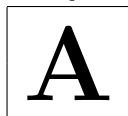


Wersja:



Numer indeksu:

Grupa¹:

s. 103	s. 104	s. 105
s. 139	s. 140	s. 141

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 3, 20 stycznia 2023

czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Czy istnieją takie trzy zbiory A, B, C że $B \not\sim C$ oraz $A^B \sim A^C$? Podaj dowód bądź stosowny kontrprzykład.

$$A = \{1\}, B = \{1, 2\}, C = \{3\}$$

Zadanie 2 (2 punkty). Rozważmy funkcje $app : B^A \times A \rightarrow B$, $curry : B^{(B^A \times A)} \rightarrow (B^A)^{(B^A)}$ i $f : A \rightarrow B$, oraz element $a \in A$. W tym zadaniu uznamy wyrażenie za poprawne, jeśli dla każdej użytej w nim funkcji (i dla dowolnych zbiorów A, B i C) jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie $app(a)$ nie jest poprawne, bo nie dla wszystkich zbiorów A, B i C mamy $a \in B^A \times A$. Jeśli wyrażenie jest poprawne, to przez jego *typ* rozumiemy zbiór do którego należy element oznaczany przez to wyrażenie. Np. typem wyrażenia $f(a)$ jest B . W prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są poprawne, wpisz odpowiedni typ wyrażenia. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”.

$f(a)$	B	$curry(app)$	$(B^A)^{(B^A)}$	$(curry(app))(f, a)$	NIE
$app(a)$	NIE	$(curry(app))(f(a))$	NIE	$((curry(app))(f))(a)$	B

Zadanie 3 (2 punkty). Rozważmy relację równoważności na zbiorze liczb naturalnych dodatnich \mathbb{N}_+ zdefiniowaną wzorem

$$m \simeq n \stackrel{\text{df}}{\iff} \lfloor \log_2 m \rfloor = \lfloor \log_2 n \rfloor.$$

W prostokąt poniżej wpisz moc klasy abstrakcji $[2023]_{\simeq}$. Wskazówka: $\lfloor \log_2 2023 \rfloor = 10$.

1024

Zadanie 4 (2 punkty). Niech A oznacza zbiór liczb naturalnych parzystych, a B zbiór liczb naturalnych nieparzystych. Zdefiniujmy funkcję $f : A \times B \rightarrow \mathbb{N}$ daną wzorem $f(a, b) = \frac{a+2b}{2}$. W prostokąty poniżej wpisz obliczone wartości obrazów i przeciwobrazów:

$f[\{42\} \times B]$

$\{2n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 21\}$

$f^{-1}[A]$

$\{2n \mid n \in B\} \times B$

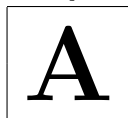
Przez *obliczoną wartość* rozumiemy tutaj dowolne wyrażenie oznaczające dany zbiór i niezawierające symbolu f .

Zadanie 5 (2 punkty). Wskaż błąd w następującym rozumowaniu: podaj numer błędnego zdania i wyjaśnij na czym błąd polega.

(1) Niech $R \subseteq A \times A$ będzie relacją symetryczną oraz przechodnią, oraz niech a będzie dowolnie wybranym elementem A . (2) Pokażę, że aRa , co oznaczać będzie że R jest zwrotna. (3) Weźmy taki element $b \in A$, że aRb . (4) Wtedy z symetryczności R dostajemy bRa . (5) Ponieważ aRb oraz bRa , to z przechodniości R otrzymujemy aRa , co kończy dowód.

Błąd jest w zdaniu (3): taki element b nie musi istnieć.

Wersja:



Numer indeksu:

Grupa¹:

s. 103	s. 104	s. 105
s. 139	s. 140	s. 141

Zadanie 6 (5 punktów). Jakiej mocy jest zbiór wszystkich trójkątów na płaszczyźnie? A jakiej mocy jest zbiór wszystkich trójkątów, których każdy wierzchołek ma obie współrzędne wymierne? Uzasadnij odpowiedzi.

Zadanie 7 (5 punktów). Jaka jest moc zbioru funkcji $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, spełniających równania:

- (a) $f(1) = 1$,
- (b) $f(1000) = 2023$, oraz
- (c) $f(a + b) = f(a) + f(b) + 3a^2b + 3b^2a$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{N}$?

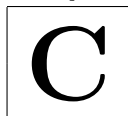
Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 8 (5 punktów). Niech \sim_{2023} oznacza następującą relację na zbiorze $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$:

$$f \sim_{2023} g \stackrel{\text{df}}{\iff} \forall i < 2023 \ f(i) = g(i).$$

Wykaż, że \sim_{2023} jest relacją równoważności, oraz że ma ona tylko skończenie wiele klas abstrakcji. Wskazówka: możesz skorzystać z faktu, że zbiór $\{0, 1\}^{\underline{2023}}$ jest skończony.

Wersja:



Numer indeksu:

Grupa¹:

s. 103	s. 104	s. 105
s. 139	s. 140	s. 141

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 3, 20 stycznia 2023

czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Czy istnieją takie trzy zbiory A, B, C , że $B \not\sim C$, natomiast $B^A \sim C^A$? Podaj dowód bądź stosowny kontrprzykład.

$$A = B = \mathbb{N}, C = \mathbb{R}$$

Zadanie 2 (2 punkty). Rozważmy funkcje $flip : A \times B \rightarrow B \times A$, $unflip : B \times A \rightarrow A \times B$, $curry : (B \times A)^{A \times B} \rightarrow ((B \times A)^B)^A$ i $f : A \rightarrow B$, oraz element $a \in A$. W tym zadaniu uznamy wyrażenie za poprawne, jeśli dla każdej użytej w nim funkcji (i dla dowolnych zbiorów A, B i C) jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie $flip(a)$ nie jest poprawne, bo nie dla wszystkich zbiorów A, B i C mamy $a \in A \times B$. Jeśli wyrażenie jest poprawne, to przez jego *typ* rozumiemy zbiór do którego należy element oznaczany przez to wyrażenie. Np. typem wyrażenia $f(a)$ jest B . W prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażen, które są poprawne, wpisz odpowiedni typ wyrażenia. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”. Operator \circ oznacza składanie funkcji.

$f(a)$	B	$curry(flip)$	$((B \times A)^B)^A$	$((curry(flip))(a))(f(a))$	$B \times A$
$flip(a)$	NIE	$curry \circ flip$	NIE	$unflip \circ ((curry(flip))(a))$	$(A \times B)^B$

Zadanie 3 (2 punkty). Rozważmy relację równoważności na zbiorze liczb naturalnych zdefiniowaną wzorem

$$m \simeq n \stackrel{\text{df}}{\iff} \lfloor \sqrt{m} \rfloor = \lfloor \sqrt{n} \rfloor.$$

W prostokąt poniżej wpisz moc klasy abstrakcji $[2023]_{\simeq}$. Wskazówka: $\lfloor \sqrt{2023} \rfloor = 44$.

Zadanie 4 (2 punkty). Niech A oznacza zbiór liczb naturalnych parzystych, a B zbiór liczb naturalnych nieparzystych. Zdefiniujmy funkcję $f : A \times B \rightarrow \mathbb{N}$ daną wzorem $f(a, b) = \frac{a \cdot b}{2}$. W prostokąty poniżej wpisz obliczone wartości obrazów i przeciwobrazów:

$f[\{42\} \times B]$

$\{21n \mid n \in B\}$

$f^{-1}[A]$

$\{4n \mid n \in \mathbb{N}\} \times B$

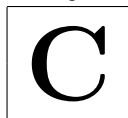
Przez *obliczoną wartość* rozumiemy tutaj dowolne wyrażenie oznaczające dany zbiór i niezawierające symbolu f .

Zadanie 5 (2 punkty). Wskaż błąd w następującym rozumowaniu: podaj numer błędnego zdania i wyjaśnij na czym błąd polega.

Pokażę, że jeśli relacja $\sim \subseteq X \times X$ jest niepusta, przechodnia i symetryczna, to jest również zwrotna. (1) Weźmy dowolne $x \in X$ oraz dowolne $y \in X$ spełniające $x \sim y$. (2) Ponieważ relacja \sim jest symetryczna, to zachodzi $y \sim x$. (3) Oznacza to zatem, że zarówno $x \sim y$ oraz $y \sim x$, co z przechodniości relacji \sim implikuje $x \sim x$. (4) Zatem \sim jest zwrotna.

Błąd jest w zdaniu (4): nie rozważyliśmy wszystkich elementów $x \in X$.

Wersja:



Numer indeksu:

Grupa¹:

s. 103	s. 104	s. 105
s. 139	s. 140	s. 141

Zadanie 6 (5 punktów). Jakiej mocy jest zbiór wszystkich kwadratów na płaszczyźnie? A jakiej mocy jest zbiór wszystkich kwadratów, których każdy wierzchołek ma obie współrzędne wymierne? Uzasadnij odpowiedzi.

Zadanie 7 (5 punktów). Jaka jest moc zbioru funkcji $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, spełniających równania:

- (a) $f(1) = 1$,
- (b) $f(44) = 1936$, oraz
- (c) $f(a - b) = f(a) - 2ab + f(b)$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{N}$?

Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 8 (5 punktów). Niech \approx_{2023} oznacza następującą relację na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$:

$$X \approx_{2023} Y \stackrel{\text{df}}{\iff} \forall i < 2023 \ (i \in X \Leftrightarrow i \in Y).$$

Wykaż, że \approx_{2023} jest relacją równoważności, oraz że ma ona tylko skończenie wiele klas abstrakcji. Wskazówka: możesz skorzystać z faktu, że zbiór $\mathcal{P}(\underline{2023})$ jest skończony.