数学：数论、排列组合

by zj@webturing.com

数学知识

- 进制和多项式
- 整除和因子/最大公约数和最小公倍数
- 素数和筛法
- 同余和模算术
- 全排列和组合数（模）

数论基础

- 数和进制
    - Definition k进制($k \geq 2$)数: $b_n,b*{n-1}....b_2b_1b_0$ （$b_n \neq 0$）每一位满足$0 \leq b_i \leq k-1$
      是k的n次多项式 $$b_n k^n+b*{n-1} k^{n-1}+....+b_1 k + b_0$$
    - Algorithm计算n长度 $ \lceil{\log_k ^n}\rceil$
    - Algorithm计算最后一位n%k /奇偶性 n%2
    - Algorithm计算第一位（方法 字符串/循环/数学方法）？
    - Algorithm计算各位数之和（逆转）
- 整除：合数和素数
    - Definition整除 如果整数 c,d,k 满足 $d=ck$ 称 c是d的因子，称c可以整除 d 记：$ c\mid d$ 否则记做$c\nmid d$
    - Lemma :如果 $c\mid a,c\mid b$ 则有 $c\mid a \pm b$,$c\mid (a\mod b)$, $c\mid ab$, 特别的$c^2\mid ab$
    - Lemma2: 如果 $c|d$ 则有$\frac{d}{c}\mid d$
    - Lemma3: 自然数n的所有正因子数不超过 $\sqrt n $ 对
    - Lemma4: 平方数有奇数个因子（反之亦然）
    - Definition素数: 整数n 只有平凡因子$ 1,n$则称$n$为素数primer（质数）通常记$p$
    - Definition合数: 整数n至少还有一个非平凡因子则称n是合数
- 整数唯一分解定理
    - Definition 质数无限序列 $p_1=2, p_2=3, p_3=5, 7, 11, 13, 17, 19,..., 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.....$
    - Theorem唯一分解定理: 任何自然数n都可以对应唯一的非负序列 $k_1,k_2,....k_m$ 满足$n={p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}...{p_m}^{k_m}$
- 所有因子计算:
    - Algorithm暴力枚举1 $O(n)$
    - Algorithm优化枚举2 $O(\sqrt n)$
    - Algorithm 利用整数的分解定理 $d(n)=(k_1+1)(k_2+1)....(k_n+1)$

公约数和公倍数

- Definition 最大公约数
    - 如果$c\mid a,c\mid b$ 称c是a,b的公因子（约数）(Common Divisor)
    - a,b最大的公因子(约数)(Greatest Common Divisor) 记做$gcd(a,b)$
    - Algorithm 欧几里得算法：$gcd(a,b)$

```
T gcd(T a,T b){
  if(b==0) return a;
  return gcd(b,a%b);
}
```

  - Algorithm ??计算N个数的最大公约数
- Definition 最小公倍数
  - 如果$c\mid a,d\mid a$ 称a是c,d的公倍数(Common Multiplier)
  - a,b所有公约数中最小的称为最小公倍数(Least Common Multiplier) 记做$lcm(a,b)$
  - Algorithm 计算两个数的最小公倍数
  - Algorithm 计算多个数的最小公倍数?
- Lemma:$gcd(a,b) * lcm(a,b)= a b$

模算术（快速幂）

- Definition 模运算（同余）
  - $(a \pm b)\% M=(a\% M \pm b\% M)\% M$
  - $(ab)\% M=(a\% M) (b\%M)\%M$
- Definition 幂 $a^n=a^{n-1} a$
- Algorithm 快速幂（二分算法） $O(\log_2^n)$

```
const int M=1e9+7;
int mpower(int a,int b){
     a%=M;
     if(b==0||a==1)return 1;
     if(a==0||b==1)return a;
     if(b%2==0) return mpower(a*a%M,b/2);
     return (mpower(a*a%M,b/2)*a)%M;
}
```

Lemma素数性质

- 素数只有两个平凡因子1,n, 不含任何非平凡因子
- Lemma 有无限多个素数
- Lemma 不考虑顺序，任何整数都可以唯一分解为质数的乘积（唯一分解定理）

素数判定

Algorithm判定

判断n是否是质数

- $ O(n) $： 枚举$ 2,3....n-1$
- $O(\sqrt n)$ 枚举 $2,3....\sqrt n$
- $O(\frac{\sqrt n}{2})=O(n)$ 偶数特判，只枚举$3,5,7...,\sqrt n$

Algorithm埃拉托斯筛法(sieve of Eratosthenes)

- 基本思想
  - 空间换时间
  - 预处理$(O(n \log \log n)$
  - 判定 $O(1)$

    - 所需要的空间往往比较大(1e6左右，空间压缩)
- 基本筛法

```
int maxn=100000;
int vis[maxn];
ll init_prim(ll n){
    ll num=0;
    memset(vis,0,sizeof(vis));
    for(ll i=2; i<=n; i++)    {
        if(!vis[i]) {
            num++;
            for(ll j=i*i; j<=n; j+=i) {
                vis[j]=1;
            }
        }
    }
}
```

- 筛法应用和优化变形
    - 压缩空间
    - 存储所有素数
    - 区间筛法

Definition排列:

- 部分排列:从n个不同的元素中选择m个元素的排列方案数为$P(m,n)=n(n-1)(n-2)...(n-m+1)$
- 全排列$P(n,n)=n(n-1)(n-2)...2*1$ 记做$n!$

Definition组合

- 从n个不同的元素中选择r个元素的方案: $\binom{n}{r}$也记做C_n^r

  $C_n^r=\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r(r-1)...1}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$
- 组合公式:
    - $C_n^r=C_n^{n-r}$
    - $C_n^r=C{n-1}^{r-1}+C{n-1}^{r}$

Definition二项展开式（杨辉三角）

- $(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i a^i b^{n-i}$
- 令$a=1,b=1$ 可得 $2^n= \sum_{i=0}^{n}C_n^i$

计数方法

- 加法公式/乘法公式:
- 容斥原理:
    - $|A \cup B|=|A|+|B|-|A \cap B|$
    - $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B \cap C|+|A\cap B\cap C|$
    - $|\cap_{i=1}^{n}A_i|=...$
- 递推:
    - 计算F_n和F_{n-1}的关系

常用组合计算

Algorithm阶乘$n!$

- 计算$n!$精确值
  - $n\leq12$ int/unsigned int
  - $n\leq20$ long long/unsigned long long
  - else 模拟高精度计算
- 计算$n!$的长度 :对数/斯特林公式 $n!\approx \sqrt{2 \pi n}(\frac{n}{e})^n$
- 计算$n!$的后k位 :模算术
- 计算$n!$的前k位 :字符串/近似计算
- 计算$n!$的最后一位（非零数）

组合数

- 计算C_n^r精确 $r= {\lceil \frac{n}{2} \rceil}$时$C_{n}^{r}$最大（一般用unsigned long long 存储)或者高精度计算
- 计算C_n^r的长度
- 计算C_n^r的后k位 :模算术 逆元
- 利用记忆化数组

斐波那契（Fibonacci）$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$

- 计算F_n精确值
- 计算F_n的长度
- 计算F_n模 K,K较小 可以打表求周期
- 利用记忆化数组
- 矩阵快速幂

卡特兰数

- 括号方案
- 出栈种类

问题

连续和

- 难度 3
- 题目分析
- 算法复杂度:
- 知识点:

孪生素数

- 难度 2
- 题目分析
- 算法复杂度:
- 知识点:

gcd

- 难度 3

- 题目分析
- 算法复杂度:
- 知识点:

区间质数统计(加强版)

- 难度 4
- 题目分析
- 算法复杂度:
- 知识点:

n!长度

- 难度 2
- 题目分析
- 算法复杂度:
- 知识点:

n!因子、最后一个非0数

- 难度 4
- 题目分析
- 算法复杂度:
- 知识点:

-

练习

1311,1833,1184,2852,2517