Wersja:	Numer indeksu:	Grupa[1]:		
A		s. 103	s. 104	s. 105
		s. 139	s. 140	s. 141

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 3, 20 stycznia 2023
czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Czy istnieją takie trzy zbiory A, B, C że $B \not\sim C$ oraz $A^B \sim A^C$? Podaj dowód bądź stosowny kontrprzykład.

$A = \{1\}, B = \{1, 2\}, C = \{3\}$

Zadanie 2 (2 punkty). Rozważmy funkcje $app : B^A \times A \to B$, $curry : B^{(B^A \times A)} \to (B^A)^{(B^A)}$ i $f : A \to B$, oraz element $a \in A$. W tym zadaniu uznamy wyrażenie za poprawne, jeśli dla każdej użytej w nim funkcji (i dla dowolnych zbiorów A, B i C) jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie $app(a)$ nie jest poprawne, bo nie dla wszystkich zbiorów A, B i C mamy $a \in B^A \times A$. Jeśli wyrażenie jest poprawne, to przez jego *typ* rozumiemy zbiór do którego należy element oznaczany przez to wyrażenie. Np. typem wyrażenia $f(a)$ jest B. W prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są poprawne, wpisz odpowiedni typ wyrażenia. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE".

$f(a)$	B	$curry(app)$	$(B^A)^{(B^A)}$	$\big(curry(app)\big)(f, a)$	NIE
$app(a)$	NIE	$\big(curry(app)\big)(f(a))$	NIE	$\Big(\big(curry(app)\big)(f)\Big)(a)$	B

Zadanie 3 (2 punkty). Rozważmy relację równoważności na zbiorze liczb naturalnych dodatnich $\mathbb{N}_+$ zdefiniowaną wzorem

$$m \simeq n \overset{\text{df}}{\iff} \lfloor \log_2 m \rfloor = \lfloor \log_2 n \rfloor.$$

W prostokąt poniżej wpisz moc klasy abstrakcji $[2023]_{\simeq}$. Wskazówka: $\lfloor \log_2 2023 \rfloor = 10$.

1024

Zadanie 4 (2 punkty). Niech A oznacza zbiór liczb naturalnych parzystych, a B zbiór liczb naturalnych nieparzystych. Zdefiniujmy funkcję $f : A \times B \to \mathbb{N}$ daną wzorem $f(a, b) = \frac{a+2b}{2}$. W prostokąty poniżej wpisz obliczone wartości obrazów i przeciwobrazów:

$f[\{42\} \times B]$ $\boxed{\{2n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 21\}}$ $f^{-1}[A]$ $\boxed{\{2n \mid n \in B\} \times B}$

Przez *obliczoną wartość* rozumiemy tutaj dowolne wyrażenie oznaczające dany zbiór i niezawierające symbolu f.

Zadanie 5 (2 punkty). Wskaż błąd w następującym rozumowaniu: podaj numer błędnego zdania i wyjaśnij na czym błąd polega.
(1) Niech $R \subseteq A \times A$ będzie relacją symetryczną oraz przechodnią, oraz niech a będzie dowolnie wybranym elementem A. (2) Pokażę, że aRa, co oznaczać będzie że R jest zwrotna. (3) Weźmy taki element $b \in A$, że aRb. (4) Wtedy z symetryczności R dostajemy bRa. (5) Ponieważ aRb oraz bRa, to z przechodniości R otrzymujemy aRa, co kończy dowód.

Błąd jest w zdaniu (3): taki element b nie musi istnieć.

Wersja:	Numer indeksu:	Grupa[1]:		
A		s. 103	s. 104	s. 105
		s. 139	s. 140	s. 141

Zadanie 6 (5 punktów). Jakiej mocy jest zbiór wszystkich trójkątów na płaszczyźnie? A jakiej mocy jest zbiór wszystkich trójkątów, których każdy wierzchołek ma obie współrzędne wymierne? Uzasadnij odpowiedzi.

Zadanie 7 (5 punktów). Jaka jest moc zbioru funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, spełniających równania:

(a) $f(1) = 1$,

(b) $f(1000) = 2023$, oraz

(c) $f(a + b) = f(a) + f(b) + 3a^2b + 3b^2a$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{N}$?

Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 8 (5 punktów). Niech $\sim_{2023}$ oznacza następującą relację na zbiorze $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$:

$$f \sim_{2023} g \stackrel{\text{df}}{\iff} \forall i < 2023 \; f(i) = g(i).$$

Wykaż, że $\sim_{2023}$ jest relacją równoważności, oraz że ma ona tylko skończenie wiele klas abstrakcji. Wskazówka: możesz skorzystać z faktu, że zbiór $\{0, 1\}^{\underline{2023}}$ jest skończony.

Wersja:	Numer indeksu:	Grupa[1]:		
C		s. 103	s. 104	s. 105
		s. 139	s. 140	s. 141

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 3, 20 stycznia 2023

czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Czy istnieją takie trzy zbiory A, B, C, że $B \not\sim C$, natomiast $B^A \sim C^A$? Podaj dowód bądź stosowny kontrprzykład.

$A = B = \mathbb{N}, C = \mathbb{R}$

Zadanie 2 (2 punkty). Rozważmy funkcje $\mathit{flip} : A \times B \to B \times A$, $\mathit{unflip} : B \times A \to A \times B$, $\mathit{curry} : (B \times A)^{A \times B} \to ((B \times A)^B)^A$ i $f : A \to B$, oraz element $a \in A$. W tym zadaniu uznamy wyrażenie za poprawne, jeśli dla każdej użytej w nim funkcji (i dla dowolnych zbiorów A, B i C) jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie $\mathit{flip}(a)$ nie jest poprawne, bo nie dla wszystkich zbiorów A, B i C mamy $a \in A \times B$. Jeśli wyrażenie jest poprawne, to przez jego *typ* rozumiemy zbiór do którego należy element oznaczany przez to wyrażenie. Np. typem wyrażenia $f(a)$ jest B. W prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są poprawne, wpisz odpowiedni typ wyrażenia. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE". Operator $\circ$ oznacza składanie funkcji.

$f(a)$	B	$\mathit{curry}(\mathit{flip})$	$((B \times A)^B)^A$	$\big((\mathit{curry}(\mathit{flip}))(a)\big)(f(a))$	$B \times A$
$\mathit{flip}(a)$	NIE	$\mathit{curry} \circ \mathit{flip}$	NIE	$\mathit{unflip} \circ \big((\mathit{curry}(\mathit{flip}))(a)\big)$	$(A \times B)^B$

Zadanie 3 (2 punkty). Rozważmy relację równoważności na zbiorze liczb naturalnych zdefiniowaną wzorem

$$m \simeq n \overset{\text{df}}{\iff} \lfloor \sqrt{m} \rfloor = \lfloor \sqrt{n} \rfloor.$$

W prostokąt poniżej wpisz moc klasy abstrakcji $[2023]_{\simeq}$. Wskazówka: $\lfloor \sqrt{2023} \rfloor = 44$.

89

Zadanie 4 (2 punkty). Niech A oznacza zbiór liczb naturalnych parzystych, a B zbiór liczb naturalnych nieparzystych. Zdefiniujmy funkcję $f : A \times B \to \mathbb{N}$ daną wzorem $f(a,b) = \frac{a \cdot b}{2}$. W prostokąty poniżej wpisz obliczone wartości obrazów i przeciwobrazów:

$f[\{42\} \times B]$ $\boxed{\{21n \mid n \in B\}}$ $f^{-1}[A]$ $\boxed{\{4n \mid n \in \mathbb{N}\} \times B}$

Przez *obliczoną wartość* rozumiemy tutaj dowolne wyrażenie oznaczające dany zbiór i niezawierające symbolu f.

Zadanie 5 (2 punkty). Wskaż błąd w następującym rozumowaniu: podaj numer błędnego zdania i wyjaśnij na czym błąd polega.

Pokażę, że jeśli relacja $\sim \subseteq X \times X$ jest niepusta, przechodnia i symetryczna, to jest również zwrotna. (1) Weźmy dowolne $x \in X$ oraz dowolne $y \in X$ spełniające $x \sim y$. (2) Ponieważ relacja $\sim$ jest symetryczna, to zachodzi $y \sim x$. (3) Oznacza to zatem, że zarówno $x \sim y$ oraz $y \sim x$, co z przechodniości relacji $\sim$ implikuje $x \sim x$. (4) Zatem $\sim$ jest zwrotna.

Błąd jest w zdaniu (4): nie rozważyliśmy wszystkich elementów $x \in X$.

Wersja:	Numer indeksu:	Grupa[1]:		
C		s. 103	s. 104	s. 105
		s. 139	s. 140	s. 141

Zadanie 6 (5 punktów). Jakiej mocy jest zbiór wszystkich kwadratów na płaszczyźnie? A jakiej mocy jest zbiór wszystkich kwadratów, których każdy wierzchołek ma obie współrzędne wymierne? Uzasadnij odpowiedzi.

Zadanie 7 (5 punktów). Jaka jest moc zbioru funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, spełniających równania:

(a) $f(1) = 1$,

(b) $f(44) = 1936$, oraz

(c) $f(a-b) = f(a) - 2ab + f(b)$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{N}$?

Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 8 (5 punktów). Niech $\approx_{2023}$ oznacza następującą relację na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$:

$$X \approx_{2023} Y \stackrel{\text{df}}{\iff} \forall i < 2023 \ (i \in X \Leftrightarrow i \in Y)\,.$$

Wykaż, że $\approx_{2023}$ jest relacją równoważności, oraz że ma ona tylko skończenie wiele klas abstrakcji. Wskazówka: możesz skorzystać z faktu, że zbiór $\mathcal{P}(\underline{2023})$ jest skończony.