Kapitel L:IV

IV. Nichtklassische Logiken

- Fuzzy-Mengen
- Modifizierer für Fuzzy-Mengen
- Operationen auf Fuzzy-Mengen
- Fuzzy-Inferenz
- Defuzzifizierung

Fuzzy-Mengen

Unscharfes Wissen

Nach einem zweitägigen Marsch ohne Wasser durch die Wüste treffen Sie einen Beduinen, der ihnen zwei Flaschen mit Getränken gibt zusammen mit folgender Information:

- Flasche 1 enthält mit 90-prozentiger Wahrscheinlichkeit ein ungiftiges Getränk, aber die Flasche könnte auch ein tödliches Gift enthalten.
- Flasche 2 enthält ein Getränk, das mit dem Zugehörigkeitsgrad 10 von maximal 100 zu den tödlichen Giften gehört.

Frage: Aus welcher Flasche trinken Sie?

Bei der Fuzzy-Theorie geht es nicht um Unwissenheit, sondern um Unschärfe, Vagheit und Ungenauigkeit.

Fuzzy-Mengen

Unscharfes Wissen (Fortsetzung)

```
IF   Gewicht ist hoch
THEN Lebenserwartung ist gering
```

Wann hat man ein hohes Gewicht? Umfrage:

Aussage	Gewicht 80kg	Gewicht ist hoch
1	ja	ja
2	ja	ja
3	ja	nein
4	ja	ja
5	ja	ja
6	ja	nein
7	ja	ja

```
IF   Gewicht ist hoch
THEN Lebensqualität ist gering
```

Die Lebensqualität lässt sich nicht quantitativ messen.

Fuzzy-Mengen

Unscharfes Wissen (Fortsetzung)

Impräzision:

- Wissen besteht aus mehreren (präzisen) Alternativen.
- Beispiel: Herr Meier ist zwischen 20 und 30 Jahre alt.

Unsicherheit (objektive Unschärfe):

- Die Wahrheit einer Aussage ist nicht klar.
- Sowohl präzise als auch unpräzise Aussagen können unsicher sein.
- Beispiel: Paderborn liegt (exakt) 120m über NN.

Vagheit (subjektive Unschärfe):

- Die Aussage ist eher qualitativ.
- Beispiel: Das Büro E4.151 ist groß.

Bemerkungen:

- Eine Prämisse der Fuzzy-Theorie ist die Unvereinbarkeit hoher Komplexität und hoher Präzision.
- Überall dort, wo eine Problemlösung Toleranzen in der Formulierung und Verarbeitung zulässt, können diese Toleranzen ausgenutzt werden, um eine weniger exakte und dennoch ausreichende Lösung zu erreichen.

Fuzzy-Mengen

Unscharfes Schlussfolgern

- Regel. $A \rightarrow B$

- Kontext C mit Interpretation.

A	B
1	1
1	0
0	1

- C mit Interpretation zu Zeitpunkten t.

t	A	B
1	1	1
2	1	1
3	0	1
4	1	0
5	1	1
6	0	1
7	1	1
8	0	1
9	1	1

Die Regel $A \rightarrow B$ „gilt meistens“.

Fuzzy-Mengen

Unscharfes Schlussfolgern (Fortsetzung)

Ansätze zur Verarbeitung von unscharfen Regeln:

- MYCIN-Ansatz.

  Verarbeitung von unsicheren Ursache-Wirkungs-Beziehungen zur Diagnose mittels Konfidenzfaktoren.

- Dempster-Shafer Theorie.

  Verarbeitung von Unwissenheit mittels Evidenzen.

- Data-Mining.

  Bewertung von Regeln mittels „Support“ und „Confidence“ innerhalb einer gegebenen Stichprobe.

Fuzzy-Mengen

Geschichte

1920 Erste Fuzzy-Systeme, vorgeschlagen von Lukasiewicz.

Beobachtung: Terme wie `tall`, `old` oder `hot` lassen sich nur schwer unter dem Aristotelischen Wahrheitsbegriff *wahr* oder *falsch* (0,1) fassen.

20er Lukasiewicz erweitert das System der Logik auf alle reellen Zahlen in [0,1].

Eine Zahl aus [0,1] beschreibt die *Möglichkeit (Possibility)*, ob eine Aussage wahr oder falsch ist.

>20er Forschungen führten zur (unscharfen) Schlussfolgerungstechnik der Possibilitätstheorie.

1965 Zadeh entwickelt die Possibilitätstheorie zu einem formalen, logischen System. Insbesondere entstehen Konzepte zur Beschreibung und Verarbeitung von Ausdrücken der natürlichen Sprache.

>80er Japanische Industrie greift die Fuzzy-Theorie auf und verwendet Konzepte und Methoden in zahlreichen industriellen Anwendungen.

Fuzzy-Mengen (Fuzzy Sets)

Die traditionelle Mengenlehre malt ein Schwarz-Weiß-Bild von der Welt: ein Objekt ist entweder in einer Menge oder nicht.

Beispiel Alter:

Sei `age_is_young` eine Menge, die aus jungen Menschen besteht. Den Elementen in der Menge ist eine 1, den anderen eine 0 zugeordnet.

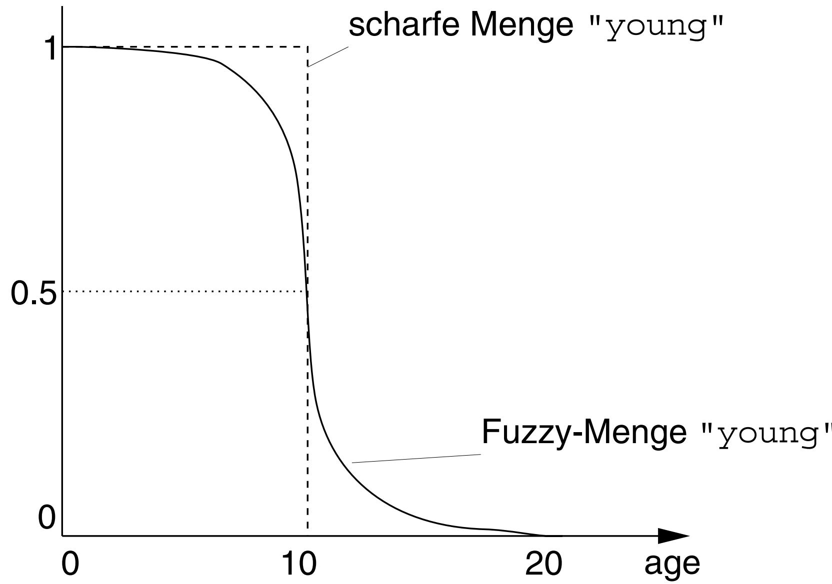
Wählt man das Alter als Objektmerkmal, so muss ab einem bestimmten Alter die Jugend schlagartig aufhören.

Ausweg Fuzzy-Menge:

Graduierung der Mengenzugehörigkeit mittels einer Zugehörigkeitsfunktion μ.

Fuzzy-Mengen

Beispiel Alter ((Fortsetzung)):



- linguistische Variable: `age`
- Grundbereich für `age`: 1 . . . 100
- mögliche qualitative Ausprägung für `age`: `young`
- Fuzzy-Menge für `young`: Angabe der Zugehörigkeit zu `young`

Fuzzy-Mengen

Definition 1 (Fuzzy-Menge, Zugehörigkeitsfunktion)

Sei X ein Grundbereich (Diskursbereich, *Universe of Discourse*) mit Elementen x. Eine *Fuzzy-Menge* A von X ist beschrieben durch eine charakteristische Funktion (Zugehörigkeitsfunktion, *Membership Function*) μ_A, die jedem Element $x \in X$ einen Zugehörigkeitswert $\mu_A(x) \in [0,1]$ für A zuordnet.

$$\mu_A : \quad X \to [0,1] \qquad x \mapsto \mu_A(x)$$

$\mu_A(x)$: Zugehörigkeitsgrad für x in A

Fuzzy-Mengen

Definition 1 (Fuzzy-Menge, Zugehörigkeitsfunktion)

Sei X ein Grundbereich (Diskursbereich, *Universe of Discourse*) mit Elementen x. Eine *Fuzzy-Menge* A von X ist beschrieben durch eine charakteristische Funktion (Zugehörigkeitsfunktion, *Membership Function*) μ_A, die jedem Element $x \in X$ einen Zugehörigkeitswert $\mu_A(x) \in [0, 1]$ für A zuordnet.

$$\begin{aligned} \mu_A : \quad & X \to [0,1] \\ & x \mapsto \mu_A(x) \end{aligned}$$

$\mu_A(x)$: Zugehörigkeitsgrad für x in A

Klassische Menge:

Sei X ein Grundbereich mit Elementen x. Die Zugehörigkeit eines Elementes $x \in X$ zur Menge A kann durch eine charakteristische Funktion μ_A beschrieben werden:

$$\mu_A : X \to \{0,\ 1\}$$

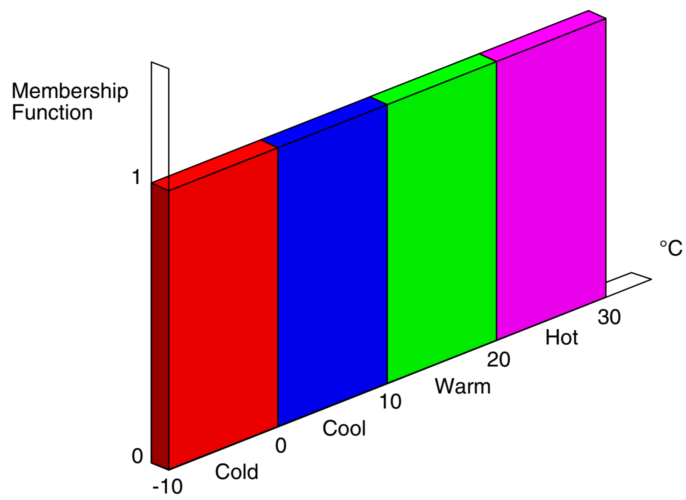
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkungen:

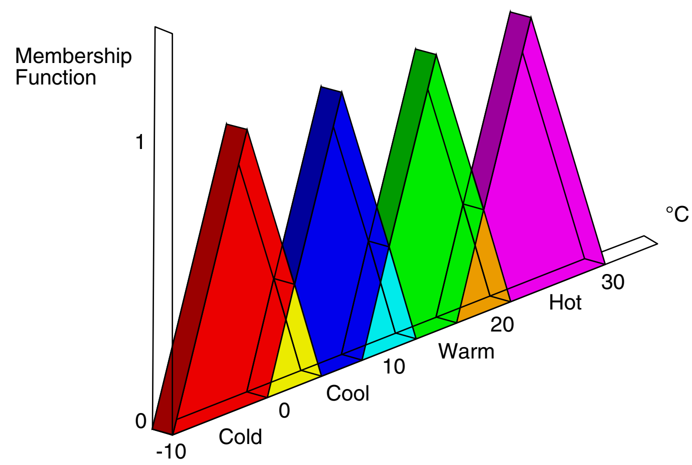
- Fuzzy-Mengen sind Möglichkeitsverteilungen.
- Der Grad der Zugehörigkeit zu einer zu einer Fuzzy-Menge darf nicht mit einer Wahrscheinlichkeit verwechselt werden. Der quantitative Wert aus dem Grundbereich der linguistischen Variablen ist fest.
- Nur die Zuordnung ist nicht festgelegt, wie der quantitative Wert auf Werte der linguistischen Variablen abbgebildet wird. Wenn beispielsweise von 100 Personen, deren Auffassung man nachbilden will, insgesamt 25 das Alter 17 für jung halten, könnte man für die Fuzzy-Menge „`young`“ als Zugehörigkeitswert 0,25 wählen.

Fuzzy-Mengen

Beispiel: Raumtemperatur



Bivalente Mengen zur Charakterisierung der Raumtemperatur



Fuzzy-Mengen zur Charakterisierung der Raumtemperatur

- linguistische Variable: `temperature`
- Grundbereich: -10, . . . , 30
- Qualitative Ausprägungen: `cold, cool, warm, hot`

Fuzzy-Mengen

Konstruktion

Gegeben ein Konzept A, das als Fuzzy-Menge zu repräsentieren ist.

Wie könnte eine Zugehörigkeitsfunktion μ_A definiert werden?

(1) Umfrage.

Befragung von Experten nach ihrem Verständnis bzgl. A mit nachfolgender statistischer Weiterverarbeitung (Glättung, Regression etc.).

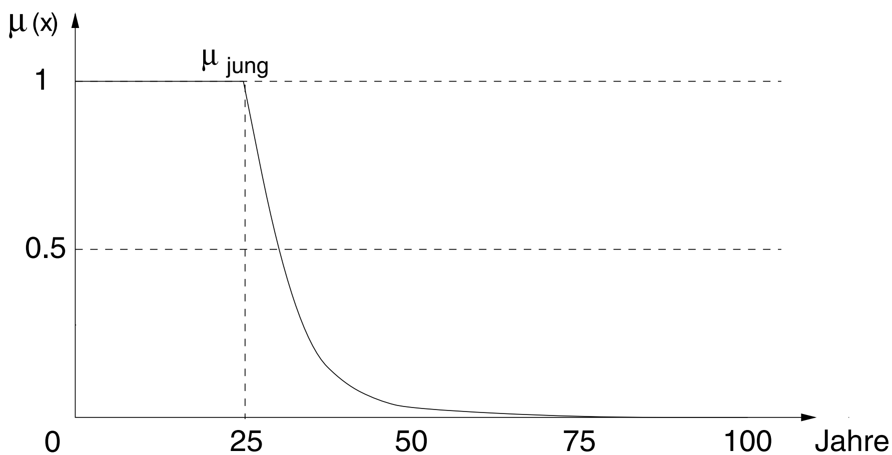
Fuzzy-Mengen

Konstruktion (Fortsetzung)

(2) Parametrischer Ansatz.

$$\mu(x; c_1, p) = \left[1 + c_1 \; |x - x_0|^p\right]^{-1} \qquad c_1 > 0; \; p > 1$$

Beispiel Menschenalter mit Grundbereich $X = [0, 100]$:



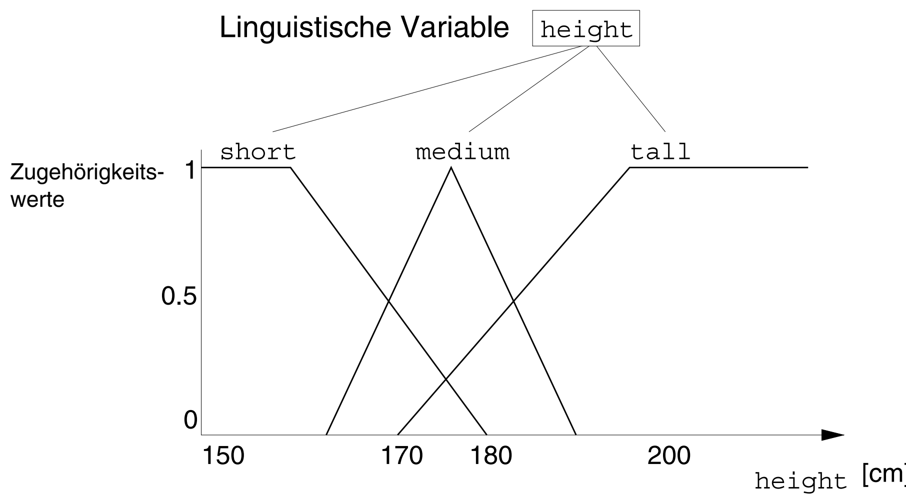
$$\mu_{(\text{Alter} = \text{jung})}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 \leq x \leq 25 \\ \left[1 + \left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1}, & \text{falls } 25 < x \leq 100 \end{cases}$$

Fuzzy-Mengen

Konstruktion (Fortsetzung)

(3) Vergröberung/Vereinfachung von Zwischenwerten durch lineare Interpolation.

Beispiel Menschengröße mit Grundbereich $X = [150, 220]$:



Verschiedene Fuzzy-Mengen (hier: `short`, `medium`, `tall`) über dem gleichen Grundbereich werden auch als Fuzzy-Untermengen bezeichnet.

Ein Element des Grundbereichs kann Mitglied in mehreren Fuzzy-Mengen sein.

Fuzzy-Mengen

Schreibweise

Sei X ein Grundbereich und A eine hierauf definierte Fuzzy-Menge mit Zugehörigkeitsfunktion $\mu_A(x)$.

(1) Vektorschreibweise (bei einer diskreten und geordneten Menge).

$$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad \text{mit } a_i = \mu_A(x_i)$$

Oft auch geschrieben als:

$$A = (a_1/x_1, a_2/x_2, \ldots, a_n/x_n) \qquad \text{mit } a_i = \mu_A(x_i)$$

Beispiel:

$\texttt{tall} = (0/170, 0.25/185, 0.5/190, 0.75/195, 1.0/200)$

Fuzzy-Mengen

Schreibweise (Fortsetzung)

Sei X ein Grundbereich und A eine hierauf definierte Fuzzy-Menge mit Zugehörigkeitsfunktion $\mu_A(x)$.

(2) Zadeh's Schreibweise.

$$A = \mu_1/x_1 + \mu_2/x_2 + \ldots + \mu_n/x_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)/x_i$$

Falls X eine unendliche Menge ist:

$$A = \int_X \mu_A(x)/x$$

Fuzzy-Mengen

Charakterisierung

Definition 2 (Charakterisierung einer Fuzzy-Menge)

1. Träger $T(A)$ einer Fuzzy-Menge A: $T(A) = \{x \mid x \in X, \mu_A(x) > 0\}$

2. α-Schnitt A_α einer Fuzzy-Menge A: $A_\alpha = \{x \mid x \in X, \mu_A(x) \geq \alpha\}$

   Der 1-Schnitt $A_1(x) = \{x \mid x \in X, \mu_A(x) = 1\}$ von A heißt *Kern* von A.

3. Höhe $H(A)$ einer Fuzzy-Menge A:

   $$H(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x)$$

   Fuzzy-Mengen mit $H(A) = 1$ ($H(A) < 1$) heißen normal (subnormal).

4. Kardinalität $C(A)$ einer Fuzzy-Menge A:

   $$C(A) = \sum_{x \in X} \mu_A(x)$$

Fuzzy-Mengen

Charakterisierung (Fortsetzung)

Beispiel:

8 Studenten $x_1, x_2, \ldots, x_8$ haben in einer Prüfung folgende Punktzahlen bei einer Maximalpunktzahl von 75 erreicht:

Student	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
Punkte	69	26	52	55	60	41	46	53

Die Fuzzy-Menge A für `gut_bestanden` sei definiert durch:

Student	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
μ_A	0.92	0.346	0.693	0.73	0.8	0.546	0.613	0.706

- Träger von A: $T(A) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$
- α-Schnitt von A für $\alpha = 0.65$ und $\alpha = 0.90$: $A_{(\alpha=0.65)} = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_8\}$, $A_{(\alpha=0.90)} = \{x_1\}$
- Höhe von A: $H(A) = \sup\{0.92, 0.346, 0.693, 0.73, \ldots\} = 0.92$
- Kardinalität von A: $C(A) = 0.92 + 0.346 + 0.693 + 0.73 + \ldots = 5.36$

Bemerkungen:

- Träger bzw. α-Schnitt einer Fuzzy-Menge sind gewöhnliche Teilmengen des Grundbereichs.
- Eine Fuzzy-Menge kann mit Hilfe des α-Schnitts in eine gewöhnliche Menge umgewandelt (defuzzifiziert) werden:

$$\mu_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mu_A(x) \geq \alpha \\ 0, & \text{wenn } \mu_A(x) < \alpha \end{cases}$$

- Jede Fuzzy-Menge lässt sich durch ihre α-Schnitte charakterisieren:

$$\mu_A(x) = \sup\{\text{min}(\alpha, \chi_{A_\alpha}(x)) \mid \alpha \in [0,1]\}$$

  χ_M bezeichnet die charakteristische Funktion einer klassischen Menge M. Es gilt nämlich folgende Beziehung:

$$\text{min}(\alpha, \chi_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha & \text{falls } \mu(x) \geq \alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Modifizierer für Fuzzy-Mengen

Im täglichen Sprachgebrauch spielen Adverbien bei der Beschreibung von Konzepten eine wichtige Rolle; sie modifizieren ein Verb, ein Adjektiv, ein anderes Adverb oder einen Satz.

Natürlichsprachliche Modifizierer:

very, slightly, somewhat, viel, stark, sehr stark, ziemlich, . . .

Für linguistische Variablenausprägungen werden durch Kombination mit den Modifizierern neue Werte gebildet, für die wiederum passende Fuzzy-Mengen angegeben werden können.

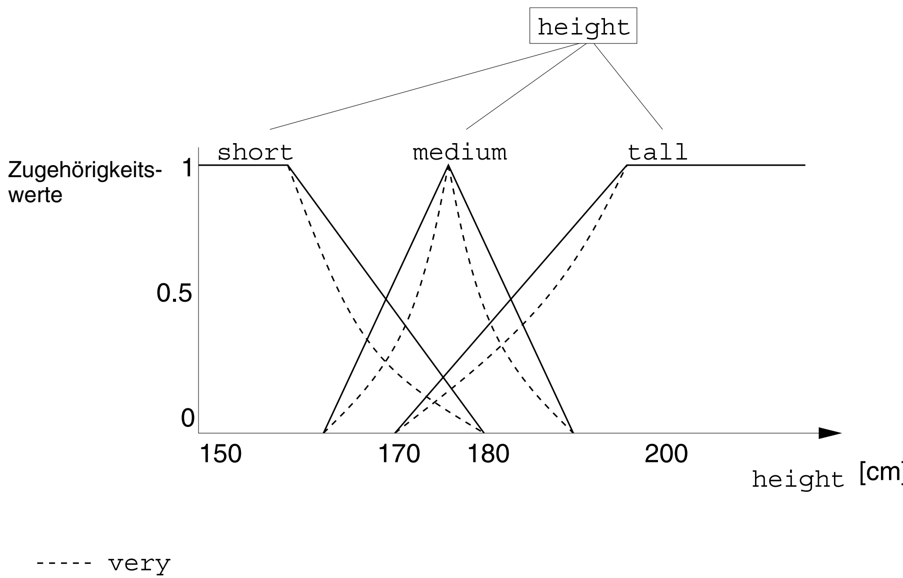
Fuzzy-Mengen können neu konstruiert oder aus vorhandenen Fuzzy-Mengen abgeleitet werden.

Modifizierer für Fuzzy-Mengen

Beispiel:

Größe von Menschen mit Grundbereich $X = [150, 220]$:

- linguistische Variable: `height`
- Fuzzy-Mengen: `short, medium, tall`



- modifizierte Fuzzy-Mengen: `very short, very medium, very tall`

Modifizierer für Fuzzy-Mengen

Definition 3 (Modifizierer für Fuzzy-Menge)

Sei X ein Grundbereich und A eine hierauf definierte Fuzzy-Menge mit Zugehörigkeitsfunktion $\mu_A(x)$. Modifizierer von A mit den Berechnungsvorschriften für die Zugehörigkeitsfunktionen:

1. Konzentration bzw. Verstärkung „`sehr`“, „`very`“: $\mu_{CON(A)}(x) = (\mu_A(x))^2$

2. Aufweichung „`etwas`“, „`more or less`“: $\mu_{DIL(A)}(x) = \sqrt{\mu_A(x)}$

3. Intensivierung „`tatsächlich`“, „`indeed`“:

$$\mu_{INT(A)}(x) = \begin{cases} 2 \cdot (\mu_A(x))^2, & \text{falls } 0 \leq \mu_A(x) \leq 0.5 \\ 1 - 2 \cdot (1 - \mu_A(x))^2, & \text{falls } 0.5 < \mu_A(x) \leq 1 \end{cases}$$

4. extra Verstärkung „`im höchsten Maße`“: $\mu_{POW(A)}(x) = (\mu_A(x))^n,\ n > 2$

Modifizierer für Fuzzy-Mengen

Beispiel:

- linguistische Variable: `Alter`
- Zugehörigkeitsfunktion: $\mu_{\text{alt}} = \begin{cases} \left(1 + \left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1} & \text{für } 50 < x \leq 100 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- Fuzzy-Menge: $A_{\text{alt}} = \sum_{x=51}^{100} \left(1 + \left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1} \Big/ x$

Dann gilt:

$$A_{\text{sehr alt}} = \sum_{x=51}^{100} (\mu_{alt}(x))^2 / x = \sum_{x=51}^{100} \left(1 + \left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-2} \Big/ x$$

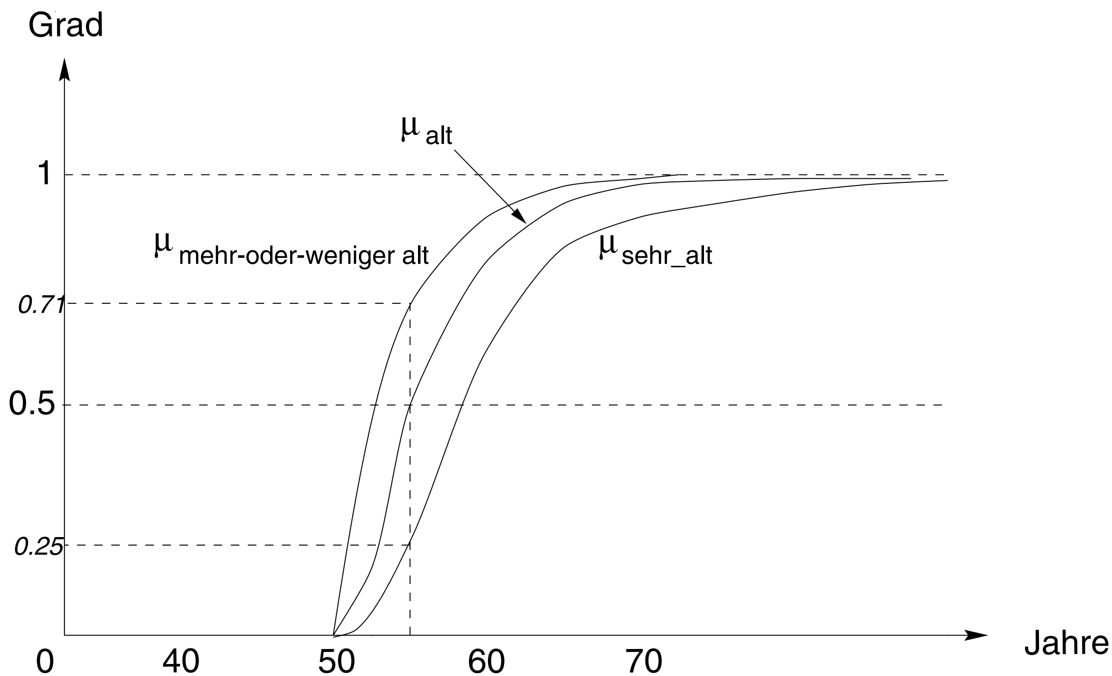
$$A_{\text{etwas alt}} = \sum_{x=51}^{100} (\mu_{alt}(x))^{0.5} / x = \sum_{x=51}^{100} \left(1 + \left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-0.5} \Big/ x$$

$$A_{\text{weniger alt}} = \sum_{x=51}^{100} (\mu_{alt}(x))^{0.25} / x = \sum_{x=51}^{100} \left(1 + \left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-0.25} \Big/ x$$

Modifizierer für Fuzzy-Mengen

Beispiel (Fortsetzung):

linguistische Variable `Alter`:



Operationen auf Fuzzy-Mengen

Klassische Mengen $A \subset X$:

- $x \in A$ mit Semantik „x hat Eigenschaft A“
- Durchschnitt, Vereinigung, Komplement von Mengen entsprechen Konjunktion, Disjunktion, Negation solcher Aussagen, z.B.
  $x \in A \cap B \quad :\Leftrightarrow \quad (x \in A \text{ und } x \in B)$
- Teilmengenbeziehung entspricht Implikation:
  $A \subset B \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x \in X \ (x \in A \Rightarrow x \in B)$

Fuzzy-Mengen A über X:

- $x \in A$ mit Semantik „x hat Eigenschaft A mit Grad $\mu_A(x)$“

  Frage: Wie werden Fuzzy-Aussagen verknüpft?

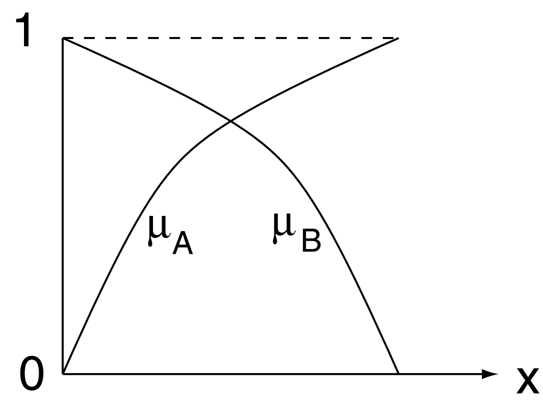
Operationen auf Fuzzy-Mengen

Definition 4 (Mengenoperationen auf Fuzzy-Mengen)

Sei X ein Grundbereich und A, B hierauf definierte Fuzzy-Mengen mit Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_A(x)$ bzw. $\mu_B(x)$. Mengenoperationen für Fuzzy-Mengen sind als Verknüpfung von $\mu_A(x)$ und $\mu_B(x)$ definiert.

1. Teilmengenbeziehung für Fuzzy-Mengen:
   $A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ für alle $x \in X$

2. Gleichheit von Fuzzy-Mengen:
   $A = B \quad \Leftrightarrow \quad \mu_A(x) = \mu_B(x)$ für alle $x \in X$



Bemerkungen:

- Aufgrund der Definition ist die Teilmengenbeziehung selbst entweder wahr oder falsch, also eine scharfe Aussage. Auch hier ist eine Abschwächung möglich: Teilmengenbeziehungen gelten zu einem bestimmten Grad.

  Es gibt eine ganze Reihe unterschiedlicher Definitionen für Fuzzy-Implikationen, wir werden im Zusammenhang mit den Fuzzy-Regeln darauf zurückkommen.

- Auch die klassischen Mengenoperationen können über die zugehörigen charakteristischen Funktionen definiert werden. Klassische (scharfe) Mengen als Spezialfall der Fuzzy-Mengen sollen mit den entsprechenden Berechnungsvorschriften verarbeitet werden können:

  Seien A und B scharfe Teilmengen einer Menge X. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\chi_{A\cap B} &= \min(\chi_A, \chi_B)\\
\chi_{A\cup B} &= \max(\chi_A, \chi_B)\\
\chi_{A^c} &= 1 - \chi_A
\end{aligned}$$

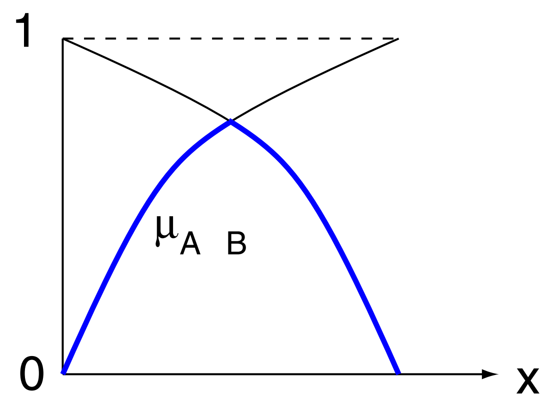
Operationen auf Fuzzy-Mengen

Definition 4 (Fortsetzung)

Sei X ein Grundbereich und A, B hierauf definierte Fuzzy-Mengen mit Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_A(x)$ bzw. $\mu_B(x)$.

3. Durchschnitt $A \cap B$:

   $\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$ für alle $x \in X$



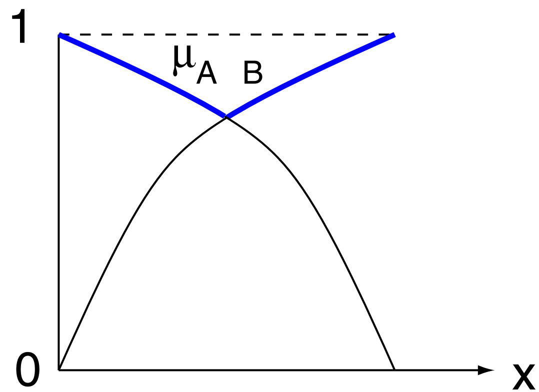
alternative Schreibweise: $\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$

Operationen auf Fuzzy-Mengen

Definition 4 (Fortsetzung)

Sei X ein Grundbereich und A, B hierauf definierte Fuzzy-Mengen mit Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_A(x)$ bzw. $\mu_B(x)$.

4. Vereinigung $A \cup B$:
   $\mu_{A \cup B}(x) = \text{max}(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad$ für alle $x \in X$



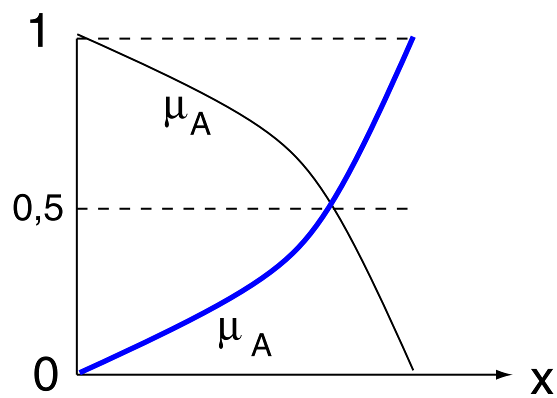
alternative Schreibweise: $\mu_A(x) \vee \mu_B(x)$

Operationen auf Fuzzy-Mengen

Definition 4 (Fortsetzung)

Sei X ein Grundbereich und A, B hierauf definierte Fuzzy-Mengen mit Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_A(x)$ bzw. $\mu_B(x)$.

5. Komplement $\neg A$:
   $\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)$ für alle $x \in X$



Bemerkungen:

- Verglichen mit der klassischen Mengenalgebra fehlen Eigenschaften des Komplements:

$$A \cap \neg A = \emptyset, \quad A \cup \neg A = X$$

  gelten in der Fuzzy-Logik nicht.

- Sei $\mu_A(x) = 0.3$ dann ergibt sich z. B. für $\mu_{A\cap\neg A}(x)$:

$$\text{min}(\mu_A(x), 1 - \mu_a(x)) = \text{min}(0.3, 0.7) = 0.3$$

Operationen auf Fuzzy-Mengen

Beispiel:

Es sei Grundbereich $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ und Fuzzy-Mengen A, B, C über X gegeben:

$$\begin{aligned} A &= 0.7/x_1 + 0.3/x_2 + 0.4/x_3 + 0.2/x_4 \\ B &= 0.5/x_1 + 0.6/x_4 + 1/x_5 \\ C &= 0.3/x_1 + 0.2/x_3 + 0.1/x_4 \end{aligned}$$

Dann gilt: C ist eine Fuzzy-Teilmenge von A, B jedoch nicht. Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} \neg A &= \sum_{i=1}^{5} (1 - \mu_A(x_i))/\, x_i \\ &= (1-0.7)/x_1 + (1-0.3)/x_2 + (1-0.4)/x_3 + (1-0.2)/x_4 + (1-0.0)/x_5 \\ &= 0.3/x_1 + 0.7/x_2 + 0.6/x_3 + 0.8/x_4 + 1/x_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cup B &= \sum_{i=1}^{5} \textsf{max}(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i))/\, x_i \\ &= \textsf{max}(0.7, 0.5)/x_1 + \textsf{max}(0.3, 0)/x_2 + \textsf{max}(0.4, 0)/x_3 + \textsf{max}(0.2, 0.6)/x_4 + \textsf{max}(0.0, 1)/x_5 \\ &= 0.7/x_1 + 0.3/x_2 + 0.4/x_3 + 0.6/x_4 + 1/x_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cap B &= \sum_{i=1}^{5} (\textsf{min}(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i))/\, x_i \\ &= 0.5/x_1 + 0.2/x_4 \end{aligned}$$

Operationen auf Fuzzy-Mengen

Für $\cup, \cap$ und $\neg$ und für beliebige Fuzzy-Mengen A, B und C über einem gemeinsamen Grundbereich X gilt:

Kommutativität:	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Assoziativität:	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Idempotenz:	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Distributivität:	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
neutrales Element:	$A \cup \emptyset = A$
Absorption:	$A \cup (A \cap B) = A$
de Morgan:	$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$

Operationen auf Fuzzy-Mengen

Beweis des Satzes von de Morgan für Fuzzy-Mengen:

$$\begin{aligned}\mu_{\neg(A\cup B)}(x) &= 1 - \textsf{max}(\mu_A(x), \mu_B(x)) \\ &= \textsf{min}(1-\mu_A(x), 1-\mu_B(x)) \\ &= \mu_{\neg A \cap \neg B}(x)\end{aligned}$$

Operationen auf Fuzzy-Mengen

Konstruktion neuer Fuzzy-Mengen

Beispiel:

Seien A und B die Fuzzy-Mengen „`tall_persons`“ und „`short_persons`“.

- Fuzzy-Menge C „`very_tall_persons`“:

$$\mu_C(x) = (\mu_A(x))^2$$

- Fuzzy-Menge D „`not_very_tall_persons`“:

$$\mu_{\neg D}(x) = 1 - (\mu_A(x))^2$$

- Fuzzy-Menge E „`not_very_tall_and_not_very_short_persons`“:

$$\mu_E(x) = \text{min}((1 - (\mu_A(x))^2), (1 - (\mu_B(x))^2))$$

Operationen auf Fuzzy-Mengen

t-Normen

Die vorgestellten Berechnungsvorschriften für Durchschnitt und Vereinigung sind nicht bindend. Allgemein wünscht man, dass die Mengenoperationen kompatibel zu den klassischen Mengenoperationen sind, da die klassischen Mengen einen Spezialfall der Fuzzy-Mengen darstellen.

Die Berechnungsvorschrift für das Komplement $C : [0,1] \to [0,1]$ soll Zugehörigkeitsgrade auf Zugehörigkeitsgrade abbilden. Da scharfe Mengen spezielle Fuzzy-Mengen sind, muss auch die Fuzzy-Komplementabbildung für alle $a, b \in [0,1]$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

- $C(0) = 1$ und $C(1) = 0$ (Randbedingung)
- $a \leq b \;\Rightarrow\; C(a) \geq C(b)$ (Monotonie)
- $C(C(a)) = a$ (Involution)

Als Berechnungsvorschrift für das Komplement wählt man meist die in der Definition angegebene Vorschrift von Lukasiewicz:

$$\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \text{für alle } x \in X$$

Operationen auf Fuzzy-Mengen

t-Normen (Fortsetzung)

Die gewünschten Eigenschaften für Durchschnitt und Vereinigung definieren notwendige Eigenschaften für die Berechnungsvorschrift. Eine Abbildung $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ heißt t-Norm, wenn gilt:

- $T(a, T(b,c)) = T(T(a,b), c)$ (Assoziativität)
- $T(a,b) = T(b,a)$ (Kommutativität)
- $a \leq b \;\Rightarrow\; T(a,c) \leq T(b,c)$ (Monotonie)
- $T(a,1) = a$ und $T(a,0) = 0$ (Neutrales Element)

für alle $a, b, c \in [0,1]$.

Operationen auf Fuzzy-Mengen

t-Normen (Fortsetzung)

Beispiele für t-Normen:

Minimum-Norm: $T_{\text{min}}(a, b) := \text{min}(a, b)$

Lukasiewicz-Norm: $T_{\text{Luka}}(a, b) := \text{max}(0, a + b - 1)$

Algebraisches Produkt: $T_{\text{aAlt}}(a, b) := a \cdot b$

Drastisches Produkt: $T_{\text{dProd}}(a, b) := \begin{cases} 0 & \text{falls} 1 \notin \{a, b\} \\ \text{min}(a, b) & \text{sonst} \end{cases}$

Betrachtet man eine t-Norm *(Triangular Norm)* als Figur im $\mathbf{R}^3$, so beschreibt sie eine von $(0, 0, T(0, 0))$ nach $(1, 1, T(1, 1))$ ansteigende Fläche.

Operationen auf Fuzzy-Mengen

t-Normen (Fortsetzung)

Eine Abbildung $S : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ heißt s-Norm oder t-Conorm, wenn gilt:

- $S(a, S(b, c)) = S(S(a, b), c)$ (Assoziativität)
- $S(a, b) = S(b, a)$ (Kommutativität)
- $a \leq b \;\Rightarrow\; S(a, c) \leq S(b, c)$ (Monotonie)
- $S(a, 0) = a$ und $S(a, 1) = 0$ (Neutrales Element)

für alle $a, b, c \in [0,1]$.

Operationen auf Fuzzy-Mengen

t-Normen (Fortsetzung)

Beispiele für t-Conormen:

Maximum-Alternative: $S_{\text{max}}(a, b) := \max(a, b)$

Lukasiewicz-Alternative: $S_{\text{Luka}}(a, b) := \min(a + b, 1)$

Algebraische Alternative: $S_{\text{aAlt}}(a, b) := a + b - ab$

Drastische Alternative: $S_{\text{dAlt}}(a, b) := \begin{cases} 1 & \text{falls} 0 \notin \{a, b\} \\ \max(a, b) & \text{sonst} \end{cases}$

t-Normen werden zur Definition des Durchschnittes, t-Conormen zur Definition der Vereinigung verwendet. Um die bekannten DeMorgan'schen Gesetze zu erhalten, müssen t-Norm und t-Conorm zueinander „passen“.

Operationen auf Fuzzy-Mengen

t-Normen (Fortsetzung)

Ist T eine t-Norm, so ist T^* mit

$$T^*(a, b) = 1 - T(1 - a, 1 - b)$$

für alle $a, b \in [0, 1]$ eine t-Conorm und umgekehrt. Paare von t-Normen und t-Conormen, die so definiert sind, heißen *dual* zueinander.

Für die mit dem meist verwendeten Paar von t-Norm und t-Conorm $(T_{\text{min}}, S_{\text{max}})$ definierten Durchschnitts- und Vereinigungsoperationen zusammen mit der Negation von Lukasiewicz gelten die Distributivgesetze, für andere Paare im allgemeinen jedoch nicht. T_{min} und S_{max} sind die einzigen idempotenten Normen bzw. Conormen.

Insgesamt wählt man aus praktischen Gründen für die Berechnungsvorschriften für Komplement, Durchschnitt und Vereinigung stetige Funktionen.