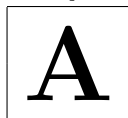


Wersja:



Numer indeksu:

Grupa¹:

s. 103	s. 104	s. 105
s. 139	s. 140	s. 141

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 2, 16 grudnia 2022

Czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Jeśli to możliwe, wpisz w prostokąty poniżej takie spójniki logiczne oraz kwantyfikatory, aby otrzymana formuła była tautologią, a następnie podaj jej dowód w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku napisz obok słowo „NIEMOŻLIWE”.

$$\left(\boxed{\forall} x (\varphi \wedge \psi) \right) \boxed{\Rightarrow} \left(\left(\boxed{\exists} x \varphi \right) \boxed{\vee} \left(\boxed{\exists} x \psi \right) \right)$$

$$\begin{array}{c}
 \boxed{\forall x(\varphi \wedge \psi) \text{ założenie}} \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 \forall x(\varphi \wedge \psi) \\
 \hline
 \varphi[x/x_0] \wedge \psi[x/x_0] \quad (\forall e) \\
 \hline
 \varphi[x/x_0] \quad (\wedge e) \\
 \hline
 \varphi[x/x_0] \quad (\exists i) \\
 \hline
 \exists x \varphi \\
 \hline
 \exists x \varphi \vee \exists x \psi \quad (\vee i) \\
 \hline
 \exists x \varphi \vee \exists x \psi
 \end{array} \\
 \hline
 \forall x(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow (\exists x \varphi \vee \exists x \psi) \quad (\Rightarrow i)
 \end{array}$$

Zadanie 2 (2 punkty). Jeśli istnieje taki zbiór A i taka przechodnia relacja binarna R na tym zbiorze, że $R \neq R;R$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiego zbioru i takiej relacji. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taki zbiór i relacja nie istnieją.

$$A = \{1, 2\}, R = \{\langle 1, 2 \rangle\}$$

¹Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 3 (2 punkty). Napisz formułę, która mówi, że *liczba x jest potęgą liczby 3* a przy tym jest zbudowana wyłącznie ze zmiennych, kwantyfikatorów, spójników logicznych, nawiasów i symboli $<, +, \cdot, 0, 1, 2, 3$ interpretowanych w liczbach naturalnych jako relacja mniejszości, funkcje dodawania i mnożenia, oraz stałe 0, 1, 2 i 3. Można definiować makra tak jak to robiliśmy na ćwiczeniach. **Wskazówka:** intuicyjnie, liczba nie jest potęgą 3 gdy ma dzielnik, który nie dzieli się przez 3; trzeba jednak uważać na liczbę 1, która jest potęgą 3.

Niech $dzieli(d, m)$ oznacza formułę $\exists k \ d \cdot k = m$

$$x=1 \vee (1 < x \wedge \forall d. 1 < d \wedge dzieli(d, x) \Rightarrow dzieli(3, d))$$

Zadanie 4 (2 punkty). Rozważmy zbiory osób O , barów B , soków S i drużyn D oraz binarne relacje $Bywa \subseteq O \times B$, $Lubi \subseteq O \times S$, $Podaję \subseteq B \times S$ i $Kibicuje \subseteq O \times D$ informujące odpowiednio o tym, jakie osoby bywają w jakich barach, jakie osoby lubią jakie soki, jakie bary podają jakie soki oraz jakie osoby kibicują jakim drużynom. Niech *Argentyna* oznacza drużynę. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ , że $\{s \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz soków podawanych w (jakimkolwiek) barze, w którym bywają tylko osoby, które kibicują Argentynie.

$$\exists b \in B. Podaję(b, s) \wedge \forall o \in O. Bywa(o, b) \Rightarrow Kibicuje(o, \text{Argentyna})$$

Zadanie 5 (2 punkty). Niech $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ będzie taką rodziną zbiorów, że $A_i = \{i-1, i, i+1\}$ dla $i \in \mathbb{N}$. W prostokąty poniżej wpisz, odpowiednio, najmniejszy i największy element zbioru X zdefiniowanego poniżej lub słowo „BRAK”, jeśli odpowiedniego elementu nie ma.

$$X = \bigcup_{m=42}^{2022} \bigcap_{n=m}^{m+1} A_n$$

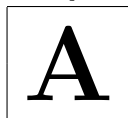
min $X =$

42

max $X =$

2023

Wersja:



Numer indeksu:

--

Grupa¹:

s. 103	s. 104	s. 105
s. 139	s. 140	s. 141

Zadanie 6 (5 punktów). Załóżmy, że relacja $R \subseteq A \times B$ jest funkcją. Udowodnij, że R jest injekcją wtedy i tylko wtedy, gdy $R; R^{-1} \subseteq I_A$. Tutaj R^{-1} oznacza *relację odwrotną* do R .

Zadanie 7 (5 punktów). Niech A oznacza zbiór liczb naturalnych parzystych, a B zbiór liczb naturalnych nieparzystych. Zdefiniujmy funkcję $f : A \times B \rightarrow \mathbb{N}$ daną wzorem $f(a, b) = \frac{a \cdot b}{2}$.

- (a) Czy f jest surjekcją?
- (b) Czy f jest injekcją?

Podaj dowody bądź stosowne kontrprzykłady wraz z uzasadnieniem.

Zadanie 8 (5 punktów). Dla danego zbioru X , *filtrem* w zbiorze $\mathcal{P}(X)$ nazywamy rodzinę zbiorów $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, spełniającą wszystkie poniższe warunki:

- $X \in \mathcal{F}$;
- jeśli $A \in \mathcal{F}$ oraz $A \subseteq B$ i $B \subseteq X$, to również $B \in \mathcal{F}$;
- dla dowolnych $A, B \in \mathcal{F}$ zachodzi $(A \cap B) \in \mathcal{F}$;
- $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

- (a) Podaj przykład (wraz z uzasadnieniem) filtra w zbiorze $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$.
- (b) Czy dla dowolnego zbioru X i dowolnych dwóch filtrów \mathcal{F}_1 i \mathcal{F}_2 w zbiorze $\mathcal{P}(X)$ ich przekrój $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ jest filtrem w zbiorze $\mathcal{P}(X)$? Uzasadnij odpowiedź: podaj dowód lub odpowiedni kontrprzykład.

¹Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja:

D

Numer indeksu:

Grupa¹:

s. 103	s. 104	s. 105
s. 139	s. 140	s. 141

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 2, 16 grudnia 2022

Czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Napisz formułę, która mówi, że liczba x **nie jest** potęgą liczby 2 a przy tym jest zbudowana wyłącznie ze zmiennych, kwantyfikatorów, spójników logicznych, nawiasów i symboli $<, +, \cdot, 0, 1, 2$ interpretowanych w liczbach naturalnych jako relacja mniejszości, funkcje dodawania i mnożenia, oraz stałe 0, 1 i 2. Można definiować makra tak jak to robiliśmy na ćwiczeniach. **Wskazówka:** intuicyjnie, liczba jest potęgą 2 gdy każdy jej dzielnik dzieli się przez 2; trzeba jednak uważać na liczbę 1, która jest potęgą 2.

Niech $dzieli(d, m)$ oznacza formułę $1 < d \wedge \exists k \ d \cdot k = m$

$x=0 \vee 2 < x \wedge \exists d. \text{dzieli}(d, x) \wedge \neg \text{dzieli}(2, d)$

Zadanie 2 (2 punkty). Niech $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ będzie taką rodziną zbiorów, że $A_i = \{i-1, i, i+1\}$ dla $i \in \mathbb{N}$. W prostokąty poniżej wpisz, odpowiednio, najmniejszy i największy element zbioru X zdefiniowanego poniżej lub słowo „BRAK”, jeśli odpowiedniego elementu nie ma.

$$X = \bigcap_{m=42}^{2022} \bigcup_{n=m}^{2023} A_n$$

min $X =$

2021

max $X =$

2024

Zadanie 3 (2 punkty). Niech R^+ oznacza przechodnie domknięcie relacji R . Jeśli istnieje taki zbiór A i taka relacja binarna R na tym zbiorze, że $R^+ \neq (R; R)^+$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiego zbioru i takiej relacji. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taki zbiór i relacja nie istnieją.

$A = \{1, 2\}, R = \{(1, 2)\}$

¹Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 4 (2 punkty). Jeśli to możliwe, wpisz w prostokąty poniżej takie spójniki logiczne oraz kwantyfikatory, aby otrzymana formuła była tautologią, a następnie podaj jej dowód w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku napisz obok słowo „NIEMOŻLIWE”.

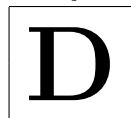
$$\left(\boxed{\forall} x (\varphi \vee \psi) \right) \boxed{\Rightarrow} \left(\left(\boxed{\exists} x \varphi \right) \boxed{\vee} \left(\boxed{\exists} x \psi \right) \right)$$

$\forall x(\varphi \vee \psi)$ założenie								
$\frac{\forall x(\varphi \vee \psi)}{\varphi[x/x_0] \vee \psi[x/x_0]} (\forall e)$	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;">$\varphi[x/x_0]$ założenie</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;"> $\frac{\varphi[x/x_0]}{\exists x \varphi} \exists i$ </td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;"> $\frac{\exists x \varphi}{\exists x \varphi \vee \exists x \psi} (\vee i)$ </td> </tr> </table>	$\varphi[x/x_0]$ założenie	$\frac{\varphi[x/x_0]}{\exists x \varphi} \exists i$	$\frac{\exists x \varphi}{\exists x \varphi \vee \exists x \psi} (\vee i)$	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;">$\psi[x/x_0]$ założenie</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;"> $\frac{\psi[x/x_0]}{\exists x \psi} \exists i$ </td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;"> $\frac{\exists x \psi}{\exists x \varphi \vee \exists x \psi} (\vee i)$ </td> </tr> </table>	$\psi[x/x_0]$ założenie	$\frac{\psi[x/x_0]}{\exists x \psi} \exists i$	$\frac{\exists x \psi}{\exists x \varphi \vee \exists x \psi} (\vee i)$
$\varphi[x/x_0]$ założenie								
$\frac{\varphi[x/x_0]}{\exists x \varphi} \exists i$								
$\frac{\exists x \varphi}{\exists x \varphi \vee \exists x \psi} (\vee i)$								
$\psi[x/x_0]$ założenie								
$\frac{\psi[x/x_0]}{\exists x \psi} \exists i$								
$\frac{\exists x \psi}{\exists x \varphi \vee \exists x \psi} (\vee i)$								
$\frac{\varphi[x/x_0] \vee \psi[x/x_0] \quad \exists x \varphi \vee \exists x \psi}{\exists x \varphi \vee \exists x \psi} (\vee e)$								
$\frac{\forall x(\varphi \vee \psi) \Rightarrow (\exists x \varphi \vee \exists x \psi)}{\forall x(\varphi \vee \psi) \Rightarrow (\exists x \varphi \vee \exists x \psi)} (\Rightarrow i)$								

Zadanie 5 (2 punkty). Rozważmy zbiory osób O , barów B , soków S i drużyn D oraz binarne relacje $Bywa \subseteq O \times B$, $Lubi \subseteq O \times S$, $Podają \subseteq B \times S$ i $Kibicuje \subseteq O \times D$ informujące odpowiednio o tym, jakie osoby bywają w jakich barach, jakie osoby lubią jakie soki, jakie bary podają jakie soki oraz jakie osoby kibicują jakim drużynom. Niech **Francja** oznacza drużynę. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ , że $\{b \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz barów podających (jakikolwiek) sok lubiany przez wszystkie osoby, które kibicują **Francji**.

$$\exists s \in S. Podają(b, s) \wedge \forall o \in O. Kibicuje(o, \text{Francja}) \Rightarrow Lubi(o, s)$$

Wersja:



Numer indeksu:

Grupa¹:

s. 103	s. 104	s. 105
s. 139	s. 140	s. 141

Zadanie 6 (5 punktów). Niech A oznacza zbiór liczb naturalnych parzystych, a B zbiór liczb naturalnych nieparzystych. Zdefiniujmy funkcję $f : A \times B \rightarrow \mathbb{N}$ daną wzorem $f(a, b) = \frac{a+2b}{2} - 1$.

- (a) Czy f jest surjekcją?
- (b) Czy f jest injekcją?

Podaj dowody bądź stosowne kontrprzykłady wraz z uzasadnieniem.

Zadanie 7 (5 punktów). Załóżmy, że relacja $R \subseteq A \times B$ jest funkcją. Udowodnij, że R jest surjekcją wtedy i tylko wtedy, gdy $I_B \subseteq R^{-1}; R$. Tutaj R^{-1} oznacza *relację* odwrotną do R .

Zadanie 8 (5 punktów). Dla danego zbioru X , *ideałem* w zbiorze $\mathcal{P}(X)$ nazywamy rodzinę zbiorów $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$, spełniającą wszystkie poniższe warunki:

- $\emptyset \in \mathcal{I}$;
- jeśli $A \in \mathcal{I}$ oraz $B \subseteq A$, to również $B \in \mathcal{I}$;
- dla dowolnych $A, B \in \mathcal{I}$ zachodzi $(A \cup B) \in \mathcal{I}$;
- $X \notin \mathcal{I}$.

- (a) Podaj przykład (wraz z uzasadnieniem) ideału w zbiorze $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$.
- (b) Czy dla dowolnego zbioru X i dowolnych dwóch ideałów \mathcal{I}_1 i \mathcal{I}_2 w zbiorze $\mathcal{P}(X)$ ich suma $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$ jest ideałem w zbiorze $\mathcal{P}(X)$? Uzasadnij odpowiedź: podaj dowód lub odpowiedni kontrprzykład.

¹Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.