Numer indeksu: WZORCOWY

Logika dla informatyków

Egzamin poprawkowy (pierwsza część)

25 lutego 2022

czas pisania: 120 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Czy dla wszystkich takich formuł rachunku zdań φ i ψ, że formuły $\varphi \Rightarrow \psi$ oraz ψ są sprzeczne, formuła $\neg\varphi$ jest sprzeczna? Uzasadnij odpowiedź.

TAK. Weźmy dowolne wartościowanie σ. Skoro $\hat{\sigma}(\psi) = \mathsf{F}$ i $\hat{\sigma}(\varphi \Rightarrow \psi) = \mathsf{F}$, to $\hat{\sigma}(\varphi) = \mathsf{T}$, a stąd $\hat{\sigma}(\neg\varphi) = \mathsf{F}$.

Zadanie 2 (1 punkt). Jeśli formuła $(p \wedge q \Rightarrow p \wedge r) \Rightarrow p \wedge (q \Rightarrow r)$ jest tautologią, to w prostokąt poniżej wpisz dowód tej tautologii w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz przykład wartościowania, które nie spełnia tej formuły.

Wartościowanie $\sigma : p \mapsto \mathsf{F}, q \mapsto \mathsf{F}, r \mapsto \mathsf{F}$ nie spełnia tej tej formuły.

Zadanie 3 (1 punkt). Jeśli formuła $p \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow p \wedge r)$ jest tautologią, to w prostokąt poniżej wpisz dowód tej tautologii w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz przykład wartościowania, które nie spełnia tej formuły.

Zadanie 4 (2 punkty). Czy formuła $p \wedge r$ jest logiczną konsekwencją zbioru $A = \{q \Rightarrow r, p \wedge q\}$? Uzasadnij odpowiedź.

Tak. Weźmy dowolne wartościowanie σ spełniające zbiór A. Wtedy $\sigma(p) = \sigma(q) = \mathsf{T}$ oraz $\hat{\sigma}(q \Rightarrow r) = \mathsf{T}$, zatem $\sigma(r) = \mathsf{T}$ i stąd $\hat{\sigma}(p \wedge r) = \mathsf{T}$.

Zadanie 5 (2 punkty). W prostokąty poniżej wpisz formuły równoważne formule $p \wedge q \Rightarrow p \wedge r$ odpowiednio w koniunkcyjnej i dysjunkcyjnej postaci normalnej,

CNF: $\neg p \vee \neg q \vee r$

DNF: $\neg p \vee \neg q \vee r$

Zadanie 6 (2 punkty). Jeśli zbiór klauzul $\{q \vee \neg r, r \vee p, q \vee \neg p, \neg q \vee r, \neg r \vee \neg q\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające ten zbiór.

Zadanie 7 (2 punkty). Jeśli dla dowolnych formuł φ i ψ formuła $(\forall x\ \varphi \Leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow ((\forall x \varphi) \Leftrightarrow \forall x \psi)$ jest tautologią logiki pierwszego rzędu, to w prostokąt poniżej wpisz słowo "TAUTOLOGIA". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Uniwersum: $\mathbb{N}$, $\varphi := x = 0$, $\psi := x = 1$.

Zadanie 8 (1 punkt). Czy istnieje inny niż $\{3\}$ zbiór X spełniający równość $\{1, 2, 3\} \setminus X = \{1, 2\}$? W prostokąt poniżej wpisz dowolny taki zbiór lub dowód, że on nie istnieje.

$X = \{3, 4\}$

Numer indeksu: WZORCOWY

Zadanie 9 (1 punkt). Dla $r \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ niech $A_{n,r} = \{x \in \mathbb{R} \mid n \leq x \wedge x < r\}$ i niech m będzie liczbą naturalną nie większą niż 42. W prostokąty poniżej wpisz, odpowiednio, najmniejszy i największy element zbioru $X = \bigcap_{r>2022} A_{m,r}$ zdefiniowanego poniżej lub słowo „BRAK”, jeśli odpowiedniego elementu nie ma.

min $X =$ m max $X =$ 2022

Zadanie 10 (2 punkty). Jeśli dla dowolnego zbioru A i dowolnych przechodnich relacji R i S na zbiorze A ich złożenie $R;S$ jest relacją przechodnią, to w prostokąt poniżej wpisz dowód tego faktu. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Niech $A = \{1, 2, 3\}$, $R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$, $S = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$.

Wtedy $R;S = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$ nie jest przechodnia.

Zadanie 11 (2 punkty). Rozważmy relację binarną $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zdefiniowaną wzorem

$$R = \{\langle n, n+1\rangle \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\langle 42, 17\rangle\}.$$

W prostokąt poniżej wpisz wyliczoną wartość przechodniego domknięcia relacji R.

$$R = \{\langle m, n\rangle \mid m < n\} \cup \{\langle m, n\rangle \mid 17 \leq m, n \leq 42\}$$

Zadanie 12 (1 punkt). Niech $\mathcal{R}(\mathbb{N})$ oznacza rodzinę wszystkich relacji równoważności na zbiorze $\mathbb{N}$. W prostokąty poniżej wpisz, odpowiednio, najmniejszy i największy element porządku $\langle \mathcal{R}(\mathbb{N}), \subseteq\rangle$ lub słowo „BRAK”, jeśli odpowiedniego elementu nie ma.

min $\mathcal{R}(\mathbb{N}) =$ $\{\langle n, n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$ max $\mathcal{R}(\mathbb{N}) =$ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Zadanie 13 (2 punkty). Rozważmy relację równoważności $\simeq$ na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ zdefiniowaną wzorem

$$f \simeq g \overset{\text{df}}{\iff} \forall n \in \mathbb{N}\ \lfloor f(n)/2 \rfloor = \lfloor g(n)/2 \rfloor$$

oraz funkcje $z, I : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zdefiniowane wzorami $z(n) = 0$ oraz $I(n) = n$. Jeśli istnieje bijekcja $F : [I]_{\simeq} \to [z]_{\simeq}$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką bijekcję. Wprzeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka bijekcja nie istnieje.

$$(F(f))(n) = f(n) \mod 2$$

Zadanie 14 (2 punkty). Rozważmy funkcję $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ przyporządkowującą funkcjom $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcje $F(f) : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ zdefiniowane wzorem $(F(f))(n) = f(n) \mod 2$. Niech $z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $z(n) = 0$. W prostokąt poniżej wpisz obliczony przeciwobraz zbioru $\{z\}$ przez funkcję F.

$F^{-1}[\{z\}]=$ $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \forall n\ f(n) \mod 2 = 0\}$.

Zadanie 15 (2 punkty). Rozważmy zbiory osób O, barów B i soków S oraz relacje $\mathit{Lubi} \subseteq O \times S$ i $\mathit{Podają} \subseteq B \times S \times \mathbb{R}$ informujące odpowiednio o tym jakie osoby lubią jakie soki oraz jakie bary podają jakie soki w jakiej cenie. Niech $\mathsf{Jagódka}$ oznacza jeden z barów, a $\mathsf{jagodowy}$ jeden z podawanych w tym barze soków. Zakładamy przy tym, że każdy sok ma w barze $\mathsf{Jagódka}$ co najwyżej jedną cenę. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{o \in O \mid \varphi\}$ oznacza zbiór osób, które lubią wyłącznie soki podawane w barze $\mathsf{Jagódka}$, ale droższe od soku $\mathsf{jagodowy}$ podawanego w tym barze.

$$\forall s\Big(\mathit{Lubi}(o,s) \Rightarrow \big(\exists c \exists c' (\mathit{Podają}(\mathsf{Jagódka}, \mathsf{jagodowy}, c) \wedge \mathit{Podają}(\mathsf{Jagódka}, s, c') \wedge c' > c)\big)\Big)$$

Zadanie 16 (2 punkty). Jeśli istnieje bijekcja $F : \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0,1\}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką bijekcję. W przeciwnym razie wpisz uzasadnienie, dlaczego taka bijekcja nie istnieje.

$$F(X) = \{2x + y \mid \langle x, y \rangle \in X\}$$

Zadanie 17 (2 punkty). Rozważmy podział $\{\{0,1,2,3\},\{4,5\}\}$ zbioru $\{0,1,2,3,4,5\}$. W prostokąt poniżej wpisz relację równoważności, której klasy abstrakcji tworzą ten podział.

$$\{\langle m, n \rangle \in \{0,1,2,3,4,5\}^2 \mid m < 4 \Leftrightarrow n < 4\}$$

Zadanie 18 (1 punkt). Rozważmy relację równoważności R na zbiorze $\{0,1,2,3,4,5\}$ zadaną wzorem $\langle x, y \rangle \in R \overset{\text{df}}{\Longleftrightarrow} 3|(x-y)^2$. W prostokąt poniżej wpisz wszystkie elementy zbioru ilorazowego $\{0,1,2,3,4,5\}/_R$.

$$\{0,3\},\ \{1,4\},\ \{2,5\}$$

Numer indeksu: WZORCOWY

Zadanie 19 (2 punkty). Wpisz w puste pola poniższej tabelki moce podanych zbiorów.

$(\mathbb{N}\times\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}}$	$\mathcal{P}(\{0,1,2\}\times\{3\})^{\{4,5,6\}}$	$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}^{\{25,2,2022\}}$	$(\{0,1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$	$\{\emptyset\}^{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}$
$\mathfrak{c}$	512	$\mathfrak{c}$	$\aleph_0$	$\mathfrak{c}$	1	$\mathfrak{c}$

Zadanie 20 (2 punkty). Zdefiniujmy porządek leksykograficzny „od tyłu” $\sqsubseteq$ na zbiorze $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ przyjmując

$$\langle m_1,n_1\rangle \sqsubseteq \langle m_2,n_2\rangle \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad n_1<n_2 \vee (n_1=n_2 \wedge m_1\leq m_2).$$

Niech X będzie niepustym podzbiorem zbioru $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. W prostokąty poniżej wpisz wzory definiujące liczby m_0 i n_0 tak, aby para $\langle m_0,n_0\rangle$ była minimalnym elementem zbioru X. Możesz użyć notacji $min\ S$ do oznaczenia najmniejszego elementu niepustego zbioru S

$m_0 =$ $min\ \{m\in\mathbb{N} \mid \langle m,n_0\rangle\in X\}$

$n_0 =$ $min\ \{n\in\mathbb{N} \mid \exists m\ \langle m,n\rangle\in X\}$

Zadanie 21 (2 punkty). Jeśli porządek $\langle\{0,1\}\times\mathbb{Z},\leq_{lex}\rangle$ jest izomorficzny z $\langle\mathbb{Z},\leq\rangle$, to w prostokąt poniżej wpisz odpowiedni izomorfizm. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego te porządki nie są izomorficzne.

W porządku $\langle\mathbb{Z},\leq\rangle$ każdy odcinek (zbiór elementów leżących pomiędzy danymi dwoma elementami) jest skończony, natomiast w zbiorze $\langle\{0,1\}\times\mathbb{Z},\leq_{lex}\rangle$ odcinek od $\langle 0,0\rangle$ do $\langle 1,0\rangle$ jest nieskończony.

Zadanie 22 (2 punkty). Czy porządek $\langle\mathcal{P}(\mathbb{N}),\subseteq\rangle$ jest regularny? Uzasadnij odpowiedź.

Nie. Niech $A_n=\{i\in\mathbb{N} \mid i\geq n\}$. Wtedy zbiór $\{A_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ nie ma elementu minimalnego.

Zadanie 23 (2 punkty). W tym zadaniu f,g są symbolami funkcyjnymi, a jest symbolem stałej, natomiast x,y i z są zmiennymi. W prostokąty obok par termów, które są unifikowalne, wpisz najogólniejsze unifikatory tych par. W prostokąty obok par, które nie są unifikowalne, wpisz słowo „NIE”.

$f(x,y) \stackrel{?}{=} f(y,g(x))$	NIE	$f(g(x),x) \stackrel{?}{=} f(y,a)$	$[x/a,\ y/g(a)]$
$f(z,g(x)) \stackrel{?}{=} f(a,a)$	NIE	$f(x,a) \stackrel{?}{=} f(f(y,a),z)$	$[x/f(y,a),\ z/a]$