Numer indeksu: WZORCOWY

Logika dla informatyków

Egzamin końcowy (pierwsza część)

10 lutego 2022
czas pisania: 120 minut

Zadanie 1 (3 punkty). Czy dla wszystkich takich formuł φ i ψ, że formuła $\varphi \Rightarrow \psi$ jest spełnialna a formuła ψ sprzeczna, formuła $\neg\varphi$ jest spełnialna? Uzasadnij odpowiedź.

TAK. Wystarczy pokazać, że wartościowanie spełniające $\varphi \Rightarrow \psi$ spełnia także $\neg\varphi$. [...]

Zadanie 2 (2 punkty). Niech $\varphi = (p\wedge q\wedge r\wedge s\wedge t\wedge u\wedge v\wedge w\wedge x\wedge y\wedge z)\vee\neg(p\wedge q\wedge r\wedge s\wedge t\wedge u\wedge v\wedge w\wedge x\wedge y\wedge z)$. Jeśli formuła φ jest tautologią, to w prostokąt poniżej wpisz dowód tego faktu. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Weźmy dowolne wartościowanie σ. Z lematu o podstawianiu mamy $\hat{\sigma}(\varphi) = \hat{\sigma'}(p \vee \neg p)$, gdzie $\sigma'(p) = \hat{\sigma}(p\wedge q\wedge r\wedge s\wedge t\wedge u\wedge v\wedge w\wedge x\wedge y\wedge z)$. Ponieważ $p\vee\neg p$ jest tautologią, $\hat{\sigma'}(p\vee\neg p) = \mathsf{T}$, a stąd $\hat{\sigma}(\varphi) = \mathsf{T}$. Zatem φ jest tautologią.

Zadanie 3 (2 punkty). Jeżeli poniższe zbiory spójników są zupełne, to w odpowiedni prostokąt wpisz słowo TAK. W przeciwnym razie wpisz w prostokąt przykład formuły, która nie jest równoważna żadnej formule zbudowanej ze zmiennych zdaniowych i spójników z tego zbioru.

$\{\neg\}$	$p \vee q$	$\{\Rightarrow, \neg\}$	TAK	$\{\Rightarrow\}$	$\bot$

Zadanie 4 (2 punkty). Czy formuła $\neg p$ jest logiczną konsekwencją zbioru $A = \{q \vee r, q \Rightarrow \neg p, \neg r\}$? Uzasadnij odpowiedź.

Tak. Weźmy dowolne wartościowanie σ spełniające zbiór A. Wtedy $\sigma(r) = \mathsf{F}$, zatem $\sigma(q) = \mathsf{T}$ i stąd $\hat{\sigma}(\neg p) = \mathsf{T}$.

Zadanie 5 (2 punkty). W prostokąty poniżej wpisz formuły równoważne formule $p \Rightarrow \neg(q \vee r)$ odpowiednio w koniunkcyjnej i dysjunkcyjnej postaci normalnej,

CNF: $\boxed{(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg r)}$ DNF: $\boxed{\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)}$

Zadanie 6 (2 punkty). Jeśli zbiór klauzul $\{p \vee \neg q, q \vee r, p \vee \neg r, \neg p \vee q, \neg q \vee \neg p\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające ten zbiór.

Zadanie 7 (3 punkty). W tym zadaniu wartościowanie $\sigma : V \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ nazwiemy *jednostkowym* jeśli $\sigma(v) = \mathsf{T}$ dla dokładnie jednej zmiennej $v \in V$. Uzupełnij poniższy tekst tak, aby otrzymać poprawny dowód następującego twierdzenia: *Każda formuła zbudowana ze zmiennych zdaniowych ze zbioru V i spójnika $\Rightarrow$ jest spełniona przez jednostkowe wartościowanie.*

Dowód. Dowód przeprowadzimy przez indukcję strukturalną. Niech $\mathcal{F}$ oznacza zbiór formuł zbudowanych ze zmiennych zdaniowych ze zbioru V i spójnika $\Rightarrow$. Skorzystamy z następującej zasady indukcji.

Jeśli zbiór X spełnia warunki

- $\boxed{v \in X}$ dla wszystkich $\boxed{v \in V}$, oraz
- $\boxed{\varphi \Rightarrow \psi \in X}$ dla wszystkich $\boxed{\varphi, \psi \in X}$,

to X zawiera wszystkie formuły ze zbioru $\mathcal{F}$.

Niech $X = \boxed{\{\varphi \mid \text{istnieje jednostkowe wartościowanie } \sigma \text{ spełniające } \varphi\}}$.

Podstawa indukcji: Weźmy dowolne $p \in V$. Niech $\sigma : V \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ będzie zdefiniowane wzorem

$$\sigma(v) = \boxed{\begin{cases} \mathsf{T}, & \text{jeśli } v = p \\ \mathsf{F}, & \text{wpp} \end{cases}}.$$

Wtedy σ jest jednostkowym wartościowaniem spełniającym p, a zatem $\boxed{p \in X}$.

Krok indukcyjny: Weźmy dowolne $\boxed{\varphi, \psi \in X}$. Z założenia indukcyjnego istnieje takie jednostkowe wartościowanie σ, że $\boxed{\sigma \models \psi}$. Wtedy $\boxed{\sigma \models \varphi \Rightarrow \psi}$, a zatem $\boxed{\varphi \Rightarrow \psi \in X}$.

Z zasady indukcji X zawiera wszystkie formuły ze zbioru $\mathcal{F}$, czyli dla każdej formuły φ zbudowanej ze zmiennych zdaniowych ze zbioru V i spójnika $\Rightarrow$ istnieje jednostkowe wartościowanie spełniające φ.

Numer indeksu: WZORCOWY

Zadanie 8 (1 punkt). W prostokąt poniżej wpisz formułę logiki pierwszego rzędu, która interpretowana w zbiorze liczb naturalnych mówi, że liczby x i y mają wspólny dzielnik większy od 5. W rozwiązaniu możesz korzystać z symboli mnożenia $\cdot$, dodawania $+$, równości $=$, mniejszości $<$, większości $>$, zmiennych oraz stałych $0, 1, 2, 3, 4$ i 5.

$$\exists d \exists k \exists l \ (d > 5) \wedge (x = k \cdot d) \wedge (y = l \cdot d).$$

Zadanie 9 (2 punkty). Jeśli formuła $(\forall x \forall y \ p(x, y)) \Rightarrow (\forall x \exists y \ p(x, y))$ jest tautologią logiki pierwszego rzędu, to w prostokąt poniżej wpisz dowód tej tautologii w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zbyt czasochłonne by złożyć w LaTeXu.

Zadanie 10 (1 punkt). Dla $r \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ niech $A_{r,n} = \{x \in \mathbb{R} \mid r \leq x \wedge x < n\}$. W prostokąty poniżej wpisz, odpowiednio, najmniejszy i największy element zbioru X zdefiniowanego poniżej lub słowo „BRAK”, jeśli odpowiedniego elementu nie ma.

$$X = \bigcap_{r>42} \bigcup_{n=2022}^{\infty} A_{r,n}$$

$\min X =$ BRAK

$\max X =$ BRAK

Zadanie 11 (2 punkty). Niech $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Rozważmy relację binarną $R \subseteq A \times A$ zdefiniowaną wzorem $R = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$. W prostokąt poniżej wpisz wyliczoną wartość przechodniego domknięcia relacji R.

$$\{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 0,3\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$$

Zadanie 12 (1 punkt). Jeśli istnieje taka funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że $|f^{-1}[\{n\}]| = 2022$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką funkcję. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka funkcja nie istnieje.

$$f(n) = \lfloor n/2022 \rfloor$$

Zadanie 13 (1 punkt). Jeśli istnieje taka funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że $|f[\{n\}]| = 2022$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką funkcję. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka funkcja nie istnieje.

Nie istnieje. Obraz zbioru jednoelementowego przez dowolną funkcję jest jednoelementowy.

Zadanie 14 (1 punkt). Rozważmy zbiory barów B i soków S oraz relacje $\mathit{Podają} \subseteq B \times S \times \mathbb{R}$ informujące odpowiednio o tym jakie jakie bary podają jakie soki w jakiej cenie. Niech Jagódka oznacza jeden z barów, a jagodowy jeden z podawanych w tym barze soków. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{b \in B \mid \varphi\}$ oznacza zbiór barów, w których wszystkie podawane soki są tańsze od soku jagodowy podawanego w barze Jagódka.

$$\exists c\, \mathit{Podają}(\mathsf{Jagódka}, \mathsf{jagodowy}, c) \wedge \forall s \forall c' \, (\mathit{Podają}(b, s, c') \Rightarrow c' < c)$$

Zadanie 15 (2 punkty). Jeśli istnieje bijekcja $F : \mathbb{N}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}} \to (\mathbb{N}^{\mathbb{Z}})^{\mathbb{Q}}$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką bijekcję. W przeciwnym razie wpisz uzasadnienie, dlaczego taka bijekcja nie istnieje.

dla $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}}$ definiujemy $F(f) : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ wzorem $(F(f))(q) : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $((F(f))(q))(z) = f(z, q)$

Zadanie 16 (1 punkt). W tym zadaniu relację binarną R na niepustym zbiorze A nazwiemy *liniową* jeśli dla wszystkich $a, b \in A$ spełniony jest warunek $\langle a, b\rangle \in R \vee \langle b, a\rangle \in R$. Jeśli istnieją dwie liniowe relacje równoważności R_1 i R_2, których zbiory ilorazowe nie są równoliczne, to w prostokąt poniżej wpisz dowolne dwie takie relacje. W przeciwnym przypadku wpisz moc zbioru ilorazowego $A/_R$.

1

Numer indeksu: WZORCOWY

Zadanie 17 (1 punkt). Rozważmy relację równoważności R na zbiorze $\{0,1,2,3,4,5\}$ zadaną wzorem $\langle x, y\rangle \in R \overset{\text{df}}{\iff} 4 | x^2 - y^2$. W prostokąt poniżej wpisz wszystkie elementy zbioru ilorazowego $\{0,1,2,3,4,5\}/_R$

$\{0,2,4\}$, $\{1,3,5\}$

Zadanie 18 (1 punkt). Wpisz w puste pola poniższej tabelki moce podanych zbiorów.

$(\mathbb{R}\times\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$	$\mathcal{P}(\{0,1,2\})\times(\{3\}^{\{4,5,6\}})$	$\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$	$\mathbb{Q}\setminus\mathbb{R}$	$\{2022\}\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{N})$	$\mathbb{R}^{\{\emptyset\}}$	$\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}$
$\mathfrak{c}$	8	$\aleph_0$	0	0	$\mathfrak{c}$	$\aleph_0$

Zadanie 19 (1 punkt). Rozważmy dwa równoliczne zbiory A i B. Jeśli z założenia, że $f : A \to B$ jest różnowartościowa wynika, że f jest „na”, to w prostokąt poniżej wpisz dowód tego faktu. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

$A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$, $f(n) = n$

Zadanie 20 (1 punkt). Jeśli istnieje taki trójelementowy zbiór uporządkowany, w którym są dwa elementy minimalne i dwa maksymalne, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiego zbioru uporządkowanego. W przeciwnym przypadku wpisz dowód, że taki zbiór nie istnieje.

$\langle\{2,4,5\}, |\rangle$

Zadanie 21 (2 punkty). Rozważmy porządek $\sqsubseteq$ na zbiorze $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ zdefiniowany wzorem

$$\langle m_1, n_1\rangle \sqsubseteq \langle m_2, n_2\rangle \overset{\text{df}}{\iff} m_1 \le m_2 \wedge n_1 \le n_2.$$

Niech X będzie niepustym podzbiorem zbioru $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. W prostokąty poniżej wpisz wzory definiujące liczby m_0 i n_0 tak, aby para $\langle m_0, n_0\rangle$ była minimalnym elementem zbioru X. Jeśli S jest niepustym podzbiorem $\mathbb{N}$, możesz użyć notacji $\min S$ do oznaczenia najmniejszego elementu zbioru S.

$m_0 =$ $\min\{m \in \mathbb{N} \mid \exists n\ \langle m, n\rangle \in X\}$

$n_0 =$ $\min\{n \in \mathbb{N} \mid \langle m_0, n\rangle \in X\}$

Zadanie 22 (2 punkty). Jeśli porządek $\langle \mathbb{Z} \times \{0,1\}, \leq_{lex}\rangle$ jest izomorficzny z $\langle \mathbb{Z}, \leq\rangle$ to w prostokąt poniżej wpisz odpowiedni izomorfizm. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego izomorfizm nie istnieje.

$f : \mathbb{Z} \times \{0,1\} \to \mathbb{Z},\ f(n,x) = 2n + x$

Zadanie 23 (2 punkty). Czy porządek $\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \leq_{lex}\rangle$ jest regularny? Uzasadnij odpowiedź.

Nie. Zbiór $\{\langle -n, -n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$ nie ma elementu minimalnego.

Zadanie 24 (2 punkty). W tym zadaniu f, g są symbolami funkcyjnymi, a jest symbolem stałej, natomiast x, y i z są zmiennymi. W prostokąty obok tych spośród podanych par termów, które są unifikowalne, wpisz najogólniejsze unifikatory tych termów. W prostokąty obok termów, które nie są unifikowalne, wpisz słowo „NIE".

$f(x,a) \stackrel{?}{=} f(f(y,a),z)$	$[x/f(y,a),\ z/a]$	$f(g(x,x),x) \stackrel{?}{=} f(y,a)$	$[x/a,\ y/g(a,a)]$
$f(z,g(x,x)) \stackrel{?}{=} f(a,a)$	NIE	$f(x,g(x,y)) \stackrel{?}{=} f(f(x,x),y)$	NIE

Numer indeksu: WZORCOWY

Oddane zadania:

Logika dla informatyków

Egzamin końcowy (część druga)

6 lutego 2020
czas pisania: 120 minut

Każde z poniższych zadań będzie oceniane w skali od -4 do 20 punktów.[1]

Zadanie 25. Udowodnij, że dla każdej spełnialnej formuły φ istnieje takie podstawienie ρ, że $\varphi\rho$ jest tautologią.

Zadanie 26. Rozważmy relację równoważności $\approx$ na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ zdefiniowaną wzorem

$$X \approx Y \quad \overset{\text{df}}{\iff} \quad \exists m{\in}\mathbb{N}\ \forall n{>}m\ (n \in X \Leftrightarrow n \in Y).$$

Wyznacz moc zbioru ilorazowego $\mathcal{P}(\mathbb{N})/_{\approx}$.
Wskazówka. Zbiór $\mathbb{N}$ można podzielić na nieskończenie wiele nieskończonych zbiorów rozłącznych. Rozważ sumy tych zbiorów.

Zadanie 27. Dla funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ niech $R_f \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ będzie relacją równoważności zdefiniowaną wzorem

$$R_f = \{\langle m, n\rangle \mid f(m) = f(n)\}.$$

Udowodnij, że każda relacja równoważności na zbiorze $\mathbb{N}$ jest postaci R_f dla pewnej funkcji f.

[1] Algorytm oceniania oddanych zadań jest następujący: najpierw zadanie jest ocenione w skali od 0 do 24 punktów, a następnie od wyniku zostają odjęte 4 punkty. Osoba, która nie oddaje rozwiązania zadania otrzymuje za to zadanie 0 punktów.