Kapitel PTS:V

V. Zufallsgrößen und Maßzahlen

- ❑ Zufallsgrößen
- ❑ Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- ❑ Verteilungsfunktionen
- ❑ Multiple Zufallsgrößen
- ❑ Erwartungswerte
- ❑ Varianz und Standardabweichung
- ❑ Das $\sqrt{n}$-Gesetz
- ❑ Schätzwerte für Erwartungswert und Standardabweichung

Varianz und Standardabweichung

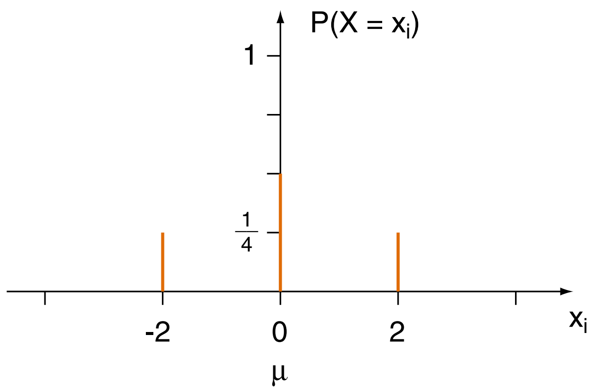
Beispiel: Zwei Zufallsgrößen

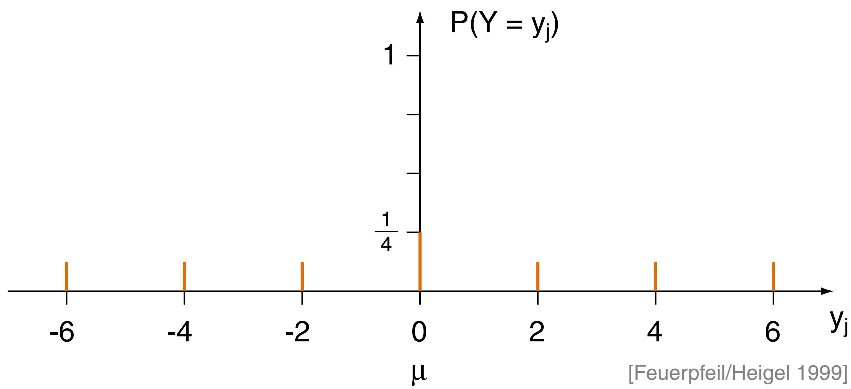
- Seien X und Y Zufallsgrößen mit folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen:

x_i	-2	0	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

y_j	-6	-4	-2	0	2	4	6
$P(Y = y_j)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

- Wegen der Symmetrie der Verteilungen zum Nullpunkt gilt: $E(X) = E(Y) = 0$





[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Trotz des gleichen Erwartungswertes unterscheiden sich die Verteilungen von X und Y wesentlich: die Werte von Y schwanken stärker als die von X.

- Man sagt: Y besitzt eine größere Streuung bzw. Variabilität als X.

Varianz und Standardabweichung

Begriffsbildung

- Sei X eine Zufallsgröße mit $W_X = \{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$.
- Was ist ein geeignetes Maß für die Variabilität von X?

Varianz und Standardabweichung

Begriffsbildung

- Sei X eine Zufallsgröße mit $W_X = \{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$.
- Was ist ein geeignetes Maß für die Variabilität von X?
- Schwankungsbreite:

  $x_k - x_1$, wobei x_k der größte und x_1 der kleinste Wert in W_X ist.

- Dieses Maß lässt die Verteilung der Werte weitgehend unberücksichtigt.

Varianz und Standardabweichung

Begriffsbildung

- Sei X eine Zufallsgröße mit $W_X = \{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$.
- Was ist ein geeignetes Maß für die Variabilität von X?

- Schwankungsbreite:

$$x_k - x_1, \text{ wobei } x_k \text{ der größte und } x_1 \text{ der kleinste Wert in } W_X \text{ ist.}$$

- Dieses Maß lässt die Verteilung der Werte weitgehend unberücksichtigt.

- Zufällige Abweichungen vom Erwartungswert nach oben und nach unten:

$$Z_1 = X - \mu \text{ mit } W_{Z_1} = \{x_1 - \mu; x_2 - \mu; \ldots; x_k - \mu\}$$

- W_X wird nur durch W_{Z_1} ersetzt: Was ist interessant an der Verteilung von Z_1?

Varianz und Standardabweichung

Begriffsbildung

- Sei X eine Zufallsgröße mit $W_X = \{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$.
- Was ist ein geeignetes Maß für die Variabilität von X?

- Schwankungsbreite:

$$x_k - x_1, \text{ wobei } x_k \text{ der größte und } x_1 \text{ der kleinste Wert in } W_X \text{ ist.}$$

- Dieses Maß lässt die Verteilung der Werte weitgehend unberücksichtigt.

- Zufällige Abweichungen vom Erwartungswert nach oben und nach unten:

$$Z_1 = X - \mu \text{ mit } W_{Z_1} = \{x_1 - \mu; x_2 - \mu; \ldots; x_k - \mu\}$$

- W_X wird nur durch W_{Z_1} ersetzt: Was ist interessant an der Verteilung von Z_1?
- Interessant ist ihre *mittlere Abweichung* bzw. ihr Erwartungswert $E(Z_1)$.
- Es gilt jedoch $E(Z_1) = E(X - \mu) = E(X) - \mu = \mu - \mu = 0$.
- Z_1 ist aufgrund dieser Eigenschaft des Erwartungswerts ungeeignet.

Varianz und Standardabweichung
Begriffsbildung

- Zufällige Abweichungen vom Erwartungswert als Entfernung:

$$Z_2 = |X - \mu| \;\text{ mit }\; W_{Z_2} = \{|x_1 - \mu|; |x_2 - \mu|; \ldots; |x_k - \mu|\}$$

- Die Variabilität der Beispielzufallsgrößen X und Y wird damit unterscheidbar:

$$E(|X - 0|) = 1 \quad \text{und} \quad E(|Y - 0|) = 3$$

Varianz und Standardabweichung

Begriffsbildung

- Zufällige Abweichungen vom Erwartungswert als Entfernung:

$$Z_2 = |X - \mu| \text{ mit } W_{Z_2} = \{|x_1 - \mu|; |x_2 - \mu|; \ldots; |x_k - \mu|\}$$

- Die Variabilität der Beispielzufallsgrößen X und Y wird damit unterscheidbar:

$$E(|X - 0|) = 1 \quad \text{und} \quad E(|Y - 0|) = 3$$

- Zufällige Abweichungen vom Erwartungswert als Potenzen:

$$Z_3 = |X - \mu|^r \text{ oder } Z_4 = (X - \mu)^r \text{ mit } r > 0$$

- Der Erwartungswert $E((X - \mu)^2)$ der quadratischen Abweichung hat sich unter allen denkbaren Maßen durchgesetzt:
  - Additivität (Beweist folgt)
  - Aufhebung der Vorzeichenunterschiede der Werte von $(X - \mu)$
  - Verstärkung großer Variabilitäten im Vergleich zu kleinen.
  - Eine formale Rechtfertigung folgt.

Varianz und Standardabweichung

Definition 14 (Varianz einer Zufallsgröße)

Sei X eine Zufallsgröße auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ mit der Wertemenge $W = \{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$ und $E(X) = \mu$. Dann heißt

$$\text{Var}(X) = E((X-\mu)^2) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$$

Varianz von X.

Varianz und Standardabweichung

Definition 14 (Varianz einer Zufallsgröße)

Sei X eine Zufallsgröße auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ mit der Wertemenge $W = \{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$ und $E(X) = \mu$. Dann heißt

$$\text{Var}(X) = E((X-\mu)^2) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$$

Varianz von X.

Herleitung:

- Da $E(Y) = \sum_{i=1}^{k} y_j \cdot P(Y = y_j)$ wirkt die Definition für $Y = (X-\mu)^2$ plausibel.
- Problem: Symmetrisch zu μ liegende x-Werte werden auf ein y_j abgebildet.
- Idee: Fallunterscheidung und schrittweises Vorgehen.
  - Fall 1: Keine zwei Werte $x, x' \in W_X$ liegen symmetrisch zu μ.
  - Fall 2: Genau zwei Werte $x, x' \in W_X$ liegen symmetrisch zu μ.
  - Fall 3: Mehr als ein Wertepaar aus W_X liegen symmetrisch zu μ.

Varianz und Standardabweichung

Begriffsbildung

Herleitung: (Fortsetzung)

1. Keine zwei Werte $x, x' \in W_X$ liegen symmetrisch zu μ:
   - Alle $y_i = (x_i - \mu)^2$ sind verschieden und da $P(Y = y_i) = P(X = x_i)$ gilt

$$E(Y) \;=\; \sum_{i=1}^{k} y_j \cdot P(Y = y_j) \;=\; \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)\;.$$

Varianz und Standardabweichung

Begriffsbildung

Herleitung: (Fortsetzung)

1. Keine zwei Werte $x, x' \in W_X$ liegen symmetrisch zu μ:
   - Alle $y_i = (x_i - \mu)^2$ sind verschieden und da $P(Y = y_i) = P(X = x_i)$ gilt

$$E(Y) \; = \; \sum_{i=1}^{k} y_j \cdot P(Y = y_j) \; = \; \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i) \; .$$

2. Genau zwei Werte $x, x' \in W_X$ liegen symmetrisch zu μ:
   - Dann ist $(x - \mu)^2 = (x' - \mu)^2 = c$ und $P(Y = c) = P(X = x) + P(X = x')$.
   - Weil

$$\begin{aligned} c \cdot P(Y = c) \; &= \; c \cdot (P(X = x) + P(X = x')) \\ &= \; c \cdot P(X = x) + c \cdot P(X = x') \\ &= \; (x - \mu)^2 \cdot P(X = x) + (x' - \mu)^2 \cdot P(X = x') \end{aligned}$$

gilt

$$E(Y) \; = \; \sum_{i=1}^{k} y_j \cdot P(Y = y_j) \; = \; \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i) \; .$$

Varianz und Standardabweichung

Begriffsbildung

Herleitung: (Fortsetzung)

1. Keine zwei Werte $x, x' \in W_X$ liegen symmetrisch zu μ:
   - Alle $y_i = (x_i - \mu)^2$ sind verschieden und da $P(Y = y_i) = P(X = x_i)$ gilt

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{k} y_j \cdot P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i) \,.$$

2. Genau zwei Werte $x, x' \in W_X$ liegen symmetrisch zu μ:
   - Dann ist $(x - \mu)^2 = (x' - \mu)^2 = c$ und $P(Y = c) = P(X = x) + P(X = x')$.
   - Weil

$$\begin{aligned} c \cdot P(Y = c) &= c \cdot (P(X = x) + P(X = x')) \\ &= c \cdot P(X = x) + c \cdot P(X = x') \\ &= (x - \mu)^2 \cdot P(X = x) + (x' - \mu)^2 \cdot P(X = x') \end{aligned}$$

   gilt

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{k} y_j \cdot P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i) \,.$$

3. Mehr als Paare von Werten aus W_X liegen symmetrisch zu μ: Analog zu 2.

Bemerkungen:

- Zutreffender wäre in Analogie zum Erwartungswert ggf. die Bezeichnung Varianzwert – diese Bezeichnung hat sich aber nicht durchgesetzt.
- Die Maßeinheit der Varianz ist das Quadrat der Einheit, in der X gemessen wird.
- Um eine der Varianz ähnliche Maßzahl zu erhalten, die dieselbe Einheit wie X hat wird die Wurzel gezogen.

Varianz und Standardabweichung

Definition 15 (Standardabweichung einer Zufallsgröße)

Als Standardabweichung einer Zufallsgröße X auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ bezeichnet man die Zahl

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathsf{Var}(X)}\ .$$

Bemerkungen:

- Betrachtet man nur eine Zufallsgröße, so wird oft σ geschrieben, bei mehreren Zufallsgrößen X_i entsprechend σ_i. Varianzen werden gelegentlich als σ^2 bzw. σ_i^2 notiert.
- Vereinbarung: Wenn $\sigma(X)$ geschrieben wird, dann auch $\mu(X)$ und umgekehrt.
- Allgemein heißen die $\mu^{(k)} = E((X-\mu)^k)$ und $\bar{\mu}^{(k)} = E(|X-\mu|^k)$ zentrale Momente und zentrale absolute Momente k-ter Ordnung, da sie am Mittelwert zentriert sind.
- Das erste zentrale absolute Moment $\bar{\mu}^{(1)} = E(|X-\mu|)$ ist die *mittlere absolute Abweichung*.
- Die Varianz ist das zweite zentrale Moment.
- Das dritte zentrale Moment wird oft mit der Standardabweichung normiert und ergibt dann als drittes *normiertes/standardisiertes Moment*

  $$E\left(\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right)$$

  ein Maß für die Schiefe (engl. „skewness“) der Verteilung. Es wird oft genutzt, um die Abweichung von einer symmetrischen Verteilung anzugeben.
- Das vierte standardisierte Moment

  $$E\left(\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4\right)$$

  ist ein Maß für die Wölbung der Verteilung. Es wird oft genutzt, um die Abweichung von einer Normalverteilung anzugeben.
- Schiefe und Wölbung werden oft auch als höhere Momente bezeichnet.

Varianz und Standardabweichung

Beispiel: Zwei Zufallsgrößen (Fortsetzung)

- Seien X und Y die Zufallsgrößen des obigen Beispiels:

$$\text{Var}(X) = (-2-0)^2 \cdot \frac{1}{4} + (0-0)^2 \cdot \frac{1}{2} + (2-0)^2 \cdot \frac{1}{4} = 2$$

$$\begin{aligned}\text{Var}(Y) &= (-6-0)^2 \cdot \frac{1}{8} + (-4-0)^2 \cdot \frac{1}{8} + (-2-0)^2 \cdot \frac{1}{8} + (0-0)^2 \cdot \frac{1}{4} \\ &\quad + (2-0)^2 \cdot \frac{1}{8} + (4-0)^2 \cdot \frac{1}{8} + (6-0)^2 \cdot \frac{1}{8} = 14\end{aligned}$$

Varianz und Standardabweichung

Beispiel: Zwei Zufallsgrößen (Fortsetzung)

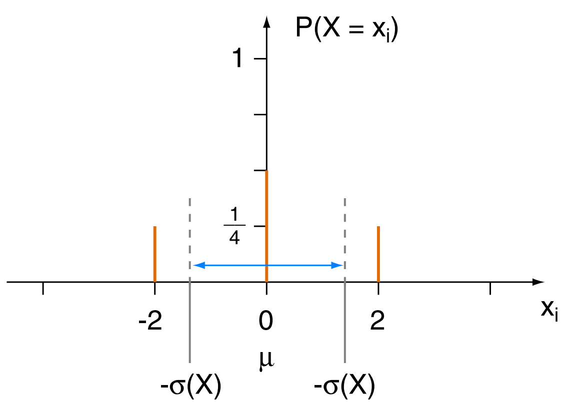
- Seien X und Y die Zufallsgrößen des obigen Beispiels:

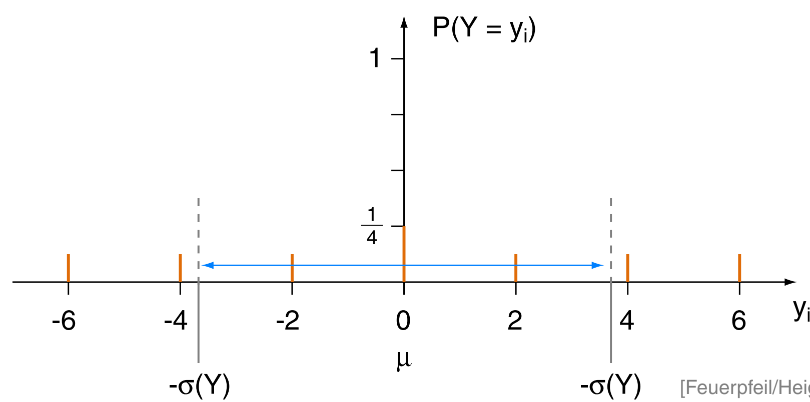
$$\text{Var}(X) = (-2-0)^2 \cdot \frac{1}{4} + (0-0)^2 \cdot \frac{1}{2} + (2-0)^2 \cdot \frac{1}{4} = 2$$

$$\begin{aligned}\text{Var}(Y) = {} & (-6-0)^2 \cdot \frac{1}{8} + (-4-0)^2 \cdot \frac{1}{8} + (-2-0)^2 \cdot \frac{1}{8} + (0-0)^2 \cdot \frac{1}{4} \\ & + (2-0)^2 \cdot \frac{1}{8} + (4-0)^2 \cdot \frac{1}{8} + (6-0)^2 \cdot \frac{1}{8} = 14\end{aligned}$$

- Dementsprechend sind $\sigma(X) = \sqrt{2} \approx 1{,}4$ und $\sigma(Y) = \sqrt{14} \approx 3{,}7$:

  Die Breite der Streuung um den Nullpunkt ($= \mu(X) = \mu(Y)$) zeigt die Ungleichheit der Varianzen an, was sich auch in der Standardabweichung widerspiegelt.





[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Varianz und Standardabweichung

Rechenregeln: Konstante

Ist eine Zufallsgröße X derart „degeneriert“, dass sie nur einen einzigen Wert $a \in \mathbf{R}$ mit $P(X = a) = 1$ annimmt, ist ihre Varianz Var$(X) = 0$.

Hat eine Zufallsgröße X die Varianz Var$(X) = 0$, folgt direkt aus der Definition der Varianz, dass die Zufallsgröße degeneriert ist.

Daraus folgt

Satz 16 (Varianz einer Konstanten)

Die Varianz einer Zufallsgröße ist genau dann 0, wenn eine degenerierte Verteilung mit $P(X = a) = 1$ für ein $a \in \mathbf{R}$ vorliegt.

Varianz und Standardabweichung

Rechenregeln: „Linearität“

Satz 17 („Linearität“ der Varianz und Standardabweichung)

Für beliebige $a, b \in \mathbf{R}$ und eine Zufallsgröße X gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(aX + b) &= a^2 \cdot \mathrm{Var}(X) \\ \sigma(aX + b) &= |a| \cdot \sigma(X)\ . \end{aligned}$$

Varianz und Standardabweichung

Rechenregeln: „Linearität“

Satz 17 („Linearität“ der Varianz und Standardabweichung)

Für beliebige $a, b \in \mathbf{R}$ und eine Zufallsgröße X gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(aX + b) &= a^2 \cdot \mathrm{Var}(X) \\ \sigma(aX + b) &= |a| \cdot \sigma(X) \,. \end{aligned}$$

Herleitung:

- Sei $Y = aX + b$ für $a, b \in \mathbf{R}$ und $a \neq 0$.
- Es gilt $y_i = ax_i + b$ und $P(Y = y_i) = P(X = x_i)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(aX + b) \;=\; \mathrm{Var}(Y) &= \sum_{i=1}^{k} (y_i - \mu(Y))^2 P(Y = y_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (ax_i + b - (a\mu(X) + b))^2 \cdot P(X = x_i) \\ &= a^2 \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu(X))^2 \cdot P(X = x_i) \;=\; a^2 \mathrm{Var}(X) \,. \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Die Zufallsgröße $Y = aX + b$ kann als Neuskalierung der Werte von X interpretiert werden. Die Beziehung $\sigma(aX + b) = |a| \cdot \sigma(X)$ sagt dann: die Standardabweichung ändert sich bei einer linearen Transformation im gleichen Maße wie die Einheit von X.
- $P(Y = y_i) = P(X = x_i)$, da keine zwei x-Werte auf ein und denselben y-Wert abgebildet werden ($a \neq 0$).
- Für $a = 1$ gilt Var$(X + b) =$ Var(X) und $\sigma(X + b) = \sigma(X)$. Diese Eigenschaft ist nachvollziehbar, da durch $X + b$ die Punkte von X nur um b Einheiten verschoben werden. Die Werte streuen also um den Erwartungswert $\mu + b$ von $X + b$ genauso wie die Werte von X um μ.

Varianz und Standardabweichung

Exkurs: Standardisierung von Zufallsgrößen

Nutzen:

- Erkennung der Struktur eines Histogramms mit weit vom Nullpunkt entferntem Erwartungswert und breiter Streuung.
- Vergleich von Histogrammen mit sehr unterschiedlichen Maßzahlen.

Varianz und Standardabweichung

Exkurs: Standardisierung von Zufallsgrößen

Nutzen:

- Erkennung der Struktur eines Histogramms mit weit vom Nullpunkt entferntem Erwartungswert und breiter Streuung.
- Vergleich von Histogrammen mit sehr unterschiedlichen Maßzahlen.

Ziele:

- Verschieben des Erwartungswerts in den Nullpunkt einer neuen Skala.
- Festsetzen der Einheit der Skala, so dass die Standardabweichung den Wert 1 bekommt.

Varianz und Standardabweichung

Exkurs: Standardisierung von Zufallsgrößen

Nutzen:

- Erkennung der Struktur eines Histogramms mit weit vom Nullpunkt entferntem Erwartungswert und breiter Streuung.
- Vergleich von Histogrammen mit sehr unterschiedlichen Maßzahlen.

Ziele:

- Verschieben des Erwartungswerts in den Nullpunkt einer neuen Skala.
- Festsetzen der Einheit der Skala, so dass die Standardabweichung den Wert 1 bekommt.

Vorgehen für $a \in \mathbf{R}^+$ und $b \in \mathbf{R}$:

$$Z = aX + b$$

so dass

$$\mu(Z) = 0$$

$$\sigma(Z) = 1$$

Varianz und Standardabweichung

Exkurs: Standardisierung von Zufallsgrößen

Nutzen:

- Erkennung der Struktur eines Histogramms mit weit vom Nullpunkt entferntem Erwartungswert und breiter Streuung.
- Vergleich von Histogrammen mit sehr unterschiedlichen Maßzahlen.

Ziele:

- Verschieben des Erwartungswerts in den Nullpunkt einer neuen Skala.
- Festsetzen der Einheit der Skala, so dass die Standardabweichung den Wert 1 bekommt.

Vorgehen für $a \in \mathbf{R}^+$ und $b \in \mathbf{R}$:

$$Z = aX + b$$

so dass

$$\begin{aligned} \mu(Z) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a \cdot \mu(X) + b = 0 \\ \sigma(Z) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad a \cdot \sigma(X) = 1 \end{aligned}$$

Varianz und Standardabweichung

Exkurs: Standardisierung von Zufallsgrößen

Nutzen:

- Erkennung der Struktur eines Histogramms mit weit vom Nullpunkt entferntem Erwartungswert und breiter Streuung.
- Vergleich von Histogrammen mit sehr unterschiedlichen Maßzahlen.

Ziele:

- Verschieben des Erwartungswerts in den Nullpunkt einer neuen Skala.
- Festsetzen der Einheit der Skala, so dass die Standardabweichung den Wert 1 bekommt.

Vorgehen für $a \in \mathbf{R}^+$ und $b \in \mathbf{R}$:

$$Z = aX + b$$

so dass

$$\mu(Z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot \mu(X) + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = -\frac{\mu(X)}{\sigma(X)}$$

$$\sigma(Z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot \sigma(X) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{\sigma(X)}$$

Varianz und Standardabweichung

Exkurs: Standardisierung von Zufallsgrößen

Nutzen:

- Erkennung der Struktur eines Histogramms mit weit vom Nullpunkt entferntem Erwartungswert und breiter Streuung.
- Vergleich von Histogrammen mit sehr unterschiedlichen Maßzahlen.

Ziele:

- Verschieben des Erwartungswerts in den Nullpunkt einer neuen Skala.
- Festsetzen der Einheit der Skala, so dass die Standardabweichung den Wert 1 bekommt.

Vorgehen für $a \in \mathbf{R}^+$ und $b \in \mathbf{R}$:

$$Z = aX + b \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{X - \mu(X)}{\sigma(X)}$$

so dass

$$\mu(Z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot \mu(X) + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = -\tfrac{\mu(X)}{\sigma(X)}$$

$$\sigma(Z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot \sigma(X) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \tfrac{1}{\sigma(X)}$$

Varianz und Standardabweichung

Definition 18 (Standardisierte Zufallsgröße)

Sei X eine Zufallsgröße mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung $\sigma > 0$. Dann heißt die Zufallsgröße

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

die zu X gehörige standardisierte Zufallsgröße.

Bemerkungen:

- Jede nicht degenerierte Zufallsgröße lässt sich standardisieren, andernfalls ist σ 0.
- Vergleiche die obigen Bemerkungen zu den standardisierten zentralen Momenten.

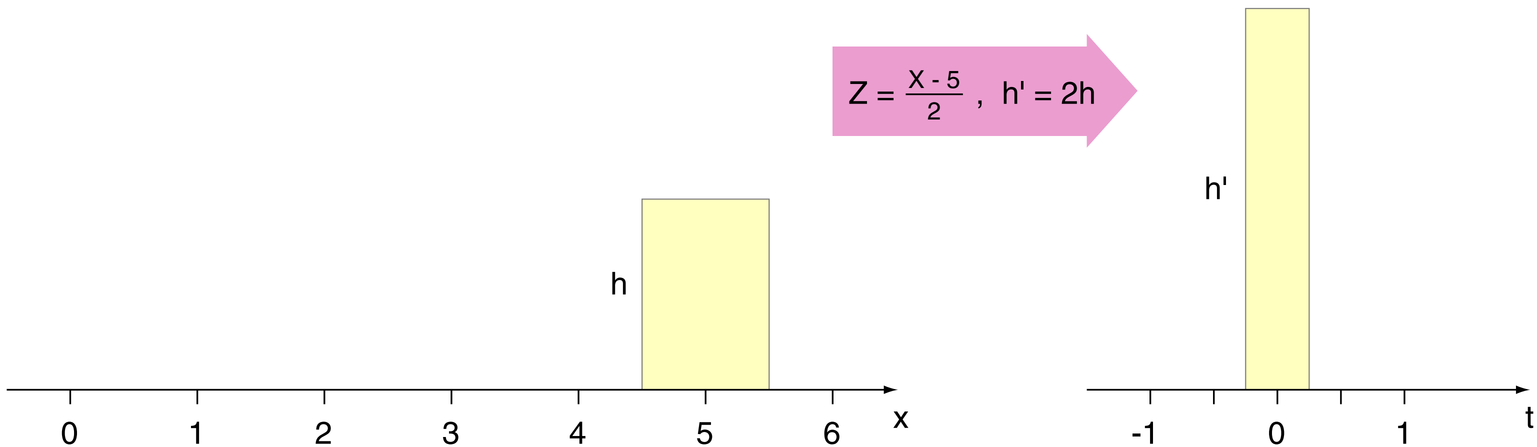
Varianz und Standardabweichung

Exkurs: Standardisierung von Zufallsgrößen

Standardisierung von Histgrammen:

- In Histogrammen repräsentieren Rechtecksinhalte Wahrscheinlichkeiten.
- Ändert sich bei $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ der Wert von X um 1, so ändert sich Z um $\frac{1}{\sigma}$.
- Nach der Standardisierung müssen ihre ursprünglichen Höhen mit dem Faktor σ gestreckt werden, damit ihre Flächen gleich bleiben.

Beispiel: Histogrammrechteck mit $\mu = 5$ und $\sigma = 2$.



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Varianz und Standardabweichung

Rechenregeln: Verschiebungsregel

Die Berechnung der Varianz gelingt oft leichter als mit der „großen“ Summe ihrer Definition 15:

Satz 19 (Verschiebungsregel)

Für die Varianz σ^2 einer Zufallsgröße X gilt:

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 \, .$$

Varianz und Standardabweichung

Rechenregeln: Verschiebungsregel

Die Berechnung der Varianz gelingt oft leichter als mit der „großen“ Summe ihrer Definition 15:

Satz 19 (Verschiebungsregel)

Für die Varianz σ^2 einer Zufallsgröße X gilt:

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 \; .$$

Herleitung:

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \mathsf{Var}(X) &= E((X-\mu)^2) \\ &= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \\ &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \qquad \text{(Satz 9 und 12, } E(X) = \mu\text{)} \\ &= E(X^2) - \mu^2 \; . \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Diese wichtige und sehr oft angewendete Regel heißt Verschiebungsregel, weil sich $\sigma^2 = E((X-\mu)^2)$ bis auf die Konstante μ^2 durch $E(X^2)$ ausdrücken lässt, also eine Verschiebung von $E(X^2)$ um μ^2.

- Die Verschiebungsregel in allgemeinerer Form mit $c \in \mathbf{R}$ lautet (siehe Übungsaufgabe):

  $$\sigma^2 = E((X-c)^2) - (\mu - c)^2 \; .$$

  Oft ist es einfacher, $E((X-c)^2)$ bei geeignetem c zu berechnen, als $E(X^2)$. Sind die x_i beispielsweise recht große Zahlen, die man nicht schnell im Kopf quadrieren kann, wird c so gewählt, dass die absoluten Differenzen $|x_i - c|$ möglichst klein sind.

- In der Analogie der Masseverteilung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung (Erwartungswert als Schwerpunkt der Masseanordnung) entspricht die Varianz dem *Trägheitsmoment* der Masseverteilung bzgl. des Masseschwerpunktes μ. Die Verschiebungsregel ist in allgemeiner Form dann das Analogon des Steinerschen Satzes für Trägheitsmomente.

Varianz und Standardabweichung

Rechenregeln: Verschiebungsregel

Beispiel: Würfeln

- Sei X die Augenzahl beim Werfen eines Laplace-Würfels.
- Erwartungswert: $\mu = 3{,}5 = \frac{7}{2}$
- Anwendung der Verschiebungsregel:

$$\sigma^2 \;=\; \frac{1}{6} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) - \left(\frac{7}{2}\right)^2 \;=\; \frac{35}{12}$$

- Die Berechnung der Varianz nach Definition 14 ist aufwändiger.

Varianz und Standardabweichung

Rechenregeln: Additivität / Summenregel

Was ist die Varianz Var$(X+Y)$ der Summe zweier Zufallsgrößen?

Fall 1: X und Y sind unabhängig

- Sei $E(X) = E(Y) = 0$, so dass Var$(X) = E(X^2)$ und Var$(Y) = E(Y^2)$:

$$
\begin{aligned}
\text{Var}(X+Y) &= E((X+Y)^2) - (E(X+Y))^2 && \text{(Verschiebungsregel für } Z=X+Y\text{)} \\
&= E((X+Y)^2) && (E(X)=E(Y)=E(X+Y)=0) \\
&= E(X^2 + 2XY + Y^2) \\
&= E(X^2) + 2\cdot E(X\cdot Y) + E(Y^2) && \text{(Additivität Erwartungswert)} \\
&= E(X^2) + 2\cdot E(X)\cdot E(Y) + E(Y^2) && \text{(Produktregel Erwartungswert)} \\
&= E(X^2) + E(Y^2) && (E(X)=E(Y)=E(X)\cdot E(Y)=0) \\
&= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)
\end{aligned}
$$

- Wenn $E(X) \neq 0$ oder $E(Y) \neq 0$ unterscheidet sich $X+Y$ nur um eine additive Konstantate, die nach Satz 17 keinen Einfluss auf die Varianz hat.

Varianz und Standardabweichung

Rechenregeln: Additivität / Summenregel

Was ist die Varianz Var$(X + Y)$ der Summe zweier Zufallsgrößen?

Fall 2: X und Y sind abhängig

- Sei $Y = X$ und X nicht degeneriert (Var$(X) \neq 0$):

$$\text{Var}(X + X) \;=\; \text{Var}(2X) \;=\; 2^2\text{Var}(X) \;\neq\; \text{Var}(X) + \text{Var}(X)$$

Varianz und Standardabweichung

Rechenregeln: Additivität / Summenregel

Satz 20 (Additivität der Varianz / Summenregel)

Die Varianz einer Summe zweier unabhängiger Zufallsgrößen X und Y auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ ist gleich der Summe ihrer Varianzen:

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)\ .$$

Varianz und Standardabweichung

Rechenregeln: Additivität / Summenregel

Satz 20 (Additivität der Varianz / Summenregel)

Die Varianz einer Summe zweier unabhängiger Zufallsgrößen X und Y auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ ist gleich der Summe ihrer Varianzen:

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) \ .$$

Mit Sätzen 17 und 20 lässt sich die Summenregel für die Varianz auch auf eine Linearkombination von n Zufallsgrößen übertragen:

Satz 21 (Varianz einer Linearkombination von Zufallsgrößen)

Für die Varianz der Linearkombination $a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$ ($a_i \in \mathbf{R}$) von n unabhängigen Zufallsgrößen X_i auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ gilt:

$$\text{Var}(a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n) = \text{Var}(a_1X_1) + \text{Var}(a_2X_2) + \ldots + \text{Var}(a_nX_n) \ .$$

Bemerkungen:

- Die Additivität der Varianz für unabhängige Zufallsgrößen entdeckte im Jahr 1853 Irénée-Jules Bienaymé (1796–1878, französischer Wahrscheinlichkeitstheoretiker und Statistiker).
- Im Unterschied zum Erwartungswert ist die Varianz kein lineares Funktionssymbol, da Var$(aX + b) = a^2$Var$(X) \neq a$Var$(X) + b$.
- Im Würfel-Beispiel wurde gezeigt, dass die Varianz der Augenzahl eines Wurfs $\frac{35}{12}$ ist. Bei zwei Würfen ist sie gemäß Summenregel $\frac{70}{12}$ und damit doppelt so hoch. Eine direkte Berechnung wird mit der Zahl der Würfe / Würfel immer aufwändiger.
- Das wichtigste Argument für die Varianz als Maß für die Variabilität einer Zufallsgröße ist ihre Additivität. Da die Varianz der Summe von unabhängigen Zufallsgrößen die Summe der Einzelvarianzen ist, bietet sie in vielen praktischen Situationen einen wesentlichen Rechenvorteil gegenüber alternativen Maßen, was wohl ein entscheidender Grund dafür war, dass sich die Varianz auch in der Theorie durchgesetzt hat.

Varianz und Standardabweichung

Beispiel: Münzwurfglücksspiel

- Es werden je eine faire 5-Cent-, 2-Cent- und 1-Cent-Münze geworfen.
- Alle Münzen, die „Zahl“ zeigen erhält der Spielende.
- Der Spieleinsatz je Wurf der drei Münzen („Dreierwurf“) beträgt 5 Cent.
- Was sind der Erwartungswert und die Varianz des Reingewinns der Bank?

Varianz und Standardabweichung

Beispiel: Münzwurfglücksspiel

- Es werden je eine faire 5-Cent-, 2-Cent- und 1-Cent-Münze geworfen.
- Alle Münzen, die „Zahl“ zeigen erhält der Spielende.
- Der Spieleinsatz je Wurf der drei Münzen („Dreierwurf“) beträgt 5 Cent.
- Was sind der Erwartungswert und die Varianz des Reingewinns der Bank?

- Seien $\Omega_i = \{\mathtt{K}; \mathtt{Z}\}$ ($i \in \{1; 2; 3\}$) Ergebnisräume der Einzelwürfe.
- Seien X_i entsprechende Zufallsgrößen für Verlust / Gewinn des Spielenden:

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega = \mathtt{K} \\ 1 & \text{für } \omega = \mathtt{Z} \end{cases}$$

- Sei Y Zufallsgröße des Reingewinns der Bank nach jedem Dreierwurf:

$$Y = 5 - 5 \cdot X_1 - 2 \cdot X_2 - 1 \cdot X_3$$

Varianz und Standardabweichung

Beispiel: Münzwurfglücksspiel

Mögliche Ergebnisse, Wahrscheinlichkeiten und Werte für die X_i und Y:

5 Cent	2 Cent	1 Cent	p	X_1	X_2	X_3	Y
K	K	K	$\frac{1}{8}$	0	0	0	5
K	K	Z	$\frac{1}{8}$	0	0	1	4
K	Z	K	$\frac{1}{8}$	0	1	0	3
K	Z	Z	$\frac{1}{8}$	0	1	1	2
Z	K	K	$\frac{1}{8}$	1	0	0	0
Z	K	Z	$\frac{1}{8}$	1	0	1	-1
Z	Z	K	$\frac{1}{8}$	1	1	0	-2
Z	Z	Z	$\frac{1}{8}$	1	1	1	-3

Varianz und Standardabweichung

Beispiel: Münzwurfglücksspiel

Mögliche Ergebnisse, Wahrscheinlichkeiten und Werte für die X_i und Y:

5 Cent	2 Cent	1 Cent	p	X_1	X_2	X_3	Y
K	K	K	$\frac{1}{8}$	0	0	0	5
K	K	Z	$\frac{1}{8}$	0	0	1	4
K	Z	K	$\frac{1}{8}$	0	1	0	3
K	Z	Z	$\frac{1}{8}$	0	1	1	2
Z	K	K	$\frac{1}{8}$	1	0	0	0
Z	K	Z	$\frac{1}{8}$	1	0	1	-1
Z	Z	K	$\frac{1}{8}$	1	1	0	-2
Z	Z	Z	$\frac{1}{8}$	1	1	1	-3

Abhängigkeit / Unabhängigkeit:

- Die X_i sind in allen Kombinationen unabhängig; aber nicht von Y:

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1 \wedge Y = -3) &= P(X_1 = 1 \wedge X_2 = 1 \wedge X_3 = 1) \\ &= P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 1) \cdot P(X_3 = 1) \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{8} \quad \neq \quad \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{8} = P(X_1 = 1) \cdot P(Y = -3) \, . \end{aligned}$$

- Anschaulich: $X_1 = 1$ folgt aus $Y \leq 0$, so dass X_1 abhängig von Y sein muss.

Varianz und Standardabweichung

Beispiel: Münzwurfglücksspiel

Mögliche Ergebnisse, Wahrscheinlichkeiten und Werte für die X_i und Y:

5 Cent	2 Cent	1 Cent	p	X_1	X_2	X_3	Y
K	K	K	$\frac{1}{8}$	0	0	0	5
K	K	Z	$\frac{1}{8}$	0	0	1	4
K	Z	K	$\frac{1}{8}$	0	1	0	3
K	Z	Z	$\frac{1}{8}$	0	1	1	2
Z	K	K	$\frac{1}{8}$	1	0	0	0
Z	K	Z	$\frac{1}{8}$	1	0	1	-1
Z	Z	K	$\frac{1}{8}$	1	1	0	-2
Z	Z	Z	$\frac{1}{8}$	1	1	1	-3

Erwartungswert und Varianz von X_i:

$$E(X_i) = 0 \cdot \tfrac{1}{2} + 1 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\,,$$

$$\text{Var}(X_i) = \left(0 - \tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \tfrac{1}{2} + \left(1 - \tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}\,.$$

Varianz und Standardabweichung

Beispiel: Münzwurfglücksspiel

Mögliche Ergebnisse, Wahrscheinlichkeiten und Werte für die X_i und Y:

5 Cent	2 Cent	1 Cent	p	X_1	X_2	X_3	Y
K	K	K	$\frac{1}{8}$	0	0	0	5
K	K	Z	$\frac{1}{8}$	0	0	1	4
K	Z	K	$\frac{1}{8}$	0	1	0	3
K	Z	Z	$\frac{1}{8}$	0	1	1	2
Z	K	K	$\frac{1}{8}$	1	0	0	0
Z	K	Z	$\frac{1}{8}$	1	0	1	-1
Z	Z	K	$\frac{1}{8}$	1	1	0	-2
Z	Z	Z	$\frac{1}{8}$	1	1	1	-3

Erwartungswert und Varianz von X_i:

$$E(X_i) \;=\; 0 \cdot \tfrac{1}{2} + 1 \cdot \tfrac{1}{2} \;=\; \tfrac{1}{2}\,,$$

$$\text{Var}(X_i) \;=\; \left(0 - \tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \tfrac{1}{2} + \left(1 - \tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \tfrac{1}{2} \;=\; \tfrac{1}{4}\,.$$

Erwartungswert und Varianz von Y: (Anwendung der Verschiebungsregel)

$$E(Y) = 5 \cdot \tfrac{1}{8} + 4 \cdot \tfrac{1}{8} + 3 \cdot \tfrac{1}{8} + 2 \cdot \tfrac{1}{8} + 0 \cdot \tfrac{1}{8} - 1 \cdot \tfrac{1}{8} - 2 \cdot \tfrac{1}{8} - 3 \cdot \tfrac{1}{8} = 1\,,$$

$$\text{Var}(Y) = 5^2 \cdot \tfrac{1}{8} + 4^2 \cdot \tfrac{1}{8} + 3^2 \cdot \tfrac{1}{8} + 2^2 \cdot \tfrac{1}{8} + 0^2 \cdot \tfrac{1}{8} + 1^2 \cdot \tfrac{1}{8} + 2^2 \cdot \tfrac{1}{8} + 3^2 \cdot \tfrac{1}{8} - 1^2 = 7{,}5\,.$$

Varianz und Standardabweichung

Beispiel: Münzwurfglücksspiel

Mögliche Ergebnisse, Wahrscheinlichkeiten und Werte für die X_i und Y:

5 Cent	2 Cent	1 Cent	p	X_1	X_2	X_3	Y
K	K	K	$\frac{1}{8}$	0	0	0	5
K	K	Z	$\frac{1}{8}$	0	0	1	4
K	Z	K	$\frac{1}{8}$	0	1	0	3
K	Z	Z	$\frac{1}{8}$	0	1	1	2
Z	K	K	$\frac{1}{8}$	1	0	0	0
Z	K	Z	$\frac{1}{8}$	1	0	1	-1
Z	Z	K	$\frac{1}{8}$	1	1	0	-2
Z	Z	Z	$\frac{1}{8}$	1	1	1	-3

Erwartungswert und Varianz von Y: (Anwendung übriger Rechenregeln)

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(5 - 5X_1 - 2X_2 - 1X_3) = 5 - 5 \cdot E(X_1) - 2 \cdot E(X_2) - 1 \cdot E(X_3) \\ &= 5 - 5 \cdot \tfrac{1}{2} - 2 \cdot \tfrac{1}{2} - 1 \cdot \tfrac{1}{2} \;=\; 1\,, \\ \mathsf{Var}(Y) &= \mathsf{Var}(5 - 5X_1 - 2X_2 - 1X_3) = \mathsf{Var}(-5X_1 - 2X_2 - 1X_3) \\ &= (-5)^2 \cdot \mathsf{Var}(X_1) + (-2)^2 \cdot \mathsf{Var}(X_2) + (-1)^2 \cdot \mathsf{Var}(X_3) \\ &= (-5)^2 \cdot \tfrac{1}{4} + (-2)^2 \cdot \tfrac{1}{4} + (-1)^2 \cdot \tfrac{1}{4} \;=\; 7{,}5\,. \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Ob das Berechnen des Erwartungswertes und der Varianz einer zusammengesetzten Zufallsgröße Y aus der Tabelle oder aus den Erwartungswerten und den Varianzen der einzelnen Zufallsgrößen X_i „einfacher“ oder schneller ist, hängt sicher von Art und Umfang des Experiments ab.

