

廣播通訊模式的階層概念與碰撞

蕭學宏¹ 楊昌彪²

shiaush@mail.cju.edu.tw cbyang@math.nsysu.edu.tw

中文摘要

現今最常用的乙太網路(Ethernet)，其通訊模式就是一種廣播通訊模式。在此種廣播通訊模式下的演算法，如能運用階層觀念(layer concept)，將可減少碰撞，有效加快演算速度。本文中，我們以廣播通訊模式下，搜尋最大值的問題為例子，提出未加入此種觀念的演算法，並分析其平均時間複雜度為 $\Theta(\ln^2 n)$ 。而有運用此觀念的演算法，其平均時間複雜度為 $\Theta(\ln n)$ 。因此，在廣播通訊模式下的演算法，若能運用階層的觀念，對於加快演算速度將有所幫助。

關鍵詞：平行演算法、廣播通訊模式、階層觀念、搜尋最大值、碰撞

¹ 長榮管理學院圖書館資訊組組長，兼資管系講師

² 中山大學應用數學系副教授，兼電子計算機中心資料組組長

一、研究背景與目的

在眾多平行計算模式(parallel computation models)中，有多種簡單的模式，而廣播通訊模式(broadcast communication mode)，就是其中的一種[1-12]。在此模式下，全部的機器共享唯一的通道，並藉由此一通道，進行訊號的連通(如圖 1 所示)。當有一部機器廣播(Broadcast)訊號時，其他的機器可藉此通道接收訊號。當有二部以上的機器同時想要傳送消息時，就會發生廣播碰撞(broadcast conflict)，此時就有一個機制(resolution scheme)來解決碰撞，使得只有一部機器可以傳播資料。

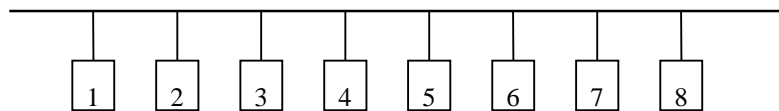


圖 1

此種模式不僅是較簡單的模式，而且是較切合實際。現今最普遍的網路架構，以乙太網路(Ethernet)為主，其通訊模式就是一種廣播通訊模式。此種模式最大的特徵，就是必須解決碰撞問題。如果碰撞是無可避免的，那如何減少碰撞次數，將是關鍵性的問題。

在此種模式下架構演算法，所需花費的時間共分三部分。第一部份是解決碰撞所需的時間，第二部分是資料傳輸所需的時間，最後一部份是進行運算所需的時間。若能減少此三部分時間之總和，就能增進此演算法的執行效率。而其最具關鍵性的步驟，是減少第一部份的時間，換言之，就是減少碰撞次數。

目前所知大概有二種概念，可以減少碰撞次數。第一種是，調整廣播機率的大小，如此可期待大約有一個資料可廣播成功。第二種是，逐一建立邏輯性的階層，在建立階層的過程，將資料分佈在每一個邏輯性的階層之中，達到分散資料，以減少參加碰撞的資料個數。不論是第一或第二種概念，皆能有效減少碰撞次數。第一種概念是由 Martel 所提出的[6]，雖然，此概念應用在尋找最大值的問題上，能證出具有 $O(\ln n)$ 的效果，但是缺乏更嚴謹的上下界限，以供參考比較。

第二種概念是由作者之一，楊昌彪教授所提出的[10]。在廣播通訊模式下，將此概念運用在尋找最大值的問題上，我們已證出[12]平均所需的時間槽縫(time slots)，以 T_n 表示，則 $4 \cdot \ln n < T_n < 5 \cdot \ln n$ 。而 Grabner 和 Prodinger[14]，則利用艱深的數學，精準地證出 $T_n / \ln n \cong \pi^2 / (3 \cdot \ln 2) = 4.746276...$ 。不論是何者，皆證明我們運用階層概念的演算法，其平均時間複雜度為 $\Theta(\ln n)$ 。現在我們不僅試圖將此概念推廣至其他的應用，也有興趣探討在尋找最大值的問題上，如沒有運用階層概念，或其他概念，而改以直覺方式進行，將會有何結果？兩者之間的差距，會有多大？經我們證明其結果是 $\Theta(\ln^2 n)$ ，確實比運用階層概念的演算法，差上一個級數。此一結果證實運用階層概念有其效果，因此，在廣播通訊模式下想要發展有效的演算法，階層概念是可考慮的方向。而直覺方式的結果，可為其他新的概念，提供一個比較的基石。

以下我們將先介紹在廣播通訊模式下，如何以扔銅板的方式，解決碰撞問題，並說明其時間複雜度為 $\Theta(\ln n)$ 。然後再介紹在廣播通訊模式下，如何以直覺方式尋找最大值，並分析其時間複雜度為 $\Theta(\ln^2 n)$ 。最後則介紹階層概念，如何應用在找尋最大值的問題上。我們已證出[12]其時間複雜度為 $\Theta(\ln n)$ ，至於詳細的說明及證明，在此省略。

二、扔擲銅板解決廣播碰撞之時間複雜度

在廣播通訊模式下，通道的狀況僅有三種。第一種是，僅有一部機器，想要在通道廣播，當然資料廣播成功。第二種是，有二部以上的機器，皆想在通道廣播，結果產生碰撞。第三種是，沒有機器想要在通道廣播，結果通道是安靜無聲。不論是哪一種狀況，都會花費一個‘時間槽縫’(time slot)。以下我們將詳細解說以扔擲銅板方式，作為解決碰撞的機制。

假設有 n 個資料均分在 n 部機器，換言之，每部機器各自擁有一個資料。每部機器皆想要利用唯一的通道，傳送資料。當然會在第一個時間槽縫到達時，產生碰撞現象。在下一個時間槽縫未到前，每一部機器各自扔一次銅板。銅板有二面，其一為‘人頭’，另一為‘數字’。扔出‘人頭’的機器，在下一個時間槽縫到時，參與對通道的廣播，將資料傳送到唯一的通道。而扔出‘數字’的人，則放棄對通道廣播，即被淘汰出局。

此時，通道會出現三種狀況。第一種是安靜無聲，代表無任何機器扔得‘人頭’，剛才那批機器，必須再各自扔銅板，以決定在下一個時間槽縫到達時，是否參與對通道的廣播。第二種是碰撞，表示有二部機器以上扔得‘人頭’，此時只有扔得‘人頭’的機器，繼續再各自扔銅板，以決定再下一個時間槽縫到達時的動作，是廣播或是放棄。第三種是廣播成功，很明顯地代表僅有一部機器扔得‘人頭’，可對通道成功地廣播資料。

令 D_n 代表平均花費的時間槽縫次數，利用類似我們在[12]所提的證法，可得到 $\ln n < D_n < 2 \ln n$ 。而 Prodinger[13]運用艱深的數學，準確地證明

$$D_n \cong \log_2 n + 1/2 - \delta_2(\log_2 n), \text{ 其中 } \delta_2(x) = \frac{1}{\log 2} \sum_{k \neq 0} \zeta(1 - \chi_k) \Gamma(1 - \chi_k) e^{2k\pi i x};$$

$\chi_k = \frac{2k\pi i}{\log 2}, k \in \mathbb{Z}$; $\zeta(s)$ 是 Riemann's ζ -function; $\Gamma(s)$ 是 Γ -function。此分析結果說明，以扔銅板方式，解決碰撞，平均大約需要花費 $\log_2 n$ 次的時間槽縫。

以上所提 $\ln n$ 與 $\log_2 n$ 的基底互換，會造成以後分析式子的無謂膨脹，混淆證明的主線發展，又因為 $\log_2 n = \ln n * \log_2 e = \ln n * 1.442695\dots$ ，兩者之間僅差一個常數值，因此，我們將用 $\ln n$ 作為以後表達式的主體，以簡化我們的證明及說明。這樣的替換，不會影響最後的結論。

三、以直覺方式尋找最大值

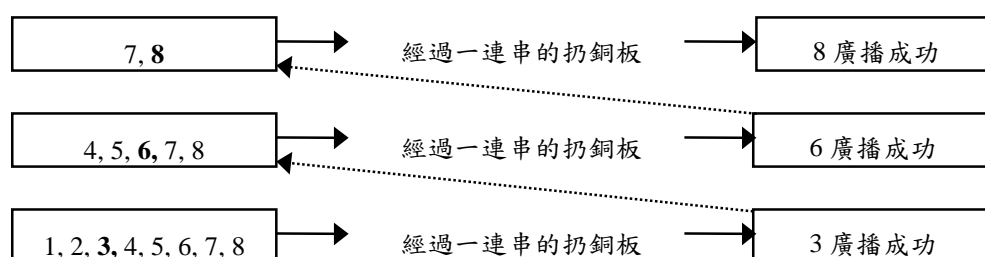
在廣播通訊模式下尋找最大值的問題，就如同在乙太網路(Ethernet)上，有 n 部機器各自擁有一個資料，要從中得知那部機器擁有最大值。若 $n = 8$ ，則如圖 1 所示。

基本上，以直覺方式進行尋找最大值的方法[5]，就是利用在解決碰撞，而最後有機器廣播資料成功時，將小於此資料的機器淘汰出局，而其他的機器則再進行下一回合。

其進行的方式，可視為有 n 個人在扔擲銅板，扔出‘人頭’的人，他們再繼續扔銅板，而扔出‘數字’的人則暫時無權再扔銅板，如此重複進行，一直到最後只有一人扔出人頭。此人將其手中的資料公佈後，所有小於此資料的人，則淘汰出局，而所有大於此資料的人，可再進行扔銅板，直到最大的資料出現。

以圖 2 為例，一開始有 8 個資料碰撞，然後經過一連串的扔銅板(平均大約經過 $3=\log_2 8$ 次的時間槽縫)，排除碰撞後，假設最後資料 3 成功地廣播。廣播後，僅剩資料 4、5、6、7 及 8，當然還是會發生碰撞，此時 4、5、6、7 及 8，再度經過一連串的扔銅板，以排除碰撞，假設資料 6 成功地廣播。廣播後，僅剩資料 7 及 8，還是會發生碰撞，此時 7 及 8 再度經過一連串的扔銅板，假設資料 8 是成功者。廣播後，就沒有任何資料可以出來廣播。此時，就可得知 8 是最大的資料。

圖 2



四、以直覺方式尋找最大值的時間複雜度分析

Levitan 和 Foster 曾證明此演算法所需的成功廣播次數，平均約為 $\ln n$ 次[5]。以下則探討此演算法加入排除碰撞後，所需的時間槽縫次數。

以直覺方式尋找最大值的問題，其平均花費的時間槽縫次數，以 T_n 代表，則

$$T_n = \ln n + \frac{1}{n}(T_0 + T_1 + \dots + T_{n-2} + T_{n-1}) \quad \text{第一式}$$

若以 $n=8$ 為例， $T_8 = \ln 8 + \frac{1}{8}(T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 + T_7)$ ，其中 $\ln 8$ 代表經過一連串的扔銅板。換言之，平均經過 $\ln 8$ 次扔銅板後，1,2,3,...,7,8 中會有一個廣播成功，且每一個的機會均等。所以， $\frac{1}{8}$ 代表 $T_0, T_1, \dots, T_6, T_7$ ，每一種狀況均有機會出現。 T_0 表示在最大值 8，廣播成功的狀況下，接下來將沒有任何資料，可以

再進行扔銅板，換言之，所有資料皆因小於最大值 8，而被淘汰出局。相反地， T_7 表示在最小值 1，廣播成功的狀況下，任何資料都可以再進行扔銅板。 T_5 表示在第三小的資料 3，廣播成功的狀況下，尚有比它大的 5 個資料(4,5,6,7,8)，有權再進行扔銅板，換言之，只淘汰了最小及第二小等二個資料(1,2)。

$n-1$ 代入第一式可得

$$T_{n-1} = \ln(n-1) + \frac{1}{n-1}(T_0 + T_1 + \dots + T_{n-3} + T_{n-2})$$

$$(T_0 + T_1 + \dots + T_{n-3} + T_{n-2}) = (T_{n-1} - \ln(n-1)) * (n-1)$$

將上式代入第一式，再整理得到

$$T_n - T_{n-1} = \ln n - \ln(n-1) + \frac{1}{n} \ln(n-1)$$

將上式由 n 逐一擴張至 3，可列出以下各式子

$$T_n - T_{n-1} = \ln n - \ln(n-1) + \frac{1}{n} \ln(n-1)$$

$$T_{n-1} - T_{n-2} = \ln(n-1) - \ln(n-2) + \frac{1}{n-1} \ln(n-2)$$

$$\dots$$

$$T_3 - T_2 = \ln 3 - \ln 2 + \frac{1}{3} \ln 2$$

將以上各列式子累加整理得到

$$T_n - T_2 = \ln n - \ln 2 + \frac{1}{n} \ln(n-1) + \frac{1}{n-1} \ln(n-2) + \dots + \frac{1}{3} \ln 2$$

將上式整理可得

$$T_n - T_2 = \ln n - \ln 2 + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} \ln(k-1)$$

$$T_n - T_2 = \ln n - \ln 2 + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} \ln k + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} (\ln(k-1) - \ln k)$$

$$\therefore T_n = T_2 + \ln n - \ln 2 + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} \ln k + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} (\ln(k-1) - \ln k)$$

若要分析 T_n ，則需要分析 T_n 式子中 $\sum_{k=3}^n \frac{1}{k} \ln k$ 及 $\sum_{k=3}^n \frac{1}{k} (\ln(k-1) - \ln k)$ 的上下界，

如此才能知道 T_n 的全貌。以下我們將先證明它們二者的上下界限，然後再綜合討論 T_n 的上下界限，最後導出時間複雜度 $T_n = \Theta(\ln^2 n)$ 。

Lemma 1.

$$\frac{1}{2}(\ln n)^2 - \frac{1}{2}(\ln 3)^2 \leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} \ln k \leq \frac{1}{2}(\ln n)^2 - \frac{1}{2}(\ln 2)^2$$

Proof.

利用積分試驗法(Integral Test)之類似觀念，可得

$$\int_3^{n+1} \frac{1}{x} \ln x \, dx \leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} \ln k \leq \int_2^n \frac{1}{x} \ln x \, dx$$

運用部分積分法，可導出

$$\int \frac{1}{x} \ln x \, dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$$

$$\therefore \frac{1}{2}(\ln(n+1))^2 - \frac{1}{2}(\ln 3)^2 \leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} \ln k \leq \frac{1}{2}(\ln n)^2 - \frac{1}{2}(\ln 2)^2$$

$$\therefore \frac{1}{2}(\ln n)^2 - \frac{1}{2}(\ln 3)^2 \leq \frac{1}{2}(\ln(n+1))^2 - \frac{1}{2}(\ln 3)^2$$

$$\therefore \frac{1}{2}(\ln n)^2 - \frac{1}{2}(\ln 3)^2 \leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} \ln k \leq \frac{1}{2}(\ln n)^2 - \frac{1}{2}(\ln 2)^2 \quad \text{得證}$$

Lemma 2.

$$\frac{1}{4}(\ln 4 + 1) - \frac{1}{n+1}(\ln(n+1) + 1) \leq \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \ln k \leq \frac{1}{2}(\ln 2 + 1) - \frac{1}{n-1}(\ln(n-1) + 1)$$

Proof.

因為 $\frac{\ln k}{k}$ 是遞減函數，且 $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k}$ ，所以，

$$\sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{(k+1)(k+1)} \ln(k+1) \leq \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \ln k \leq \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k \cdot k} \ln k$$

$$\sum_{k=4}^n \frac{1}{k \cdot k} \ln k \leq \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \ln k \leq \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k \cdot k} \ln k \quad \text{第二式}$$

利用積分試驗法(Integral Test)之類似觀念，可得

$$\int_4^{n+1} \frac{1}{x \cdot x} \ln x \, dx \leq \sum_{k=4}^n \frac{1}{k \cdot k} \ln k \quad \text{及} \quad \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k \cdot k} \ln k \leq \int_2^{n-1} \frac{1}{x \cdot x} \ln x \, dx$$

將上式代入第二式得

$$\int_4^{n+1} \frac{1}{x \cdot x} \ln x \, dx \leq \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \ln k \leq \int_2^{n-1} \frac{1}{x \cdot x} \ln x \, dx \quad \text{第三式}$$

運用部分積分法，可導出

$$\int \frac{1}{x \cdot x} \ln x \, dx = -\frac{1}{x}(\ln x + 1) + C$$

$$\therefore \int_4^{n+1} \frac{1}{x \cdot x} \ln x \, dx = \frac{1}{4}(\ln 4 + 1) - \frac{1}{n+1}(\ln(n+1) + 1)$$

$$\int_2^{n-1} \frac{1}{x \cdot x} \ln x \, dx = \frac{1}{2}(\ln 2 + 1) - \frac{1}{n-1}(\ln(n-1) + 1)$$

將上列二結果代入第三式，得到

$$\frac{1}{4}(\ln 4 + 1) - \frac{1}{n+1}(\ln(n+1) + 1) \leq \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \ln k \leq \frac{1}{2}(\ln 2 + 1) - \frac{1}{n-1}(\ln(n-1) + 1)$$

得證

Lemma 3.

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \ln 2 - \frac{1}{n} \ln n \leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} (\ln(k-1) - \ln k) \leq -\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \ln 2 + \frac{1}{n+1}$$

Proof.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} (\ln(k-1) - \ln k) \\ &= \frac{1}{3}(\ln 2 - \ln 3) + \frac{1}{4}(\ln 3 - \ln 4) + \frac{1}{5}(\ln 4 - \ln 5) + \dots + \frac{1}{n}(\ln(n-1) - \ln n) \\ &= \frac{1}{3} \ln 2 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \ln 3 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \ln 4 - \dots - \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \ln(n-1) - \frac{1}{n} \ln n \\ &= \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{n} \ln n - \left(\sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \ln k\right) \end{aligned}$$

將 **Lemma 2** 代入上式，可得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{n} \ln n - \frac{1}{2}(\ln 2 + 1) + \frac{1}{n-1}(\ln(n-1) + 1) &\leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} (\ln(k-1) - \ln k) \\ &\leq \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{n} \ln n - \frac{1}{4}(\ln 4 + 1) + \frac{1}{n+1}(\ln(n+1) + 1) \end{aligned}$$

所以，

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \ln 2 - \frac{1}{n} \ln n \leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} (\ln(k-1) - \ln k) \leq -\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \ln 2 + \frac{1}{n+1}$$

得證

Lemma 4.

$$\ln n + \frac{1}{2}(\ln n)^2 + C_1 \leq T_n \leq \ln n + \frac{1}{2}(\ln n)^2 + C_2, \text{ 其中}$$

$$C_1 = T_2 - \frac{1}{2}(\ln 3)^2 - \frac{1}{2} - \frac{7}{6} \ln 2 - \frac{1}{n} \ln n$$

$$C_2 = T_2 - \frac{1}{2}(\ln 2)^2 - \frac{1}{4} - \frac{7}{6} \ln 2 + \frac{1}{n+1}$$

Proof.

$$T_n = T_2 + \ln n - \ln 2 + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} \ln k + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} (\ln(k-1) - \ln k)$$

將 **Lemma 1** 及 **Lemma 3** 代入上式，再整理出 C_1 及 C_2 ，即可得證。

Theorem 5.

在廣播通訊模式下，以直覺方式找尋最大值之時間複雜度為 $T_n = \Theta(\ln^2 n)$

Proof.

在 **Lemma 4** 證出 $\ln n + \frac{1}{2}(\ln n)^2 + C_1 \leq T_n \leq \ln n + \frac{1}{2}(\ln n)^2 + C_2$,

其中 C_1 及 C_2 在某定值之內, 且 $\ln n \leq \frac{1}{2}(\ln n)^2$ 。

所以, 時間複雜度 $T_n = \Theta(\ln^2 n)$

得證

五、運用階層概念尋找最大值

在我們尋找最大值的演算法中, 一開始時, 有 n 部機器各自擁有一個資料, 並想要利用唯一的通道, 傳送資料。此演算法最關鍵的地方是, 利用碰撞逐一建立邏輯性的階層。在建立階層的過程, 將資料分佈在每一個邏輯性的階層之中, 達到分散資料的效果, 自然可以減少參加碰撞的機器個數。以下'階層'一詞, 即代表邏輯性階層。當有廣播碰撞時, 就有一個新的階層被建立。然後, 參加此次碰撞的機器, 就扔銅板。扔到'數字'的機器, 放棄下一次的廣播, 留在目前的階層。而扔到'人頭'的機器, 可參加下一個時間槽縫的廣播, 並利用碰撞將它們自己往上提升至一個新的階層。此新的階層, 就變為正在活動中的階層, 簡稱為工作階層。任何時段, 僅有在工作階層且尚存活的機器, 有資格決定是否參加廣播。

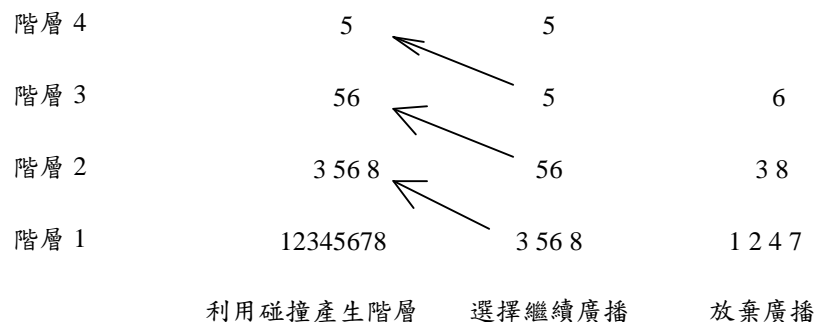


圖 3

我們以圖 3 為例, 說明我們的演算法, 其中資料即代表握有此資料的機器。一開始時, 所有的資料對通道廣播。因此, 在時間槽縫 1 時, 資料 1、2、3、...、8 廣播, 然後發生碰撞。此時, 階層 1 被建立了。在時間槽縫 2 尚未到達前, 假設 3、5、6、8 扔得'人頭'。當時間槽縫 2 到達時, 3、5、6、8 對通道廣播, 結果發生碰撞。此時, 階層 2 被建立了, 且 3、5、6、8 由原階層 1 升至新階層 2, 此新階層即是工作階層。同時, 1、2、4、7 待在舊階層 1。在時間槽縫 3 尚未到達前, 在工作階層(即階層 2)中, 且尚存活的資料 3、5、6、8 扔銅板, 以決定留著或上升。此程序如此反覆進行, 直到某一次, 僅有資料 5 扔得'人頭', 在階層 4 的那一個時間槽縫, 廣播成功。現在資料 5 是第一個贏家, 但是資料 5 不一定是最後一個贏家。資料 5 廣播成功後, 小於 5 的資料, 將會'死亡'(喪失資格)。例如階層 2 的資料 3, 還有階層 1 的資料 1、2、4。現在工作階層降至階層 3, 此階層存活的資料, 僅剩資料 6。毫無疑問地, 資料 6 將是下一位贏家。工作階層再降至階層 2, 此階層存活的資料, 僅剩資料 8。當然資料 8 會是下一位贏家。此時階層 1 中的資料 7,

將會‘死亡’。因此，資料 8 是最後的贏家，也就是最大值。

在廣播通訊模式下，運用階層概念尋找最大值，我們已分析出[12]其時間複雜度為 $\Theta(\ln n)$ 。詳細的說明及證明，在此省略，請參考[12]。

六、結論

階層概念是由作者之一，楊昌彪教授所提出的[10]，此種概念以減少碰撞次數，來加速執行效率。我們以廣播通訊模式下，搜尋最大值的問題為例子，提出未加入此種觀念的演算法，並證明其平均時間複雜度為 $\Theta(\ln^2 n)$ 。而有運用此觀念的演算法，其平均時間複雜度為 $\Theta(\ln n)$ 。因此，在廣播通訊模式下的演算法，若能運用階層的觀念，對於加快演算速度將有所幫助。而直覺方式的結果，可為其他新的概念，提供一個比較的基石。未來我們有興趣將階層觀念加以推廣，應用於其他問題。我們也將思考在廣播通訊模式下，是否有其他新的觀念，可以加速執行效率。

參考文獻

- [1] J.I. Capetannakis, "Tree Algorithms for Packet Broadcast Channels," IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 25, No. 5, May 1979, pp. 505-515.
- [2] R. Dechter and L. Kleinrock, "Broadcast Communications and Distributed Algorithms," IEEE Transactions on Information Computers, Vol. 35, No. 3, Mar. 1986, pp. 210-219.
- [3] J. H. Huang and L. Kleinrock, "Distributed Selectsort Sorting Algorithm on Broadcast Communication," Parallel Computing, Vol. 16, 1990, pp. 183-190.
- [4] S. Levitan, "Algorithms for Broadcast Protocol Multiprocessor," Proc. Of 3rd International Conference on Distributed Computing Systems, 1982, pp. 666-671.
- [5] S. P. Levitan and C. C. Foster, "Finding an Extremum in a Network," Proc. Of 1982 International Symposium on Computer Architecture, 1982, pp. 321-325.
- [6] C. U. Martel, "Maximum finding on a Multi Access Broadcast Network," Information Processing Letters, Vol. 52, 1994, pp. 7-13.
- [7] W. M. Moh, C. U. Martel, and T. S. Moh, "A Dynamic Solution to Prioritized Conflict Resolution on a Multiple Access Broadcast Channel," Proc. Of 1993 International Conference on Parallel and Distributed Systems, 1993, pp. 414-418.
- [8] C. Y. Tang and M. J. Chiu, "Distributed Sorting on the Serially Connected Local Area Networks," Proc. Of 1989 Singapore International Conference on Networks, 1989, pp. 458-462.
- [9] D. E. Willard, "Log-logarithmic Protocols for resolving Ethernet and Semaphore Conflict," Proc. Of 16th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 1984, pp 512-521.
- [10] C. B. Yang, "Reducing Conflict Resolution Time for Solving Graph Problems in Broadcast Communications," Information Processing Letters, Vol. 40, 1991, pp. 295-302.
- [11] C. B. Yang, R. C. T. Lee, and W. T. Chen, "Parallel Graph Algorithm Based upon Broadcast Communications," IEEE Transactions on Computers, Vol. 39, No. 12,

Dec. 1990, pp. 1468-1472.

- [12] S. H. Shiau and C. B. Yang, “ A Maximum Finding Algorithm on Broadcast Communication,” Information Processing Letters, Vol. 60, 1996, pp. 81-89.
- [13] Helmut Prodinger, “How to Select a Loser,” Discrete Mathematics, Vol. 120, 1993, pp. 149-159.
- [14] Peter Grabner and Helmut Prodinger, “An Asymptotic Study of a Recursion Occurring in the Analysis of an Algorithm on Broadcast Communication,” Information Processing Letters, Vol. 65, iss2, 1998, pp. 89-93.