Wersja:	Numer indeksu:	Grupa[1]:		
A		s. 103	s. 104	s. 105
		s. 139	s. 140	s. 141

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 2, 16 grudnia 2022
Czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Jeśli to możliwe, wpisz w prostokąty poniżej takie spójniki logiczne oraz kwantyfikatory, aby otrzymana formuła była tautologią, a następnie podaj jej dowód w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku napisz obok słowo „NIEMOŻLIWE".

$$\left(\boxed{\forall}\, x\ (\varphi \land \psi)\right) \boxed{\Rightarrow} \left(\left(\boxed{\exists}\, x\ \varphi\right) \boxed{\lor} \left(\boxed{\exists}\, x\ \psi\right)\right)$$

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c} \forall x(\varphi \land \psi)\ \text{założenie} \\ \\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(\varphi \land \psi)}{\varphi[x/x_0] \land \psi[x/x_0]}\ (\forall e)}{\varphi[x/x_0]}\ (\land e)}{\exists x \varphi}\ (\exists i)}{\exists x\varphi \lor \exists x\psi}\ (\lor i) \end{array}}}{\forall x(\varphi \land \psi) \Rightarrow (\exists x\varphi \lor \exists x\psi)}\ (\Rightarrow i)$$

Zadanie 2 (2 punkty). Jeśli istnieje taki zbiór A i taka przechodnia relacja binarna R na tym zbiorze, że $R \neq R;R$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiego zbioru i takiej relacji. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taki zbiór i relacja nie istnieją.

$$A = \{1, 2\},\ R = \{\langle 1, 2\rangle\}$$

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 3 (2 punkty). Napisz formułę, która mówi, że *liczba x jest potęgą liczby 3* a przy tym jest zbudowana wyłącznie ze zmiennych, kwantyfikatorów, spójników logicznych, nawiasów i symboli $<, +, \cdot, 0, 1, 2, 3$ interpretowanych w liczbach naturalnych jako relacja mniejszości, funkcje dodawania i mnożenia, oraz stałe 0, 1, 2 i 3. Można definiować makra tak jak to robiliśmy na ćwiczeniach. **Wskazówka:** intuicyjnie, liczba nie jest potęgą 3 gdy ma dzielnik, który nie dzieli się przez 3; trzeba jednak uważać na liczbę 1, która jest potęgą 3.

Niech $\mathit{dzieli}(d, m)$ oznacza formułę $\exists k \;\; d \cdot k = m$

$$x{=}1 \vee (1{<}x \wedge \forall d.\ 1{<}d \wedge \mathit{dzieli}(d, x) \Rightarrow \mathit{dzieli}(3, d))$$

Zadanie 4 (2 punkty). Rozważmy zbiory osób O, barów B, soków S i drużyn D oraz binarne relacje $\mathit{Bywa} \subseteq O \times B$, $\mathit{Lubi} \subseteq O \times S$, $\mathit{Podają} \subseteq B \times S$ i $\mathit{Kibicuje} \subseteq O \times D$ informujące odpowiednio o tym, jakie osoby bywają w jakich barach, jakie osoby lubią jakie soki, jakie bary podają jakie soki oraz jakie osoby kibicują jakim drużynom. Niech $\mathsf{Argentyna}$ oznacza drużynę. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{s \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz soków podawanych w (jakimkolwiek) barze, w którym bywają tylko osoby, które kibicują $\mathsf{Argentynie}$.

$$\exists b \in B.\ \mathit{Podają}(b, s) \wedge \forall o \in O.\ \mathit{Bywa}(o, b) \Rightarrow \mathit{Kibicuje}(o, \mathsf{Argentyna})$$

Zadanie 5 (2 punkty). Niech $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ będzie taką rodzina zbiorów, że $A_i = \{i{-}1, i, i{+}1\}$ dla $i \in \mathbb{N}$. W prostokąty poniżej wpisz, odpowiednio, najmniejszy i największy element zbioru X zdefiniowanego poniżej lub słowo „BRAK", jeśli odpowiedniego elementu nie ma.

$$X = \bigcup_{m=42}^{2022} \bigcap_{n=m}^{m+1} A_n$$

$\min X =$ 42

$\max X =$ 2023

Wersja:	Numer indeksu:	Grupa[1]:		
A		s. 103	s. 104	s. 105
		s. 139	s. 140	s. 141

Zadanie 6 (5 punktów). Załóżmy, że relacja $R \subseteq A \times B$ jest funkcją. Udowodnij, że R jest injekcją wtedy i tylko wtedy, gdy $R; R^{-1} \subseteq I_A$. Tutaj R^{-1} oznacza *relację* odwrotną do R.

Zadanie 7 (5 punktów). Niech A oznacza zbiór liczb naturalnych parzystych, a B zbiór liczb naturalnych nieparzystych. Zdefiniujmy funkcję $f : A \times B \to \mathbb{N}$ daną wzorem $f(a,b) = \frac{a \cdot b}{2}$.

(a) Czy f jest surjekcją?

(b) Czy f jest injekcją?

Podaj dowody bądź stosowne kontrprzykłady wraz z uzasadnieniem.

Zadanie 8 (5 punktów). Dla danego zbioru X, *filtrem* w zbiorze $\mathcal{P}(X)$ nazywamy rodzinę zbiorów $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, spełniającą wszystkie poniższe warunki:

- $X \in \mathcal{F}$;
- jeśli $A \in \mathcal{F}$ oraz $A \subseteq B$ i $B \subseteq X$, to również $B \in \mathcal{F}$;
- dla dowolnych $A, B \in \mathcal{F}$ zachodzi $(A \cap B) \in \mathcal{F}$;
- $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

(a) Podaj przykład (wraz z uzasadnieniem) filtra w zbiorze $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$.

(b) Czy dla dowolnego zbioru X i dowolnych dwóch filtrów $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ w zbiorze $\mathcal{P}(X)$ ich przekrój $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ jest filtrem w zbiorze $\mathcal{P}(X)$? Uzasadnij odpowiedź: podaj dowód lub odpowiedni kontrprzykład.

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja:	Numer indeksu:	Grupa[1]:		
D		s. 103	s. 104	s. 105
		s. 139	s. 140	s. 141

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 2, 16 grudnia 2022

Czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Napisz formułę, która mówi, że *liczba x **nie jest** potęgą liczby 2* a przy tym jest zbudowana wyłącznie ze zmiennych, kwantyfikatorów, spójników logicznych, nawiasów i symboli $<, +, \cdot, 0, 1, 2$ interpretowanych w liczbach naturalnych jako relacja mniejszości, funkcje dodawania i mnożenia, oraz stałe 0, 1 i 2. Można definiować makra tak jak to robiliśmy na ćwiczeniach. **Wskazówka:** intuicyjnie, liczba jest potęgą 2 gdy każdy jej dzielnik dzieli się przez 2; trzeba jednak uważać na liczbę 1, która jest potęgą 2.

Niech $dzieli(d, m)$ oznacza formułę $1<d \land \exists k \;\; d \cdot k = m$

$x{=}0 \lor 2{<}x \land \exists d.\ dzieli(d, x) \land \neg dzieli(2, d)$

Zadanie 2 (2 punkty). Niech $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ będzie taką rodzina zbiorów, że $A_i = \{i{-}1, i, i{+}1\}$ dla $i \in \mathbb{N}$. W prostokąty poniżej wpisz, odpowiednio, najmniejszy i największy element zbioru X zdefiniowanego poniżej lub słowo „BRAK”, jeśli odpowiedniego elementu nie ma.

$$X = \bigcap_{m=42}^{2022} \bigcup_{n=m}^{2023} A_n$$

min X = 2021 max X = 2024

Zadanie 3 (2 punkty). Niech R^+ oznacza przechodnie domknięcie relacji R. Jeśli istnieje taki zbiór A i taka relacja binarna R na tym zbiorze, że $R^+ \neq (R;R)^+$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiego zbioru i takiej relacji. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taki zbiór i relacja nie istnieją.

$A = \{1, 2\},\;\; R = \{\langle 1, 2\rangle\}$

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 4 (2 punkty). Jeśli to możliwe, wpisz w prostokąty poniżej takie spójniki logiczne oraz kwantyfikatory, aby otrzymana formuła była tautologią, a następnie podaj jej dowód w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku napisz obok słowo „NIEMOŻLIWE”.

$$\Big(\boxed{\forall}\, x\ (\varphi \lor \psi)\Big)\ \boxed{\Rightarrow}\ \Big(\Big(\boxed{\exists}\, x\ \varphi\Big)\ \boxed{\lor}\ \Big(\boxed{\exists}\, x\ \psi\Big)\Big)$$

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c} \forall x(\varphi \lor \psi)\ \text{założenie} \\[2ex] \dfrac{\dfrac{\forall x(\varphi \lor \psi)}{\varphi[x/x_0] \lor \psi[x/x_0]}\,(\forall\text{e}) \qquad \boxed{\begin{array}{c} \varphi[x/x_0]\ \text{założenie} \\[1ex] \dfrac{\dfrac{\varphi[x/x_0]}{\exists x\varphi}\,\exists\text{i}}{\exists x\varphi \lor \exists x\psi}\,(\lor\text{i}) \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} \psi[x/x_0]\ \text{założenie} \\[1ex] \dfrac{\dfrac{\psi[x/x_0]}{\exists x\psi}\,\exists\text{i}}{\exists x\varphi \lor \exists x\psi}\,(\lor\text{i}) \end{array}}}{\exists x\varphi \lor \exists x\psi}\,(\lor\text{e}) \end{array}}}{\forall x(\varphi \lor \psi) \Rightarrow (\exists x\varphi \lor \exists x\psi)}\,(\Rightarrow\text{i})$$

Zadanie 5 (2 punkty). Rozważmy zbiory osób O, barów B, soków S i drużyn D oraz binarne relacje $\mathit{Bywa} \subseteq O \times B$, $\mathit{Lubi} \subseteq O \times S$, $\mathit{Podają} \subseteq B \times S$ i $\mathit{Kibicuje} \subseteq O \times D$ informujące odpowiednio o tym, jakie osoby bywają w jakich barach, jakie osoby lubią jakie soki, jakie bary podają jakie soki oraz jakie osoby kibicują jakim drużynom. Niech $\mathsf{Francja}$ oznacza drużynę. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{b \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz barów podających (jakikolwiek) sok lubiany przez wszystkie osoby, które kibicują $\mathsf{Francja}$.

$$\exists s \in S.\ \mathit{Podają}(b, s) \land \forall o \in O.\ \mathit{Kibicuje}(o, \mathsf{Francja}) \Rightarrow \mathit{Lubi}(o, s)$$

Wersja: D

Numer indeksu:

Grupa[1]:

s. 103	s. 104	s. 105
s. 139	s. 140	s. 141

Zadanie 6 (5 punktów). Niech A oznacza zbiór liczb naturalnych parzystych, a B zbiór liczb naturalnych nieparzystych. Zdefiniujmy funkcję $f : A \times B \to \mathbb{N}$ daną wzorem $f(a, b) = \frac{a+2b}{2} - 1$.

(a) Czy f jest surjekcją?

(b) Czy f jest injekcją?

Podaj dowody bądź stosowne kontrprzykłady wraz z uzasadnieniem.

Zadanie 7 (5 punktów). Załóżmy, że relacja $R \subseteq A \times B$ jest funkcją. Udowodnij, że R jest surjekcją wtedy i tylko wtedy, gdy $I_B \subseteq R^{-1}; R$. Tutaj R^{-1} oznacza *relację* odwrotną do R.

Zadanie 8 (5 punktów). Dla danego zbioru X, *ideałem* w zbiorze $\mathcal{P}(X)$ nazywamy rodzinę zbiorów $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$, spełniającą wszystkie poniższe warunki:

- $\emptyset \in \mathcal{I}$;
- jeśli $A \in \mathcal{I}$ oraz $B \subseteq A$, to również $B \in \mathcal{I}$;
- dla dowolnych $A, B \in \mathcal{I}$ zachodzi $(A \cup B) \in \mathcal{I}$;
- $X \notin \mathcal{I}$.

(a) Podaj przykład (wraz z uzasadnieniem) ideału w zbiorze $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$.

(b) Czy dla dowolnego zbioru X i dowolnych dwóch ideałów $\mathcal{I}_1$ i $\mathcal{I}_2$ w zbiorze $\mathcal{P}(X)$ ich suma $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$ jest ideałem w zbiorze $\mathcal{P}(X)$? Uzasadnij odpowiedź: podaj dowód lub odpowiedni kontrprzykład.

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.