VARIABLES SLACKS

Son variables no negativas que transforman una inecuación en una ecuación. Para desigualdades del tipo:

$\leq$	**Variables de holgura** →	Representan sobrantes, miden lo que sobra del recurso.
$\geq$	**Variables de exceso** →	Representan excedentes sobre requerimientos mínimos impuestos.

VARIABLES SLACKS

Retomando nuestro ejemplo de maximización:

$$\textbf{MAX:} \quad Z = 4\,x_1 + 3\,x_2$$

$$\begin{cases} 6\,x_1 + 16\,x_2 \leq 48000 \\ 12\,x_1 + 6\,x_2 \leq 42000 \\ 9\,x_1 + 9\,x_2 \leq 36000 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

VARIABLES SLACKS

Puede expresarse como un sistema de ecuaciones, simplemente sumando una variable no negativa en cada restricción:

$$\textbf{MAX:}\quad Z = 4\,x_1 + 3\,x_2$$

$$\begin{cases} 6\,x_1 + 16\,x_2 + x_3 = 48000 \\ 12\,x_1 + 6\,x_2 + x_4 = 42000 \\ 9\,x_1 + 9\,x_2 + x_5 = 36000 \end{cases}$$

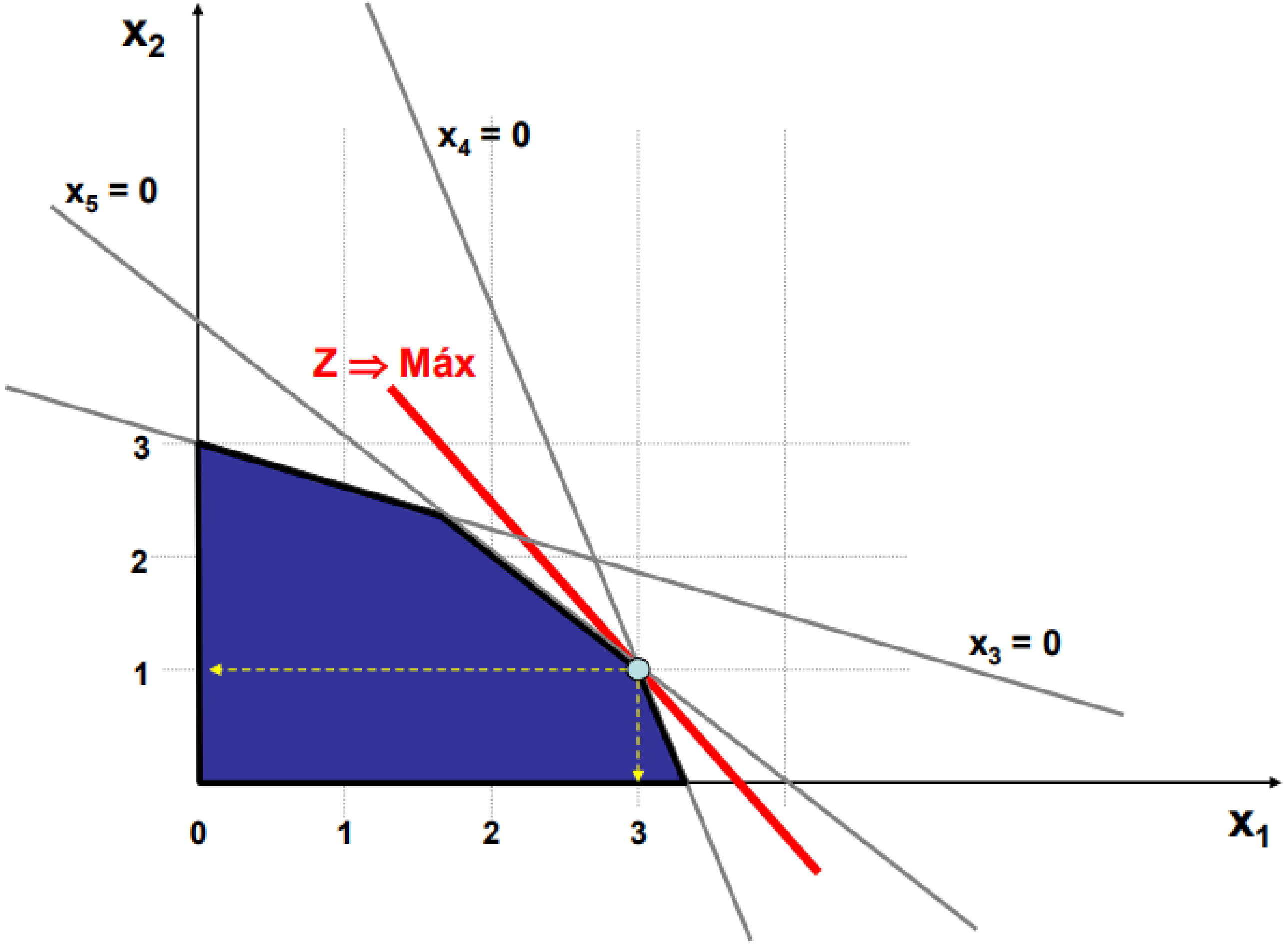
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

VARIABLES SLACKS

La variable x_3 representa el sobrante del recurso estampado, x_4 el sobrante de soldado y x_5 el sobrante de pintado.
En programación matemática se les llama variables reales a las variables de decisión del problema (x_1 y x_2), y las que permiten transformar una inecuación en una ecuación se denominan, como mencionamos al principio, variables slacks (x_3, x_4, x_5) .

En el siguiente gráfico se observa que sobre la recta que representa el recurso "estampado", el valor de la variable x_3 (sobrante de estampado) es cero. Del mismo modo, sobre la recta "soldado" x_4 es cero, y sobre la recta "pintado" x_5 vale cero.

VARIABLES SLACKS



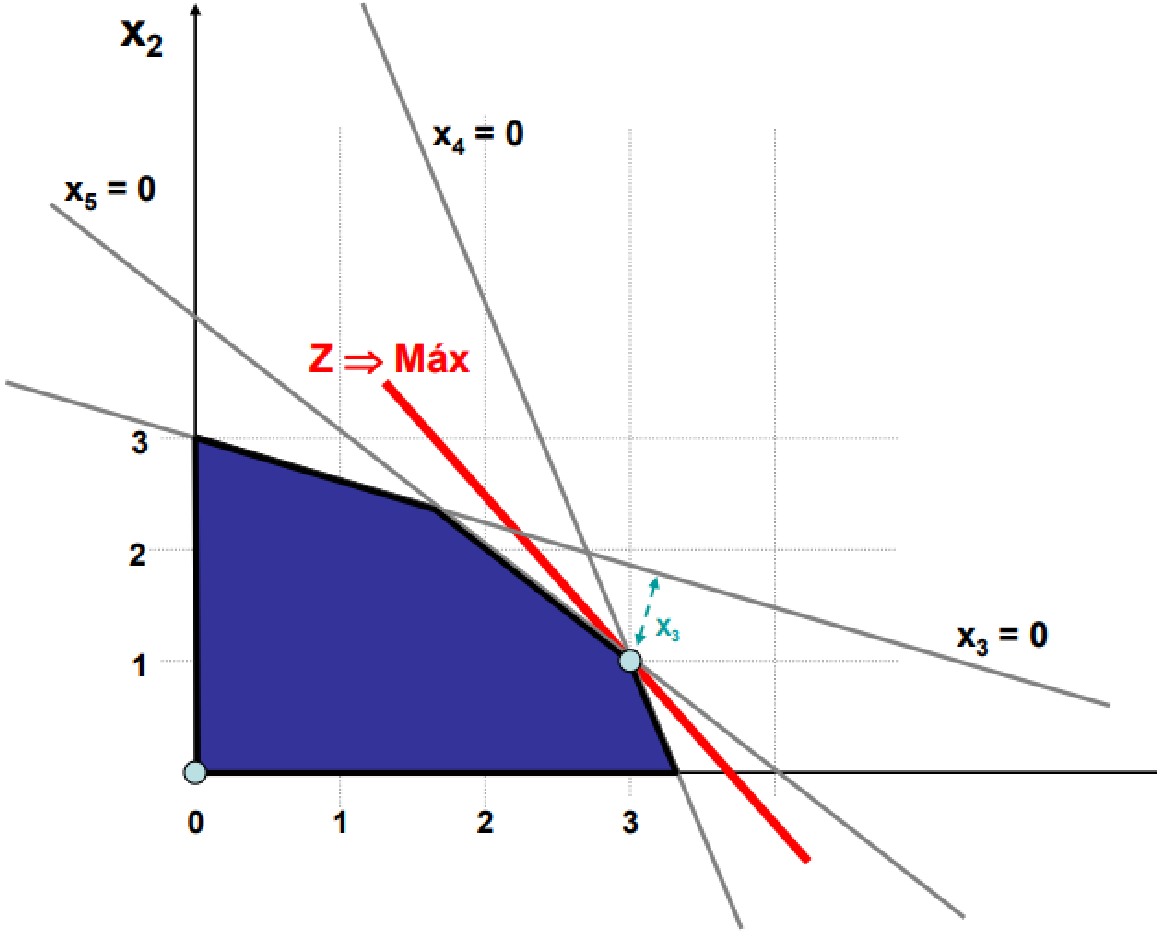
VARIABLES SLACKS

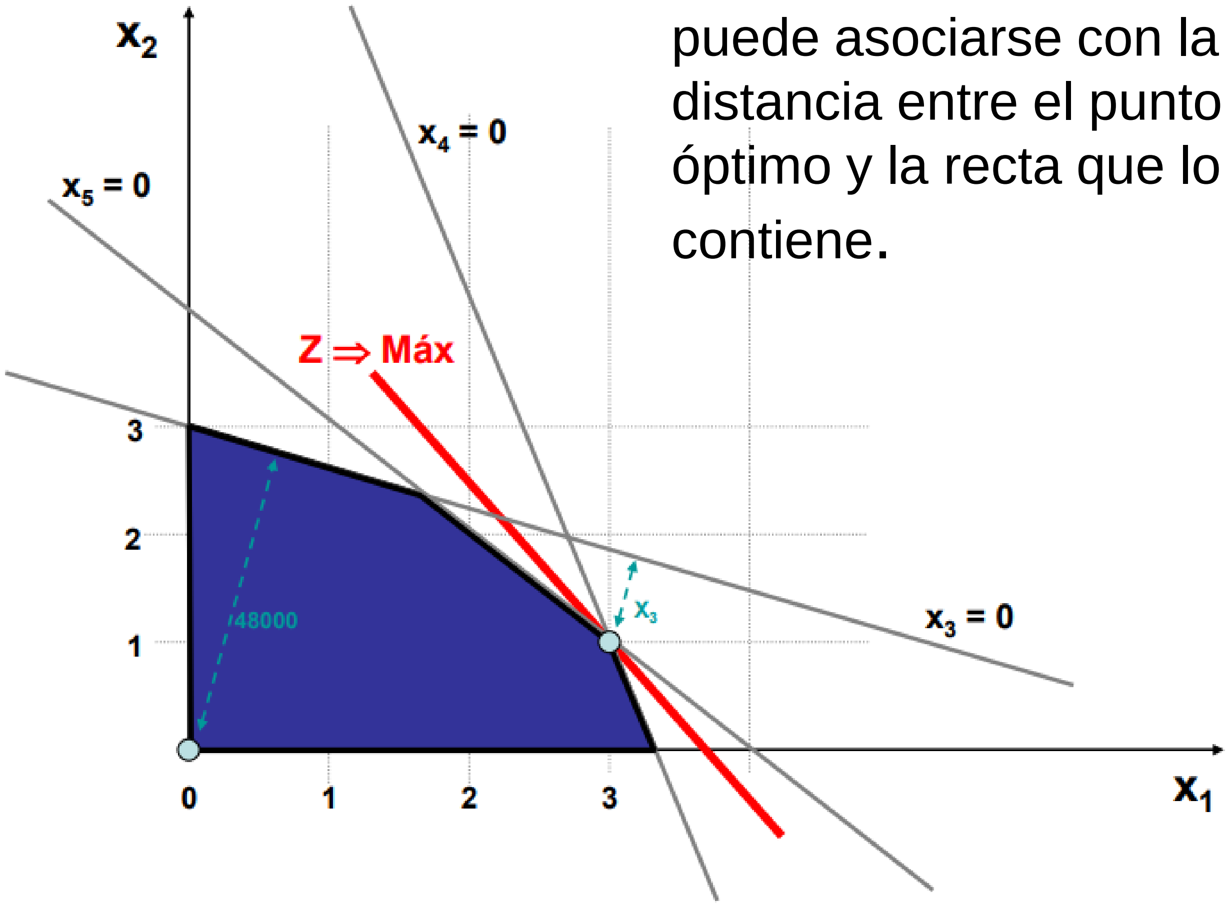
En la solución óptima, el valor de x_3 es de 14000 seg/sem, es decir, la diferencia entre la disponibilidad (48000) y la utilización (34000) del recurso. Este valor se puede hallar también gráficamente midiendo la distancia del punto óptimo a la recta “estampado”.

En el origen de coordenadas, la utilización del recurso es 0, lo que implica que el sobrante es 48000.

Por otra parte, se puede observar gráficamente en la solución optima del problema que los sobrantes de los recursos “soldado” y “pintado” son nulos, ya que ese punto se encuentra sobre las rectas $x_4 = 0$ y $x_5 = 0$.

VARIABLES SLACKS





Cada variable slacks puede asociarse con la distancia entre el punto óptimo y la recta que lo contiene.

DISTINTAS FORMAS DE FORMULAR UN PROBLEMA DE PL

FORMA CANÓNICA: para un problema de k variables y m restricciones:

$$
\begin{array}{ll}
\text{MAX:} & c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \dots\dots\dots + c_k x_k \\
\text{Sujeto a:} & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots\dots\dots + a_{1k} x_k \leq b_1 \\
 & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \dots\dots\dots + a_{2k} x_k \leq b_2 \\
 & a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \dots\dots\dots + a_{3k} x_k \leq b_3 \\
 & \dots\dots\dots \\
 & a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \dots\dots\dots + a_{mk} x_k \leq b_m \\
\text{siendo:} & x_j \geq 0
\end{array}
$$

Problema de maximización: TODAS las restricciones de la forma ≤

Problema de minimización: TODAS las restricciones de la forma ≥

DISTINTAS FORMAS DE FORMULAR UN PROBLEMA DE PL

Para nuestro problema:

MAX:	$c_1 x_1 + c_2 x_2$
Sujeto a:	$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1$
	$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq b_2$
	$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 \leq b_3$
con	$x_1, x_2 \geq 0$ y continuas

Agregando las variables slacks, se pasa a la forma estándar:

DISTINTAS FORMAS DE FORMULAR UN PROBLEMA DE PL

FORMA ESTÁNDAR:

MAX $\quad c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \ldots\ldots\ldots + c_k x_k$

Sujeto a

$$
\begin{aligned}
&a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{1k} x_k + x_{k+1} = b_1\\
&a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{2k} x_k + x_{k+2} = b_2\\
&a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{3k} x_k + x_{k+3} = b_3\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{mk} x_k + x_n = b_m
\end{aligned}
$$

siendo $\quad x_j \geq 0$

DISTINTAS FORMAS DE FORMULAR UN PROBLEMA DE PL

Para nuestro problema:

$$
\begin{array}{ll}
\text{MAX:} & c_1 x_1 + c_2 x_2 \\
\text{Sujeto a:} & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad = b_1 \\
 & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \qquad + x_4 \qquad\quad = b_2 \\
 & a_{31} x_1 + a_{32} x_2 \qquad\qquad\quad + x_5 = b_3 \\
\text{con} & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \text{ y continuas}
\end{array}
$$

DISTINTAS FORMAS DE FORMULAR UN PROBLEMA DE PL

FORMA MATRICIAL:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 & & \\ a_{21} & a_{22} & & 1 & \\ a_{31} & a_{32} & & & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de coeficientes tecnológicos (parámetros que afectan a las variables en las condiciones de vínculo)

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Matriz (vector columna) de las variables

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Matriz (vector columna) de los términos independientes

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{bmatrix}$$

Matriz (vector fila) de los coeficientes del funcional

DISTINTAS FORMAS DE FORMULAR UN PROBLEMA DE PL

En la formulación del problema la función objetivo es el producto matricial: $Z = C \cdot X$

Y las condiciones de vínculo, el producto matricial: $A \cdot X = B$

Siendo además el vector $X \geq 0$

En efecto, el producto matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 & & \\ a_{21} & a_{22} & & 1 & \\ a_{31} & a_{32} & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Es el sistema de ecuaciones correspondiente a la forma estándar, y el producto vectorial

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

es el funcional a maximizar.

DISTINTAS FORMAS DE FORMULAR UN PROBLEMA DE PL

FORMA PRODUCTO VECTORIAL: sean los vectores

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{bmatrix} \;;\; A_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} \;;\; A_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;;\; A_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \;;\; A_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, el funcional y las condiciones de vínculo correspondientes a la forma estándar del problema:

MAX:	$\sum c_j \cdot x_j$
Sujeto a	$\sum A_j \cdot x_j = B$

Es decir, las condiciones de vínculo se pueden expresar como el siguiente producto vectorial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{bmatrix} \cdot x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} \cdot x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x_4 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot x_5 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

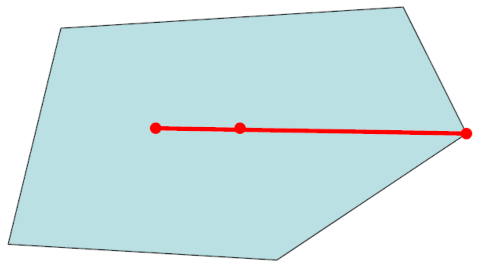
SOLUCIONES

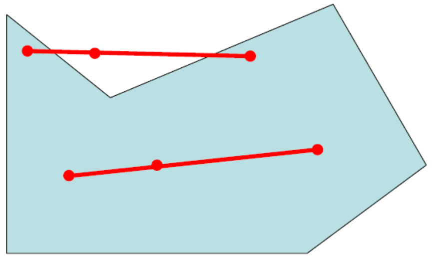
Una solución de un problema de programación matemática puede expresarse como un vector de variables (reales y slacks). En forma gráfica, una solución queda representada por un punto.

- *Soluciones factibles*: aquellas que satisfacen todas las restricciones.
- Solución óptima: solución factible que proporciona el valor más favorable de la función objetivo. Puede ser óptima múltiple si se tiene más de una solución que produce el resultado óptimo.
- *Soluciones no factibles*: no satisfacen todas las restricciones.

Gráficamente, las soluciones factibles definen un conjunto que se llama recinto de soluciones factibles, los cuales pueden ser convexos o no convexos.

CONVEXO





NO CONVEXO

Los problemas de programación lineal con variables continuas definen siempre poliedros convexos. En el caso particular de dos variables, el recinto es un polígono convexo.

SOLUCIONES

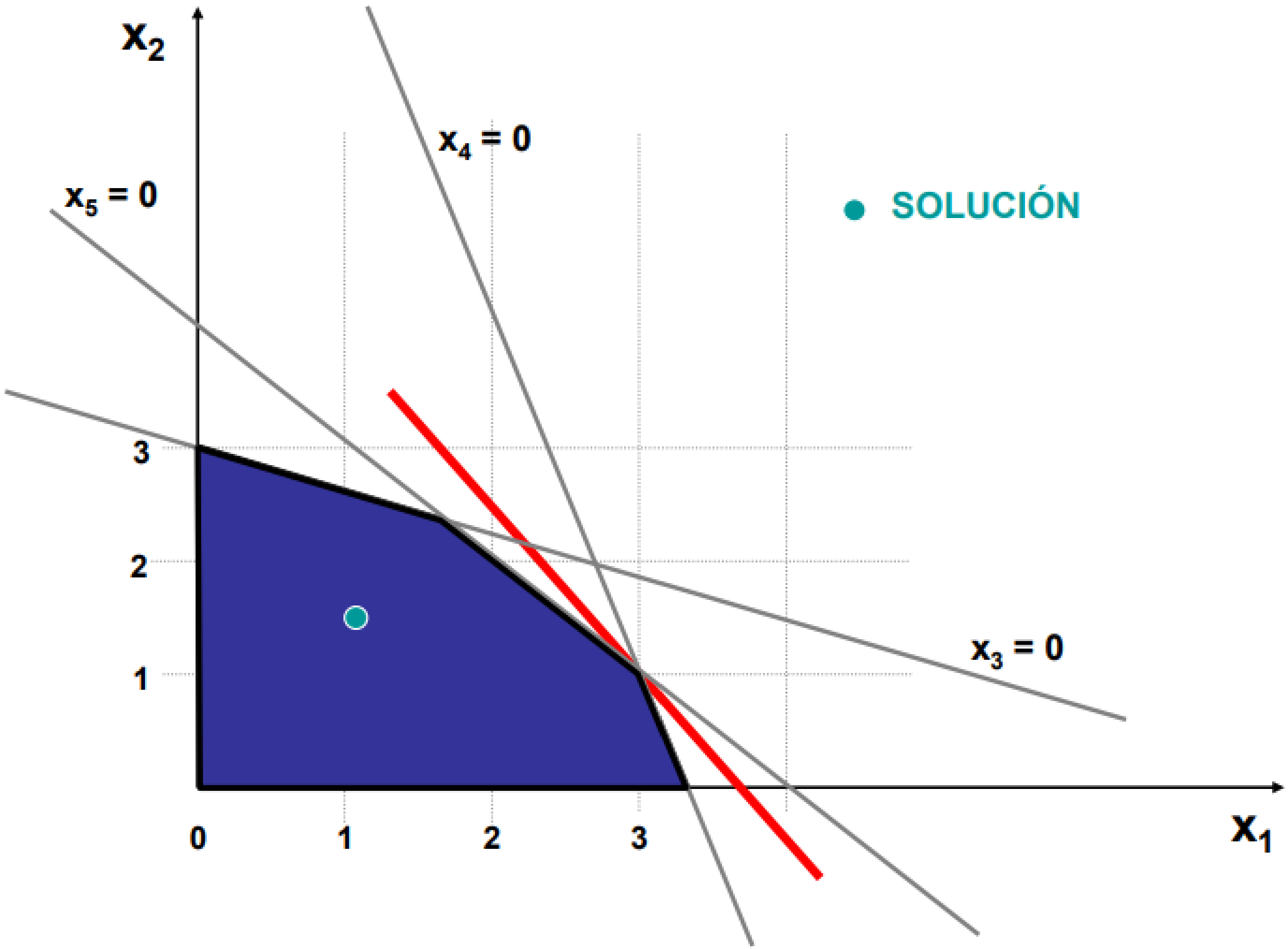
Solución básica

En un problema de programación lineal de “n” variables (reales y slacks) y “m” restricciones, se define como solución básica a aquella en la que por lo menos “n - m” variables son nulas. Teniendo en cuenta nuestros ejemplo, donde la cantidad de variables “n” es 5 y la cantidad de restricciones “m” es 3, analizaremos algunos puntos.

n = número de variables (5)

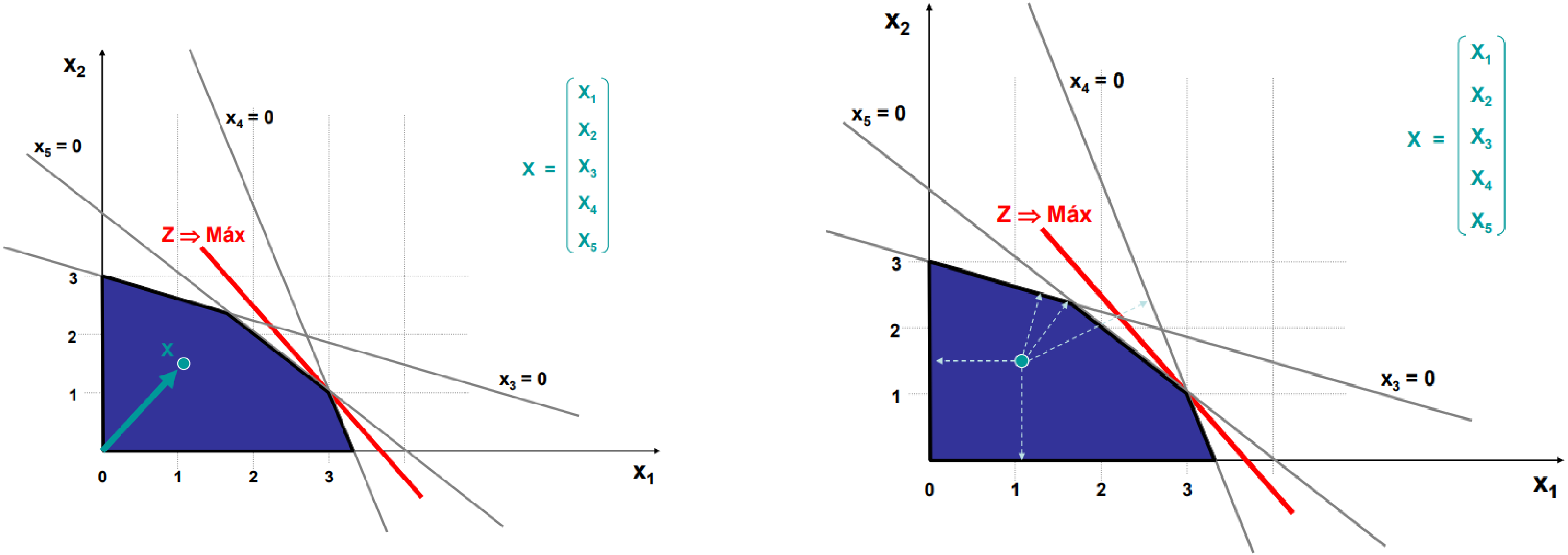
m = número de restricciones (3)

SOLUCIONES

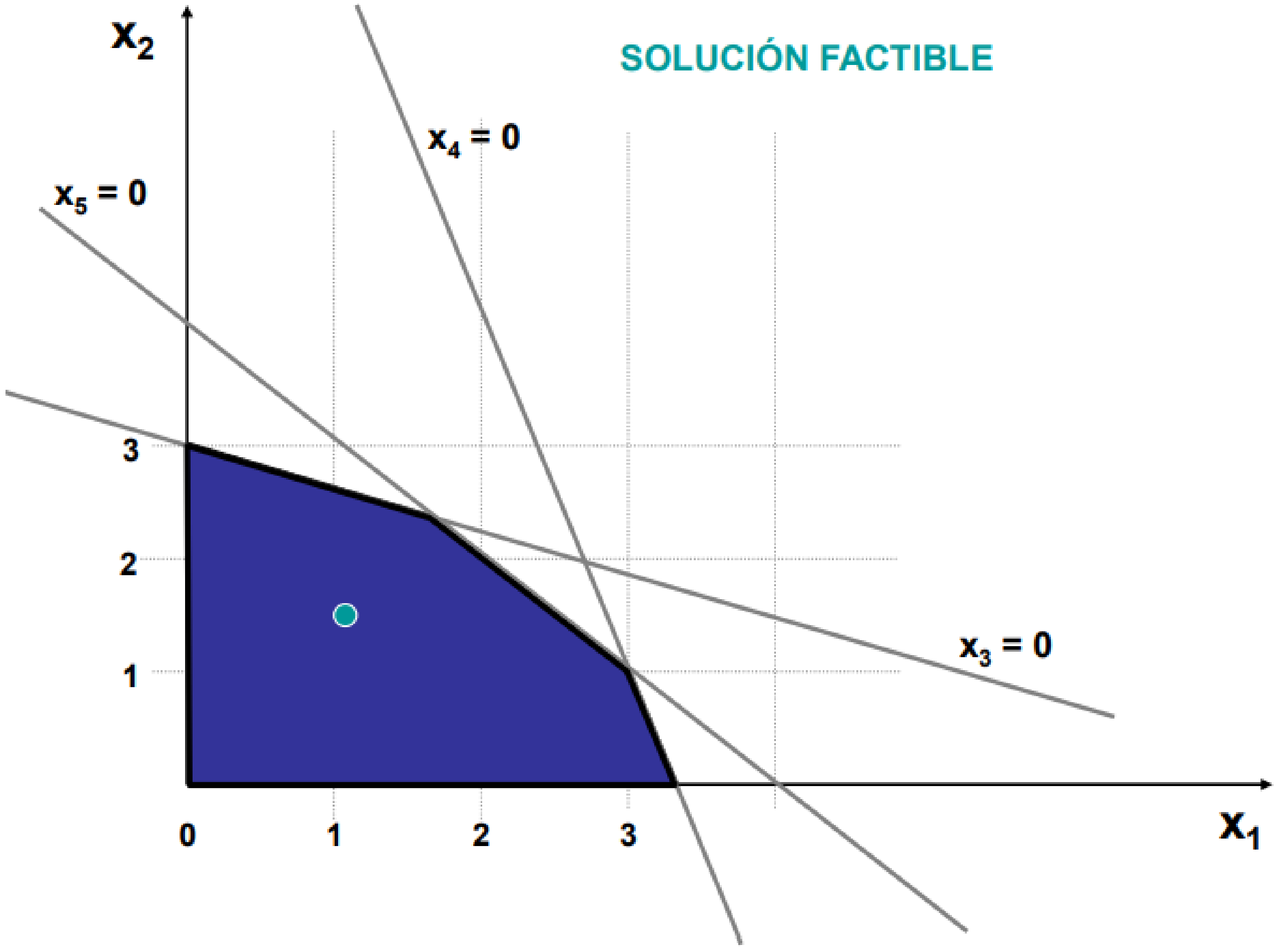


SOLUCIONES

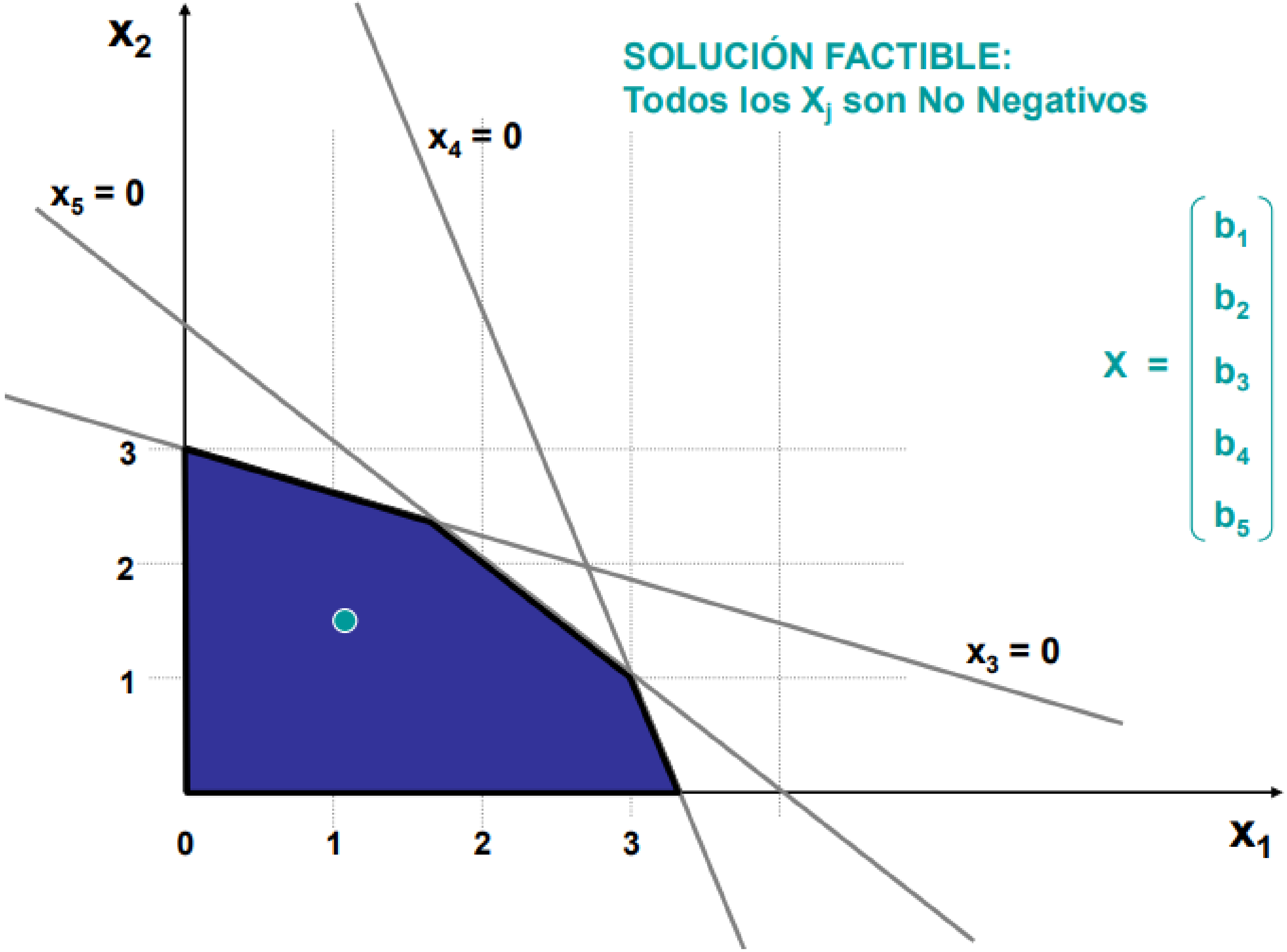
Representamos cada solución a través de un vector en donde sus elementos componentes representan el valor que adopta cada una de las variables.



SOLUCIONES

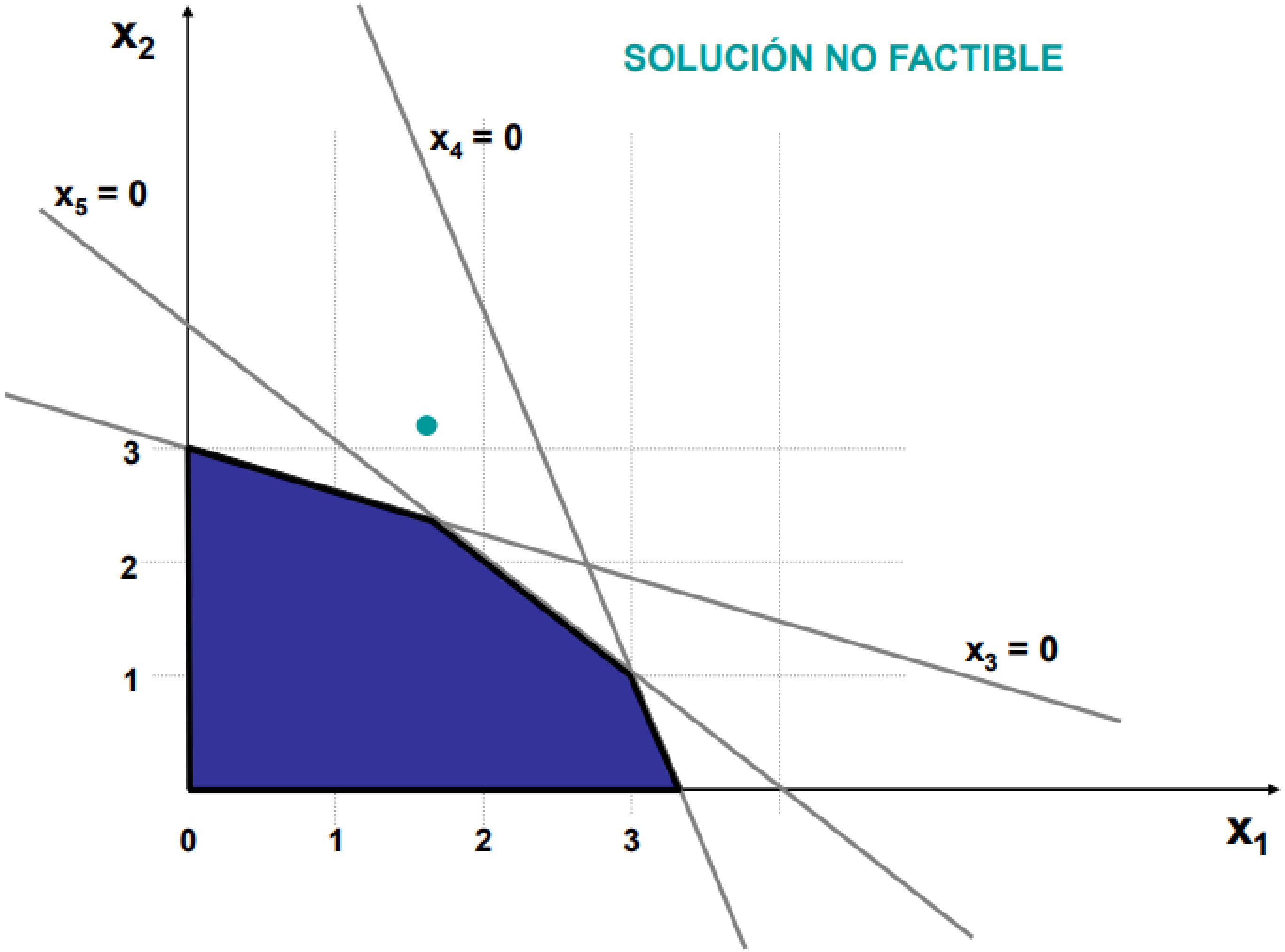


SOLUCIONES

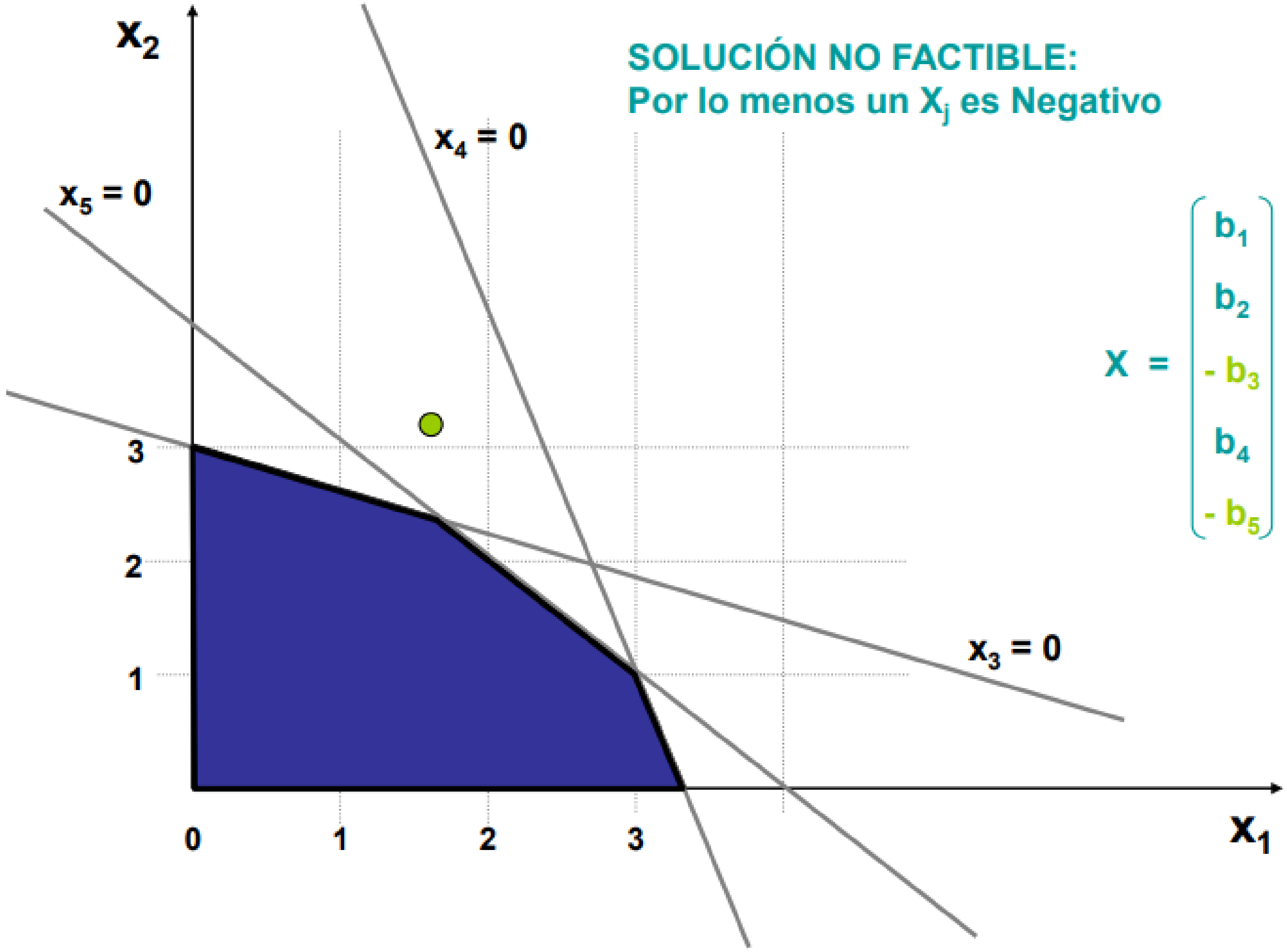


x_2
$x_4 = 0$
$x_5 = 0$
SOLUCIÓN FACTIBLE:
Todos los X_j son No Negativos
$X = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix}$
3
2
1
$x_3 = 0$
0
1
2
3
x_1

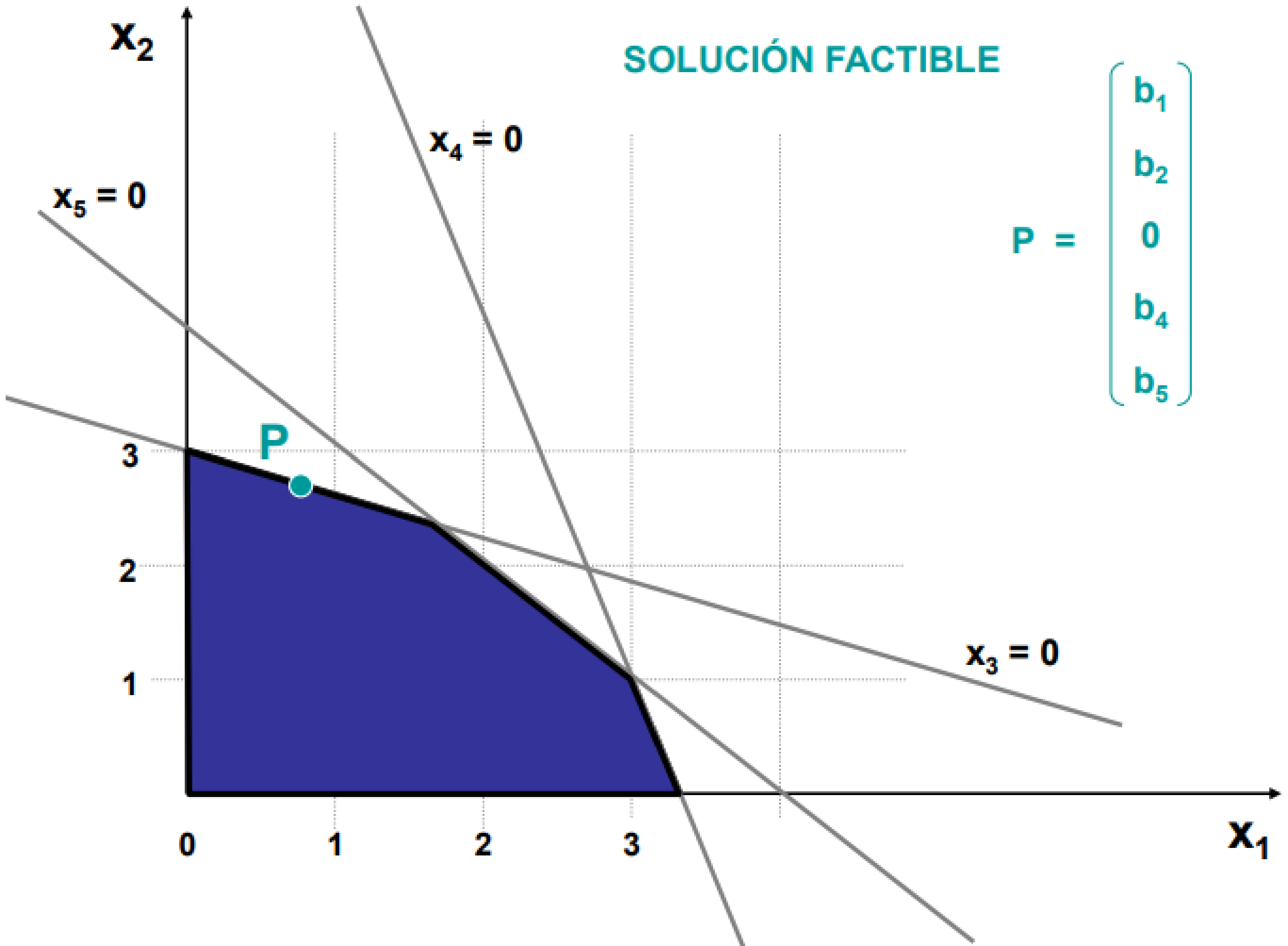
SOLUCIONES



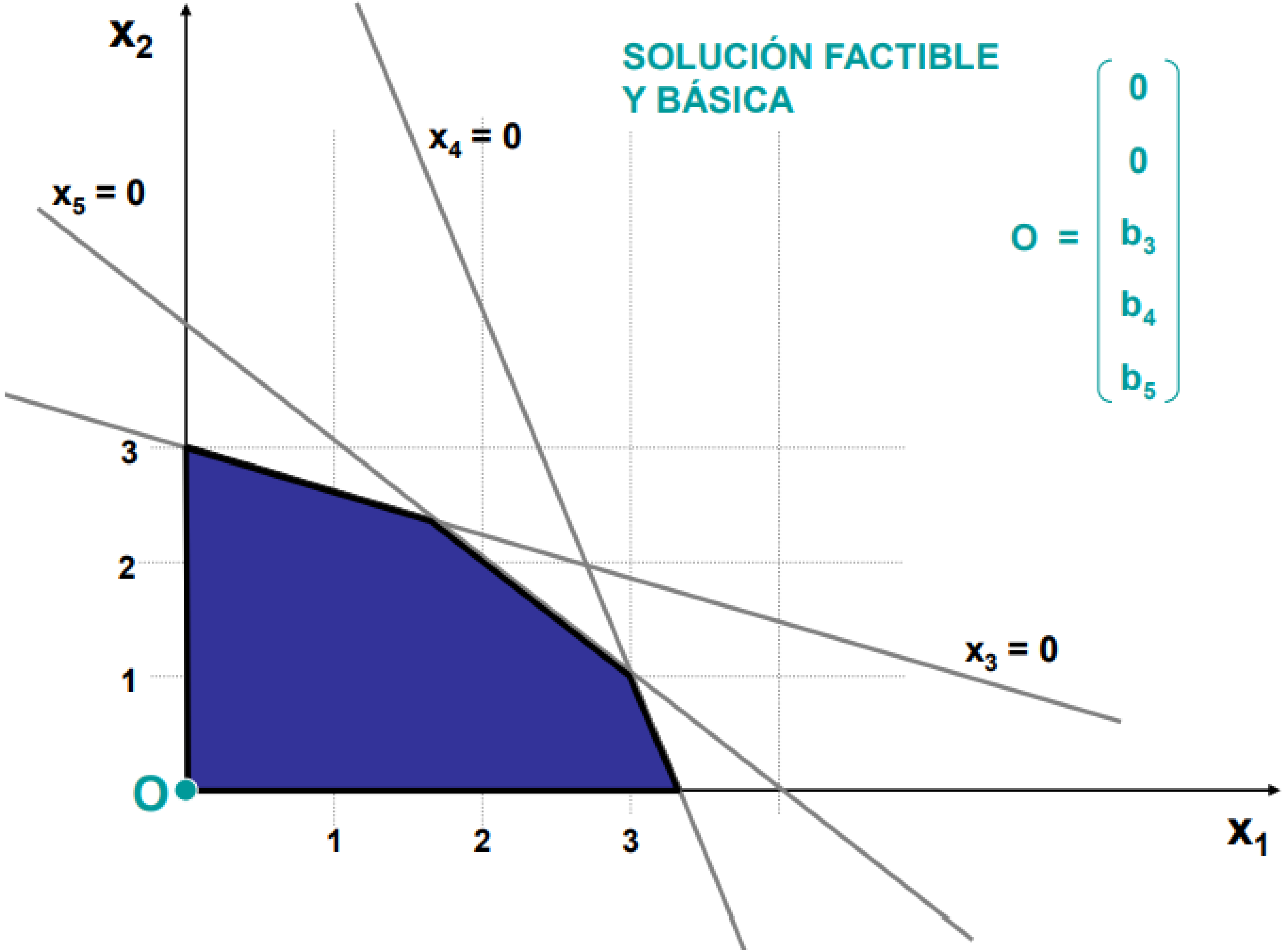
SOLUCIONES


SOLUCIÓN NO FACTIBLE:
Por lo menos un X_j es Negativo
x_2
$x_4 = 0$
$x_5 = 0$
$x_3 = 0$
3
2
1
0
1
2
3
x_1
$X = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ -b_3 \\ b_4 \\ -b_5 \end{pmatrix}$

SOLUCIONES

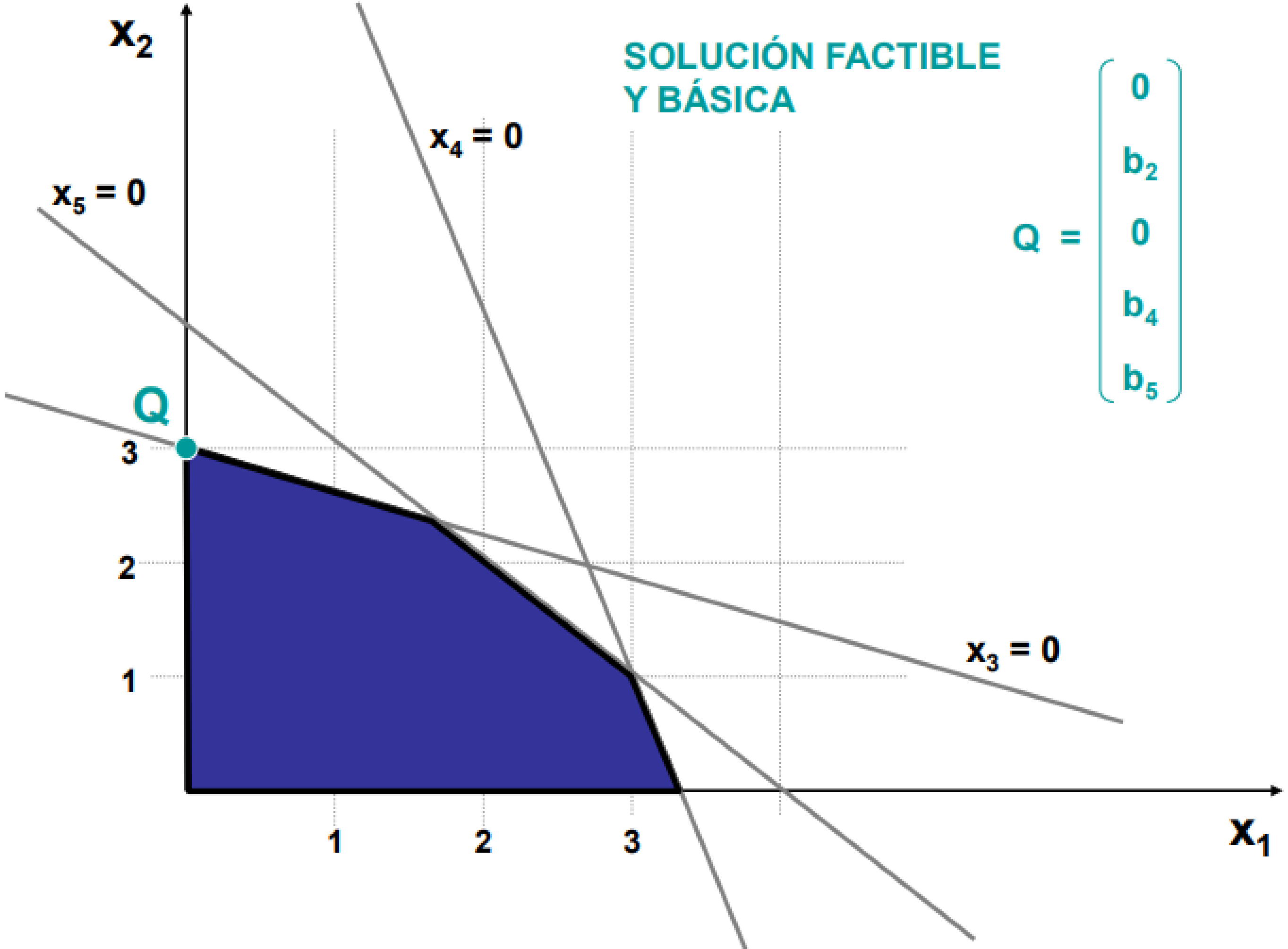


SOLUCIONES



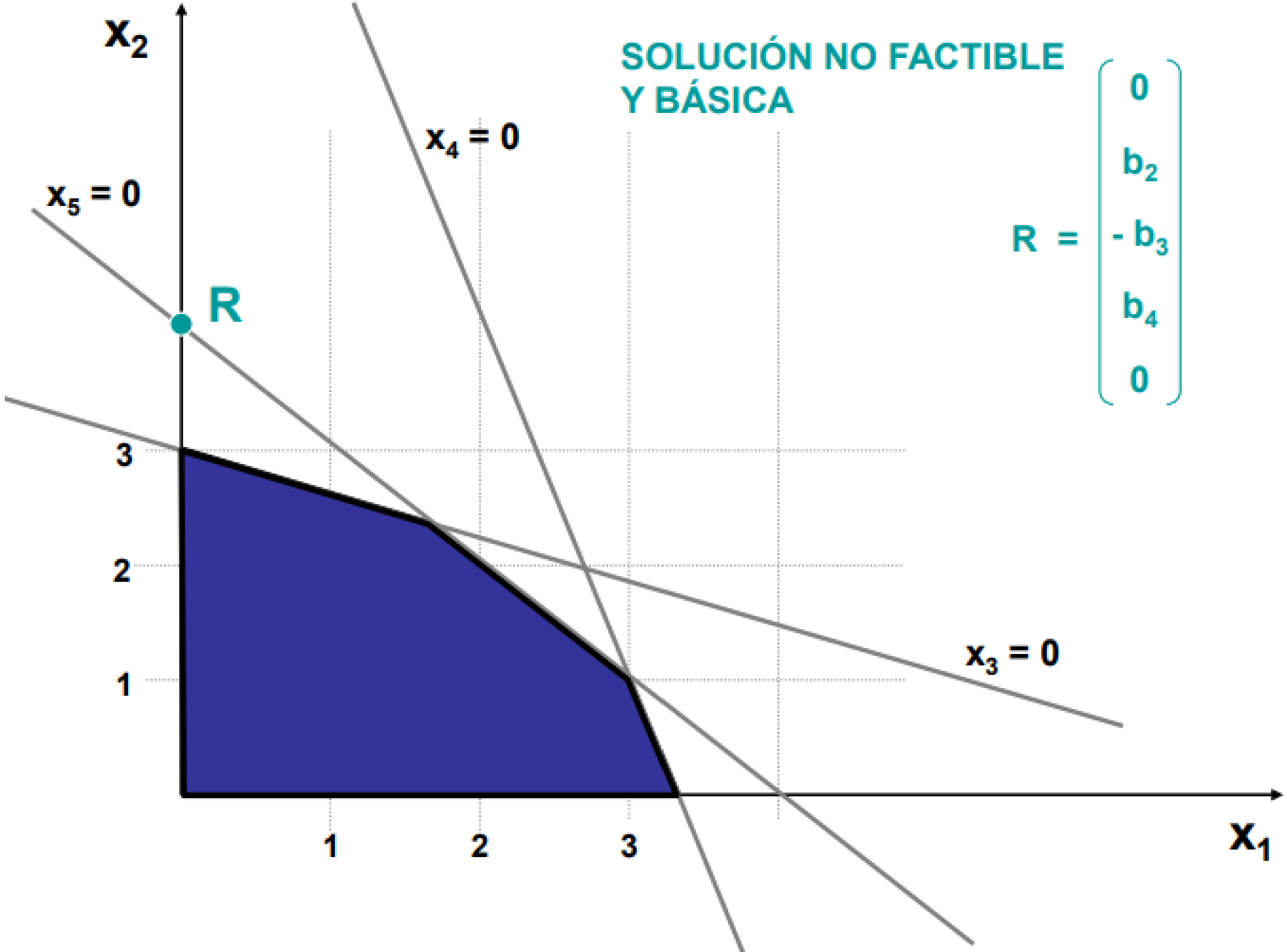
x2
SOLUCIÓN FACTIBLE
Y BÁSICA
x4 = 0
x5 = 0
O =
0
0
b3
b4
b5
3
2
1
x3 = 0
O
1
2
3
x1

SOLUCIONES



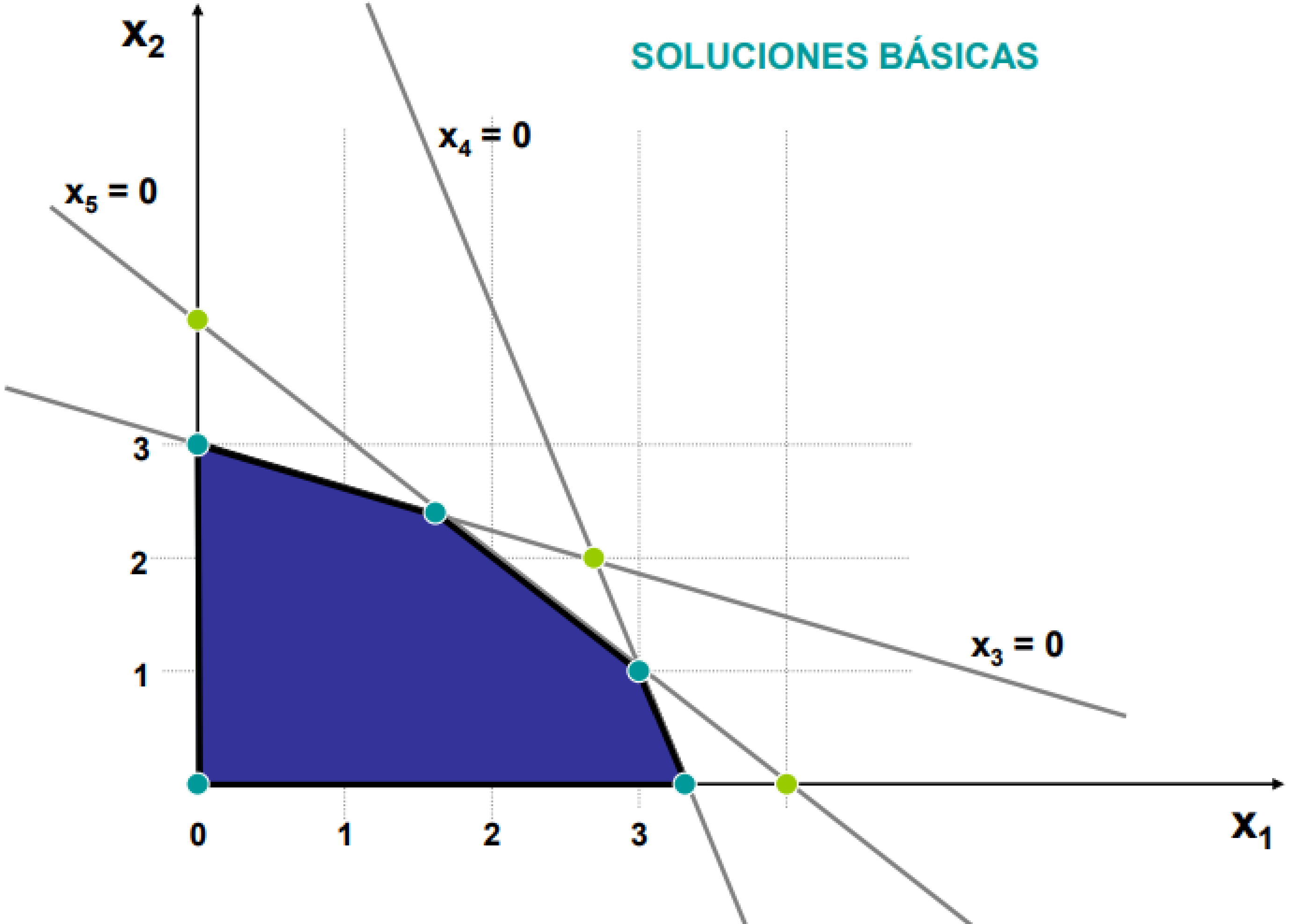
x_2
x_1
SOLUCIÓN FACTIBLE
Y BÁSICA
$x_4 = 0$
$x_5 = 0$
$x_3 = 0$
Q
1
2
3
1
2
3
$Q = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix}$

SOLUCIONES

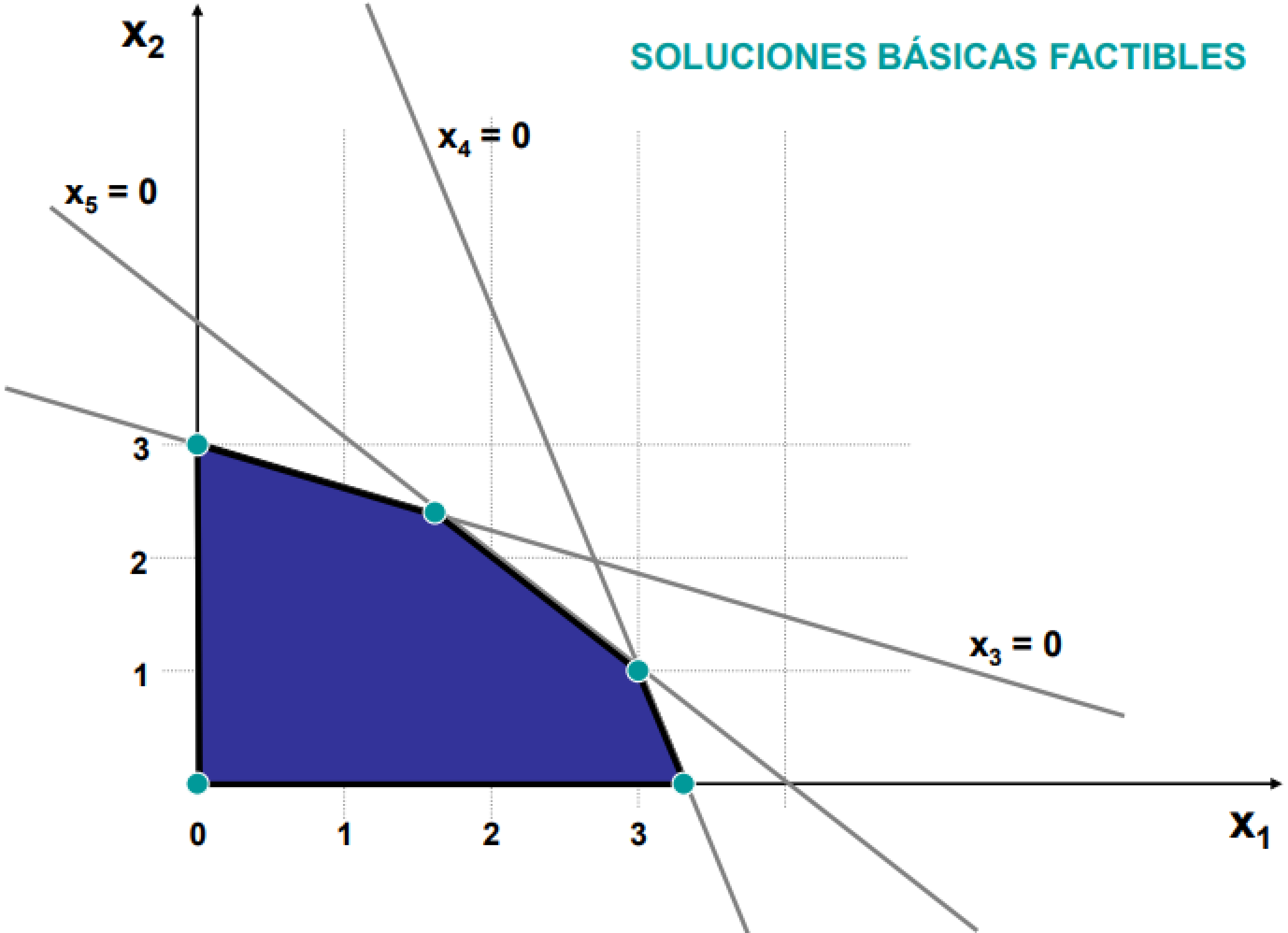


x_2
$x_4 = 0$
$x_5 = 0$
R
3
2
1
1
2
3
$x_3 = 0$
x_1
SOLUCIÓN NO FACTIBLE
Y BÁSICA
$R = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ -b_3 \\ b_4 \\ 0 \end{pmatrix}$

SOLUCIONES



SOLUCIONES



SOLUCIONES