

§ 16. Равновесие тел. Условие равновесия тел. Центр масс и центр тяжести



Ключевые понятия: статика, равновесие тел, момент силы, плечо силы, центр масс, система центра масс (Ц-система), центр тяжести.

На этом уроке вы: познакомитесь с основными понятиями статики, научитесь определять равновесное состояние, центр масс и центр тяжести тел.

Раздел механики, изучающий условия равновесия твердых тел под действием различных сил, называется *статикой*.

Под *равновесием* тел понимается состояние покоя тела. В связи с этим основная задача статики состоит в том, чтобы определить, при каком условии тело остается в покое, несмотря на то, что на него действуют силы. Знание условий равновесия тел с практической стороны важно для расчета конструкции различных сооружений, механизмов машин, приборов и т. д.

В статике тело рассматривается как *абсолютно твердое*, т. е. недеформируемое тело. Это, конечно, является некоторой идеализацией. На самом деле все тела деформируемы, однако, если степень деформации намного меньше, чем размеры самого тела, то тогда такой деформацией можно пренебречь.

Равновесное (статическое) состояние тела является частным случаем его динамического состояния, соответствующего случаю, когда ускорение и скорость тела равны нулю. Поэтому условие равновесия получают как следствие из законов динамики поступательного и вращательного движения, т. е. законов Ньютона.

Согласно второму закону Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (16.1)$$

где $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots$ векторная сумма всех сил, действующих на тело. Если эта сумма равно нулю, т. е.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = 0, \quad (16.2)$$

тогда, как следствие из уравнения (16.1), и ускорение будет равно нулю, т. е. $\vec{a} = 0$ и при равенстве начальной скорости нулю ($\vec{v}_0 = 0$) тело не будет перемещаться в данной системе отсчета, т. е. оно находится в равновесии. Следовательно, тело будет находиться в равновесии, если равнодействующая всех сил, приложенных к телу, равна нулю.

Условие (16.2) является необходимым условием равновесия твердого тела, но не достаточным, так как твердое тело может не только двигаться поступательно, но и вращаться.

Второе условие равновесия твердого тела получается из основного уравнения динамики вращательного движения твердого тела:

$$M = J\varepsilon. \quad (16.3)$$

Здесь J — момент инерции, $M = M_1 + M_2 + M_3 + \dots$ алгебраическая сумма всех моментов сил, действующих на тело. Если она равна нулю, т. е.

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + \dots = 0, \quad (16.4)$$

тогда, как следствие (16.3), угловое ускорение равно нулю, т. е. $\varepsilon = 0$ и при равенстве начальной угловой скорости нулю ($\omega = 0$) тело не будет вращаться, т. е. находится в равновесии. **Равенство алгебраической суммы всех действующих моментов сил является вторым условием равновесия тел.** При этом моменты сил, вращающие тело по часовой стрелке, считаются положительными, а моменты сил, которые стремятся повернуть тело против часовой стрелки — отрицательными.

Под моментом силы понимают физическую величину, равную произведению модуля силы F на плечо d , т. е.

$$M = Fd. \quad (16.5)$$

Плечо — это кратчайшее расстояние от линии действия силы до оси вращения. На рисунке 16.1 ось вращения O , точка приложения силы A , линия действия силы BB' .

При рассмотрении равновесия тел точку приложения силы можно переносить вдоль ее направления, не меняя действие силы на тело в целом.

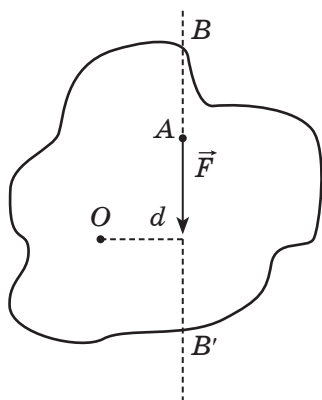


Рис. 16.1

Таким образом, для того чтобы твердое тело находилось в равновесии и покоилось, необходимо и достаточно выполнение следующих условий: **векторная сумма действующих сил и моментов сил относительно любой оси должны быть равны нулю, при равенстве нулю начальной скорости \vec{v}_0 поступательного движения и равенства нулю начальной скорости ω_0 вращательного движения.**

Положение тела, в котором все силы, действующие на тело, взаимно уравновешиваются, т. е. суммарная сила равна нулю, называют *положением равновесия*. Равновесие может

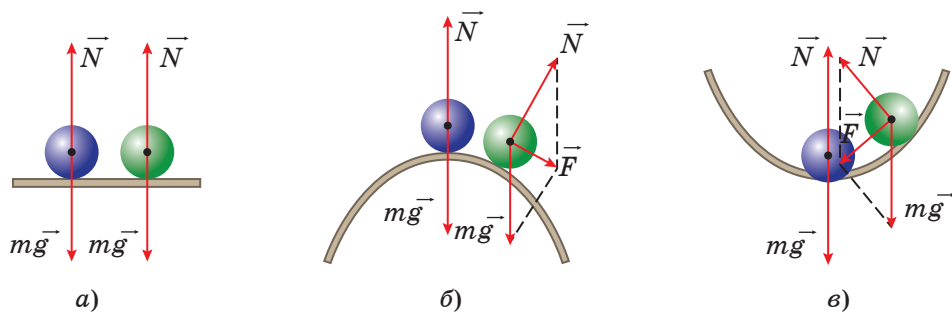


Рис. 16.2

быть устойчивым, неустойчивым или безразличным. Равновесие называется *устойчивым*, если при отклонении тела от положения равновесия действующие на него в этом случае силы таковы, что под их действием тело возвращается к положению равновесия (рис. 16.2, в). Если при любом отклонении тела от положения равновесия действующие на него в этом случае силы таковы, что они вызывают дальнейшее отклонение тела от положения равновесия и тело не способно оставаться вблизи положения равновесия, то равновесие называется *неустойчивым* (рис. 16.2, б). Равновесие называется *безразличным*, если при любом отклонении тела от положения равновесия изменившиеся силы уравновешивают одна другую при любом новом положении тела (рис. 16.2, а).

При рассмотрении устойчивости различных тел важными являются понятия центра масс и центра тяжести. Центр масс и центр тяжести не являются тождественными понятиями, хотя чаще всего совпадают.

Центр масс есть геометрическая точка, характеризующая движение тела или системы тел как целого. Положение центра масс тела, состоящего в общем случае из n частей с массами $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$, определяется радиус-вектором:

$$\vec{R}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad (16.6)$$

где \vec{r}_i — радиус-вектор i -й части (рис. 16.3). Понятие центра масс широко используется при рассмотрении движения твердых тел. Движение твердого тела можно рассматривать как суперпозицию движения центра масс и вращательного движения тела вокруг его центра масс. Центр масс при этом движется так же, как двигалась бы тело с такой же массой, но бесконечно малыми размерами, т. е. как материальная точка. Последнее означает, в частности, что для описания этого движения применимы все законы Ньютона. Часто

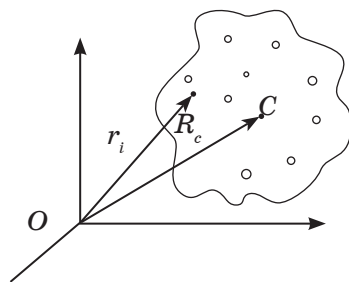


Рис. 16.3

бывает удобно рассматривать движение замкнутой системы в системе отсчета, связанной с центром масс. Такая система отсчета называется *системой центра масс* (Ц-системой). В ней полный импульс замкнутой системы всегда остается равным нулю, что позволяет упростить уравнение ее движения. Центр масс симметричных тел находится в их геометрическом центре. Центр масс тел сложной формы иногда может находиться вне самого тела.

Общее условие устойчивого равновесия: если центр масс тела занимает наинизшее положение из всех возможных, то равновесие наиболее устойчиво.

Подумайте над тем, как будет меняться устойчивость лодки, если сидящий в ней человек встанет во весь рост.

Центром тяжести механической системы называется точка, относительно которой суммарный момент сил тяжести (действующих на систему) равен нулю. Другими словами, центр тяжести есть точка приложения силы тяжести. Понятие центр тяжести применимо только для тел, находящихся в поле тяжести. Для тел вблизи Земли, где гравитационное поле однородно, центр тяжести совпадает с центром масс.



Вопросы для самоконтроля

1. Что понимают под равновесием?
2. В каком случае тело будет находиться в равновесии?
3. Какие виды равновесия вы знаете?
4. Что надо сделать, чтобы равновесие было более устойчивым?
5. Какой автомобиль более устойчив на трассе?
6. В чем состоит отличие центра масс от центра тяжести?
7. Как будет вести себя тело, если приложить силу к его центру масс?

Примеры решения задач

Рассмотрим примеры решения задач на равновесие тел и на определение центра масс. Напоминаем, что прежде чем начать решать задачу, необходимо внимательно прочитать ее условие и при необходимости сделать чертеж. Как правило, решение задач по статике сводится к составлению уравнений равновесия тел (16.2) и (16.4). При составлении уравнения (16.2) для сил, необходимо перейти к проекциям на координатные оси. А при составлении уравнения (16.4) для моментов важным является удачный выбор оси вращения. Ее надо выбрать так, чтобы плечи сил определялись наиболее просто и в сумме моментов сил содержалось меньше слагаемых.

1. Лестница прислонена к стене. При каком минимальном угле наклона к полу она не будет падать? Коэффициенты трения между лестницей и стеной и между лестницей и полом, соответственно, равны μ_1 и μ_2 .

Решение. Сделаем чертеж и выберем оси OX и OY , как показано на рисунке 16.4. На лестницу действуют следующие силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции со стороны стены \vec{N}_1 и со стороны пола \vec{N}_2 , силы трения $\vec{F}_{\text{тр}1}$ и $\vec{F}_{\text{тр}2}$. Тогда первое условие равновесия (16.2) для лестницы имеет вид:

$$m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}1} + \vec{F}_{\text{тр}2} = 0. \quad (1)$$

В качестве оси вращения выберем точку C , тогда второе уравнение равновесия (16.4) с учетом знаков моментов сил запишется следующим образом:

$$N_1 l \sin \alpha + F_{\text{тр}1} l \cos \alpha - mg \frac{l}{2} \cos \alpha = 0. \quad (2)$$

Здесь l длина лестницы. Из уравнения (2) следует:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{mg}{2} - F_{\text{тр}1}}{N_1}.$$

В этой формуле \vec{N}_1 и $\vec{F}_{\text{тр}1}$ выразим через силу тяжести. Для этого запишем уравнение (1) в проекциях на оси координат.

Проекция на ось OX : $N_1 - F_{\text{тр}2} = 0$,

проекция на ось OY : $N_2 + F_{\text{тр}1} - mg = 0$.

По условию задачи требуется найти минимальное значение угла α_{\min} , поэтому берем максимальное значение сил трения, т. е.

$$F_{\text{тр}1} = \mu_1 N_1 \text{ и } F_{\text{тр}2} = \mu_2 N_2.$$

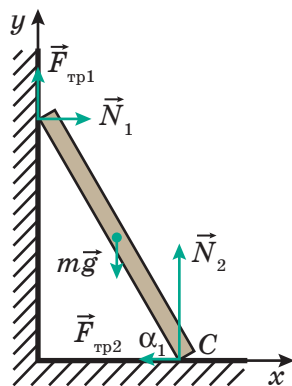


Рис. 16.4

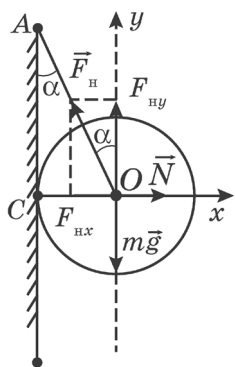


Рис. 16.5

Тогда: $N_1 = \frac{\mu_2 mg}{1 + \mu_1 \mu_2}$, и окончательно для угла

$$\text{получим, } \operatorname{tg} \alpha_{\min} = \frac{1 - \mu_1 \mu_2}{2 \mu_2}.$$

Решите эту задачу, выбрав за ось вращения точку O . Сделайте вывод о полученном результате. В каком случае решать задачу было легче?

2. К нити длиной l прикреплен шар радиусом R . Другой конец нити прикреплен к вертикальной стене. Трение между шаром и стеной отсутствует.

Определите: 1) угол α между нитью и стеной; 2) натяжение нити F_n ; 3) реакцию стены N (рис. 16.5).

Решение. Так как трение между шаром и стеной отсутствует, то продолжение нити должно пройти через центр шара O (линия AO). Расставив силы, действующие на шар (\vec{F}_n , $m\vec{g}$, \vec{N}), сведем их в одну точку O (силы вдоль линии ее действия в твердом теле переносить можно, от этого эффект действия силы не меняется). Шар неподвижен, т. е. $\sum_i F_x = 0$ и $\sum F_y = 0$. Разложим силу \vec{F}_n на составляющие (F_{nx} и F_{ny}) и запишем первый закон Ньютона по осям:

$$\sum F_x = 0; \quad N - F_{nx} = 0 \quad \text{или} \quad N = F_{nx};$$

$$\sum F_y = 0; \quad F_{ny} - mg = 0 \quad \text{или} \quad F_{ny} = mg.$$

Угол α выразим из треугольника OCA :

$$\sin \alpha = \frac{R}{R + l}.$$

Тогда: $F_{nx} = F_n \cdot \sin \alpha$; $F_{ny} = F_n \cdot \cos \alpha$, откуда:

$$F_n \cdot \sin \alpha = N,$$

$$F_n \cdot \cos \alpha = mg.$$

Разделив первое уравнение на второе, имеем $\operatorname{tg} \alpha = \frac{N}{mg}$, или

$$N = mg \operatorname{tg} \alpha \quad \text{и} \quad F_n = \frac{mg}{\cos \alpha}, \quad N = mg \frac{R}{\sqrt{l(2R + l)}} \quad \text{и} \quad F_n = mg \frac{R + l}{\sqrt{l(2R + l)}}.$$

3. Пять шаров, массы которых, соответственно, равны m , $2m$, $3m$, $4m$, $5m$, укреплены на невесомом стержне так, что их центры находятся на расстоянии l друг от друга. Найдите положение центра тяжести этой системы (рис. 16.6).

Решение. Положение центра тяжести будем определять относительно точки O , находящейся на левом конце стержня. Заранее мы не знаем, где находится центр тяжести (здравый смысл подсказывает, что где-то ближе к правому концу). Пусть это будет точка K , находящаяся на расстоянии x_c от точки O . Если в этой точке подставить опору, то стержень будет находиться в равновесии. Запишем уравнение моментов сил относительно точки O :

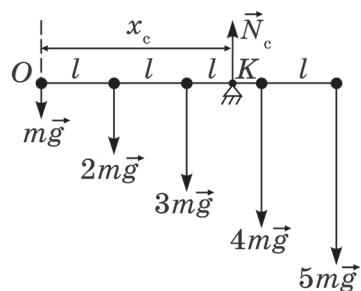


Рис. 16.6

$$2mg \cdot l + 3mg \cdot 2l + 4mg \cdot 3l + 5mg \cdot 4l = N_c x_c.$$

Слева этого равенства — моменты сил тяжести, действующих на стержень по часовой стрелке, справа — момент силы реакции опоры, действующей на стержень против часовой стрелки. Так как стержень по вертикали не движется, то:

$$N_c = mg + 2mg + 3mg + 4mg + 5mg.$$

Окончательно имеем, $x_c = \frac{2mg \cdot l + 3mg \cdot 2l + 4mg \cdot 3l + 5mg \cdot 4l}{mg + 2mg + 3mg + 4mg + 5mg}$ или $x_c = \frac{8}{3}l$.

Можно решить и по-другому. В общем виде положение центра тяжести для системы частиц $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$, координаты которых относительно выбранной точки O , соответственно, равны $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, определяется уравнением $x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n}$.

Тогда относительно точки O имеем:

$$x_c = \frac{2ml + 3m2l + 4m3l + 5m4l}{m + 2m + 3m + 4m + 5m} = \frac{40ml}{15m} = \frac{8}{3}l.$$



Творческая мастерская

Наблюдайте

1. Понаблюдайте за движением шарика на горизонтальной поверхности стола. Устойчиво ли это состояние шарика?
2. Наблюдайте поведение игрушки Ваньки-встаньки и объясните, почему она не падает (рис. 16.7).



Рис. 16.7

Экспериментируйте

1. Открывайте дверь вашей комнаты, прикладывая силу в разные участки двери. Определите, в каком случае дверь открывается легче? Дайте объяснение результату вашего эксперимента.
2. Изготовьте игрушку Неваляшку, используя обычное куриное яйцо (рис. 16.8), (подумайте, как это сделать и какие материалы для этого нужны) и проведите ряд опытов с ней.
3. В вашем распоряжении имеется плоская фигура из плотного картона. Как найти ее центр тяжести?



Рис. 16.8

Объясните

1. Почему артисты цирка при хождении по канату держат в руках тяжелые шесты?
2. Почему при езде на велосипеде тормозить лучше задними колесами, а не передними?

Исследуйте

1. Исследуйте устойчивость прямоугольного параллелепипеда, например, коробки спичек на наклонной поверхности. Определите, какое положение параллелепипеда наиболее устойчивое. Объясните, почему.
2. В вашем распоряжении имеется длинный стержень. Исследуйте, в каком месте его легче удержать в горизонтальном положении: в середине или держа за один из концов?

Анализируйте

1. Будет ли равновесие шарика, подвешенного на нити, устойчивым?
2. Чтобы сдвинуть с места застрявший автомобиль, пользуются таким приемом: автомобиль привязывают длинной веревкой к дереву, по возможности сильно ее натянув. Затем, натягивая веревку посередине почти перпендикулярно к ней, человек легко сдвигает автомобиль. Почему это возможно?

Творите

Предложите способ определения центра тяжести тонкой пластинки неправильной формы.

Решайте

1. На концы рычага действуют вертикальные силы 8 Н и 40 Н. Длина рычага 90 см. Где расположена точка опоры, если рычаг находится в равновесии?

(Ответ: в 75 см от точки приложения силы 8 Н)

2. Стержень, на одном конце которого подвешен груз весом 120 Н, находится в равновесии в горизонтальном положении, если его подпереть на расстоянии $1/5$ длины стержня от груза. Чему равен вес стержня?

(Ответ: 55 Н)

*3. Железный прут массой M изогнут пополам так, что его части образуют прямой угол. Прут подвешен за один из концов на шарнире. Найдите угол α , который образует с вертикалью верхняя часть стержня в положении равновесия.

(Ответ: 18°)

*4. В свинцовом шаре сделана сферическая полость, касающаяся поверхности шара и проходящая через его центр. Масса шара M , радиус R . Определите положение центра тяжести этого шара.

(Ответ: $\frac{R}{14}$)

5. Как изменится момент силы, если силу увеличить в 5 раз, а ее плечо уменьшить в 2 раза?

(Ответ: увеличится в 2,5 раза)

*6. При взвешивании на неравноплечных рычажных весах масса тела на одной чашке весов получилась 300 г, а на другой 340 г. Определите истинную массу тела.

(Ответ: 320 г)

7. К концам однородного стержня длиной $l = 50$ см и весом $P = 10$ Н подвешены две гири весом $P_1 = 10$ Н и $P_2 = 30$ Н. В какой точке следует поставить опору, чтобы стержень находился в равновесии?

(Ответ: на расстоянии 12,5 см от точки приложения силы P_2)

8. Два человека одинакового роста держат за концы в горизонтальном положении трубу длиной $l = 2$ м и массой $m_1 = 10$ кг. На расстоянии $d = 0,5$ м от первого человека к трубе подвешен груз массой $m_2 = 100$ кг. Определите силы, с которыми труба давит на плечи первого и второго человека.

(Ответ: на первого 800 Н, на второго 300 Н)



Рефлексия

1. Какие из определений, приведенных в этом параграфе, для вас остались непонятными?
2. На каком уровне вы усвоили приведенный здесь материал?
3. Нуждаетесь ли вы в дополнительном разъяснении темы?
4. Все ли "Примеры решения задач" были вам понятны?
5. Помогли ли вам задания "Творческой мастерской" в усвоении темы?

Раздел механики, изучающий условия равновесия твердых тел под действием различных сил, называется *стати́кой*.

В статике тело рассматривается как *абсолютно твердое*, т. е. недеформируемое тело.

Тело будет находиться в равновесии, если выполняются два условия.

Первое условие: тело будет находиться в равновесии, если равнодействующая всех сил, приложенных к телу, равна нулю. Это условие записывается математически в виде формулы:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = 0.$$

Второе условие: тело будет находиться в равновесии, если алгебраическая сумма всех моментов сил, действующих на тело, равна нулю. Это условие записывается математически в виде формулы:

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + \dots = 0.$$

При этом моменты сил, вращающих тело по часовой стрелке, считаются положительными, а моменты сил, которые стремятся повернуть тело против часовой стрелки — отрицательными.

Под моментом силы понимают физическую величину, равную произведению модуля силы F на плечо d , т. е. $M = Fd$.

Плечо — это кратчайшее расстояние от линии действия силы до оси вращения. Равновесие может быть устойчивым, неустойчивым или безразличным. Равновесие называется *устойчивым*, если при любом отклонении тела от положения равновесия действующие на него в этом случае силы таковы, что под их действием тело возвращается к положению равновесия. Если же при любом отклонении тела от положения равновесия действующие на него в этом случае силы таковы, что они вызывают дальнейшее отклонение тела от положения равновесия и тело не способно оставаться вблизи положения равновесия, то равновесие называется *неустойчивым*. Равновесие называется *безразличным*, если при любом отклонении тела от положения равновесия изменившиеся силы уравнивают одна другую при любом новом положении тела.

Центр масс есть геометрическая точка, характеризующая движение тела или системы тел как целого. Положение центра масс тела, состоящего в общем случае из n частей с массами $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$, определяется радиус-вектором:

$$\vec{R}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Центром тяжести механической системы называется точка, относительно которой суммарный момент сил тяжести (действующих на систему) равен нулю. Другими словами, центр тяжести есть точка приложения силы тяжести.