Раздел I. МЕХАНИКА

Глава 1. ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ

§ 1. Основные понятия и уравнения кинематики равноускоренного движения тела

Ключевые понятия: кинематика, радиус-вектор, вектор перемещения, скорость мгновенная и средняя, ускорение.

На этом уроке вы: познакомитесь с основными понятиями кинематики; научитесь описывать поступательное движение тел.

Кинематика — это раздел механики, который изучает механическое движение без учета причин, вызвавших его. В этом разделе мы получим ответ на вопрос, как движется тело, но мы не узнаем, почему тело движется именно так.

Рис. 1.1

Под *механическим движением* понимают любое изменение положения тела или отдельных его частей с течением времени в пространстве относительно других тел, которые называются *телами отсчета.*

Примерами механического движения являются: движение любых тел по поверхности Земли, полеты самолетов (рис. 1.1), течение рек, движение воздушных масс (ветер), движение звезд, комет, метеоров, планет, спутников планет, астероидов (рис. 1.2).

Чем удачнее выбрано тело отсчета, тем проще описывать и изучать механическое движение.

Рис. 1.2

А что значит изучить механическое движение? Какую задачу необходимо при этом решить?

Основной задачей кинематики является определение положения тела в пространстве в любой момент времени. Для того чтобы это сделать, одного тела отсчета недостаточно. Необходима система отсчета.

Под системой отсчета понимают совокупность тела отсчета, системы координат и прибора, отсчитывающего время. Надо понимать, что система отсчета и система координат — это не одно и то же.

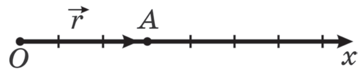


Рис. 1.3

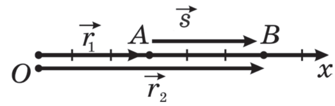


Рис. 1.4

Для того чтобы определить положение тела на прямой, плоскости или в пространстве, было введено понятие *радиус-вектор точки.*

Радиус-вектор точки — это вектор, соединяющий начало отсчета, т. е. точку *O* с местонахождением материальной точки в данный момент, т. е. с точкой *A* (рис. 1.3). С изменением положения материальной точки будет меняться и ее радиус-вектор, т. е. радиус-вектор как бы **“следит”** за положением материальной точки. Графически радиус-вектор изображается стрелкой, проведенной из начала координат *O* к данной точке *A*. Численное значение (модуль) радиус-вектора всегда равно расстоянию между точками *O* и *A* (рис. 1.3).

Рассмотрим процесс перемещения материальной точки вдоль выбранного направления *Ox* из положения *A* в положение *B* (рис. 1.4).

Величина

$$\vec{s} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \tag{1.1}$$

получила название *вектор перемещения* (рис. 1.4, 1.5).

Под ***вектором перемещения*** **понимают вектор, соединяющий начальное и конечное положения тела.**

Переходя к проекции вектора перемещения на ось *Ox,* получим, что

$$x = x_0 + s_x, \tag{1.2}$$

где x и x_0 — конечная и начальная координаты тела; s_x — величина, определяемая законом движения тела. Если рассматривать движение тела в плоскости, то получим картину перемещения тела, изображенную на рисунке 1.5, где s_x и s_y — это проекции вектора перемещения на осях *Ox* и *Oy*, соответственно. Как видно из рисунка 1.5, модули этих проекций соответственно равны:

$$s_x = x - x_0 \text{ и } s_y = y - y_0.$$

По рисунку 1.5 видно, что $s_y > s_x$, т. е. перемещение, совершенное телом вдоль оси *Oy,* больше перемещения, совершенного им вдоль оси *Ox.* Следовательно, если движение тела происходит в двух или нескольких направлениях, то мы видим лишь результирующее движение. Это означает, что любое сложное движение можно разложить на простые составляющие по направлениям, т. е. по координатным осям системы координат. Можно сделать вывод: движения по разным направлениям происходят независимо друг от друга. В этом состоит суть

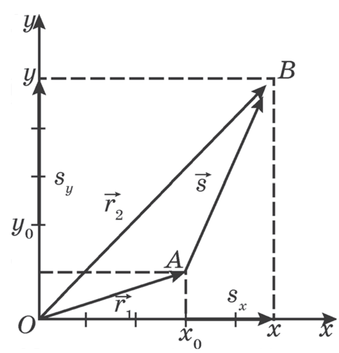


Рис. 1.5

принципа независимости движений: **движения, в которых одновременно участвует тело в данной системе отсчета, не влияют друг на друга и изучаются отдельно друг от друга.**

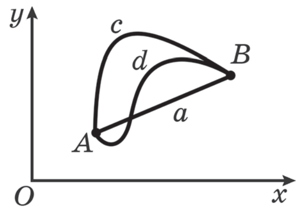


Рис. 1.6

Подумайте над тем, как можно использовать принцип независимости движений при изучении движения тел.

Тело может попасть из точки A в точку B, перемещаясь произвольно: либо по линии AcB, либо по линии AdB, либо по линии AaB (рис. 1.6).

Линия, в каждой точке которой последовательно побывало тело в процессе своего движения, называется *траекторией движения*.

Рис. 1.7

Траектории движения самолета и поезда (рис. 1.7) различны, хотя пункты отправления и прибытия одинаковы. Траектория может быть *прямолинейной* и *криволинейной*.

Длина траектории называется *пройденным путем* и обозначается символом l.

Путь — это скалярная величина, не имеющая направления. Она характеризуется только численным значением и определяется расстоянием, пройденным телом.

Модули пути и перемещения равны в случае прямолинейного движения тела в одном направлении. Траектория движения в этом случае — прямая линия. Во всех других случаях путь больше перемещения.

Тело в пространстве может двигаться быстро или медленно. **Для характеристики быстроты изменения вектора перемещения ввели особую физическую величину — *скорость перемещения*.**

Скорость перемещения определяется перемещением, совершенным телом за единицу времени:

$$\vec{v} = \frac{\vec{s}}{\Delta t}. \qquad (1.3)$$

Для характеристики быстроты движения по траектории ввели другую физическую величину — *путевая скорость*.

Путевая скорость определяется путем, пройденным телом за единицу времени:

$$v = \frac{l}{t}. \qquad (1.4)$$

Для характеристики состояния материальной точки в данный момент времени вводится понятие — *мгновенная скорость*.

Мгновенная скорость — это скорость тела в данный момент времени.

Необходимо помнить, что чаще всего при движении тела скорость изменяется. Движение с изменяющейся скоростью называют *неравномерным*.

Для того чтобы наиболее полно описать неравномерное движение и узнать закон изменения скорости, вводят новую физическую величину — ***ускорение***.

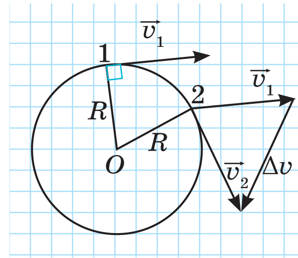


Рис. 1.8

***Ускорение* — это физическая величина, характеризующая скорость изменения вектора скорости, т. е.**

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{\Delta t}. \tag{1.5}$$

Измеряется ускорение *в метрах на секунду в квадрате:* $[\vec{a}] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Если тело переместилось из точки 1 в точку 2 (рис. 1.8), изменив при этом скорость как по величине, так и по направлению, то вектор разности скоростей находят по правилу вычитания векторов $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Величина полного ускорения в этом случае будет равна:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}. \tag{1.6}$$

Изменение вектора скорости означает, что происходит изменение скорости как по величине, так и по направлению. Поэтому удобно разложить вектор полного ускорения $\vec{a}$ на два составляющих вектора, которые взаимно перпендикулярны друг другу: вектор *тангенциального* (*касательного*) ускорения $\vec{a}_\tau$ и *нормального* (*центростремительного*) ускорения $\vec{a}_n$ (рис. 1.9).

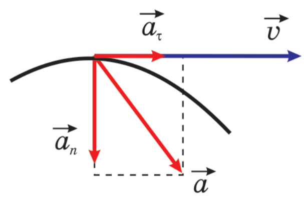


Рис. 1.9

Под ***тангенциальным ускорением*** **понимают составляющую полного ускорения, характеризующую быстроту изменения скорости по величине; оно всегда направлено по касательной к данной точке траектории.** Модуль этого ускорения находят так:

$$a_\tau = \frac{v - v_0}{t}. \tag{1.6, а}$$

Под ***нормальным ускорением*** **понимают составляющую полного ускорения, характеризующую быстроту изменения скорости по направлению; оно всегда направлено по радиусу к центру кривизны данной точки траектории.**

Поэтому его еще называют **центростремительным (нормальным) ускорением.** Модуль этого ускорения находят так:

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \tag{1.6, б}$$

С учетом этого вектор полного ускорения тела будет определяться векторной суммой тангенциального $\vec{a}_\tau$ и нормального $\vec{a}_n$ ускорений, т. е.

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n . \quad (1.7)$$

Так как векторы $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ всегда взаимно перпендикулярны (рис. 1.9), то модуль полного ускорения можно найти по теореме Пифагора:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} . \quad (1.8)$$

По значениям нормального и тангенциального ускорений можно узнать характер движения тела.

Например, если $a_\tau = 0$ и $a_n = 0$, то движение равномерное прямолинейное, а если $a_\tau \neq 0$ и $a_n = 0$, то движение неравномерное, но прямолинейное.

Относительность механического движения. Любое механическое движение носит относительный характер. Это связано с выбором системы отсчета. Так, пассажир самолета, летящего в условиях густой облачности, не может определить, перемещается самолет, или нет. Это объясняется тем, что у пассажира нет тела отсчета. Как только самолет выйдет из полосы облаков, пассажир сможет определить, что относительно земли он движется, а относительно самолета он как был, так и остался неподвижным. Следовательно, скорость движения является относительной величиной.

Также относительной величиной является и перемещение. Траектория движения тоже носит относительный характер.

Все механические процессы протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета.

В этом состоит принцип относительности в механике. Его еще называют *принципом относительности Галилея.*

Инвариантные и относительные величины. Инвариантность означает неизменность физической величины или закона при определенных преобразованиях или изменениях условий. Например, масса космонавта одинакова на Земле и на Луне; также и сила удара мяча о стенку не зависит от того, в какой инерциальной системе отсчета находится наблюдатель: человек, стоящий рядом, или пассажир равномерно движущегося автобуса.

Инвариантными при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой являются ускорение, масса и сила, время. Также инвариантными будут законы Ньютона, о чем и говорит принцип относительности Галилея.

В то же время уравнения движения тел в разных инерциальных системах отсчета будут выглядеть по-разному.

Величины, изменяющиеся при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, являются относительными (неинвариантными).

Кинематические величины, такие как скорость, перемещение, траектория движения — примеры относительных величин.

Если тело одновременно является участником нескольких движений (например, пассажир теплохода, плывущего по реке, перемещается по палубе), то результирующее перемещение равно векторной сумме перемещений, совершаемых им в каждом из движений, т. е. $\Delta\vec{s} = \Delta\vec{s}_1 + \Delta\vec{s}_2$. Но тогда и скорость результирующего движения будет представлять собой векторную сумму скорости тела относительно подвижной системы отсчета и скорости самой подвижной системы отсчета относительно неподвижной системы отсчета, т. е. $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. Данный закон сложения скоростей был установлен Галилео Галилеем. Он справедлив для движения тел со скоростями гораздо меньшими, чем скорость света.

Например, пассажир теплохода, плывущего со скоростью 12 км/ч, двигаясь со скоростью 12 км/ч в сторону, противоположную движению теплохода, относительно берега остается неподвижным, т. е. его скорость относительно берега равна нулю. Следовательно, относительно берега пассажир не перемещается. Если же пассажир будет перемещаться по теплоходу по направлению его движения, то относительно берега он будет перемещаться со скоростью:

$$v = v_т + v_п = 24 \text{ км/ч}.$$

Поэтому относительно берега он пройдет расстояние в два раза большее, чем проплывет теплоход.

Этот пример доказывает, что скорость и перемещение являются относительными величинами.

Вопросы для самоконтроля

1. Что вы понимаете под системой отсчета?
2. Для чего необходима система отсчета?
3. Что понимают под радиус-вектором?
4. Какие кинематические величины зависят от выбора системы отсчета?
5. Чем отличается путь от перемещения?
6. Может ли перемещение быть больше пройденного пути? равным ему? меньше? Ответ обосновать.
7. Что понимают под траекторией движения?
8. В каких случаях тело можно принять за материальную точку?
9. В чем состоит принцип независимости движений?
10. Дайте полную характеристику ускорению движения?
11. Чем отличается скорость перемещения от путевой скорости?
12. В чем состоит физический смысл тангенциального ускорения?
13. В чем состоит физический смысл нормального ускорения?

Экспериментируйте

Рассмотрите падение пластилинового шарика в воздухе и в воде. Опишите движение шарика в обоих случаях.

Объясните

1. Айдар и Айсар идут по дороге, которая завела их в туман. Сможет ли Айсар в тумане определить местонахождение Айдара?

2. Почему говорят, что Солнце восходит и заходит? Какое тело в этом случае является телом отсчета?

3. По улице мимо светофора строго в противоположных направлениях движутся автомобиль и колонна автобусов с детьми. Движутся ли автобусы относительно друг друга? А относительно автомобиля или светофора? Движется или покоится светофор?

Исследуйте

Дан график зависимости $v(t)$ при прямолинейном движении тела (рис. 1.10). Исследуйте характер движения тела. Найдите путь, пройденный телом за 9 с, и модуль перемещения за это время.

(*Ответ*: 7,5 м; 1,5 м)

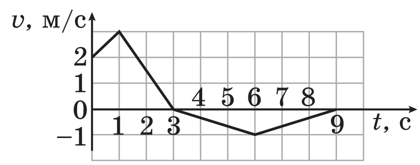


Рис. 1.10

Анализируйте

1. Пешеход за 1 ч 20 мин прошел расстояние 7,2 км. При этом за первые 20 мин он прошел участок проселочной дороги длиной 1,8 км, двигаясь в одном темпе. Затем он прошел с постоянной скоростью остаток пути по шоссе. К какому типу можно отнести его движение на всем пути? Приведите расчеты.

2. Поезд движется от одной станции до другой, изменяя скорость согласно расписанию. Как соотносятся пути, пройденные за время движения первым, третьим и шестым вагонами? Приведите расчеты.

Творите

Придумайте задачу практического содержания на движение автобуса в городе.

Решайте

1. Конный отряд длиной 20 м движется вдоль оврага равномерно со скоростью 18 км/ч. За какое время отряд пройдет овраг? Длина оврага 40 м.

(*Ответ*: 12 с)

2. От перекрестка одновременно отъехали два автобуса: первый — со скоростью 40 км/ч, второй — со скоростью 30 км/ч, в направлении, перпендикулярном движению первого. С какой относительной скоростью (в км/ч) они удаляются друг от друга?

(*Ответ*: 50 км/ч)

■3. Водитель легкового автомобиля начинает обгон трейлера при скорости 90 км/ч в тот момент времени, когда расстояние между машинами 20 м, и, обогнав, переходит (перестраивается) в прежний ряд, когда расстояние между машинами стало 15 м. Определить время, за которое легковой автомобиль обогнал трейлер, движущийся со скоростью 72 км/ч. Длина легкового автомобиля 4 м, трейлера — 16 м.

(*Ответ*: 11 с)

*4. Человек плывет на моторной лодке вверх по течению реки и роняет под мостом в воду надувную камеру. Через час он это обнаруживает и, повернув назад, догоняет камеру на расстоянии 6 км от моста. Какова скорость течения реки, если скорость лодки относительно воды была постоянной?

(*Ответ*: 3 км/ч)

*5. Талгат, поднимаясь по движущемуся вверх эскалатору со скоростью v, затратил на подъем 6 мин. Если же он пойдет по эскалатору в 3 раза быстрее, то время подъема уменьшается в 2 раза. За какое время Талгат поднимется по неподвижному эскалатору, двигаясь со скоростью $2v$?

(*Ответ*: 6 мин)

*6. Чтобы проплыть на моторной лодке от причала *А* до причала *В* требуется час, а обратная дорога занимает три часа. Скорость лодки относительно воды остается постоянной. Во сколько раз эта скорость больше скорости течения?

(*Ответ*: в 2 раза)

■7. Поезд движется на север со скоростью 20 м/с. Пассажиру вертолета, пролетающего над поездом, кажется, что поезд движется на запад со скоростью 20 м/с. Найти скорость вертолета и направление его полета.

(*Ответ*: 28 км/ч на северо-восток под углом 45°)

Рефлексия

1. С какими терминами и понятиями вы встречались ранее?
2. Какая часть пройденного материала усвоена хорошо, а какая слабо? Что необходимо сделать, чтобы ликвидировать пробел по новому материалу?
3. Помогли ли вам задания “Творческой мастерской” в усвоении темы? Где возникли затруднения?
4. Какая информация заинтересовала вас особенно? Почему?

§ 2. Прямолинейное движение

Ключевые понятия: прямолинейное равномерное и равнопеременное движение, перемещение, скорость при прямолинейном движении.

На этом уроке вы: познакомитесь с прямолинейным движением и научитесь применять уравнения координаты и скорости для решения основной задачи механики.

Остановимся более подробно на прямолинейном движении.

Прямолинейное равномерное движение. Тела могут перемещаться в пространстве по-разному: как с постоянно изменяющейся скоростью, так и с неизменной скоростью, как по криволинейной траектории, так и по прямолинейной.

Прямолинейным равномерным движением **называется движение, при котором тело за любые равные промежутки времени совершает равные перемещения, не изменяя направление движения.**

Почему в определении равномерного движения важную роль играет слово “любые”?

При таком движении вектор скорости тела остается неизменным как по величине, так и по направлению, т. е.

$$\vec{v} = \text{const}.$$

Прямолинейное равномерное движение встречается в природе довольно редко, но в течение небольшого времени многие тела могут двигаться с неизменной скоростью по прямолинейной траектории.

Присмотритесь к окружающему вас миру, и вы обнаружите, что такое движение встречается не часто. Сможете ли вы привести примеры прямолинейного равномерного движения?

Рассмотрим процесс перемещения электровоза по прямолинейному железнодорожному полотну. Пусть он движется равномерно. Тогда величины перемещения и пройденного пути будут одинаковыми. Найти их мы сможем по формуле:

$$s_x = v_x t. \qquad (2.1)$$

На рисунке 2.1 отмечено начальное положение электровоза x_0 и его конечное положение x и вектор перемещения $\vec{s}$. При этом электровоз мы приняли за материальную точку.

Из данного рисунка видно, что перемещение и путь (движение-то прямолинейное) можно найти как разность конечной и начальной координат:

$$s_x = x - x_0. \qquad (2.2)$$

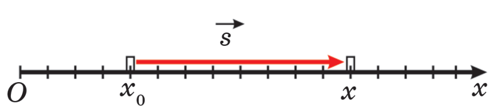


Рис. 2.1

Отсюда следует, что для нахождения координаты электровоза x в любой момент времени необходимо к его начальной координате x_0 прибавить величину перемещения:

$$x = x_0 + s_x. \qquad (2.3)$$

Подставив в формулу (2.3) перемещение из формулы (2.1), получим:

$$x = x_0 + v_x t. \qquad (2.4)$$

Это выражение называется *законом равномерного прямолинейного движения* материальной точки.

По формуле (2.4) можно найти координату любого тела, движущегося прямолинейно и равномерно **в любой момент времени.**

Механическое движение можно изобразить графически. Это дает возможность представить движение более наглядно. Для этого по оси абсцисс откладываем время движения, а по оси ординат — значения координат тела в выбранном масштабе. Далее, используя закон движения тела, строим график.

Попробуйте построить графики зависимости координаты, скорости и ускорения при равномерном прямолинейном движении.

Рассмотрим движение трех тел, причем легковой автомобиль 1 и мотоцикл 2 движутся в направлении, принятом положительным, а автобус 3 — им навстречу (рис. 2.2).

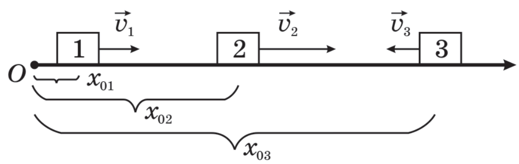


Рис. 2.2

Зависимость кинематических величин от времени представим графически. Изобразим графики скоростей, перемещения, пути и координаты для трех тел: 1, 2, 3 (рис. 2.3, 2.4, 2.5, 2.6). Тела 1 и 2 движутся в положительном направлении оси Ox, причем $v_2 > v_1$; тело 3 движется в направлении, противоположном оси Ox; их начальные координаты даны на рисунке 2.6. Графики скорости представлены на рисунке. Площадь заштрихованного прямоугольника (рис. 2.3) численно равна пути s (модулю перемещения), пройденному телом 1 за время t_1.

С помощью графиков движения можно определить: 1) координаты тела в любой момент времени; 2) путь, пройденный телом за некото-

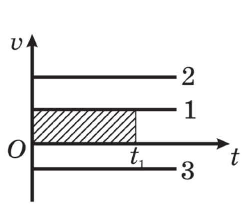


Рис. 2.3

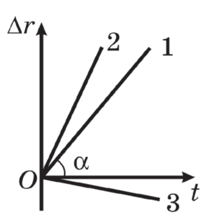


Рис. 2.4

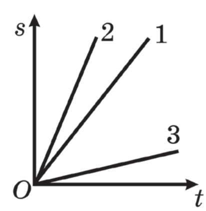


Рис. 2.5

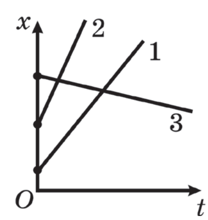


Рис. 2.6

рый промежуток времени; 3) время, за которое пройден какой-то путь; 4) кратчайшее расстояние между телами в любой момент времени; 5) момент и место встречи тел и многое др.

Прямолинейное неравномерное движение. *Неравномерным прямолинейным движением* называется движение по прямолинейной траектории с меняющейся скоростью. Рассмотрим частный случай такого движения — равнопеременное движение.

***Равнопеременным прямолинейным движением* называют движение тела, при котором его скорость за любые равные промежутки времени изменяется на одну и ту же величину, а траекторией является прямая линия.**

Для характеристики такого движения вводят особую физическую величину — ***ускорение***. Она **показывает, как быстро меняется скорость.**

Например, пуля, вылетающая из ствола охотничьего ружья, за доли секунды успевает увеличить свою скорость до 500 м/с. То есть ускорение пули очень велико. Поезд, трогающийся с места, за достаточно большой промежуток времени изменяет свою скорость незначительно. Это говорит о том, что ускорение поезда намного меньше ускорения пули.

В случае прямолинейного равнопеременного движения величина и направление вектора ускорения не изменяются, т. е.

$$\vec{a} = \text{const}.$$

В том случае, когда величина скорости будет постоянно возрастать, величина ускорения будет положительной. Такое равнопеременное движение называется *равноускоренным*.

Если же величина скорости будет уменьшаться, то величина ускорения будет отрицательной. Такое равнопеременное движение называется *равнозамедленным*.

При равнопеременном движении скорость тела все время изменяется. А для того, чтобы найти скорость тела в любой момент времени, можно воспользоваться определением ускорения, которое дано в предыдущем параграфе:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{\Delta t}. \qquad (2.5)$$

Отсюда скорость тела при равноускоренном движении в любой момент времени равна:

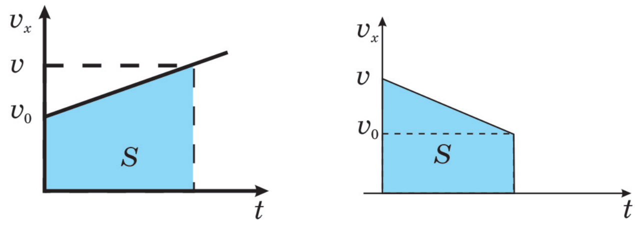
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t. \qquad (2.6)$$

Если движение тела происходит в положительном направлении, то, перейдя к проекциям, получим:

$$v_x = v_{0x} + a_x t. \qquad (2.7)$$

Следовательно, можно сказать, что при равноускоренном движении скорость тела изменяется со временем линейно.

Изобразим на графике скорости (рис. 2.7, *а*) зависимость, определяемую формулой (2.7).



а) *б*)

Рис. 2.7

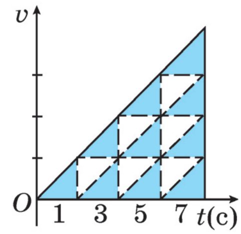


Рис. 2.8

Площадь заштрихованной фигуры (трапеция) равна перемещению или пройденному пути при равноускоренном прямолинейном движении, что позволяет рассчитать этот путь:

$$s = \frac{v + v_0}{2}t = \frac{v_0 + at + v_0}{2}t = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \qquad (2.8)$$

Если движение равнозамедленное (рис. 2.7, *б*), то получим:

$$s = v_0 t - \frac{at^2}{2}. \qquad (2.9)$$

Из графика зависимости скорости от времени при равноускоренном движении (рис. 2.8) видно, что пути, проходимые телом за равные промежутки времени, относятся друг к другу как ряд нечетных чисел, если начальная скорость равна нулю, т. е.

$$s_1 : s_2 : s_3 : \dots = 1 : 3 : 5 : \dots \qquad (2.10)$$

Докажите формулу (2.10), используя формулу (2.8).

Рассмотрим равнопеременное движение трех тел (рис. 2.9): тело 1 движется в положительном направлении с положительным ускорением, тело 2 движется в положительном направлении с отрицательным ускорением, тело 3 движется в отрицательном направлении с положительным ускорением.

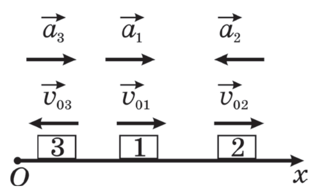
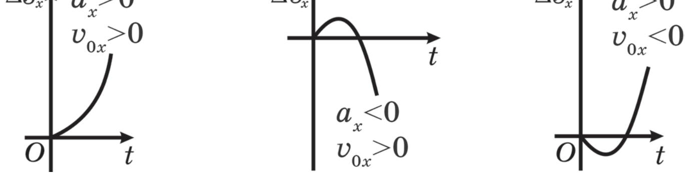


Рис. 2.9

Зависимости перемещения от времени для этих трех тел изображены на графиках (рис. 2.10). Предлагаем вам самостоятельно изобразить зависимость скоростей этих тел и пройденного ими пути от времени.



Тело 1 Тело 2 Тело 3

Рис. 2.10

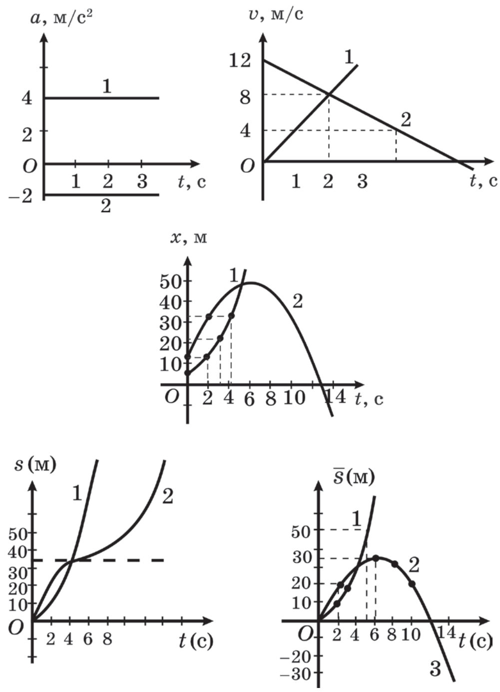


Рис. 2.11

На рисунке 2.11 представлены графики равнопеременного движения для ускорения, скорости, координаты, пути и перемещения для тела 1, у которого $x_0 = 4$ м, $\upsilon_0 = 0$ и $a = 4$ м/с^2 и для тела 2, у которого $x_0 = 12$ м, $\upsilon_0 = 12$ м/с^2 и $a = -2$ м/с^2. Очень часто при неравномерном движении необходимо знать время прибытия в конечный пункт, зная расстояние до него. В таком случае неравномерное движение удобнее представить в виде равномерного движения с некоторой скоростью. Эту скорость называют *средней скоростью неравномерного движения*.

Под средней скоростью неравномерного движения понимают скорость такого равномерного движения, при котором за тот же промежуток времени будет пройден такой же путь:

$$\upsilon_{ср} = \frac{s}{t}. \qquad (2.11)$$

Обращаем ваше внимание на то, что не следует путать среднюю скорость со средней арифметической скоростью, которую находят как и любую среднюю арифметическую величину:

$$\upsilon_{ср.ар} = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2}. \qquad (2.12)$$

По формуле (2.12) можно рассчитывать среднюю скорость при равнопеременном движении.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое движение называется *равномерным прямолинейным*?
2. Каким образом рассчитывают путь при равномерном прямолинейном движении?
3. Что называется *законом движения*?
4. Опишите характер движения тела, закон движения которого выглядит так: а) $x = -5 + 2t$; б) $x = -5 - 2t$.
5. Каким образом можно рассчитать скорость тела при равнозамедленном прямолинейном движении (рис. 2.7, *б*)?
6. Можно ли утверждать, что величина пути и перемещения всегда равны при прямолинейном равнопеременном движении? Ответ обоснуйте.
7. Опишите характер движения тела, закон движения которого выглядит так: а) $\upsilon = 5 + 4t$; б) $\upsilon = 5 - 2t$; в) $\upsilon = -5 - 2t$.
8. Опишите характер движения тела, закон движения которого выглядит так: а) $x = 5t + 4t^2$; б) $x = 2t^2$; в) $x = 2t - 4t^2$; г) $x = -2t - 4t^2$; д) $x = -2t + 4t^2$.
9. Что означает выражение “изобразите движение тела графически?
10. Объясните выражение “прочитайте график движения тела”.

Примеры решения задач

В этом параграфе мы рассмотрим примеры решения задач на механическое движение. Напоминаем вам, что прежде чем начать решать задачу, необходимо внимательно прочитать ее условие и представить явление, описанное в задаче.

Затем необходимо найти законы, описывающие это явление и записать эти законы на языке математики. После этого записываем условие задачи в краткой форме, принятой в физике. Желательно решение задач сопровождать рисунками, схемами или графиками, а единицы измерения физических величин выразить в системе интернациональной СИ.

Задача 1. Скорость катера относительно воды в n раз больше скорости течения реки. Во сколько раз больше по времени займет поездка на катере между двумя пристанями против течения, чем по течению?

Решение. Обозначим расстояние между пристанями s. Пусть t_1 и t_2 — время движения катера против и по течению реки, соответственно. Тогда относительно берега скорости катера против течения и по течению будут находиться как разность и как сумма скоростей катера и течения реки, соответственно: $v_1 = v_к - v_m$ и $v_2 = v_к + v_m$.

Расстояние между пристанями можно найти так: $s = v_1 t_1$ (плывем против течения) и $s = v_2 t_2$ (плывем по течению).

Тогда:

$$s = (v_к - v_m)t_1 = (nv_m - v_m)t_1 = v_m(n - 1)t_1;$$

$$s = (v_к + v_m)t_2 = (nv_m + v_m)t_2 = v_m(n + 1)t_2.$$

Отсюда: $t_1 = \dfrac{s}{v_m(n-1)}$ и $t_2 = \dfrac{s}{v_m(n+1)}$. Следовательно, $\dfrac{t_1}{t_2} = \dfrac{n+1}{n-1}$.

Ответ: $\dfrac{t_1}{t_2} = \dfrac{n+1}{n-1}$.

Задача 2. По неподвижному эскалатору пассажир поднимается за 4 мин, а эскалатор неподвижно стоящего на нем пассажира поднимает за 2 мин. Сколько времени будет подниматься идущий вверх пассажир по движущемуся эскалатору?

Решение. Обозначим длину эскалатора s.

Тогда:

скорость пассажира равна: $v_1 = \dfrac{s}{t_1}$;

скорость эскалатора равна: $v_2 = \dfrac{s}{t_2}$;

скорость пассажира, идущего по движущемуся эскалатору, равна: $v_3 = \dfrac{s}{t_3}$.

Так как $v_3 = v_2 + v_1$, то получим, что: $\frac{s}{t_1} + \frac{s}{t_2} = \frac{s}{t_3}$.

Отсюда следует, что $t_3 = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}$. Проверим размерность $\left[t_3\right] = \frac{c \cdot c}{c + c} = c$.

Произведем вычисления: $t_3 = \frac{4 \cdot 60 \cdot 2 \cdot 60}{6 \cdot 60} = \frac{4 \cdot 60}{3} = 80$ с.

Ответ: $t_3 = 80$ с.

Задача 3. Движения машины и велосипедиста описываются уравнениями: $x_1 = -100 + 10t$ и $x_2 = 40 - 5t + 2t^2$. Запишите уравнения скоростей для обоих тел. На оси Ox указать положение тел, направление их скоростей и ускорений в начальный момент. В какой момент времени скорости тел станут одинаковыми?

Решение. Сравнив уравнения движения обоих тел с законом изменения координаты, который выглядит так: $x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, мы можем сказать следующее: начальные координаты тел равны $x_{01} = -100$ м и $x_{02} = 40$ м, начальные скорости $v_{01} = 10$ м/с и $v_{01} = -5$ м/с (тело движется в направлении, которое противоположно направлению, принятому за положительное), ускорение первого тела $a_1 = 0$ м/с^2 (движение равномерное), ускорение второго тела $a_2 = 4$ м/с^2. Так как уравнение для скорости выглядит следующим образом:

$$v = v_0 + at,$$

то для первого тела имеем: $v_1 = 10$ м/с, а для второго $v_2 = -5 + 4t$.

Теперь изобразим на оси Ox положение тел, направление их скоростей и ускорений в начальный момент (см. рис. 2.12):

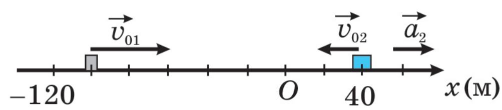


Рис. 2.12

Для того чтобы найти момент, когда скорости тел станут одинаковыми, приравняем v_1 и v_2:

$$10 = -5 + 4t.$$

Отсюда получим, что $t = 3{,}75$ с. Значит, через 3,75 с скорости тел станут одинаковыми.

Ответ: $v_1 = 10$ м/с, $v_2 = -5 + 4t$, $t = 3{,}75$ с.

Попробуйте самостоятельно доказать, что машина и велосипедист не встретятся.

Задача 4. Спортсмены бегут колонной длиной l_0 с одинаковыми скоростями v. Навстречу бежит тренер со скоростью u ($u < 0{,}5v$). Каждый спортсмен, поравнявшийся с тренером, разворачивается и бежит в обратную сторону с той же по величине скоростью. Найдите длину колонны l, когда все спортсмены будут бежать в направлении, противоположном первоначальному. Как изменится ответ, если каждый спортсмен, поравнявшийся с тренером, разворачивается и бежит в обратную сторону со скоростью а) $0{,}5v$; б) $2v$.

Решение. Проще решить задачу, если систему отсчета связать с тренером. Скорость спортсменов, бегущих навстречу тренеру, равна $v_1 = v + u$. Скорость спортсменов, бегущих в направлении движения тренера, равна $v_1 = v - u$. Время, за которое последний спортсмен, бегущий навстречу тренеру, поравняется с ним, равно времени, за которое первый спортсмен, поравнявшийся с тренером, убежит от него. Выразив это время через расстояния, пройденные колоннами спортсменов и скорости их относительного движения (по отношению к тренеру), мы получим следующее выражение: $\frac{l_0}{v+u} = \frac{l}{v-u}$. Отсюда $l = \frac{v-u}{v+u} l_0$.

Решать задачу будем аналогично решению, предложенному выше, приравняв время, за которое последний спортсмен, бегущий навстречу тренеру, поравняется с ним, ко времени, за которое первый спортсмен, поравнявшийся с тренером, убежит от него. Выразив это время через расстояния, пройденные колоннами спортсменов и скорости их относительного движения (по отношению к тренеру), в случае а) имеем $\frac{l_0}{v+u} = \frac{2l}{v-2u}$. Тогда $l_1 = \frac{v-2u}{2(v+u)} l_0$, (необходимо понимать, что решение имеет смысл, если $u < 0{,}5v$), а в случае б) получим $l_2 = \frac{2v-u}{v+u} l_0$.

Наблюдайте

Пронаблюдайте за движением маршрутных автобусов, автомобилей на городских дорогах. Найдите общее в их движении.

Объясните

Объясните, как по графику зависимости скорости равнопеременного движения от времени можно определить величину перемещения тела?

Исследуйте

Используя рисунок 2.13 охарактеризуйте характер движения тела I и тела II. Что означает точка пересечения графиков?

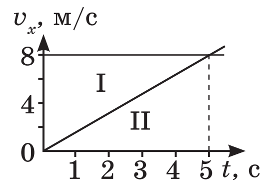


Рис. 2.13

Анализируйте

1. Проанализируйте движение тела, уравнение движения которого $x = 12 - 3t$. Через какой промежуток времени тело окажется в начале координат?

2. Какая линия (рис. 2.14) соответствует прямолинейному равноускоренному движению с начальной скоростью, а какая — равномерному движению?

3. Какой вид движения описывается линиями 1 и 2 на рисунке 2.14?

4. На рисунке 2.15 дан график зависимости проекции скорости тела от времени. На каких участках проекции ускорения и скорости имеют одинаковый знак?

5. На рисунке 2.16 дан график зависимости координаты тела, движущегося прямолинейно, от времени. Какому типу движения соответствуют участки А и Б?

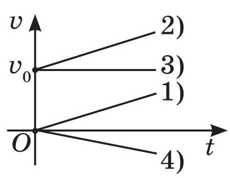


Рис. 2.14

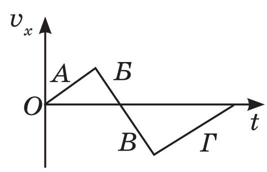


Рис. 2.15

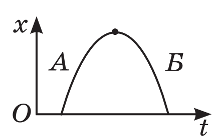


Рис. 2.16

6. Рассмотрите движение тел, изображенных на рисунке 2.17, *а* и *б*. Найдите сходства и различия в их движении.

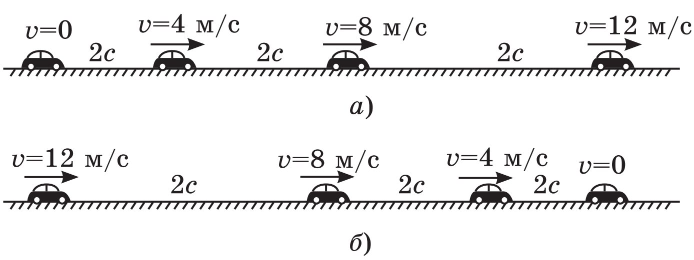


Рис. 2.17

Решайте

1. Тело соскальзывает по наклонной плоскости, проходя за 10 с путь 2 м. Начальная скорость тела равна нулю. Определите модуль ускорения тела.

(*Ответ*: 4 см/с^2)

*2. Два поезда прошли одинаковый путь за одно и то же время. Однако один поезд, трогаясь с места, прошел весь путь равноускоренно с ускорением 3 см/с^2. Другой поезд первую половину пути шел со скоростью 18 км/ч, а вторую половину — со скоростью 54 км/ч. Найдите пройденный путь.

(*Ответ*: 3,75 км)

■3. Два тела движутся прямолинейно вдоль оси *OX* так, что их координаты следующим образом зависят от времени: $x_1 = 2 + 2t + t^2$ (м), $x_2 = -7 - 6t + 2t^2$ (м). Определите модуль относительной скорости тел в момент их встречи. Тела начали двигаться одновременно.

(*Ответ*: $\upsilon_{\text{отн.}} = 10$ м/с)

*4. Тело, вышедшее из некоторой точки, двигалось с постоянным по модулю и направлению ускорением. Скорость его в конце четвертой секунды была 1,2 м/с, в конце седьмой секунды тело остановилось. Найдите путь, пройденный телом.

(*Ответ*: 9,8 м)

■5. Два автобуса трогаются с места с одинаковыми ускорениями 4 м/с^2 навстречу друг другу из пунктов *A* и *B*, между которыми 100 м. Какова их относительная скорость в момент их встречи?

(*Ответ*: 40 м/с)

6. Тело движется в отрицательном направлении со скоростью 5 м/с. Постройте график его скорости.

Рефлексия

1. С какими терминами и понятиями вы встречались ранее?
2. Какая часть пройденного материала усвоена хорошо, а какая слабо? Что необходимо сделать, чтобы ликвидировать пробел по новому материалу?
3. Помогли ли вам задания “Творческой мастерской” в усвоении темы? Где возникли затруднения?
4. Какая информация заинтересовала вас особенно? Почему?

§ 3. Свободное падение тел. Ускорение свободного падения

Ключевые понятия: свободное падение, ускорение свободного падения, трубка Ньютона.

На этом уроке вы: познакомитесь со свободным падением тел и научитесь применять уравнения координаты и скорости для решения основной задачи механики для этого движения.

Рис. 3.1

Частным случаем равнопеременного движения является падение тел в поле тяготения Земли. Его называют *свободным падением*. Законы для этого движения выглядят так же, как для равнопеременного движения. В этом случае ускорение является постоянной величиной, равной $g = 9{,}8$ м/с^2. Величина этого ускорения зависит от силы тяжести на данной планете. На Земле величину ускорения свободного падения впервые рассчитал Г. Галилей, бросая с Пизанской башни ядро и мушкетную пулю (рис. 3.1). Он установил, что **все тела падают на поверхность Земли под действием земного притяжения при отсутствии сил сопротивления с одинаковым ускорением, т. е. ускорение свободного падения не зависит от массы тела**.

Убедиться в этом можно, используя трубку Ньютона или стробоскопический метод.

Трубка Ньютона представляет собой длинную стеклянную трубку длиной около 1,5 м, один конец которой запаян, а другой снабжен краном (рис. 3.2). В трубку помещают дробинку, пробку и птичье перо. Если трубку быстро перевернуть, то все три тела упадут на дно трубки, но в разное время: сначала дробинка, затем пробка и, наконец, перо. Но так падают тела в том случае, когда в трубке есть воздух (рис. 3.3, *а*). Стоит только воздух откачать насосом и снова перевернуть трубку, мы увидим, что все три тела упадут одновременно (рис. 3.3, *б*).

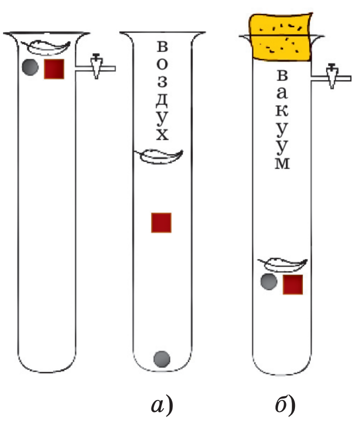


Рис. 3.2

В земных условиях ускорение свободного падения зависит от географической широты

Рис. 3.3

местности. Наибольшее значение оно имеет на полюсе $g_п = 9{,}81$ м/с^2, наименьшее — на экваторе $g_э = 9{,}75$ м/с^2.

Это объясняется: 1) суточным вращением Земли вокруг своей оси; 2) несферичностью формы Земли; 3) неоднородным распределением плотности земных пород.

Уравнения для скорости и координаты при свободном падении выглядят так:

$$\pm v = \pm v_0 \pm at, \qquad (3.1)$$

$$h = h_0 \pm v_0 t \pm \frac{gt^2}{2}. \qquad (3.2)$$

Знаки уравнений 3.1 и 3.2 определяются выбором системы отсчета.

Свободно падающее тело может двигаться прямолинейно или по криволинейной траектории. Это зависит от начальных условий. Рассмотрим это подробнее.

Движение тела, брошенного вертикально вниз. Пусть тело находится на высоте h от поверхности Земли (рис. 3.3, *а*). Его отпустили и оно падает вниз без начальной скорости. В выбранной системе координат движение тела описывается уравнениями: $v = gt$ и $h = \frac{gt^2}{2}$. Из последней формулы можно найти время падения тела с высоты h:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Подставляя найденное время в формулу для скорости, получим модуль скорости тела в момент падения: $v = \sqrt{2gh}$.

Движение тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью.

В выбранной системе координат (рис. 3.3, *б*) движение тела описывается уравнениями:

$$v = v_0 - gt \text{ и } h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \qquad (3.3)$$

Из уравнения скорости видно, что тело движется равнозамедленно вверх, достигает максимальной высоты, а затем движется равноускоренно вниз.

Причем время подъема и время падения одинаковы, если не учитывать сопротивление воздуха. Докажите это.

Подумайте, каким образом принцип независимости движений поможет нам определить уравнения движения тела, брошенного горизонтально и под углом к горизонту?

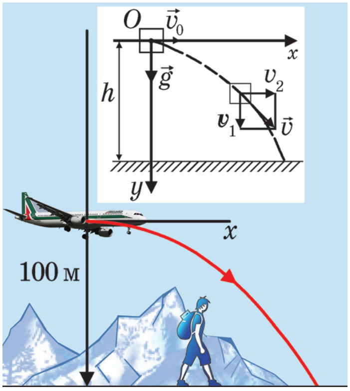


Рис. 3.4

Движение тела, брошенного горизонтально. При изучении движения тела, брошенного горизонтально, необходимо учитывать принцип независимости движений. С учетом этого принципа движение по разным координатным осям будем рассматривать независимо друг от друга: движение в горизонтальном направлении происходит равномерно, а в вертикальном направлении — равнопеременно. Уравнения этих движений легко записать, выбрав систему отсчета (рис. 3.4) и воспользовавшись формулами

$$x = v_0 t \text{ и } y = \frac{gt^2}{2}. \qquad (3.4)$$

Отсюда следует, что

$$y = \frac{g}{2v_0^2}x^2. \qquad (3.5)$$

Это уравнение параболы. Следовательно, тело, брошенное горизонтально, движется по параболе. Скорость тела в любой момент времени направлена по касательной к параболе (см. рис. 3.5). Модуль скорости можно рассчитать по теореме Пифагора:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}. \qquad (3.6)$$

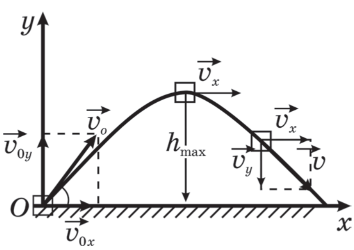


Рис. 3.5

Движение тела, брошенного под углом к горизонту. Пусть тело брошено под углом α к горизонту со скоростью v_0. Для описания движения необходимо выбрать две оси координат — Ox и Oy (рис. 3.5). Начало отсчета совместим с начальным положением тела. Воспользуемся принципом независимости движения и разложим вектор начальной скорости на две составляющие

$$v_{Ox} = v_0\cos\alpha, \qquad (3.7)$$

и

$$v_{Oy} = v_0\sin\alpha. \qquad (3.8)$$

Уравнения движения тела по выбранным осям координат выглядят так:

$$x = v_0 t\cos\alpha, \tag{3.9}$$

и

$$y = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \tag{3.10}$$

Выразив из (3.9) время и подставив его значение в (3.10), получим уравнение траектории

$$y = x\mathrm{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos\alpha}x^2. \tag{3.11}$$

Это уравнение параболы.

Для того, чтобы рассчитать время и дальность полета, необходимо в формуле (3.10) учесть, что перемещение тела по оси Oy будет равно нулю и поэтому конечная координата по оси Oy $y = 0$. Тогда время полета будет равно:

$$t = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}, \tag{3.12}$$

дальность полета будет равна:

$$l = \frac{2v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}. \tag{3.13}$$

Для определения высоты подъема в формулу $h = \frac{gt^2}{2}$ подставим половину времени полета $t = \frac{v_0\sin\alpha}{g}$, после чего получим:

$$y_{\max} = h = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}. \tag{3.14}$$

Вопросы для самоконтроля

1. Для чего нужна трубка Ньютона?
2. Как выглядит траектория движения тела, брошенного горизонтально?
3. Как выглядит траектория движения тела, брошенного под углом к горизонту?
4. Как Галилей рассчитал ускорение свободного падения на Земле?
5. Почему ускорение свободного падения уменьшается с приближением к экватору?

Примеры решения задач

Задача 1. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Когда оно достигло высшей точки подъема, из того же начального положения с той же начальной скоростью вертикально вверх было брошено второе тело. На какой высоте от начального положения они встретятся?

Дано:
$v_{01} = v_0$
$v_{02} = v_0$
g
h — ?

Решение. Понятно, что второе тело начало движение позже на время, равное времени подъема первого тела до максимальной высоты. Так как движение тел — это свободное падение, т. е. ускорение по модулю равно g, то это время найдем, используя уравнение скорости (учитываем, что в верхней точке подъема скорость равна нулю):

$$0 = v_0 - gt_0, \text{ отсюда } t_0 = \frac{v_0}{g}. \quad (1)$$

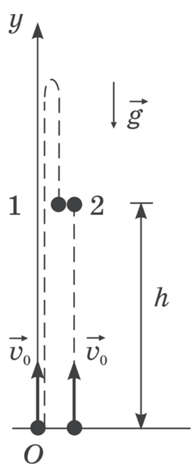


Рис. 3.6

Теперь опишем движение обоих тел до момента встречи (рис. 3.6), используя уравнение движения для равноускоренного движения и учитывая тот факт, что уравнение движения описывает всю “историю” движения. Свяжем систему отсчета с землей.

$$\text{1-е тело:} \quad h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}; \quad (2)$$

$$\text{2-е тело:} \quad h = v_0(t - t_0) - \frac{g(t - t_0)^2}{2}, \quad (3)$$

или $h = v_0 t - v_0 t_0 - \dfrac{gt^2}{2} + 2\dfrac{gtt_0}{2} - \dfrac{gt_0^2}{2}$, или

$h = h - v_0 t_0 + gtt_0 - \dfrac{gt_0^2}{2}$, или $v_0 + \dfrac{gt_0}{2} = gt$.

Отсюда

$$t = \frac{v_0}{g} + \frac{t_0}{2}. \quad (4)$$

Подставив (1) в (4), получим, что

$$t = \frac{3v_0}{2g}. \quad (5)$$

Тогда: $h = v_0 \cdot \left(\dfrac{3v_0}{2g}\right) - \dfrac{gv_0^2 \cdot 9}{2 \cdot 4g^2} = \dfrac{3v_0^2}{8g}$.

Ответ: $h = \dfrac{3v_0^2}{8g}$.

Задача 2. Два тела брошены горизонтально с одинаковыми скоростями с разных высот, причем $h_2 = 4h_1$. Как соотносятся дальности полета этих тел?

Дано:
$v_{0_1} = v_{0_2} = v_0$
$h_2 = 4h_1$

$\frac{l_2}{l_1}$ — ?

Решение. Воспользуемся принципом независимости движений (рис. 3.7) Ox: $l = v_0 t$; Oy: $h = \frac{gt^2}{2}$.

Отсюда $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ и $l = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Тогда $\frac{l_2}{l_1} = \frac{v_0\sqrt{\frac{2h_2}{g}}}{v_0\sqrt{\frac{2h_1}{g}}} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = \sqrt{4} = 2.$

Ответ: $\frac{l_2}{l_1} = 2.$

Задача 3. Под каким углом к горизонту надо бросить тело, чтобы максимальная высота подъема была в четыре раза больше дальности полета? Сопротивление воздуха не учитывать.

Дано:
$H = 4l$
g

α — ?

Решение. Воспользуемся принципом независимости движений (рис. 3.8):

Ox: $l = v_{0x}t = v_0 t\cos\alpha$; Oy: $-v_{0y} = v_{0y} - gt$;

$t = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}$ — время полета.

Тогда $l = \frac{2v_0^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{g}$. Время подъема при свободном падении равно времени падения, $t_1 = t_2 = \frac{t}{2} = \frac{v_0\sin\alpha}{g}$.

Максимальная высота подъема будет равна: $H = \frac{gt_2^2}{2} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$ (воспользуемся обратимостью движения).

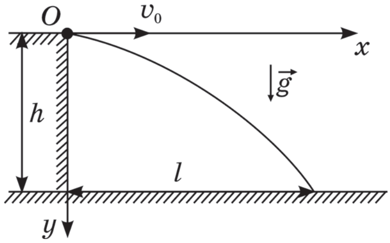


Рис. 3.7

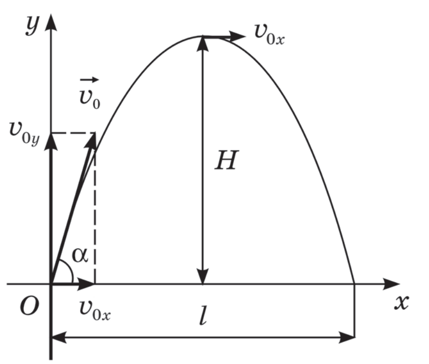


Рис. 3.8

По условию задачи $H = 4l$, т. е. $\dfrac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \dfrac{8 v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$.

Отсюда $\operatorname{tg}\alpha = 16$, т. е. $\alpha = 86^\circ$.

Ответ: $\alpha = 86^\circ$.

Задача 4. Шарик бросают под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 14$ м/с. На расстоянии $s = 11$ м от точки бросания шарик упруго ударяется о вертикальную стенку. На каком расстоянии l от стенки шарик упадет на землю?

Дано:
$\alpha = 30^\circ$
$v_0 = 14$ м/с
$s = 11$ м
$g = 9{,}8$ м/с^2

l — ?

Решение. Определим дальность полета шарика для случая, когда на его пути не встречается преграда в виде вертикальной стенки. Для этого рассмотрим движение шарика по горизонтали (ось Ox) и вертикали (ось Oy) (рис. 3.9):

$$Ox:\quad L = v_0 t\cos\alpha, \text{ где } t \text{ — время полета;} \qquad (1)$$

$$Oy:\quad 0 = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \qquad (2)$$

Из (2) имеем:
$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}. \qquad (3)$$

Подставив (3) в (1), получим: $L = \dfrac{1}{g} 2v_0^2 \cos\alpha \cdot \sin\alpha$, или

$L = \dfrac{1}{g} v_0^2 \sin 2\alpha = 17{,}3$ м.

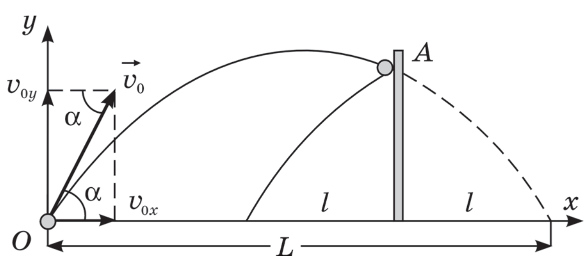


Рис. 3.9

Но так как на пути шарика находится стенка, то шарик, “зеркально” (упруго) отразившись от нее, отлетит на расстояние, которое он не долетел из-за “встречи” со стенкой: $l = L - s = (17{,}3 - 11)$ м $= 6{,}3$ м.

Ответ: 6,3 м.

Наблюдайте

Пронаблюдайте падение листьев с деревьев. Опишите и попытайтесь объяснить их движение.

Экспериментируйте

1. Бросьте вниз с одинаковой высоты два листка бумаги — один скомканный, а другой нет. Сделайте вывод.

2. Бросьте вниз с одинаковой высоты перышко и теннисный шарик. Сделайте вывод.

3. С одинаковой высоты (уровень стола) бросьте два ластика — один вертикально вниз без начальной скорости, а другой горизонтально со скоростью v_0. Сравните время падения ластиков.

4. Определите ускорение свободного падения в вашей местности в домашних условиях. Продумайте методику вашего эксперимента.

5. С помощью баллистического пистолета выстреливайте шарик под разными углами к горизонту. Сравните дальность и высоту полета при разных углах.

Объясните

1. На рисунке 3.1 изображены опыты Г. Галилея по изучению падения тел с Пизанской башни. Объясните, почему мушкетная пуля и пушечное ядро упали на землю одновременно.

2. Объясните, почему снежинки во время снегопада падают медленно, а сокол, сложивший крылья, быстро?

Исследуйте

1. Используя рисунок 3.1, исследуйте, как будут падать с Пизанской башни теннисный и стальной шарики одинакового объема?

2. Исследуйте движение тела, уравнение движения которого $y = 125 - 5t^2$. Через какой промежуток времени тело окажется в начале координат?

Анализируйте

1. Проанализируйте график зависимости координаты от времени, изображенный на рисунке 3.10. Какое движение на нем изображено? Как менялось движение тела?

2. Используя график зависимости координаты от времени (см. рис. 3.10), постройте график зависимости пути от времени.

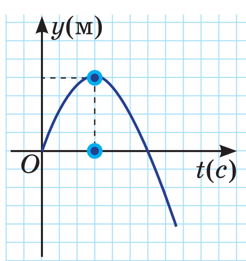


Рис. 3.10

Решайте

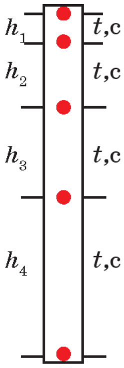


Рис. 3.11

1. Тело свободно падает без начальной скорости с высоты H = 32 м (рис. 3.11). Определите величины h_1, h_2, h_3 и h_4.

(*Ответ*: h_1 = 2 м; h_2 = 6 м; h_3 = 10 м; h_4 = 14 м)

2. С крыши дома бросили камень горизонтально со скоростью v_0. Как изменится время падения камня, если его бросить со скоростью $4v_0$?

(*Ответ*: $t_1 = t_2$)

3. Двое играют в мяч, бросая его друг другу. Какой наибольшей высоты достигает мяч во время игры, если он от одного игрока к другому летит 4 с?

(*Ответ*: 20 м)

■4. С аэростата, поднимающегося вертикально со скоростью 10 м/с, падает болт, который достигает поверхности земли через 16 с. На какой высоте находился аэростат в момент отрыва от него болта? Считать $g = 10$ м/с^2, силой сопротивления воздуха пренебречь.

(*Ответ*: 1120 м)

5. Шарик бросили горизонтально с высоты 20 м. Он упал на землю на расстоянии 12 м. Сколько времени падал шарик и с какой скоростью он был брошен?

(*Ответ*: t = 2 с; v = 6 м/с)

*6. Ракета стартует и движется вертикально вверх с ускорением $a = 2g$. Через 10 с полета двигатель отключается. Через какое время с момента старта ракета упадет на землю?

(*Ответ*: 55,5 с)

7. Пушка и цель находятся на одном уровне на расстоянии 5,1 км друг от друга. За какое время снаряд с начальной скоростью 240 м/с достигнет цели? g = 10 м/с^2.

(*Ответ*: 25 с и 41 с)

■8. С самолета, летящего на высоте 500 м, производится бомбометание по движущейся цели. Направление движения самолета и цели совпадают. Скорость самолета 300 м/с, а цели 20 м/с. На каком расстоянии от цели по горизонтали нужно сбросить бомбу, чтобы поразить цель? Под каким углом к горизонту упадет бомба? Сопротивление воздуха не учитывать.

(*Ответ*: 2,8 км; 18°)

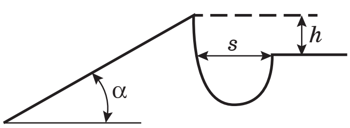


Рис. 3.12

*9. Мотоциклист въезжает на высокий берег рва (см. рис. 3.12). Какую минимальную скорость должен иметь мотоциклист в момент отрыва от берега, чтобы перескочить ров? Величины, указанные на рисунке, считать известными.

(*Ответ*: $v_0 = \dfrac{s}{\cos\alpha}\sqrt{\dfrac{q}{2(h + s\,\mathrm{tg}\alpha)}}$)

Рефлексия

1. С какими терминами и понятиями вы встречались ранее?
2. Какая часть пройденного материала усвоена хорошо, а какая слабо? Что необходимо сделать, чтобы ликвидировать пробел по новому материалу?
3. Помогли ли вам задания “Творческой мастерской” в усвоении темы? Где возникли затруднения?
4. Какая информация заинтересовала вас особенно? Почему?

§ 4. Криволинейное движение. Движение по окружности

Ключевые понятия: криволинейное движение, тангенциальное и нормальное ускорение.

На этом уроке вы: изучите особенности криволинейного движения.

Вам уже известно, что в зависимости от формы траектории, различают прямолинейное и криволинейное движение. Остановимся подробнее на криволинейном движении. При этом движении вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории и его направление постоянно меняется. Рассмотрим движение тела, которое мы будем считать материальной точкой, по произвольной криволинейной траектории (рис. 4.1). Пусть при движении тела из точки A в точку B модуль ее скорости увеличится с v_1 до v_2. Понятно, что наше тело движется с ускорением. При криволинейном движении необходимо учитывать, что скорость меняется не только по величине, но и по направлению. При этом движении скорость всегда направлена по касательной к траектории. Значит, при криволинейном движении присутствует как тангенциальное, так и нормальное ускорение. Вектор полного ускорения в этом случае будет определяться изменением вектора скорости за единицу времени, т. е.

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \qquad (4.1)$$

При прямолинейном движении нет изменения скорости по направлению, значит, нормальное ускорение при этом движении отсутствует. А модуль тангенциального ускорения можно рассчитать по формуле

$$a_\tau = \frac{v - v_0}{t}. \qquad (4.2)$$

Эта формула дана в § 1. Для того, чтобы определить величину нормального ускорения, рассмотрим равномерное движение точки по окружности (рис. 4.2). В этом случае величина полного ускорения будет

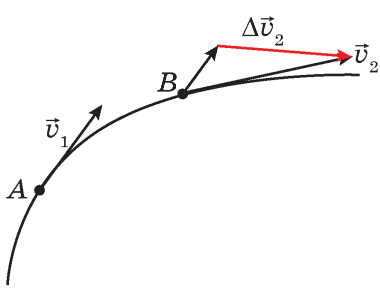


Рис. 4.1

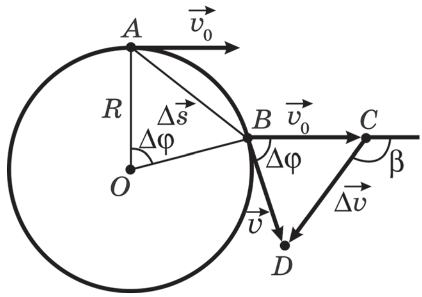


Рис. 4.2

равна нормальному ускорению. А по определению полное ускорение равно: $\vec{a} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$.

Следовательно, в данном случае по этой формуле можно рассчитать величину нормального ускорения. Рассмотрим треугольники OAB и BCD. Они равнобедренные. Углы при вершинах — одинаковые (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами). Отсюда следует, что ΔOAB подобен ΔDBC. Из подобия треугольников следует:

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v} = \frac{|\vec{s}|}{R} \Rightarrow |\Delta\vec{v}| = \frac{v \cdot |\vec{s}|}{R}.$$

Пусть точки A и B находятся очень близко друг к другу. Тогда можно считать, что длина дуги между ними и вектор перемещения $\Delta\vec{s}$ практически совпадают. В этом случае модуль вектора перемещения можно найти так: $|\Delta\vec{s}| = v\Delta t$, тогда: $|\vec{a}| = \dfrac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \dfrac{vv\Delta t}{R\Delta t} = \dfrac{v^2}{R}$, т. е. модуль нормального ускорения рассчитывают по формуле:

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \tag{4.3}$$

Это ускорение называют *центростремительным*, так как оно направлено к центру окружности, по которой движется материальная точка. Обращаем ваше внимание на следующее: несмотря на то, что модуль нормального ускорения при равномерном движении точки по окружности остается постоянным, само движение точки будет равноускоренным из-за того, что направление нормального ускорения непрерывно меняется.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое движение называется *криволинейным*?
2. Является ли движение по кривой линии с неизменной скоростью равномерным? Ответ обоснуйте.
3. Как направлено ускорение при криволинейном движении?
4. Как направлена мгновенная скорость точки при криволинейном движении?
5. Является ли равномерное движение точки по окружности равноускоренным?
6. Приведите пример криволинейного движения, при котором тангенциальное ускорение равно нулю.

Рефлексия

1. С какими терминами и понятиями вы встречались ранее?
2. Какая часть пройденного материала усвоена хорошо, а какая слабо? Что необходимо сделать, чтобы ликвидировать пробел по новому материалу?
3. Помогли ли вам задания “Творческой мастерской” в усвоении темы? Где возникли затруднения?
4. Какая информация заинтересовала вас особенно? Почему?

§ 5. Вращательное движение

Ключевые понятия: вращательное движение, угловое перемещение, скорость и ускорение, период и частота вращения.

На этом уроке вы: познакомитесь с вращательным движением и величинами его характеризующими.

Вращательным движением **называется такое движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, являющейся осью вращения.**

Укажите сходство и различие криволинейного и вращательного движений.

При вращательном движении различные точки тела описывают *различные траектории*, движутся с *различными линейными скоростями и ускорениями*; за равные промежутки времени совершают *различные перемещения* и проходят *различные пути. Одинаковыми для всех точек тела являются угол поворота, угловая скорость* и *угловое ускорение*, которые, следовательно, и характеризуют движение всего тела.

Под ***угловым перемещением*** **понимают угол, на который поворачивается тело за данный промежуток времени.** Угловое перемещение обозначается буквой φ и измеряется в *радианах*, т. е. $[\varphi] = \text{рад}$.

Под ***угловой скоростью*** **понимают физическую величину, характеризующую быстроту вращения и определяемую изменением угла поворота, совершенным в единицу времени,** т. е.

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \qquad (5.1)$$

Единицей измерения угловой скорости является: $[\omega] = \text{рад/с}$.

Если любая точка тела за любые равные промежутки времени совершает одинаковые угловые перемещения, то такое вращательное движение называется *равномерным*, т. е. $\omega = \text{const}$. Уравнением равномерного вращательного движения будет

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \qquad (5.2)$$

Если в процессе вращения угловая скорость меняется, то вращательное движение называется *переменным*. Быстроту изменения угловой скорости во времени принято характеризовать физической величиной, которую назвали *угловым ускорением* ε.

Под *угловым ускорением* понимают физическую величину, определяемую изменением угловой скорости, совершенным в единицу времени, т. е.

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t}. \qquad (5.3)$$

Единицей измерения углового ускорения является: $[\varepsilon] = рад/с^2$.

Если любая точка тела за любые равные промежутки времени изменяет свою угловую скорость на одну и ту же величину, то такое вращательное движение называется *равнопеременным, т. е.* $\varepsilon = \text{const}$.

Уравнения угловой скорости и углового перемещения для равнопеременного вращательного движения будут выглядеть следующим образом:

$$\omega = \pm\omega_0 \pm \varepsilon t, \tag{5.4}$$

$$\varphi = \varphi_0 \pm \omega_0 \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}. \tag{5.5}$$

При вращательном движении материальная точка описывает окружность определенного радиуса. В случае равномерного вращательного движения повторение происходит циклически. Промежуток времени, за которое совершается один полный оборот, называется **периодом вращения *T***. Если за время t совершено N оборотов, то период определяется по формуле:

$$T = \frac{t}{N}. \tag{5.6}$$

Равномерное вращение различных тел может отличаться друг от друга числом оборотов, совершаемых этими телами в единицу времени. Поэтому вводят еще одну характеристику равномерного вращательного движения — частоту **вращения** ν. Если за время t совершено N оборотов, то частота определяется по формуле:

$$\nu = \frac{N}{t}. \tag{5.7}$$

Видно, что период и частота величины обратно пропорциональные, т. е. $\nu = \frac{1}{T}$.

Угловую скорость равномерного вращательного движения часто называют *циклической частотой,* имея в виду тот факт, что один оборот тело совершает за время, равное периоду, т. е.

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T}. \tag{5.8}$$

Линейные и угловые кинематические величины связаны между собой. Из геометрии вам известно, что длина дуги, опирающаяся на два радиуса, угол между которыми равен φ, равна $s = \varphi R$. В нашем случае φ — это угол, на который повернулось тело за время t (угловое перемещение), а s — путь, пройденный данной точкой тела за это время.

Линейную скорость данной точки тела определим по формуле:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{\varphi R}{t} = \omega R. \tag{5.9}$$

Существует связь между тангенциальным и угловым ускорениями:

$$a_\tau = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega R}{\Delta t} = \varepsilon R. \tag{5.10}$$

Так же легко выразить нормальное (центростремительное) ускорение через угловые параметры:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R = v\omega\,. \qquad (5.11)$$

Вектор полного ускорения тоже можно выразить через угловые величины:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\omega^4 R^2 + \varepsilon^2 R^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}\,. \qquad (5.12)$$

Линейные величины можно выразить и через период вращения, например, линейная скорость может быть рассчитана по формуле

$$v = \frac{2\pi R}{T}, \qquad (5.13)$$

а нормальное ускорение

$$a_n = \omega^2 R = \frac{4\pi^2 R}{T^2}\,. \qquad (5.14)$$

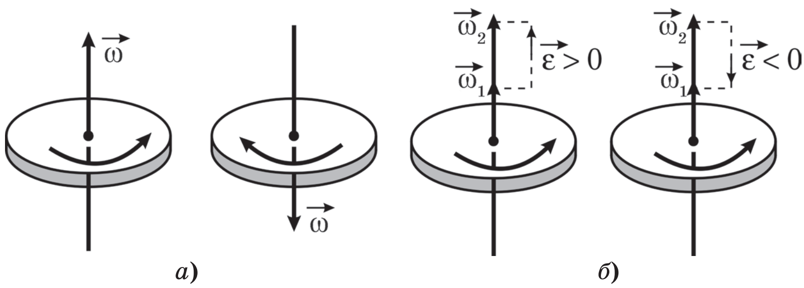


Рис. 5.1

Необходимо помнить, что угловые величины — это векторные величины. Это связано с направлением вращения тела. Вектор угловой скорости откладывается вдоль оси вращения из любой ее точки. Направление вектора угловой скорости определяется таким образом, что если смотреть из его конца на любую точку тела, не лежащую на оси вращения, то вращение нашего тела должно происходить против часовой стрелки. Вектор углового ускорения тоже откладывается вдоль оси вращения из любой ее точки, направление которой определяется направлением вектора разности угловых скоростей $\Delta\vec{\omega}$ (рис. 5.1, *а*, *б*).

Вопросы для самоконтроля

1. В чем отличие криволинейного движения от вращательного?
2. Почему возникла необходимость введения угловых величин?
3. Как связаны между собой угловые и линейные величины?
4. Что понимают под периодом и частотой обращения? Как они связаны между собой?
5. Как определить направление векторов угловой скорости и углового ускорения?

Примеры решения задач

Задача 1. Каково центростремительное ускорение точек земного экватора?

Д а н о:
$R = 6{,}4 \cdot 10^6$ м
$T = 24$ ч

a_n — ?

Решение. Нормальное (центростремительное) ускорение находится по формуле: $a_n = \frac{v^2}{R}$, где v — линейная скорость точки (в нашем случае точек экватора). Так как линейная скорость связана с угловой скоростью соотношением $v = \omega \cdot R$, а угловую скорость можно выразить через период вращения: $\omega = \frac{2\pi}{T}$, то $a_n = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2}R$, где T — период вращения Земли вокруг своей оси. Тогда:

$$a_n = \frac{4(3{,}14)^2 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6 \text{ м}}{(24 \cdot 3600)^2 \text{ с}^2} = 0{,}034 \text{ м/с}^2 = 3{,}4 \text{ см/с}^2.$$

Ответ: $a_n = 3{,}4$ см/с^2.

Задача 2. Частица равномерно вращается по окружности радиусом $R = 2$ м так, что за время $t = 4$ с ее вектор скорости поворачивается на угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Определите центростремительное ускорение частицы.

Д а н о:
$R = 2$ м
$t = 4$ с
$\varphi = \frac{\pi}{2}$

a_n — ?

Решение. $a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \left(\frac{\varphi}{t}\right)^2 R = \frac{\pi^2 R}{4t^2}$.

$$a_n = \frac{(3{,}14)^2 \cdot 2 \text{ м}}{4 \cdot 16 \text{ с}^2} = 0{,}308 \text{ м/с}^2 = 30{,}8 \text{ см/с}^2.$$

Ответ: $a_n = 30{,}8$ см/с^2.

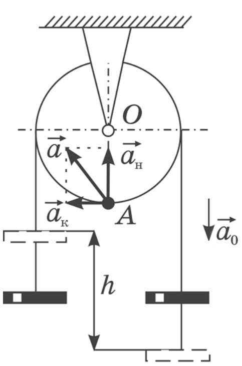


Рис. 5.2

Задача 3. Через блок (рис. 5.2) переброшена нить, на концах которой находятся два груза, установленные на одном уровне. Без воздействия на них каких-либо сил грузы приходят в равноускоренное движение, и спустя время t один из них оказывается над другим на высоте h. Определите угол поворота блока, его угловую скорость и величину полного линейного ускорения точки A в конце времени t. Проскальзыванием нити по блоку пренебречь. Радиус блока R.

Дано:	
h	
t	
R	
φ — ?	
ω — ?	
a — ?	

Решение. а) Проставляем на чертеже перемещение грузов h за время t и, приняв за начало отсчета точку O, расставляем векторы касательного $\vec{a}_к$, нормального $\vec{a}_н$ и полного ускорений точки A. Так как по условию задачи нить по блоку не проскальзывает, то касательное ускорение всех точек, лежащих на ободе, по абсолютной величине равно ускорению грузов $a_к = a_0$.

б) Поскольку движение грузов равноускоренное и за время t они смещаются относительно друг друга на расстояние h, уравнение движения для каждого груза будет иметь вид: $\frac{h}{2} = \frac{a_0 t^2}{2}$, так как ускорение у них одинаковое и каждый груз проходит расстояние $\frac{h}{2}$.

в) Записываем уравнения вращательного движения блока:

$$\omega = \varepsilon t \quad и \quad \varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}, \tag{1}$$

учитывая, что блок вращается равноускоренно.

Угловая скорость ω и угловое ускорение ε блока связаны с нормальным и касательным ускорениями точки A формулами:

$$\varepsilon = \frac{a_к}{R} \quad и \quad a_н = \omega^2 R. \tag{2}$$

Полное ускорение точки A равно:

$$a = \sqrt{a_к^2 + a_н^2}. \tag{3}$$

г) По условию задачи нам даны R, t и h, поэтому в составленной системе уравнений неизвестными являются a_0, ω, ε, φ, $a_н$ и a. Решая уравнения совместно относительно искомых неизвестных φ, ω и a, получим:

$$\varphi = \frac{h}{2R}; \quad \omega = \frac{h}{Rt}; \quad a = \frac{h\sqrt{h^2 + R^2}}{Rt^2}.$$

Наблюдайте

Юноша равномерно вращает шарик, привязанный к веревке, в вертикальной плоскости. Этот же шарик вращается на гладком столе относительно вертикальной оси (рис. 5.3). Опишите движение шарика в обоих случаях и попытайтесь найти сходство и различие в его движениях.

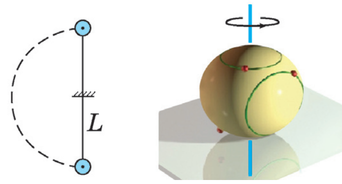


Рис. 5.3

Экспериментируйте

Привяжите шарик к нити. Держа один конец нити в руке, приподнимите шарик над линейкой и приведите его в равномерное движение по окружности так, чтобы он при вращении всегда проходил через нулевое и, например, десятое деление шкалы линейки (см. рис. 5.4). Определите модули угловой, линейной скоростей шарика, период его обращения и модуль центростремительного ускорения.

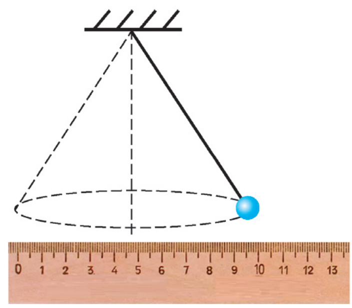


Рис. 5.4

Объясните

1. Как вы думаете, все ли точки катящегося колеса имеют одинаковые скорости относительно земли?

2. Объясните, почему верхние спицы катящегося колеса иногда сливаются для глаз, а нижние видны раздельно?

3. Почему обтачивание на токарных станках изделий большего диаметра производится с меньшей угловой скоростью, чем изделий малого диаметра?

Анализируйте

1. Движение самолета изображено на рисунке 5.5. Какое движение на нем изображено? Как менялось движение самолета? В каких точках касательное и нормальное ускорения максимальны?

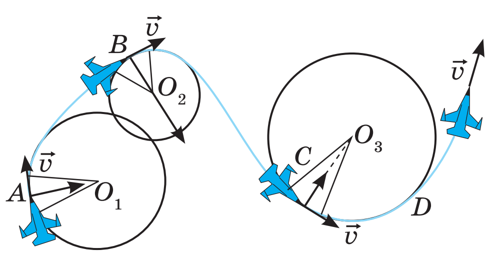


Рис. 5.5

2. Заполните таблицу, написав формулы для нахождения величин, описывающих каждый вид движения.

Поступательное ускоренное прямолинейное движение тела	Криволинейное движение	Вращательное движение

Решайте

1. Колесо велосипеда имеет радиус 40 см. С какой скоростью едет велосипед, если колесо делает 120 об/мин? Чему равен период вращения колеса?

(*Ответ*: 5,44 м/с; 0,5 с)

2. Большой шкив ременной передачи имеет радиус 32 см и вращается с частотой 120 об/мин. Малый шкив имеет радиус 24 см. Найдите угловую скорость, число оборотов в минуту малого шкива и линейную скорость точек ремня, который движется без проскальзывания.

(*Ответ*: ω_2 = 16,75 $с^{-1}$; 160 об/мин; 4 м/с)

■3. Две точки *M* и *K* движутся по окружности с постоянными угловыми скоростями 0,2 рад/с и 0,3 рад/с, соответственно (рис. 5.6). В начальный момент времени угол между радиусами этих точек равен $\pi/3$. В какой момент времени точки встретятся?

(*Ответ*: 52,3 с)

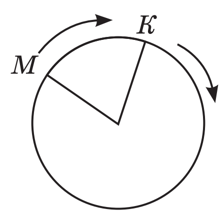


Рис. 5.6

■4. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением 2 рад/$с^2$. Через 0,5 *с* после начала движения полное ускорение колеса стало 13,6 м/$с^2$. Найти радиус колеса.

(*Ответ*: 6,1 м)

■5. Вентилятор вращается с частотой 15 $с^{-1}$. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки 75 оборотов. Сколько времени прошло с момента выключения вентилятора до его полной остановки?

(*Ответ*: 10 с)

6. Найти радиус вращающегося колеса, если линейная скорость точек, лежащих на его ободе, в 2,5 раз больше линейной скорости точек, лежащих на 5 см ближе к оси колеса.

(*Ответ*: 10 см)

7. Шлифовальный камень радиусом 30 см совершает 20 оборотов за 12 с. Какова линейная скорость точек на ободе камня?

(*Ответ*: 3,14 м/с)

Рефлексия

1. С какими терминами и понятиями вы встречались ранее?
2. Какая часть пройденного материала усвоена хорошо, а какая слабо? Что необходимо сделать, чтобы ликвидировать пробел по новому материалу?
3. Помогли ли вам задания “Творческой мастерской” в усвоении темы? Где возникли затруднения?
4. Какая информация заинтересовала вас особенно? Почему?

Самое важное в главе 1

Кинематика — раздел механики, изучающий механическое движение без учета причин, его вызвавших. Основная задача кинематики — определить положение тела (точки) в пространстве в любой момент времени. Для этого выбирают систему отсчета, состоящую из тела отсчета, системы координат и прибора, отсчитывающего время. Положение тела относительно выбранной системы отсчета можно задать с помощью координат или радиус-вектора $\vec{r}$.

В случае равноускоренного прямолинейного движения справедливы следующие формулы:

1. $x = \pm x_0 \pm v_{0x}t \pm \frac{a_x t^2}{2}$; 2. $v_x = \pm v_{0x} \pm a_x t$;

3. $y = \pm y_0 \pm v_{0y}t \pm \frac{a_y t^2}{2}$; 4. $v_y = \pm v_{0y} \pm a_y t$.

В случае равномерного прямолинейного движения эти формулы трансформируются в такие:

1. $x = \pm x_0 \pm v_{0x}t$; 2. $v_x = \pm v_{0x}$; 3. $y = \pm y_0 \pm v_{0y}t$; 4. $v_y = \pm v_y$.

Свободное падение — это частный случай равноускоренного движения, происходящее под действием одной единственной силы — силы тяжести. На Земле ускорение свободного падения равно $g = 9{,}8$ м/с^2.

Если тело движется криволинейно, то используется принцип независимости движений, заключающийся в том, что движения тела по осям Ox и Oy рассматриваются независимо друг от друга.

При изучении криволинейного движения удобно пользоваться тангенциальным (касательным) ускорением, направленным по касательной к траектории, и нормальным (центростремительным) ускорением, направленным по радиусу кривизны к ее центру: $a_\tau = \frac{v - v_0}{t}$ и $a_n = \frac{v^2}{R}$.

При вращательном движении все точки тела описывают окружности, центры которых находятся на одной прямой, называемой *осью вращения*. Для изучения вращательного движения вводят угловые перемещение, скорость и ускорение, которые связаны с линейными величинами следующими соотношениями: $s = \varphi R$; $v = \omega R$; $a_\tau = \varepsilon R$, где s, v, a_τ — линейные перемещение, скорость и касательное ускорение, φ, ω, ε — угловые перемещение, скорость и ускорение.

В случае равномерного движения тела по окружности справедливы следующие формулы: $\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$; $\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t}$; $a_n = \omega^2 R$.

Полное ускорение равно векторной сумме нормального и касательного ускорений: $a = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + (\varepsilon R)^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$.