MOWNIT

Laboratorium 5 – metoda Newtona i metoda siecznych

Jakub Karbowski

17 maja 2022

Zadanie 1

Dla zadanej funkcji

$$f(x) = x^2 - 25\sin^9(x)$$
$$x \in [0.1, 1.9]$$

wyznaczyć miejsca zerowe metodą Newtona i siecznych.

Kryteria stopu

Zastosowano następujące kryteria stopu (z przyjętą nazwą funkcji w programie):

termcrit_change
$|x_{i-1} - x_i| < \epsilon$

termcrit_error
$|f(x_i)| < \epsilon$

Dodatkowo przyjęto maksymalną liczbę iteracji (50) aby uniknąć zawieszenia programu dla złych wartości początkowych.

Metoda Newtona

Wzór na iterację metody Newtona:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Pochodna została policzona analitycznie:

$$f'(x) = 2x - 225\sin^8(x) \cdot \cos(x)$$

Metoda wymaga podania jednego punktu początkowego.

Przeprowadzone doświadczenia

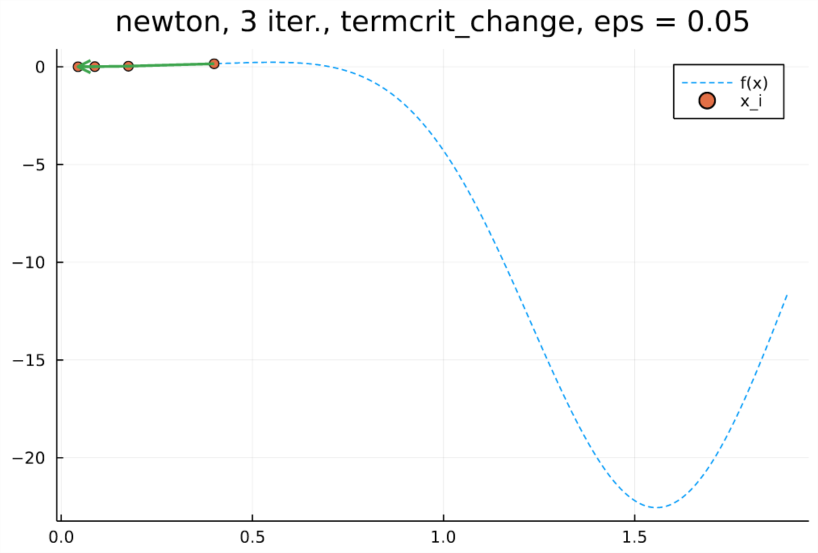
Najpierw sprawdzono wizualnie działanie metody Newtona dla $x_0 \in \{0.1, 0.2, \ldots, 1.9\}$.

W tytule wykresu umieszczono:

- nazwę metody (newton),
- liczbę iteracji,
- kryterium stopu,
- epsilon danego kryterium.

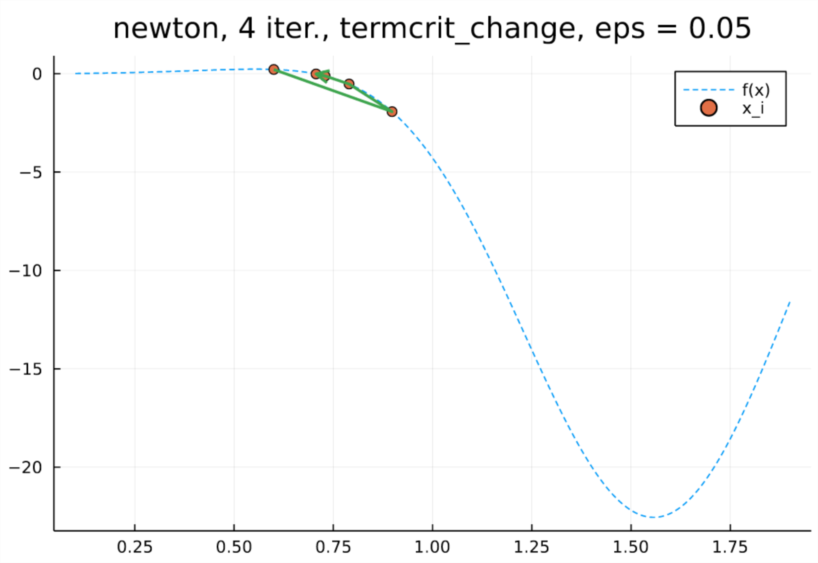
Pod wykresem widać wartość punktu x_0.

Wykres pokazuje kroki metody za pomocą zielonej linii ze strzałką na końcu.



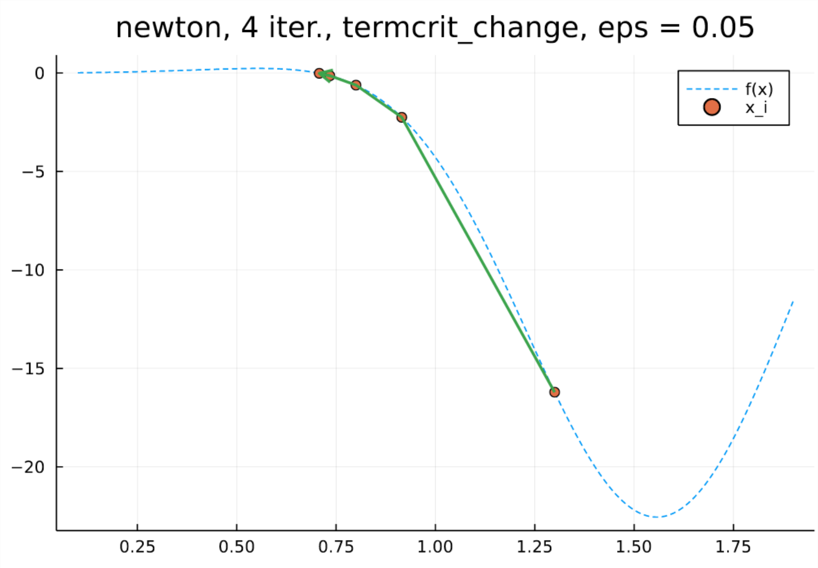
Rysunek 1: Metoda Newtona, $x_0 = 0.4$

Metoda Newtona



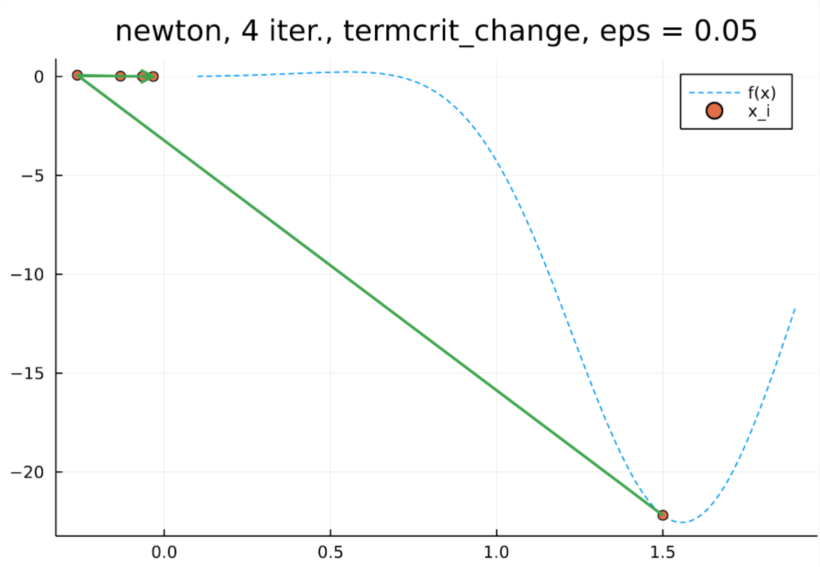
Rysunek 2: Metoda Newtona, $x_0 = 0.6$

Metoda Newtona



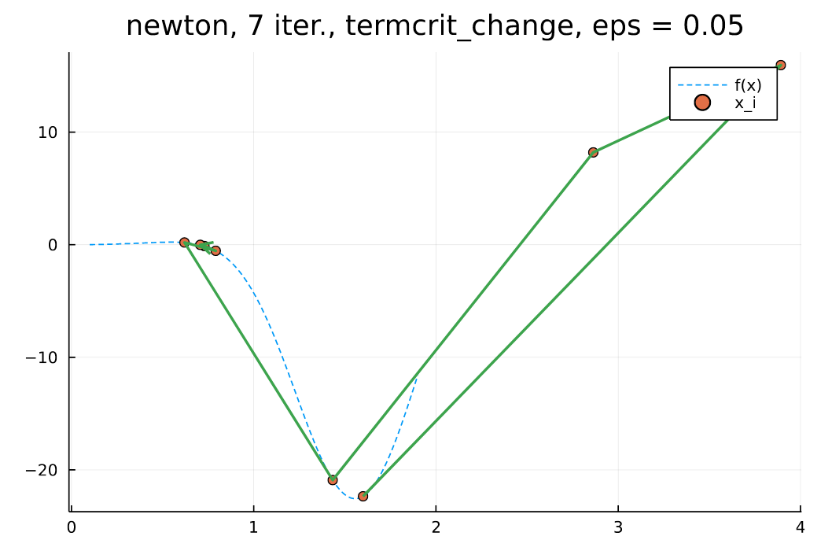
Rysunek 3: Metoda Newtona, $x_0 = 1.3$

Metoda Newtona



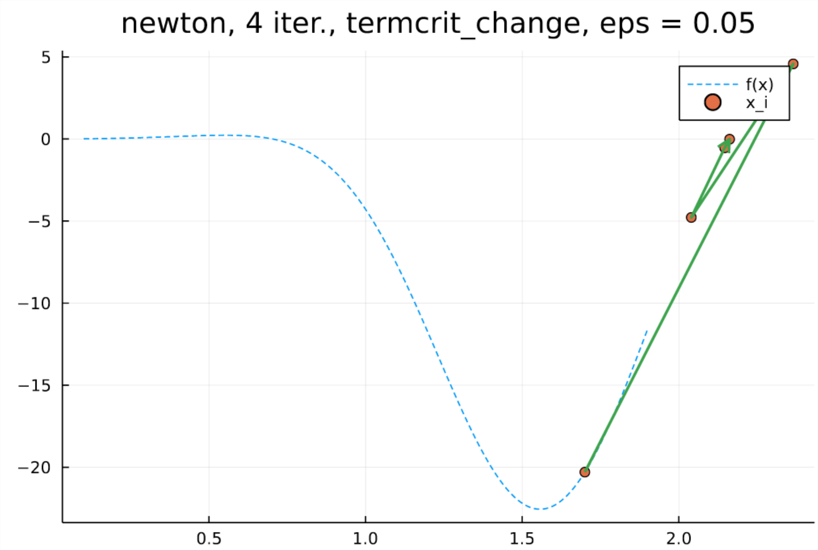
Rysunek 4: Metoda Newtona, $x_0 = 1.5$

Metoda Newtona



Rysunek 5: Metoda Newtona, $x_0 = 1.6$

Metoda Newtona



Rysunek 6: Metoda Newtona, $x_0 = 1.7$

Metoda siecznych

Wzór na iterację metody siecznych:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \cdot f(x_i)$$

Metoda jest podobna do metody Newtona, z zastosowaniem ilorazu różnicowego do obliczenia pochodnej.

W przeciwieństwie do metody Newtona, metoda siecznych wymaga podania dwóch punktów początkowych.

Przeprowadzone doświadczenia

Dla metody siecznych należało dobrać 2 punkty początkowe. Sprawdzono każdą kombinację $x_0 \in \{0.1, 0.2, \ldots, 1.9\}$, $x_1 \in \{0.1, 1.9\}$. $x_1 = 0.1$ oznaczono nazwą **sieczneleft**, a $x_1 = 1.9$ **siecznerigh t**.

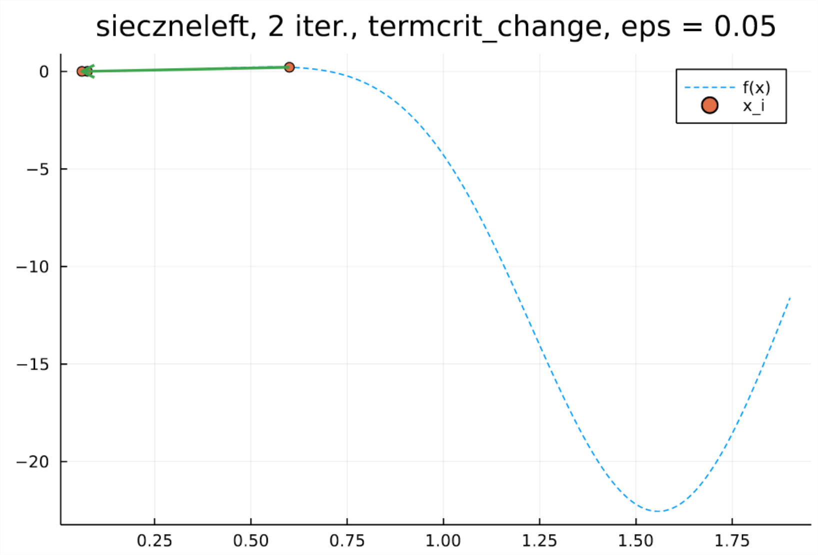
W tytule wykresu umieszczono:

- nazwę metody (sieczneleft/siecznerigh t),
- liczbę iteracji,
- kryterium stopu,
- epsilon danego kryterium.

Pod wykresem widać wartości punktów x_0 i x_1.

Wykres pokazuje kroki metody za pomocą zielonej linii ze strzałką na końcu.

Metoda siecznych

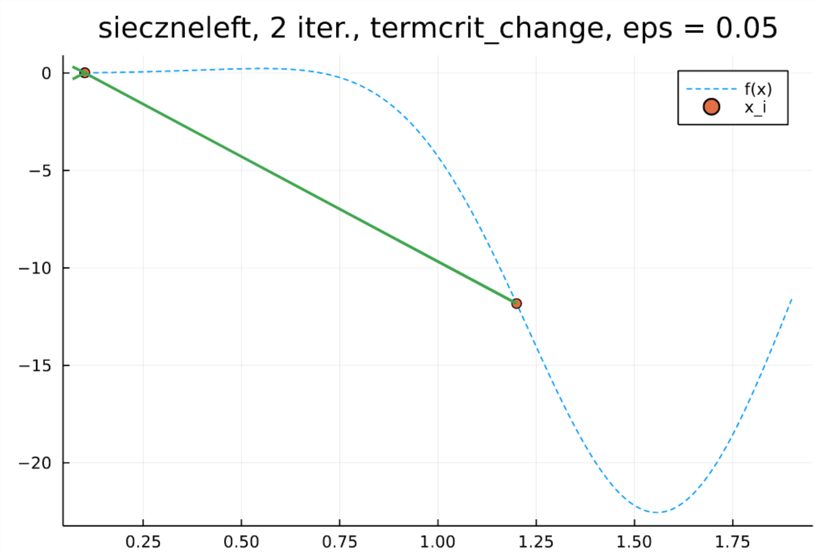


Rysunek 7: Metoda siecznych, $x_0 = 0.6$, $x_1 = 0.1$

Metoda siecznych

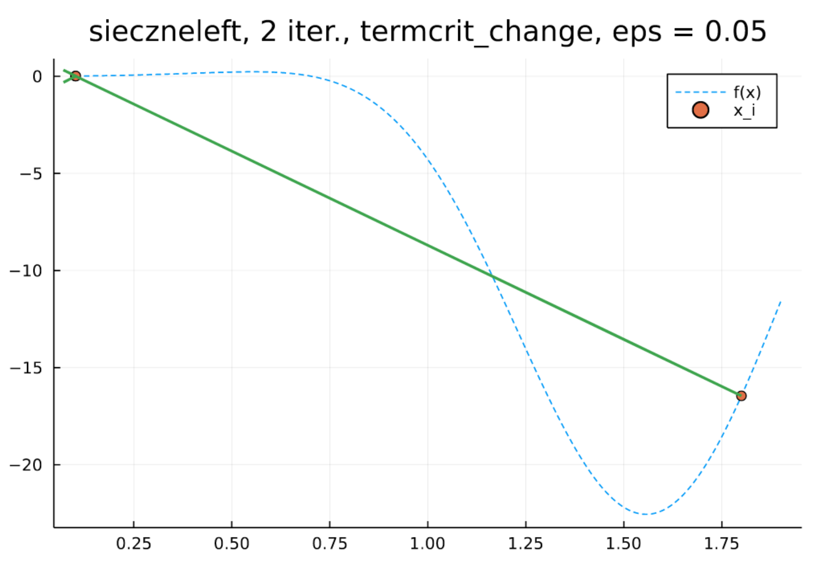
Rysunek 8: Metoda siecznych, $x_0 = 0.7$, $x_1 = 0.1$

Metoda siecznych



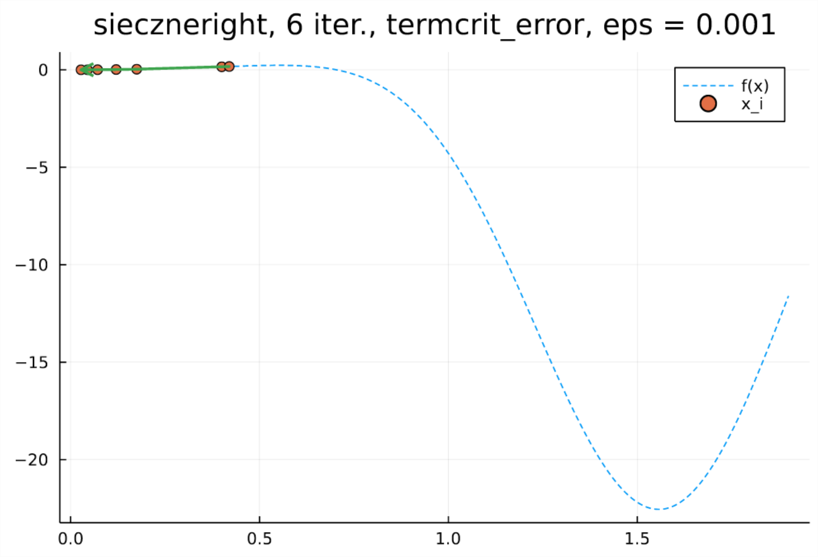
Rysunek 9: Metoda siecznych, $x_0 = 1.2$, $x_1 = 0.1$

Metoda siecznych

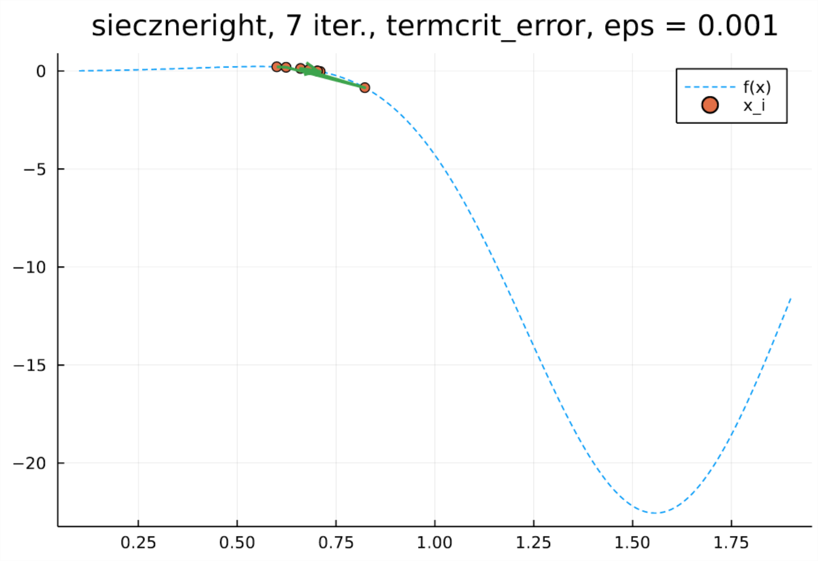


Rysunek 10: Metoda siecznych, $x_0 = 1.8$, $x_1 = 0.1$

Metoda siecznych

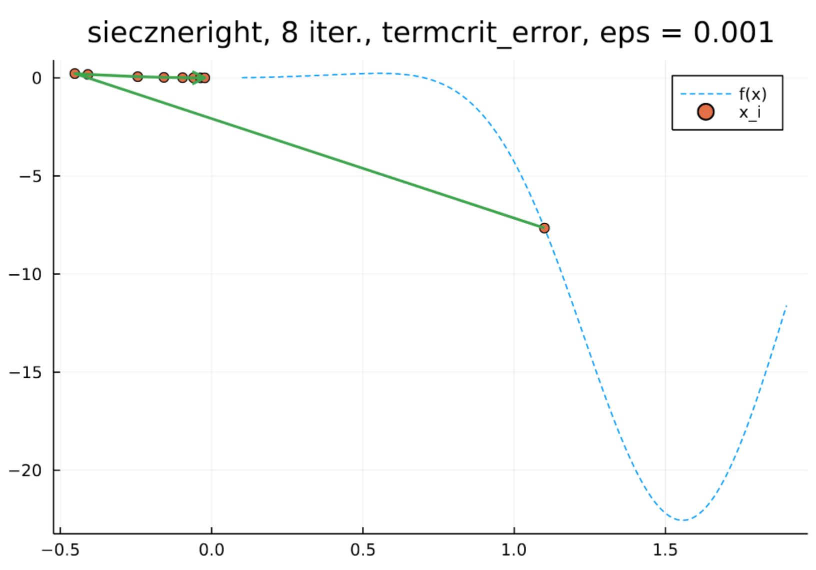


Rysunek 11: Metoda siecznych, $x_0 = 0.4$, $x_1 = 1.9$



Rysunek 12: Metoda siecznych, $x_0 = 0.6$, $x_1 = 1.9$

Metoda siecznych

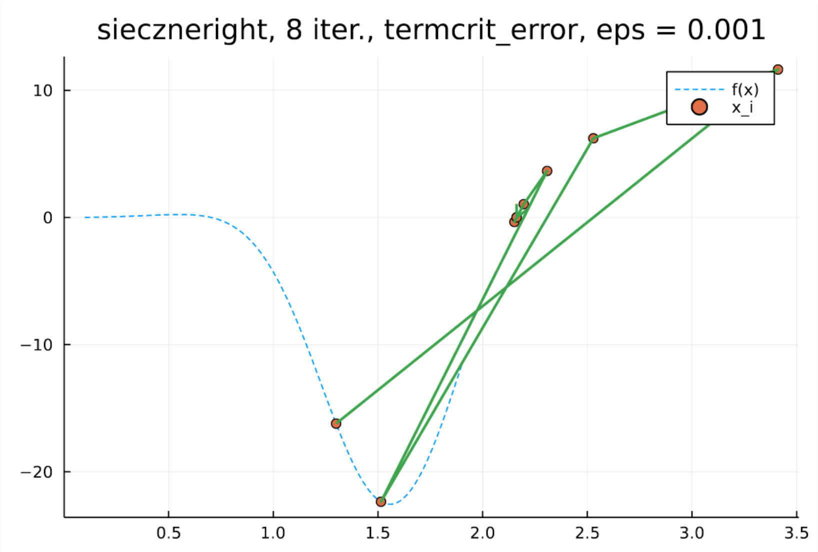


Rysunek 13: Metoda siecznych, $x_0 = 1.1$, $x_1 = 1.9$

Metoda siecznych

Rysunek 14: Metoda siecznych, $x_0 = 1.2$, $x_1 = 1.9$

Metoda siecznych



Rysunek 15: Metoda siecznych, $x_0 = 1.3$, $x_1 = 1.9$

Liczba iteracji

Porównano liczbę iteracji dla obydwu metod z różnymi kryteriami stopu. Tab. 1 pokazuje liczbę iteracji metody w zależności od wartości epsilon. W Tab. 1 użyto skróconych nazw:

1. N (C) = newton (termcrit_change)
2. N (E) = newton (termcrit_error
3. S (C) = sieczne (termcrit_change)
4. S (E) = sieczne (termcrit_error)

Wartości początkowe zostały ustalone na $x_0 = 0.5$ i $x_1 = 0.1$.

Maksymalna dozwolona liczba iteracji została ustalona na 100.

Liczba iteracji

Tabela 1: Liczba iteracji

ϵ	N (C)	N (E)	S (C)	S (E)
1.0×10^{-1}	2	1	2	1
1.0×10^{-2}	2	1	5	1
1.0×10^{-3}	6	1	10	4
1.0×10^{-4}	9	2	15	6
1.0×10^{-5}	12	4	20	9
1.0×10^{-6}	16	6	24	11
1.0×10^{-7}	19	7	29	13
1.0×10^{-8}	22	9	34	16
1.0×10^{-9}	26	11	39	18
1.0×10^{-10}	29	12	44	21

Wnioski

1. Metoda Newtona szybciej zbiega do rozwiązania niż metoda siecznych.
2. Kryterium termcrit_error szybciej kończy algorytm niż termcrit_change.
    2.1 Kryterium termcrit_change daje dokładniejszy wynik niż termcrit_error dla tej samej wartości epsilon.
3. Metodę siecznych można zastosować bez znajomości pochodnej.
4. Metoda siecznych często dąży nie do tego miejsca zerowego, które chcieliśmy osiągnąć.

Zadanie 2

Znaleźć rozwiązania równania

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3 = 1 \\ 2x_1^2 - x_2^2 - 4x_3^2 = -3 \\ x_1^2 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

metodą Newtona.

Przygotowanie

Należy przenieść wszystkie składniki na lewą stronę aby po prawej były same zera:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3 - 1 = 0 \\ 2x_1^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 3 = 0 \\ x_1^2 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

Definiujemy funkcję dla metody Newtona (szukamy jej miejsc zerowych):

$$F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3 - 1 \\ 2x_1^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 3 \\ x_1^2 + x_2 + x_3 - 1 \end{bmatrix}$$

Na podstawie $F(\mathbf{x})$ liczymy jakobian:

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 1 \\ 4x_1 & -2x_2 & -8x_3 \\ 2x_1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Metoda Newtona

Krok iteracji metody Newtona:

$$\mathsf{x}_{i+1} = \mathsf{x}_i - J(\mathsf{x}_i)^{-1} \cdot F(\mathsf{x_i})$$

Kryteria stopu zdefiniowano za pomocą normy L1:

solvestop_change

$$||\mathsf{x}_i - \mathsf{x}_{i-1}||_1 < \epsilon$$

solvestop_error

$$||F(\mathsf{x}_i)||_1 < \epsilon$$

Odwrotność jakobianu liczona jest za pomocą biblioteki LinearAlgebra, która wewnętrznie używa LAPACK.

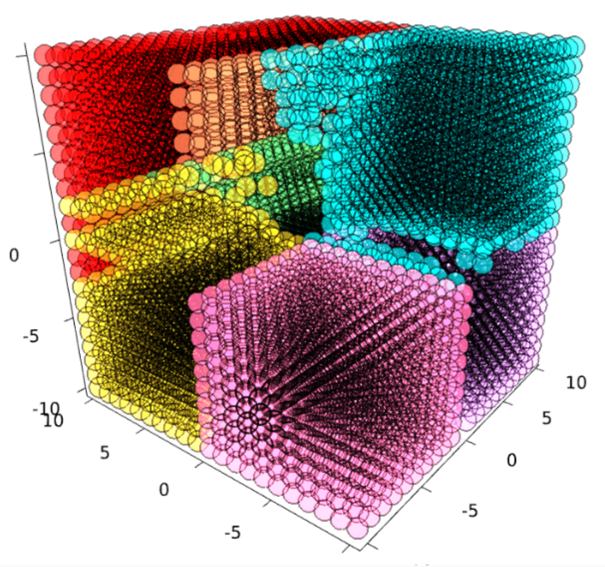
Szukanie wszystkich rozwiązań

Napisano algorytm szukający rozwiązań w przestrzeni R^3. Algorytm uruchamia metodę Newtona dla różnych wektorów początkowych. Sprawdzane są wektory początkowe

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathsf{R}^3 : \quad x_1, x_2, x_3 \in \{-10, -9, \ldots, 10\}$$

Inaczej mówiąc, sprawdzane są punkty z siatki 21x21x21 wyśrodkowanej w punkcie $(0, 0, 0)$.

Wyniki algorytmu są wizualizowane w postaci kolorowej kostki 3D. Punkty z obszaru czerwonego powodują brak zbieżności metody. Pozostałe klastry oznaczają zbiory punktów zbiegające się do jednego rozwiązania. Wszystkie punkty z obszaru danego koloru zbiegają się do tego samego rozwiązania.



Rysunek 16: Znalezione rozwiązania

Analiza

Znalezione zostało 6 rozwiązań (podane z dokładnością 2 miejsc po przecinku):

1. $[-1.55, 0, -1.4]$
2. $[1.55, 0, -1.4]$
3. $[-1, 1, -1]$
4. $[1, 1, -1]$
5. $[-0.32, 0, 0.9]$
6. $[0.32, 0, 0.9]$

Otrzymane rozwiązanie zależy od znaków współrzędnych wektora początkowego:

1. $[-, -, -] \rightarrow [-1.55, 0, -1.4]$
2. $[+, -, -] \rightarrow [1.55, 0, -1.4]$
3. $[-, +, -] \rightarrow [-1, 1, -1]$
4. $[+, +, -] \rightarrow [1, 1, -1]$
5. $[-, -, +] \rightarrow [-0.32, 0, 0.9]$
6. $[+, -, +] \rightarrow [0.32, 0, 0.9]$

Metoda nie jest zbieżna dla $[+, +, +]$ i $[-, +, +]$.

Kiedy $x_1 = 0$, jakobian jest nieodwracalny, przez co metoda nie działa.

Wnioski

1. Ciężko znaleźć wszystkie rozwiązania (sprawdzanie wszystkich wektorów początkowych ma złożoność wykładniczą).
2. Aby zastosować metodę, należy znać pochodne równań. Można to zrobić numerycznie, co zwiększy błąd.