TD 1 : Diagonalisation des matrices

Module : Mathématiques de base 3 **Classes :** 2^{eme} année **AU : 2024 / 2025**

Exercise 1 :

On considère les deux matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Calculer le déterminant de A. On a :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 + C_3 \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

   (b) Déduire une valeur propre λ_1 de A.
   Soient λ_1, λ_2 et λ_3 les valeurs propres de A. On sait que

$$\det(A) = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 = 0.$$

   Ainsi A admet necessairement une valeur propre nulle. (On choisit par exemple λ_1=0).

2. Montrer que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A et déduire une deuxième valeur propre λ_2 de A.

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\lambda_2 = -1$ est une valeur propre de A.

3. Sans passer par la détermination du polynôme caractéristique, donner l'ensemble des valeurs propres de A et leurs ordres de multiplicité.

   On sait que

$$\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 - 1 + \lambda_3 = -2.$$

   Ainsi $\lambda_3 = -1$ et sp(A)=$\{0, -1\}$ où $m_0 = 1$ et $m_{-1} = 2$.

4. (a) Pour chaque valeur propre de A, déterminer la dimension du sous-espace propre associée.

   Pour toute valeur propre λ de A on a :

$$1 \leq \dim\left(E_\lambda(A)\right) \leq m_\lambda$$

   Ainsi en paticulier pour $\lambda = 0$ on a

$$1 \leq \dim\left(E_0(A)\right) \leq m_0 = 1$$

   Donc :

$$\dim\left(E_0(A)\right) = 1$$

   Trouvons maintenant $\dim\left(E_{-1}(A)\right)$ On a

$$E_{-1}(A) = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; \quad A \cdot X = -X \right\}$$

$$A \cdot X = -X \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y & = -x \\ -x + y + z & = -y \\ x - 2z & = -z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ x = z \end{cases}$$

Ainsi

$$E_{-1}(A) = \left\{ X = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \text{ avec } z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \dim\left(E_{-1}(A)\right) = 1$$

(b) En déduire que A n'est pas diagonalisable.

On'a $\dim\left(E_{-1}(A)\right) = 1 \neq m_{-1}$, donc la matrice A n'est pas diagonalisable.

5. (a) Calculer le polynôme caractéristique de B.

$$\begin{aligned}
\chi_B(\lambda) = \det\left(B - \lambda \cdot I_3\right) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ -\lambda & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_3 \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
&= -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda(\lambda + \lambda^2) \\
&= -\lambda^2(1+\lambda)
\end{aligned}$$

(b) Déterminer un seul sous-espace propre de la matrice B pour montrer ensuite que B n'est pas diagonalisable.

On a

$$E_0(B) = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; \quad B \cdot X = 0 \cdot X \right\}$$

$$B \cdot X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2y & = 0 \\ -x + y + z & = 0 \\ 2x - 2z & = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}.$$

Ainsi

$$E_0(B) = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \text{ avec } x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \dim\left(E_0(B)\right) = 1$$

On a $\dim\left(E_0(B)\right) = 1 \neq m_0 = 2$ ainsi B n'est pas diagonalisable.

6. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère la matrice C suivante :

$$C = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2+a & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer en fonction de a le polynôme caractéristique de C.

$$\chi_C(\lambda) = \det\left(C - \lambda \cdot I_3\right) = \begin{vmatrix} a-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 2+a & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ a-\lambda & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_3$$

$$= \begin{vmatrix} a-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$= (a-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(a-\lambda)(\lambda+1)$$

b) Donner en fonction de a les valeurs propres de C et leurs ordres de multiplicité.

sp(C)=$\{a, 0-1\}$. Si $a \neq 0$ et $a \neq -1$ alors A admet trois valeurs propres simples distinctes. Si $a = 0$, alors 0 est une valeur propre double et -1 est une valeur propre simple. Si $a = -1$, alors -1 est une valeur propre double et 0 est une valeur propre simple.

c) Pour quelles valeurs a la matrice C est diagonalisable.

Si $a \neq 0$ et $a \neq -1$ alors A admet trois valeurs propres simples distinctes donc elle est diagonalisable.

Si $a = 0$ ou $a = -1$ on peut voir en utilisant 4) et 5) que C n'est pas diagonalisable.

Exercise 2 :

Pour $m \in \mathbb{R}$, on définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres A.

   Pour déterminer les valeurs propres de A, on calcule son polynôme caractéristique.

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det(A-\lambda.Id_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 2-m & m-2 & m-\lambda \end{vmatrix} \quad C_1 \longleftarrow C_1 + C_3 \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & m-2 & m-\lambda \end{vmatrix} \quad l_3 \longleftarrow l_3 - l_1 \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & m-2 & m-1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ m-2 & m-1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)\left[(2-\lambda)(m-1-\lambda) - (m-2)\right] \\
&= (2-\lambda)\left[\lambda^2 + (m+1)\lambda + m\right] \\
&= (2-\lambda)(1-\lambda)(m-\lambda)
\end{aligned}$$

   $\Rightarrow$ Les valeurs propres de A sont exactement les racines de χ_A, sont $1, 2$ and m.

2. Pour quelles valeurs m la matrice A est elle diagonalisable ?

Condition Necessaire et Suffisante :

Let $A \in M_3(\mathbb{R})$. A est diagonalisable si et seulement si :

   (a) Le polynôme caractéristique χ_A est scindé $\mathbb{R}$, i.e. :

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda)$$

   (b) $dim(E_{\lambda_i}) = m_{\lambda_i}, \quad \forall i = 1, 2, 3$

Condition Suffisante : Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$. Si A admet trois valeurs propres distinctes, Alors A est diagonalisable.

$$\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)(m-\lambda)$$

On peut distinguer trois cas possibles

— **cas 1 :** $m \neq 1$ **et** $m \neq 2$

Alors A admet trois valeurs propres distinctes $\Rightarrow$ Ceci implique que A est diagonalisable.

— **cas 2 :** $m = 1$

Alors A admet deux valeurs propres 1 et 2, avec :

$$m_1 = 2 \quad \text{et} \quad m_2 = 1$$

Ceci implique que A est diagonalisable si et seulement si la dimension du sous-espace propres $\mathbb{E}_1$ assiciée à la valeur propre 1 est égal à $m_1 = 2$.

On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_1 &= \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\, A\, X = X\} \\
&= \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\, (A - I_3)\, X = 0\} \\
&= \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\, \begin{cases} z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \} \\
&= \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\, \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases} \} = \{(x, x, 0),\ x \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x(1, 1, 0),\ x \in \mathbb{R}\} = Vect\{u_1\},\ \text{avec}\ \ u_1 = (1, 1, 0)
\end{aligned}$$

On a $\{u_1\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{E}_1$.

Puisque u_1 est non-nul, alors cette famille est libre.

On conclut donc qu'elle forme une base de $\mathbb{E}_1$.

Ce qui implique que la dimension de $\mathbb{E}_1$ est $1 \neq m_1$.

Ainsi la matrice A n'est pas diagonalisable.

— **cas 3 :** $m = 2$

Alors A admet deux valeurs propres 1 et 2, avec 1 iune valeur propre simple et 2 une valeur propre double.

Ceci implique que A est diagonalisable si et seulement si la dimension du sous-espace propre $\mathbb{E}_2$ associé à la valeur propre 2 est égal à $m_2 = 2$. Notons que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_2 &= \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\, A\, X = 2X\} = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\, (A - 2I_3)\, X = 0\} \\
&= \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\, \begin{cases} -x + z = 0 \\ -x + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \} = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\, \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x \end{cases} \} \\
&= \{(x, y, x),\ x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x, 0, x) + (0, y, 0),\ x, y \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, 0),\ x, y \in \mathbb{R}\} = Vect(v_1, v_2),\ \text{avec}\ \ v_1 = (1, 0, 1)\ \text{and}\ \ v_2 = (0, 1, 0)
\end{aligned}$$

Alors la famille $\{v_1, v_2\}$ est une famille génératrice du sous-espace propre $\mathbb{E}_2$.

De plus, cette famille est libre, elle forme donc une base de $\mathbb{E}_2$.

Ce qui implique que $\dim(\mathbb{E}_2) = 2$.

Par conséquent A is diagonalisable.

3. On prend $m = 2$.

   (a) Diagonaliser la matrice A.

   Pour $m = 2$, d'aprés la question précédente A is diagonalisable.

   Il existe donc une matrice diagonale D dont les ceifficients diagonaux sont exactement les valeurs propres 2 et 1 et une matrice inversible P formée par les vecteurs propres associés a ces valeurs propres telles que :

$$A = P\,D\,P^{-1}$$

   Nous avons trouvé une base de $\mathbb{E}_2$. Elle est donnée par :

$$v_1 = (1, 0, 1) \quad \text{et} \quad v_2 = (0, 1, 0)$$

   Pour la valeur propre 1, une base de $\mathbb{E}_1$ est donée par le vetur :

$$v_3 = (1, 1, 0)$$

   Donc

$$A = P\,D\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer A^n.

   On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A^n = P\,D^n\,P^{-1}$$

   avec :

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercise 3 :

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.

   Le polynôme caractéristique A notée χ_A est donné par

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \quad C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1-\lambda & -1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \quad L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 1-\lambda & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(2+\lambda)\left[(1-\lambda)(-1-\lambda) - (1-\lambda)\right] = -(2+\lambda)(1-\lambda)(-2-\lambda) \\
&= (1-\lambda)(2+\lambda)^2
\end{aligned}$$

2. Déterminer les valeurs propres de A et leurs ordres de multiplicité.

   Les valeurs propres de A sont exactement les racine du polynôme caractéristique χ_A.

   On déduit que les valeurs propres de A sont :

   $\lambda_1 = 1$ d'ordre de multiplicité 1 et $\lambda_2 = -2$ d'ordre de multiplicité 2 .

3. Montrer que A est diagonalisable.

   Dans ce qui suit, nous rappellerons un résultat du cours :

   Condition nécessaire et suffisante : Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$, la matrice A est diagonalisable si et seulement si :

   (a) Le polynôme caractéristique χ_A est scindé dans $\mathbb{R}$, i.e. :

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda)$$

   (b) $dim(E_{\lambda_i}) = m_{\lambda_i}, \ \ \forall i = 1, 2, 3$

   D'une part on'a, le polynôme caractéristique χ_A est scindé dans $\mathbb{R}$.

   D'autre part, A admet deux valeurs propres 1 comme valeur propre simple et -2 comme valeur propre double.

Donc, A est diagonalisable si et seulement si la dimension de sous-espace propre $\mathbb{E}_{-2}$ associée à -2 est égal $m_{-2} = 2$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{-2} &= \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ A\,X = -2X\} = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (A + 2I_3)\,X = 0\} \\
&= \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \} = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = -y - z\} \\
&= \{(x, x, 0),\ x \in \mathbb{R}\} = \{y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1),\ y, z \in \mathbb{R}\} \\
&= Vect\{u_1, u_2\},\ \text{avec}\ \ u_1 = (1, 1, 0)\ \text{et}\ \ u_2 = (-1, 0, 1)
\end{aligned}$$

On déduire que $\{u_1, u_2\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{E}_{-2}$.

De plus cette famille est libre, donc une base de cet espace est donnée par les deux vecteurs u_1 et u_2. En particulier $\mathbb{E}_2$ est de dimension $2 = m_2$.

Ce qui permet de conclure que A est diagonalisable.

4. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que :

$$A = P\,D\,P^{-1}$$

La matrice A est diagonalisable, donc il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que :

$$A = P\,D\,P^{-1}$$

La matrice D est formé par les valeurs propres A, donc elle est définie par :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

De plus, la matrice P est formé par les vecteurs propres de A.

Nous avons déjà déterminé les deux premiers vecteurs u_1 et u_2. Il reste à déterminer le troisième vecteur qui doit être une base de $\mathbb{E}_1$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_1 &= \{X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ A\,X=X\} = \{X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ (A+I_3)\,X=0\}\\
&= \{X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ \begin{cases}-2x+y+z=0\\ x-2y+z=0\\ x+y-2z=0\end{cases}\} = \{X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ \begin{cases}y=2x-z\\ z=-3x\\ x+y+2z=0\end{cases}\}\\
&= \{X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ \begin{cases}y=x\\ z=x\\ x+y-2z=0\end{cases}\} = \{(x,x,x)\ x\in\mathbb{R}\}\\
&= \{x(1,1,1)\ x,y\in\mathbb{R}\} = Vect(u_3),\ \text{avec}\ \ u_3=(1,1,1)
\end{aligned}$$

Donc

$$P=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\qquad P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

5. Calculer A^n pour $n\in\mathbb{N}$.
   On'a $A=P.D.P^{-1}$ avec P^{-1} est la matrice inverse de P donc,

$$A^n=P.D^n.P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1^n&0&0\\0&(-2)^n&0\\0&0&(-2)^n\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-(-2)^n&-(-2)^n\\1&(-2)^n&0\\1&0&(-2)^n\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

   Donc,

$$A^n=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+(-2)^n+(-2)^n&1-2(-2)^n+(-2)^n&1+(-2)^n+(-2)^{n+1}\\1-(-2)^n&1+2(-2)^n&1-(-2)^n\\1-(-2)^n&1-(-2)^n&1+2(-2)^n\end{pmatrix}$$

6. On considère les trois suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $x_0=1,\ y_0=0,\ z_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{cases}x_{n+1}=-x_n+y_n+z_n\\ y_{n+1}=x_n-y_n+z_n\\ z_{n+1}=x_n+y_n-z_n\end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = A \cdot X_n$. On'a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} x_{n+1} = -x_n + y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n - y_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n - z_n \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow X_{n+1} = A \cdot X_n.$$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = A^n \cdot X_0$.

Soit la suite X_n définie par récurrence :

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_{n+1} = A \cdot X_n$$

Les premiers termes de la suite sont :

$$X_1 = A \cdot X_0$$

$$X_2 = A \cdot X_1 = A \cdot A \cdot X_0 = A^2 \cdot X_0.$$

$$X_3 = A \cdot X_2 = A \cdot A^2 \cdot X_0 = A^3 \cdot X_0.$$

En général, après n itérations, nous avons :

$$X_n = A^n \cdot X_0.$$

(c) Déterminer alors x_n, y_n et z_n en fonction de n.

D'après question 6)b) on'a montré que : $X_n = A^n \cdot X_0$. D'où d'après question 5) on'a :

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + (-2)^n + (-2)^n & 1 - 2(-2)^n + (-2)^n & 1 + (-2)^n + (-2)^n \\ 1 - (-2)^n & 1 + 2(-2)^n & 1 - (-2)^n \\ 1 - (-2)^n & 1 - (-2)^n & 1 + 2(-2)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$\begin{cases} x_n = \frac{1}{3}\ (1 + (-2)^n + (-2)^n) = \frac{1}{3}\ (1 + 2(-2)^n) \\ y_n = \frac{1}{3}\ (1 - (-2)^n) \\ z_n = \frac{1}{3}\ (1 - (-2)^n) \end{cases}$$