe  $w$  rot und fahre bei  $xs$  Elter fort.



# Red-Black Tree

## Manipulation: Löschen

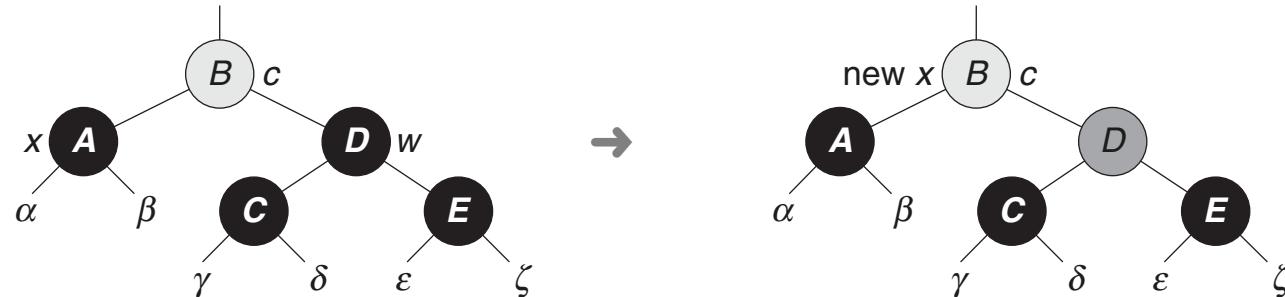
Algorithmus: Red-Black Delete Fixup.

Eingabe:  $T$ . Potentiell invalider Red-Black-Tree.  
 $x$ . Knoten, der die Invalidität verursacht.

Ausgabe: Valider Red-Black-Tree.

Fallunterscheidung:

3.  $xs$  Geschwister  $w$  ist schwarz und beide Kinder von  $w$  sind schwarz.  
Färbe  $w$  rot und fahre bei  $xs$  Elter fort.



# Red-Black Tree

## Manipulation: Löschen

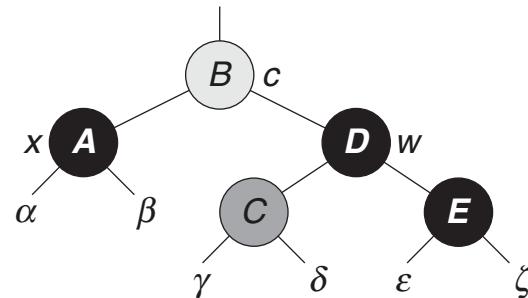
Algorithmus: Red-Black Delete Fixup.

Eingabe:  $T$ . Potentiell invalider Red-Black-Tree.  
 $x$ . Knoten, der die Invalidität verursacht.

Ausgabe: Valider Red-Black-Tree.

Fallunterscheidung:

4.  $x$ ’s Geschwister  $w$  ist schwarz,  $w$ ’s linkes Kind rot und das rechte schwarz.  
Färbe  $w$ ’s linkes Kind schwarz und  $w$  rot. Rechtsrotation über  $w$ . Fahre bei Fall 5 fort.



# Red-Black Tree

## Manipulation: Löschen

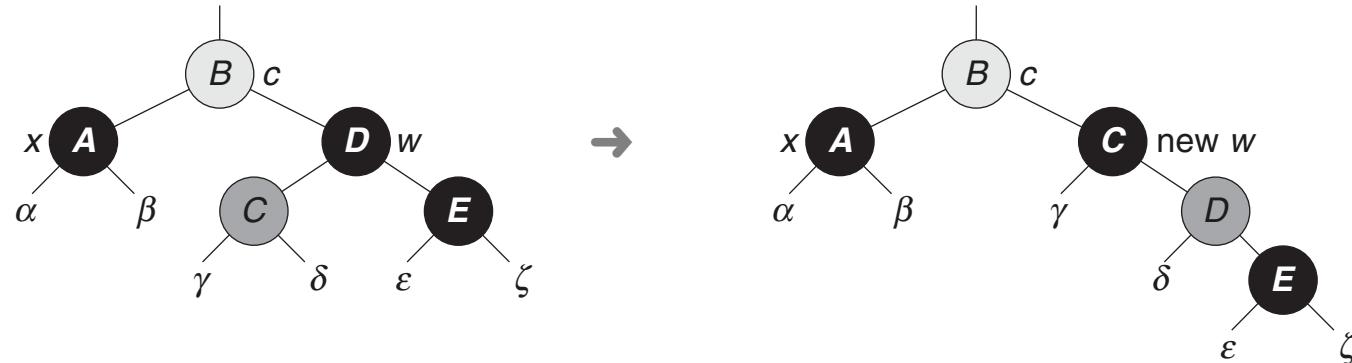
Algorithmus: Red-Black Delete Fixup.

Eingabe:  $T$ . Potentiell invalider Red-Black-Tree.  
 $x$ . Knoten, der die Invalidität verursacht.

Ausgabe: Valider Red-Black-Tree.

Fallunterscheidung:

4.  $x$ ’s Geschwister  $w$  ist schwarz,  $w$ ’s linkes Kind rot und das rechte schwarz.  
Färbe  $w$ ’s linkes Kind schwarz und  $w$  rot. Rechtsrotation über  $w$ . Fahre bei Fall 5 fort.



# Red-Black Tree

## Manipulation: Löschen

Algorithmus: Red-Black Delete Fixup.

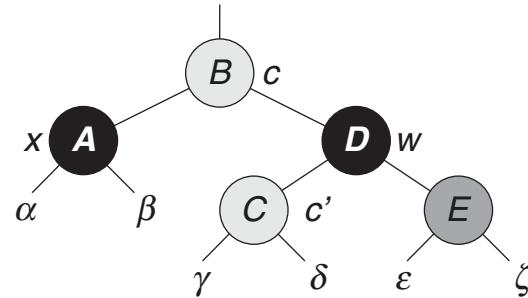
Eingabe:  $T$ . Potentiell invalider Red-Black-Tree.  
 $x$ . Knoten, der die Invalidität verursacht.

Ausgabe: Valider Red-Black-Tree.

Fallunterscheidung:

4.  $xs$  Geschwister  $w$  ist schwarz und  $ws$  rechtes Kind rot.

Färbe  $w$  wie  $xs$  Elter und den Elter und  $ws$  rechtes Kind schwarz. Linksrotation über  $xs$  Elter.  
Fahre bei  $x$  fort.



# Red-Black Tree

## Manipulation: Löschen

Algorithmus: Red-Black Delete Fixup.

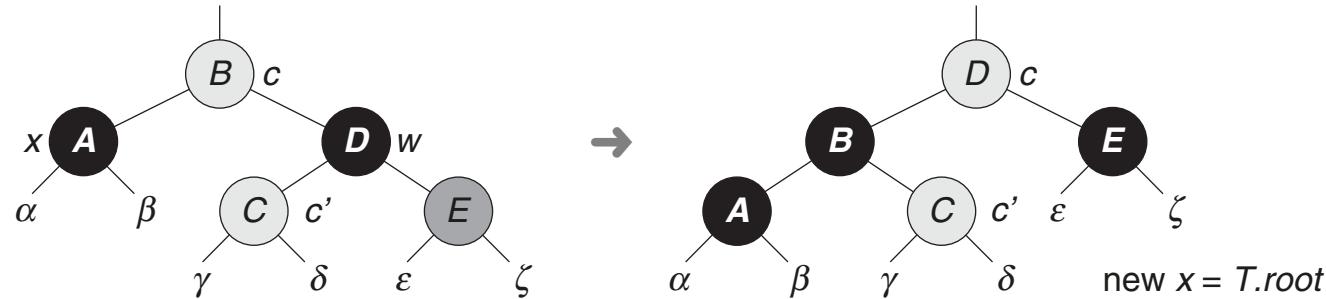
Eingabe:  $T$ . Potentiell invalider Red-Black-Tree.  
 $x$ . Knoten, der die Invalidität verursacht.

Ausgabe: Valider Red-Black-Tree.

Fallunterscheidung:

4.  $xs$  Geschwister  $w$  ist schwarz und  $ws$  rechtes Kind rot.

Färbe  $w$  wie  $xs$  Elter und den Elter und  $ws$  rechtes Kind schwarz. Linksrotation über  $xs$  Elter.  
Fahre bei  $x$  fort.



## Bemerkungen:

### □ *RBDeleteFixup*( $T, x$ )

```
1. WHILE  $x \neq T.root$  AND  $x.color == BLACK$  DO
2.   IF  $x == x.parent.left$  THEN
3.      $w = x.parent.right$ 
4.     IF  $w.color == RED$  THEN
5.        $w.color = BLACK$ 
6.        $x.parent.color = RED$ 
7.       LeftRotate( $T, x.parent$ )
8.        $w = x.parent.right$ 
9.     ENDIF
10.    IF  $w.left.color == BLACK$  AND  $w.right.color == BLACK$  THEN
11.       $w.color = RED$ 
12.       $x = x.parent$ 
13.    ELSE
14.      IF  $w.right.color == BLACK$  THEN
15.         $w.left.color = BLACK$ 
16.         $w.color = RED$ 
17.        RightRotate( $T, w$ )
18.         $w = x.parent.right$ 
19.      ENDIF
20.       $w.color = x.parent.color$ 
21.       $x.parent.color = BLACK$ 
22.       $w.right.color = BLACK$ 
23.      LeftRotate( $T, x.parent$ )
24.       $x = T.root$ 
25.    ENDIF
26.  ELSE
27.    // THEN-clause with "right" and "left" exchanged.
28.  ENDIF
29. ENDDO
30.  $x.color = BLACK$ 
```