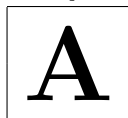


Wersja:



Numer indeksu:

Grupa<sup>1</sup>:

s. 103	s. 104	s. 105
s. 139	s. 140	s. 141

## Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 1, 25 listopada 2022

Czas pisania: 30+60 minut

**Zadanie 1 (2 punkty).** Jeśli istnieją takie dwa niezupełne zbiory spójników  $S_1$  i  $S_2$ , że  $S_1 \cup S_2$  jest zupełnym zbiorem spójników, to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie dwa zbiory. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego takie zbiory nie istnieją.

$$S_1 = \{\neg\}, S_2 = \{\wedge\}$$

**Zadanie 2 (2 punkty).** Niech  $\varphi = (\neg p \Leftrightarrow \neg q) \wedge (p \Rightarrow q)$ . W prostokąty poniżej wpisz formuły równoważne  $\varphi$ , odpowiednio w koniunkcyjnej (CNF) i dysjunkcyjnej (DNF) postaci normalnej.

CNF

$$(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$$

DNF

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

**Zadanie 3 (2 punkty).** Wpisz słowo „TAK” w te prostokąty, które odpowiadają logicznym konsekwencjom zbioru formuł  $\{p \Rightarrow q, \neg q\}$ . W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”.

 $p$ 

NIE

 $\neg p$ 

TAK

 $\neg q \Rightarrow \neg p$ 

TAK

 $\neg q \Rightarrow p$ 

NIE

<sup>1</sup>Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

**Zadanie 4 (2 punkty).** W prostokąt poniżej wpisz dowód tautologii  $(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow p \Rightarrow q \Rightarrow r$  w systemie naturalnej dedukcji.

**Zadanie 5 (2 punkty).** W prostokąty obok tych zbiorów klauzul, które są sprzeczne, wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności danego zbioru. W pozostałe prostokąty wpisz wartościowanie spełniające dany zbiór.

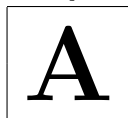
(a)  $\{ p \vee q \vee r, \neg p \vee \neg q, q \vee \neg r, p \vee \neg q, \neg p \vee q \}$

1.  $p \vee q \vee r$
2.  $\neg p \vee \neg q$
3.  $q \vee \neg r$
4.  $p \vee \neg q$
5.  $\neg p \vee q$
6.  $\neg q$       Res.(2, 4)
7.  $\neg p$       Res.(5, 6)
8.  $\neg r$       Res.(3, 6)
9.  $p \vee r$       Res.(1, 6)
10.  $r$       Res.(7, 9)
11.  $\perp$       Res.(8, 10)

(b)  $\{ p \vee q \vee r, \neg p \vee \neg q, \neg q \vee \neg r, p \vee \neg q, \neg p \vee q \}$

$$\sigma(p) = \text{F}, \sigma(q) = \text{F}, \sigma(r) = \text{T}$$

Wersja:



Numer indeksu:

Grupa<sup>1</sup>:

s. 103	s. 104	s. 105
s. 139	s. 140	s. 141

**Zadanie 6 (5 punktów).** Rozważmy odwzorowanie  $\tau$  przyporządkowujące formułom zbudowanym ze zmiennych zdaniowych ze zbioru  $V$  oraz spójników  $\wedge, \neg$  formuły zbudowane ze zmiennych z tego samego zbioru oraz spójników  $\Rightarrow, \neg$  w następujący sposób.

$$\begin{aligned}\tau(p) &= p, \quad \text{dla wszystkich zmiennych } p \in V \\ \tau(\varphi \wedge \psi) &= \neg(\tau(\varphi) \Rightarrow \neg\tau(\psi)) \\ \tau(\neg\varphi) &= \neg\tau(\varphi)\end{aligned}$$

- (a) Sformułuj zasadę indukcji, z której skorzystasz w punkcie b).
- (b) Udowodnij indukcyjnie, że dla wszystkich formuł  $\varphi$  zbudowanych ze zmiennych zdaniowych oraz spójników  $\wedge, \neg$  formuły  $\varphi$  oraz  $\tau(\varphi)$  są równoważne.

**Zadanie 7 (5 punktów).**

- (a) Sformułuj zasadę indukcji, z której skorzystasz w punkcie b).
- (b) Udowodnij indukcyjnie, że jeśli wyrazy ciągu spełniają warunki  $a_0 = 2$ ,  $a_1 = 5$  i  $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$  dla  $n \geq 1$ , to  $a_n = 3^n + 2^n$  dla wszystkich liczb naturalnych  $n$ .

**Zadanie 8 (5 punktów).** Powiemy, że formuła  $\varphi$  rachunku zdań nad zbiorem zmiennych zdaniowych  $V$  jest *prawie tautologią* jeśli istnieje co najwyżej jedno wartościowanie zmiennych ze zbioru  $V$  niespełniające  $\varphi$ .

- (a) Czy koniunkcja dowolnych dwóch prawie tautologii jest prawie tautologią? Uzasadnij odpowiedź: podaj dowód lub odpowiedni kontrprzykład.
- (b) Czy alternatywa dowolnych dwóch prawie tautologii jest prawie tautologią? Uzasadnij odpowiedź: podaj dowód lub odpowiedni kontrprzykład.

---

<sup>1</sup>Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja:

D

Numer indeksu:

Grupa<sup>1</sup>:

s. 103	s. 104	s. 105
s. 139	s. 140	s. 141

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 1, 25 listopada 2022

Czas pisania: 30+60 minut

**Zadanie 1 (2 punkty).** Niech  $\varphi = (p \Leftrightarrow r) \wedge (\neg r \Rightarrow \neg p)$ . W prostokąty poniżej wpisz formuły równoważne  $\varphi$ , odpowiednio w koniunkcyjnej (CNF) i dysjunkcyjnej (DNF) postaci normalnej.

CNF

$$(\neg p \vee r) \wedge (p \vee \neg r)$$

DNF

$$(p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg r)$$

**Zadanie 2 (2 punkty).** W prostokąt poniżej wpisz dowód tautologii  $(p \Rightarrow q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$  w systemie naturalnej dedukcji.

**Zadanie 3 (2 punkty).** Jeśli istnieją takie dwa zupełne zbiory spójników  $S_1$  i  $S_2$ , że  $S_1 \cap S_2$  nie jest zupełnym zbiorem spójników, to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie dwa zbiory. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego takie zbiory nie istnieją.

$$S_1 = \{\neg, \vee\}, S_2 = \{\neg, \wedge\}$$

<sup>1</sup>Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

**Zadanie 4 (2 punkty).** Wpisz słowo „TAK” w te prostokąty, które odpowiadają logicznym konsekwencjom zbioru formuł  $\{p \vee q, \neg p\}$ . W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”.

$p \vee \neg q$

NIE

$p \Rightarrow \neg q$

TAK

$q \Rightarrow \neg p$

TAK

$\neg p \Rightarrow q$

TAK

**Zadanie 5 (2 punkty).** W prostokąty obok tych zbiorów klauzul, które są sprzeczne, wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności danego zbioru. W pozostałe prostokąty wpisz wartościowanie spełniające dany zbiór.

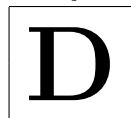
(a)  $\{ p \vee q \vee r, \neg q \vee \neg r, \neg r \vee \neg p, q \vee \neg r, \neg q \vee r \}$

$$\sigma(p) = \text{T}, \sigma(q) = \text{F}, \sigma(r) = \text{F}$$

(b)  $\{ p \vee q \vee r, \neg q \vee \neg r, r \vee \neg p, q \vee \neg r, \neg q \vee r \}$

1.  $p \vee q \vee r$
2.  $\neg q \vee \neg r$
3.  $r \vee \neg p$
4.  $q \vee \neg r$
5.  $\neg q \vee r$
6.  $\neg r$  Res.(2, 4)
7.  $\neg q$  Res.(5, 6)
8.  $\neg p$  Res.(3, 6)
9.  $p \vee q$  Res.(1, 6)
10.  $p$  Res.(7, 9)
11.  $\perp$  Res.(8, 10)

Wersja:



Numer indeksu:

--

Grupa<sup>1</sup>:

s. 103	s. 104	s. 105
s. 139	s. 140	s. 141

**Zadanie 6 (5 punktów).**

- (a) Sformułuj zasadę indukcji, z której skorzystasz w punkcie b).
- (b) Udowodnij indukcyjnie, że jeśli wyrazy ciągu spełniają warunki  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 2$  i  $a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1}$  dla  $n \geq 1$ , to  $a_n = n2^n$  dla wszystkich liczb naturalnych  $n$ .

**Zadanie 7 (5 punktów).** Rozważmy odwzorowanie  $F$  przyporządkowujące formułom zbudowanym ze zmiennych zdaniowych ze zbioru  $V$  oraz spójników  $\vee, \neg$  formuły zbudowane ze zmiennych z tego samego zbioru oraz spójników  $\Rightarrow, \neg$  w następujący sposób.

$$\begin{aligned} F(p) &= p, \quad \text{dla wszystkich zmiennych } p \in V \\ F(\varphi \vee \psi) &= \neg F(\varphi) \Rightarrow F(\psi) \\ F(\neg \varphi) &= \neg F(\varphi) \end{aligned}$$

- (a) Sformułuj zasadę indukcji, z której skorzystasz w punkcie b).
- (b) Udowodnij indukcyjnie, że dla wszystkich formuł  $\varphi$  zbudowanych ze zmiennych zdaniowych oraz spójników  $\vee, \neg$  formuły  $\varphi$  oraz  $F(\varphi)$  są równoważne.

**Zadanie 8 (5 punktów).** Powiemy, że formuła  $\varphi$  rachunku zdań nad zbiorem zmiennych zdaniowych  $V$  jest *prawie sprzeczna* jeśli istnieje co najwyżej jedno wartościowanie zmiennych ze zbioru  $V$  spełniające  $\varphi$ .

- (a) Czy koniunkcja dowolnych dwóch prawie sprzecznych formuł jest prawie sprzeczna? Uzasadnij odpowiedź: podaj dowód lub odpowiedni kontrprzykład.
- (b) Czy alternatywa dowolnych dwóch prawie sprzecznych formuł jest prawie sprzeczna? Uzasadnij odpowiedź: podaj dowód lub odpowiedni kontrprzykład.

---

<sup>1</sup>Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.