MOWNIT

Laboratorium 2b

Jakub Karbowski

2 kwietnia 2022

Cel ćwiczenia

Dla zadanej funkcji

$$f(x) = e^{-k\cdot\sin(mx)} + k\cdot\cos(mx)$$
$$x \in [-3\pi, 3\pi]$$
$$k = 2$$
$$m = 1$$

wyznaczyć wielomian interpolujący Hermite'a, mając daną jedną pochodną. Sprawdzić wpływ liczby węzłów oraz ich rozmieszczenia na dokładność interpolacji. Porównać z zagadnieniem Lagrange'a.

Parametry doświadczenia

Język programowania:

- Julia

Typ zmiennoprzecinkowy:

- Float64

Obliczany błąd:

- sum $\text{err}^2 = \sum \left[f(x_i) - g(x_i)\right]^2$

Zagadnienie Lagrange'a:

- Wzór Newtona

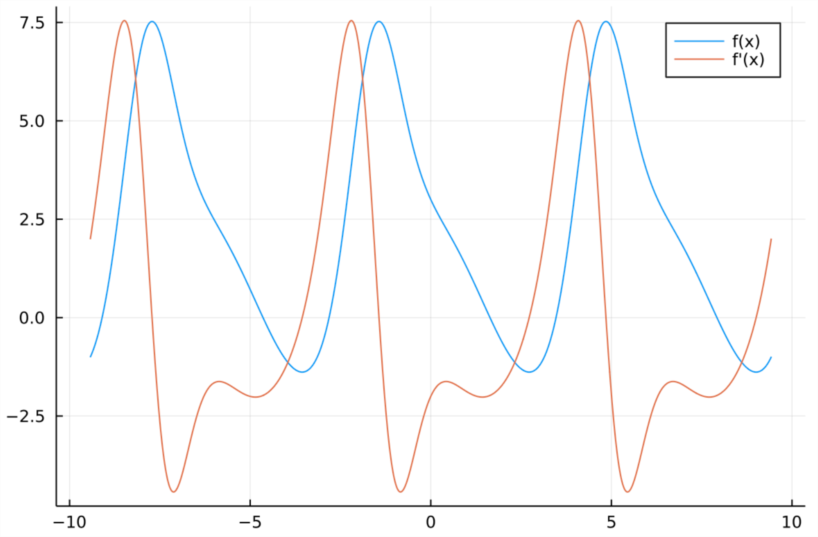
Pochodna

Pochodna została policzona analitycznie:

$$f(x) = e^{-k \cdot \sin(mx)} + k \cdot \cos(mx)$$

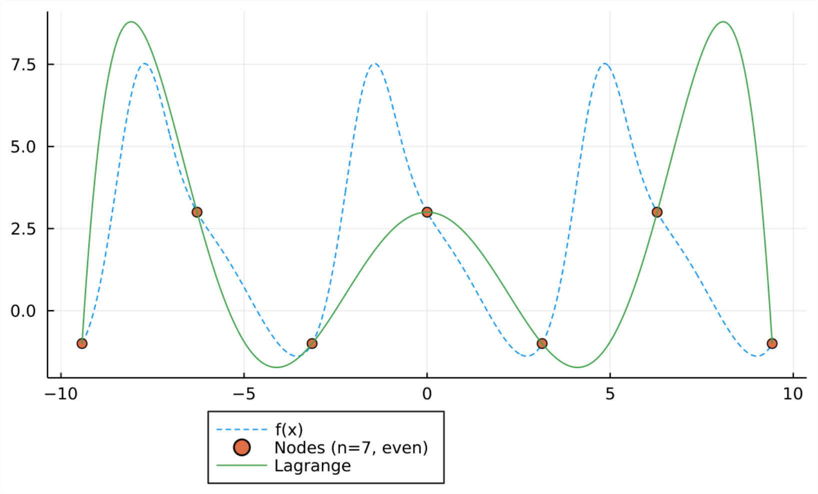
$$f'(x) = km \left(\cos(mx) \left(-e^{-k \sin(mx)}\right) - \sin(mx)\right)$$

Zadana funkcja



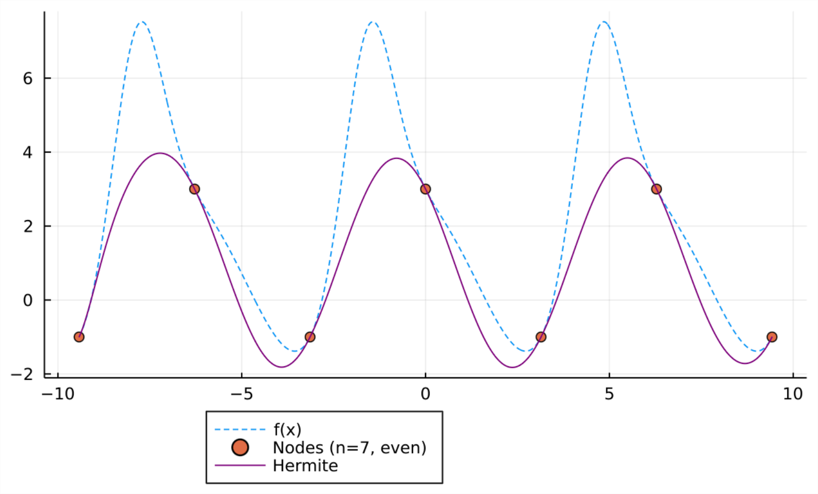
Rysunek 1: Funkcja i jej pochodna

Lagrange 1



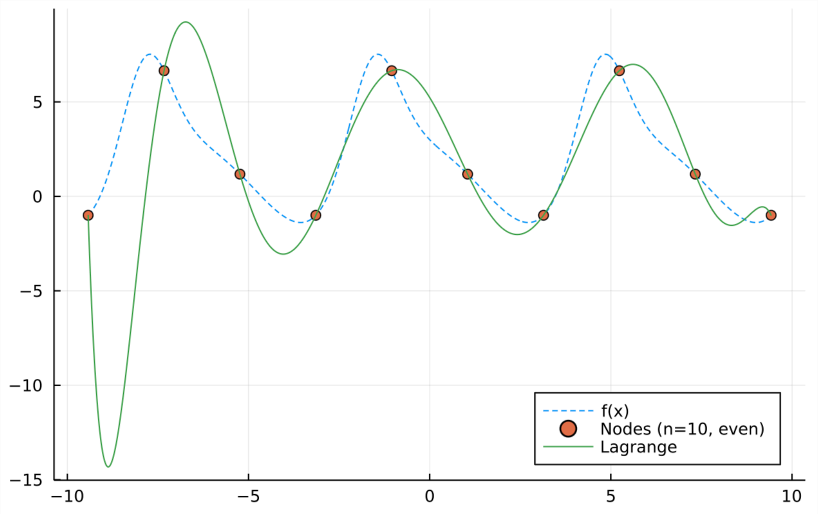
Rysunek 2: $n = 7$, Lagrange, równoodległe

Hermite 1



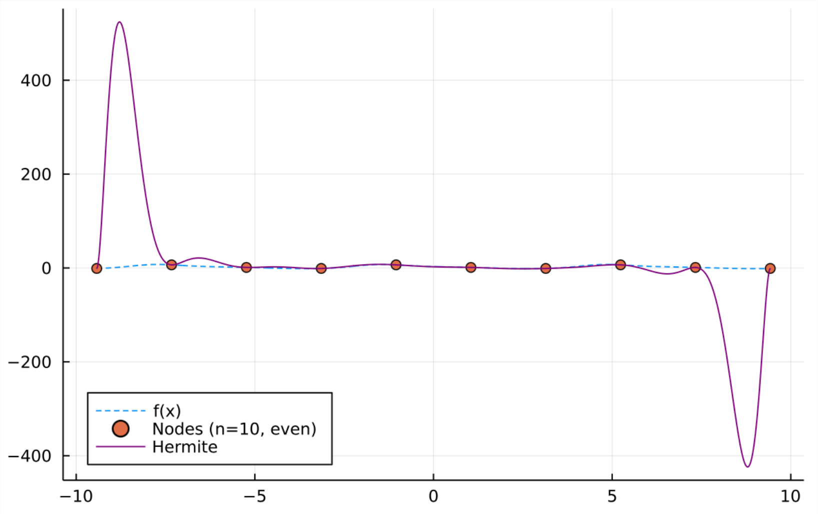
Rysunek 3: $n = 7$, Hermite, równoodległe

Lagrange 2



Rysunek 4: $n = 10$, Lagrange, równoodległe

Hermite 2



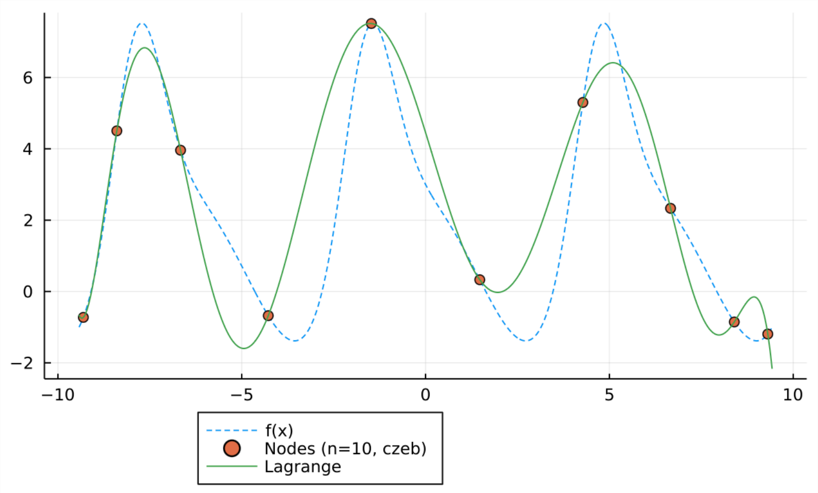
Rysunek 5: $n = 10$, Hermite, równoodległe

Wniosek

Interpolacja Hermite'a powoduje efekt Runge'go szybciej niż interpolacja Lagrange'a.

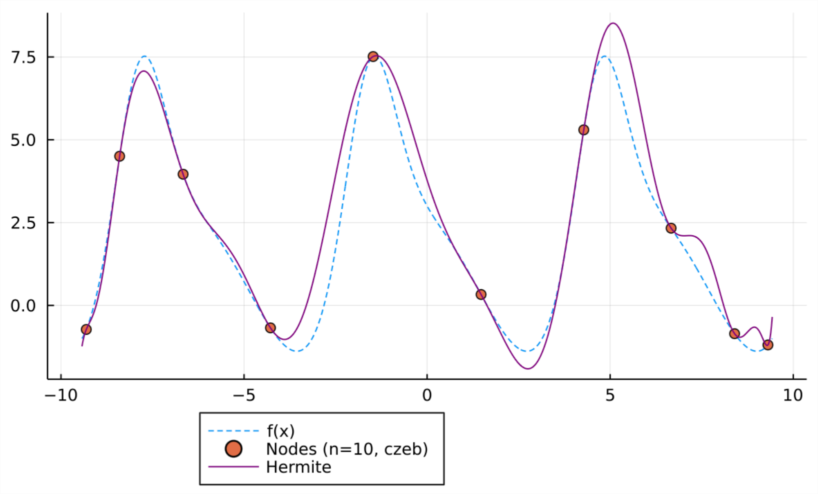
Następnie sprawdzone zostało zastosowanie węzłów Czebyszewa.

Lagrange 3



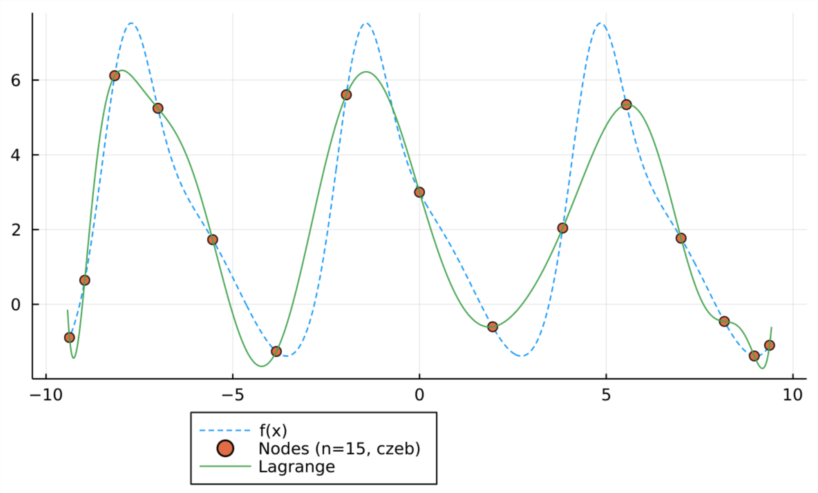
Rysunek 6: $n = 10$, Lagrange, Czebyszew

Hermite 3



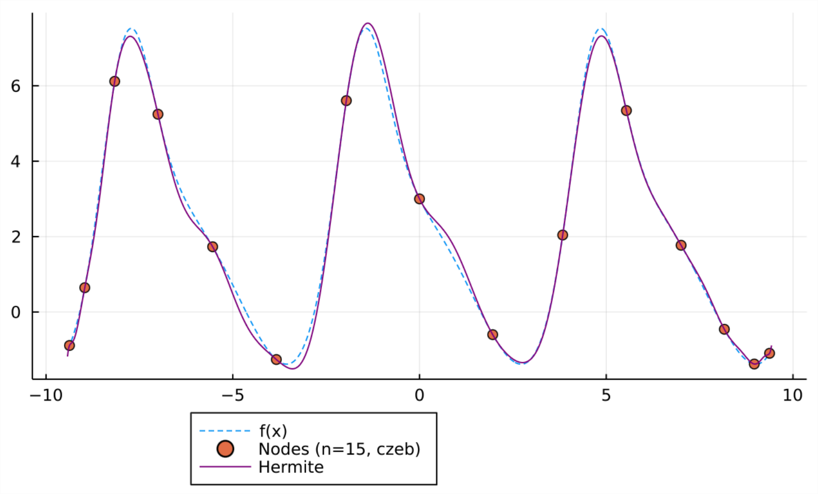
Rysunek 7: $n = 10$, Hermite, Czebyszew

Lagrange 4



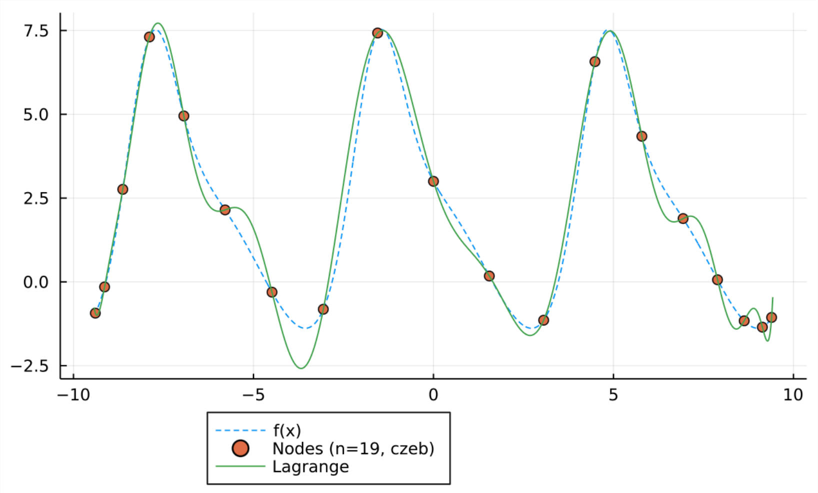
Rysunek 8: $n = 15$, Lagrange, Czebyszew

Hermite 4



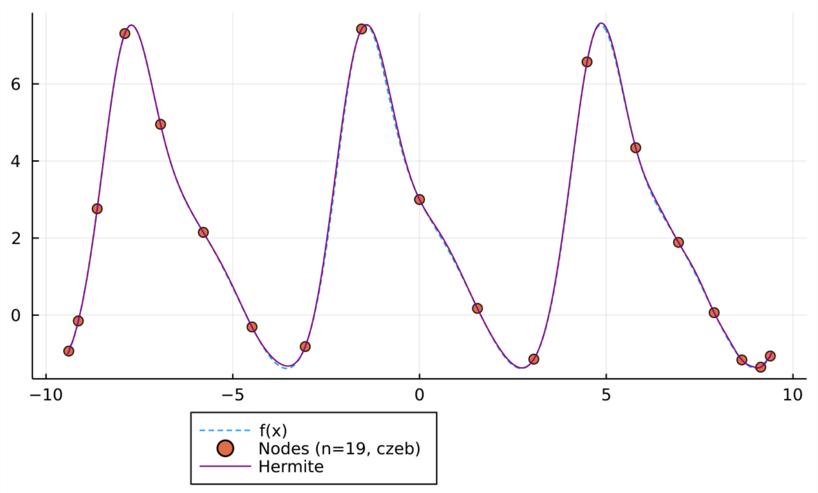
Rysunek 9: $n = 15$, Hermite, Czebyszew

Lagrange 5



Rysunek 10: $n = 19$, Lagrange, Czebyszew

Hermite 5

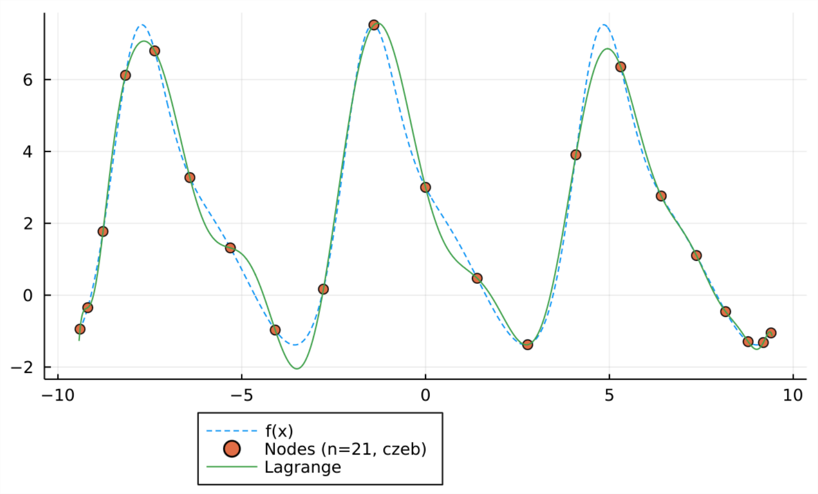


Rysunek 11: $n = 19$, Hermite, Czebyszew

Wniosek

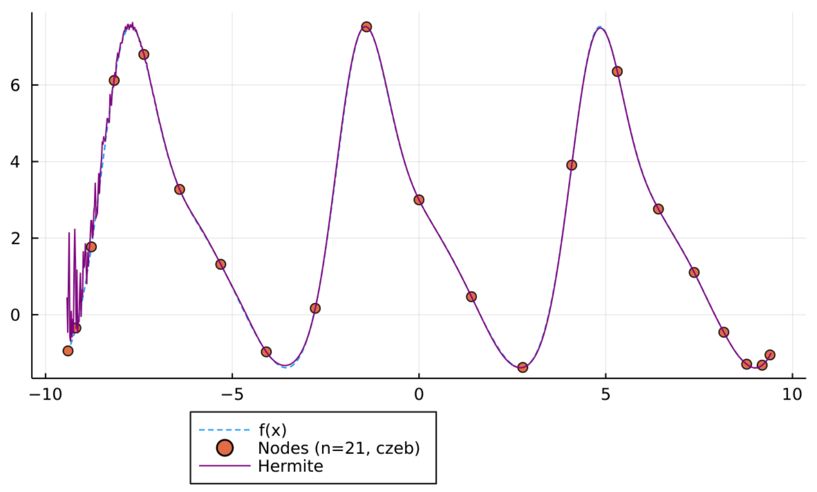
Interpolacja Hermite’a lepiej przybliża funkcję dla tej samej liczby węzłów. Później zostaną sprawdzone wartości liczbowe błędu.

Lagrange 6



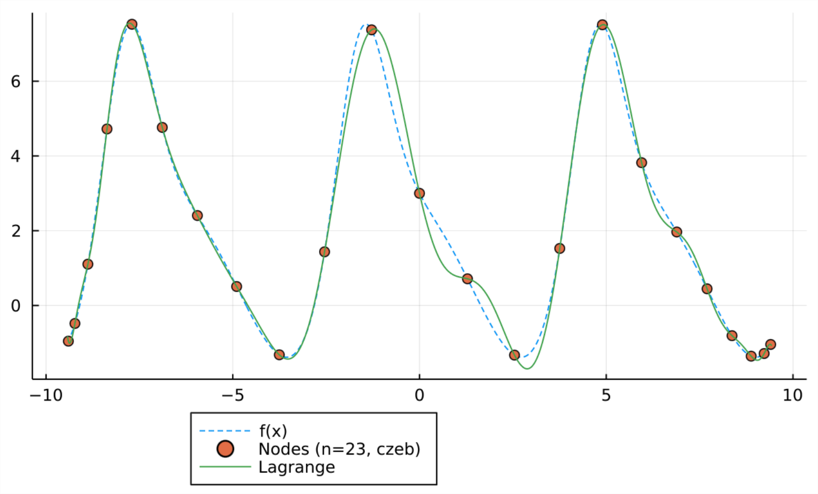
Rysunek 12: $n = 21$, Lagrange, Czebyszew

Hermite 6



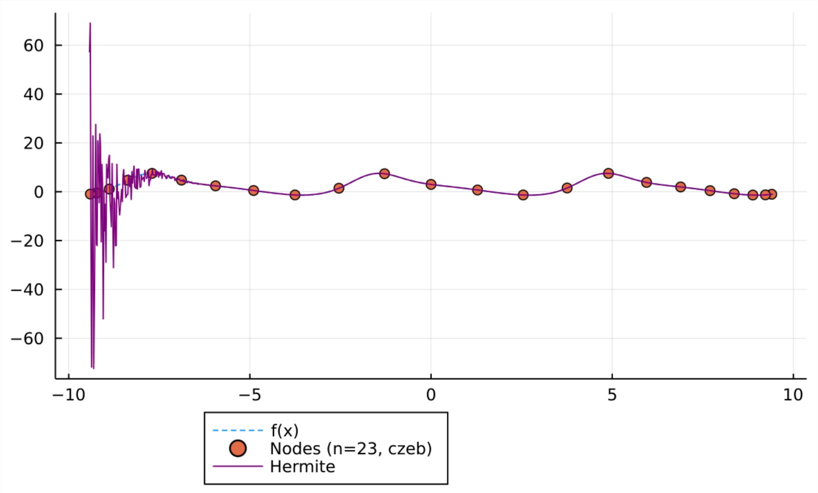
Rysunek 13: $n = 21$, Hermite, Czebyszew

Lagrange 7



Rysunek 14: $n = 23$, Lagrange, Czebyszew

Hermite 7



Rysunek 15: $n = 23$, Hermite, Czebyszew

Wniosek

Interpolacja Hermite'a powoduje wystąpienie błędów numerycznych wcześniej niż wzór Newtona dla zagadnienia Lagrange'a.

Wartości numeryczne

Tabela 1: Lagrange vs Hermite

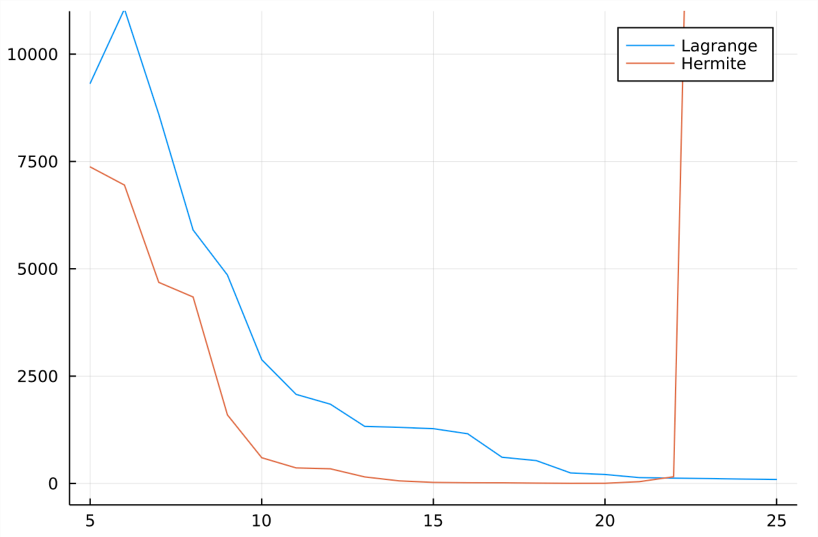
n	Błąd Lagrange'a	Błąd Hermite'a
5	9318	7374
6	11051	6950
7	8600	4684
8	5904	4343
9	4855	1597
10	2883	599
11	2075	362
12	1846	341
13	1329	152
14	1307	60
15	1276	24

Wartości numeryczne

Tabela 2: Lagrange vs Hermite (c.d.)

n	Błąd Lagrange'a	Błąd Hermite'a
16	1157	17
17	610	15
18	532	8
19	244	3
20	**209**	**4**
21	136	41
22	**124**	**156**
23	114	35272
24	102	156128
25	93	6393471

Lagrange vs Hermite



Rysunek 16: Porównanie błędów interpolacji

Wniosek

Dla $n = 20$ błąd Hermite'a zaczyna rosnąć.

Dla $n = 22$ błąd Hermite'a zaczyna być większy niż Lagrange'a.

Wnioski

1. Mając informację o pochodnej jesteśmy w stanie lepiej interpolować funkcję dzięki metodzie Hermite'a.
2. Jeśli mamy mało węzłów, metodą Hermite'a możemy osiągnąć lepszą interpolację niż metodą Lagrange'a.
3. W metodzie Hermite'a nie należy stosować węzłów równoodległych.
4. W metodzie Hermite'a nie należy stosować dużej liczby węzłów.
5. Mając wystarczająco dużo węzłów należy zastosować metodę Lagrange'a.