TD2 : Trigonalisation des matrices

Module : Mathématiques de Base 3 **Classes :** $2^{\text{ème}}$ année **AU : 2024/2025**

Correction

Exercice 1 :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$. Est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?.

   Le polynôme caractéristique de A est donné par :

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda.I_3) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

   Puisque la dernière colonne a un seul terme non nul, on peut développer le déterminant par rapport à la troisième colonne :

$$\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-4\lambda + \lambda^2 + 4)$$

   Donc, le polynôme caractéristique est :

$$\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (2-\lambda)(\lambda-2)^2 = -(\lambda-2)^3$$

   Comme le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ alors A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
   La seule valeur propre de A est 2 avec ordre de multiplicité égale à 3, donc, pour dire que A est diagonalisable ou non, on a besoin de déterminer la dimension du sous espace propre

associé à la valeur propre 2 qu'on note par E_2. On a

$$\begin{aligned}
E_2 &= \{X=(x,y,z)^t \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R});\ A\,X = 2X\} = \{X=(x,y,z)^t \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R});\ (A-2I_3)\,X = 0_{\mathbb{R}^3}\} \\
&= \{X=(x,y,z)^t \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R});\ \begin{cases} -2x+y=0 \\ -4x+2y=0 \\ -2x+y=0 \end{cases}\} = \{X=(x,y,z)^t \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R});\ y=2x\} \\
&= \{(x,2x,z),\ x\in\mathbb{R}^*\} = \{x(1,2,0)+z(0,0,1);\ x,z\in\mathbb{R}^*\} \\
&= Vect(v_1,v_2),\ \text{avec } v_1=(1,2,0)^t \ \ et \ \ v_2=(0,0,1)^t.
\end{aligned}$$

La dimension de E_2 est alors égale à 2 ($\dim E_2 \neq 3$), ce qui prouve que A n'est pas diagonalisable.

2. Déterminer une matrice triangulaire supérieure T semblable à A et donner la matrice de passage P.

Pour trigonaliser A, on commence à chercher un vecteur v_3 vérifiant $Av_3 = av_1 + bv_2 + 2v_3$ où $(a,b)\neq(0,0)$, cela revient à résoudre le système d'équations suivant

$$\begin{cases} -2x_1+x_2=a \\ -4x_1+2x_2=2a \\ -2x_1+x_2=b \end{cases}$$

On fixe par exemple $a=b=1$, le système admet donc comme solution $(x_1, 1+2x_1, x_3)$. On prend $v_3=(0,1,0)$ $(x_1=0,\ x_3=0)$ et on vérifie que la famille $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Déterminer une matrice triangulaire supérieure T semblable à A et donner la matrice de passage P.
Puisque A est trigonalisable, il existe alors une matrice de passage P inversible
et une une matrice triangulaire supérieure T écrite dans la base B telle que :

$$A = PTP^{-1}.$$

Comme 2 est la seule valeur propre, la matrice triangulaire T prend la forme :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

P est la matrice de passage composée des vecteurs propres : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

et son inverse P^{-1} est donné par $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. On se propose de calculer par deux méthodes les puissances A^n pour tout entier $n \geq 0$.

   $a)$ Première méthode

   ⓘ Montrer que T peut s'écrire sous la forme $T = \lambda(Id + N)$, où λ est un réel et N est une matrice nilpotente d'indice 2.

   La matrice T peut s'écrire sous la forme :

$$T = \lambda(I + N)$$

avec $\lambda = 2$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ telle que $N^2 = 0$. En effet :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où $N^n = 0 \ \forall n \geq 2$, N est alors une matrice nilpotente d'indice 2.

(ii) Calculer T^n et en déduire A^n pour tout $n \geq 0$. Comme $T = 2(I + N)$, on a ainsi :

$$T^n = 2^n(I+N)^n \text{ avec } N^n = 0 \ \forall n \geq 2.$$

Le développement binomial nous donne alors :

$$(I+N)^n = I + nN,$$

il vient que

$$T^n = 2^n(I + nN) = 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & n/2 \\ 0 & 1 & n/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul de A^n : Enfin, comme $A = PTP^{-1}$, on en déduit que :

$$A^n = PT^nP^{-1} = P \left(2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & n/2 \\ 0 & 1 & n/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) P^{-1}$$

On obtient ainsi

$$A^n = 2^n \begin{pmatrix} 1-n & \frac{n}{2} & 0 \\ -2n & n+1 & 0 \\ -n & n/2 & 1 \end{pmatrix} \textbf{ pour tout } n \geq 0$$

$b)$ **Deuxième méthode : En montrant que $(A-2I_3)^n = 0$ pour tout $n \geq 2$, retrouver l'expression de A^n pour tout $n \geq 0$.**

On a

$$(A-2I_3)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

d'où

$$(A-2I_3)^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \forall n \geq 2$$

Calcul de A^n :

$$\begin{aligned} A^n &= (A - 2I_3 + 2I_3)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (A-2I_3)^k (2I_3)^{n-k} \\ &= 2^n I_3 + n2^{n-1}(A-2I_3) \\ &= \begin{pmatrix} 2^n(1-n) & n2^{n-1} & 0 \\ -n2^{n+1} & 2^n(n+1) & 0 \\ -n2^n & n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 2 :

Soit A_m la matrice définie par

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1+m & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } m \in \mathbb{R}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A_m.

Le polynôme caractéristique de A_m est donné par

$$\chi_{A_m}(\lambda) = \det(A_m - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1+m-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

En développant suivant la deuxième ligne, on obtient

$$\chi_{A_m}(\lambda) = -(\lambda - (1+m))(\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

2. Montrer que A_0 n'est pas diagonalisable.

   Pour $m = 0$, les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$ avec ordre de multiplicité égale à 2 et $\lambda_2 = -1$ avec ordre de multiplicité égale à 1.

   Donc, pour dire que A est diagonalisable ou non, on a besoin de déterminer la dimension du sous espace propre associé à la valeur propre 1 qu'on note par E_1.

$$\begin{aligned} E_1 &= \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R});\, AX = X\} = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R});\, (A - I_3)X = 0\} \\ &= \{X = (x,y,z)^t \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R});\, \begin{cases} y + z - x = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}\} = \{X = (x,y,z)^t \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R});\, y = 0, z = x\} \end{aligned}$$

   On obtient ainsi

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x,0,x)^t,\ x \in \mathbb{R}^*\} = \{x(1,0,1)^t,\ x \in \mathbb{R}^*\} \\ &= Vect(W) \text{ avec } W = (1,0,1)^t \end{aligned}$$

   Le sous espace propre associé à la valeur propre 1 est alors de dimension 1 ($\dim E_1 \neq 2$), ce qui prouve que A_0 n'est pas diagonalisable.

3. Montrer que A_0 est semblable à la matrice

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Comme le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$, A est alors semblable à une matrice triangulaire supérieure T. Pour trouver la matrice T, on commence par chercher le sous espace propre associé à la valeur propre -1 :

$$
\begin{aligned}
E_{-1} &= \{X=(x,y,z)^t \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R});\ A\,X=-X\} \\
&= \{X=(x,y,z)^t \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R});\ \begin{cases} y+z+x=0 \\ 2y=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}\} = \{X=(x,y,z)^t \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R});\ \begin{cases} y=0 \\ x=-z \end{cases}\} \\
&= \{(-z,0,z)^t,\ z\in\mathbb{R}^*\} = \{z(-1,0,1)^t,\ z\in\mathbb{R}^*\} \\
&= Vect(V),\ \text{ avec }\ V=(-1,0,1)^t.
\end{aligned}
$$

Maintenant, pour trigonaliser A, on cherche un vecteur $Z=(x,y,z)^t \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $A_0 Z = W + Z$. On a alors le système suivant

$$
\begin{cases} -x+y+z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases}
$$

qui admet comme solution $(x,1,x)^t$. On prend $x=0$, donc $Z=(0,1,0)^t$.
On obtient ainsi une base de $\mathbb{R}^3$ donnée par $B=\{V,W,Z\}$. La matrice T écrite dans la base B est alors donnée par

$$
T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

et la matrice de passage est donnée par

$$
P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Exercice 3 :

Soit A la matrice définie par :

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}
$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.

Le polynôme caractéristique de A est donné par

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda.I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & -2 \\ 0 & 6-\lambda & -3 \\ -1 & 4 & -\lambda \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - L3)$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -2+\lambda \\ 0 & 6-\lambda & -3 \\ -1 & 4 & -\lambda \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 + C3)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2+\lambda \\ -3 & 6-\lambda & -3 \\ -1-\lambda & 4 & -\lambda \end{vmatrix} = (-2+\lambda)[-12 - (-1-\lambda)(6-\lambda)]$$

$$= (\lambda - 2)[-12 + (1+\lambda)(6-\lambda)] = -(\lambda-2)(\lambda^2 - 5\lambda - 6) = -(\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

2. Déterminer les valeurs propres de A ainsi que leur ordres de multiplicités.

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

Les valeurs propres de A sont les racines du polynome caractéristique χ_A, d'où $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$ avec $m_2 = 2$ et $m_3 = 1$.

3. Déterminer les sous espaces propres de A.

$$E_3 = \{X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ A\,X = 3X\} = \{X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (A - 3I_3)\,X = 0_{\mathbb{R}^3}\}$$

$$AX = 3X \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4y - 2z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \\ -x + 4y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = y \end{cases}$$

$$E_3 = \{(y,y,y),\ y \in \mathbb{R}\} = \{y(1,1,1),\ y \in \mathbb{R}\}$$

$$= Vect(v_1),\ \text{avec}\ \ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$E_2 = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ A\,X = 2X\} = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (A - 2I_3)\,X = 0_{\mathbb{R}^3}\}$$

$$AX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 4y - 2z = 0 \\ 4y - 3z = 0 \\ -x + 4y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3}y \\ z = \frac{4}{3}y \end{cases}$$

$$E_2 = \{(\frac{4}{3}y, y, \frac{4}{3}y),\ y \in \mathbb{R}\} = \{y(\frac{4}{3}, 1, \frac{4}{3}),\ y \in \mathbb{R}\}$$

$$= Vect(v_2),\ \text{avec}\ \ v_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

4. Montrer que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure T.

On a $\dim(E_2) = 1 < m_2 = 2$, donc A n'est pas diagonalisable mais par contre elle est trigonalisable (comme son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$). D'où A est semblable à une matrice triangulaire supérieure T,

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & \beta \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ \text{avec}\ (\alpha, \beta) \neq (0, 0).$$

Pour la matrice de passage P, on cherche v_3 tel que la famille (v_1, v_2, v_3) une base de $\mathbb{R}^3$ et qui vérifie $Av_3 = \alpha v_1 + \beta v_2 + 2v_3$. Cela revient à résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + 4y - 2z = \alpha + \frac{4}{3}\beta + 2x \\ 6y - 3z = \alpha + \beta + 2y \\ -x + y = \alpha + \frac{4}{3}\beta + 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 4y - 2z = \alpha + \frac{4}{3}\beta \\ 4y - 3z = \alpha + \beta \\ -x + y - 2z = \alpha + \frac{4}{3}\beta. \end{cases}$$

On prend par exemple $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, on obtient

$$\begin{cases} -x + 4y - 2z = \frac{4}{3} \\ 4y - 3z = 1 \\ -x + y - 2z = \frac{4}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1+3z}{4} \\ x = z - \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow v_3 = \begin{pmatrix} z - \frac{1}{3} \\ \frac{1+3z}{4} \\ z \end{pmatrix}.$$

On prend par exemple $z = 1$ ce qui donne $v_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 0 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Maintenant, on cherche à résoudre le système d'équations différentielles suivant :

$$(S) = \begin{cases} x^{'}(t) = x(t) + 4y(t) - 2z(t) \\ y^{'}(t) = 6y(t) - 3z(t) \\ z^{'}(t) = -x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

a) Écrire S sous forme matricielle en prenant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

Le systéme d'équations S s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

b) Soit $W(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \end{pmatrix}$, on pose $W(t) = P^{-1}X(t)$, déterminer le système d'équations différentielles (S') vérifié par $w_1(t)$, $w_2(t)$, et $w_3(t)$.

$$W'(t) = \begin{pmatrix} w_1'(t) \\ w_2'(t) \\ w_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$(S') = \begin{cases} w_1'(t) = 3w_1(t) \\ w_2'(t) = 2w_2(t) + w_3(t) \\ w_3'(t) = 2w_2(t). \end{cases}$$

c) Donner une solution de (S').

Commençons par la première équation homogène, la solution est de la forme :

$$w_1(t) = Ae^{3t} \quad A \in \mathbb{R}.$$

De même pour la troisième équation,

$$w_3(t) = Be^{2t} \quad B \in \mathbb{R}.$$

La solution de la deuxième équation dépend de la troisième, donc on a une solution homogène et une autre particulière, ce qui donne finalement

$$w_2(t) = (C + Bt)e^{2t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

d) En déduire une solution de (S).

Une solution de S est de la forme :

$$X(t) = PW(t) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \end{pmatrix}.$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} Ae^{3t} + (\frac{4}{3}(C + Bt) + \frac{2}{3}B)e^{2t} \\ Ae^{3t} + (B + C + Bt)e^{2t} \\ Ae^{3t} + (\frac{4}{3}(C + Bt) + B)e^{2t} \end{pmatrix}$$