MOWNIT

Laboratorium 4a – aproksymacja wielomianami algebraicznymi

Jakub Karbowski

13 kwietnia 2022

Cel ćwiczenia

Dla zadanej funkcji

$$f(x) = e^{-k \cdot \sin(mx)} + k \cdot \cos(mx)$$
$$x \in [-3\pi, 3\pi]$$
$$k = 2$$
$$m = 1$$

wyznaczyć funkcję aproksymującą wielomianami algebraicznymi. Sprawdzić wpływ liczby węzłów oraz układów funkcji bazowych na błąd.

Parametry doświadczenia

Język programowania:

- Julia

Typ zmiennoprzecinkowy:

- Float64

Obliczany błąd:

- sum err^2 = $\sum_{i=1}^{1000} \left[f(x_i) - g(x_i)\right]^2$

Aproksymacja

Przyjęto funkcję aproksymującą postaci

$$g(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$$

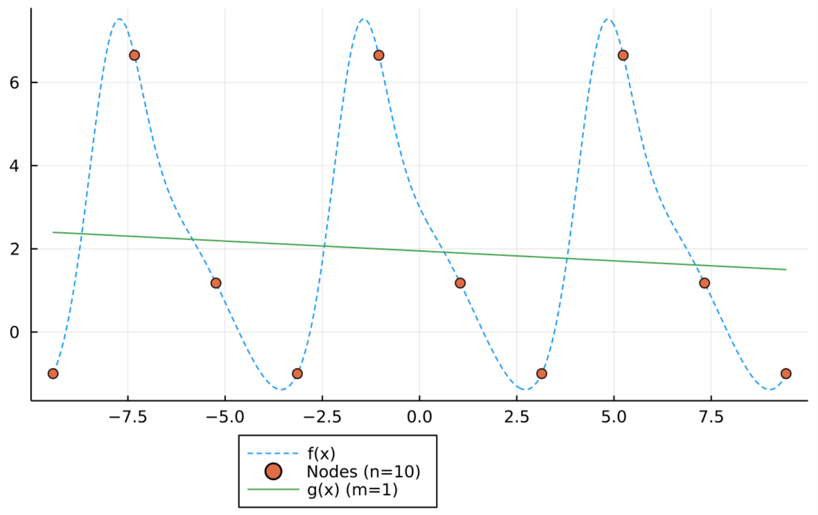
Wartość m określa stopień wielomianu aproksymującego.

Dla zadanych węzłów $x_i \in \{x_0, \ldots, x_n\}$, współczynniki a_j obliczane są poprzez szukanie minimum wyrażenia

$$\sum_{i=0}^{n} w(x_i) \left[f(x_i) - g(x_i) \right]^2$$

Przyjęto wagi wszystkich węzłów $w(x_i) = 1$.

Mało węzłów, różne m

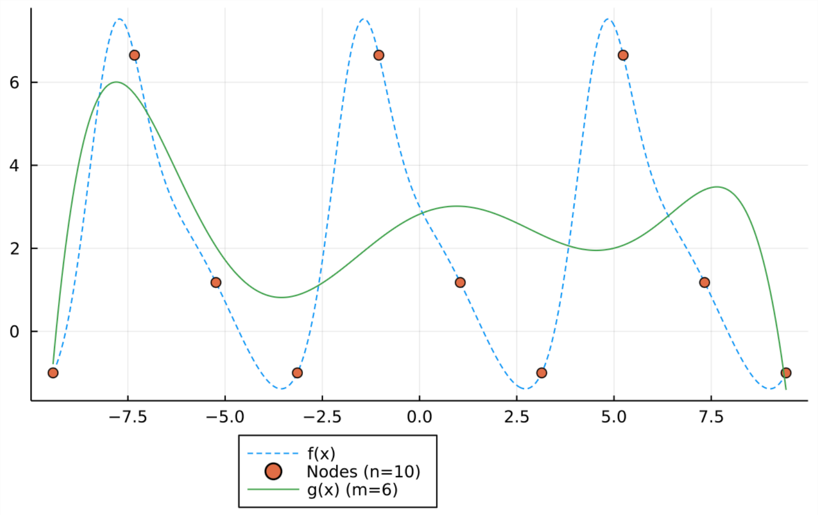


Rysunek 1: $n = 10, m = 1$

Mało węzłów, różne m

Dla $m = 1$, funkcja liniowa.

Mało węzłów, różne m

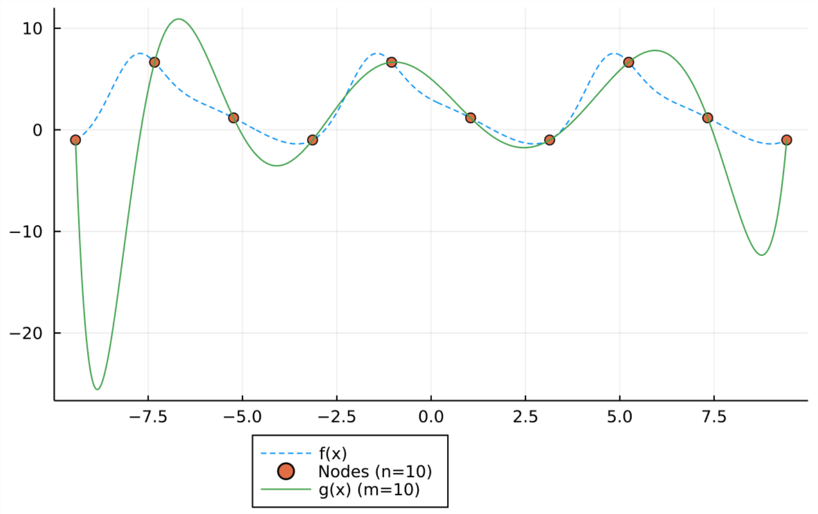


Rysunek 2: $n = 10, m = 6$

Mało węzłów, różne m

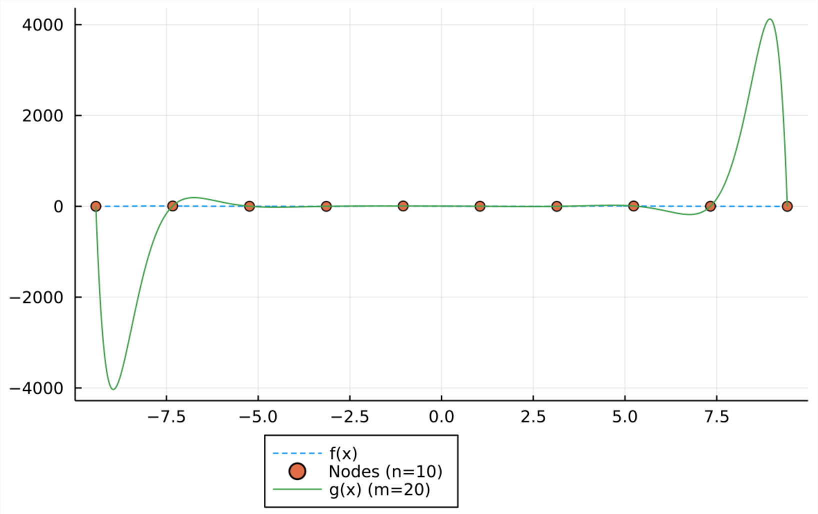
Dla większego m, dokładniejsze dopasowanie.

Mało węzłów, różne m



Rysunek 3: $n = 10, m = 10$

Mało węzłów, różne m

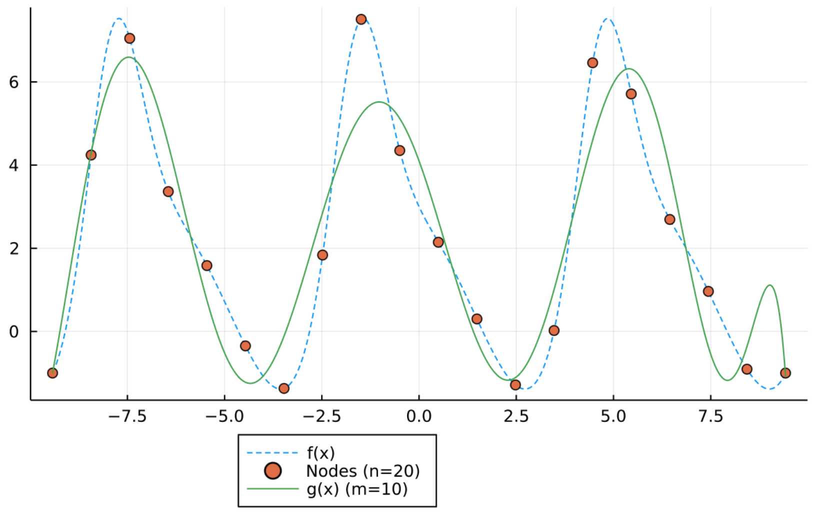


Rysunek 4: $n = 10, m = 20$

Mało węzłów, różne m

$m \geq n$, idealne dopasowanie w węzłach. Większy błąd na brzegach.

Więcej węzłów, różne m

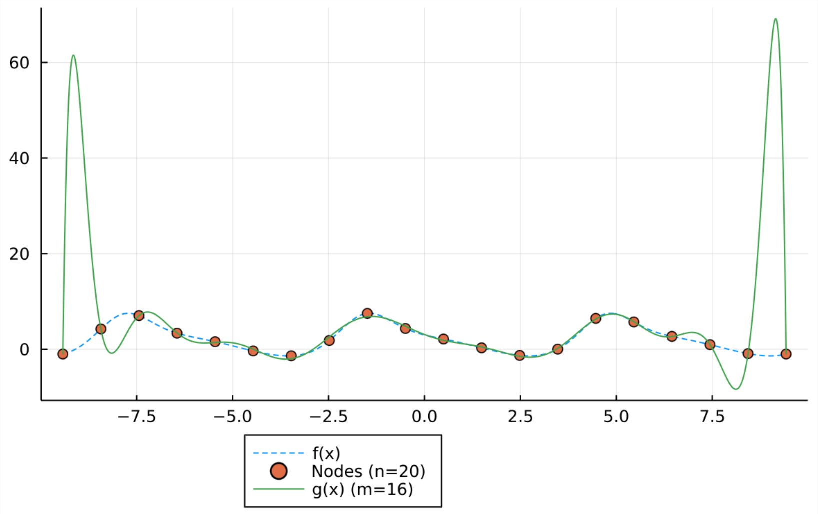


Rysunek 5: $n = 20, m = 10$

Mało węzłów, różne m

Zwiększając n możemy dalej zwiększać m.

Więcej węzłów, różne m

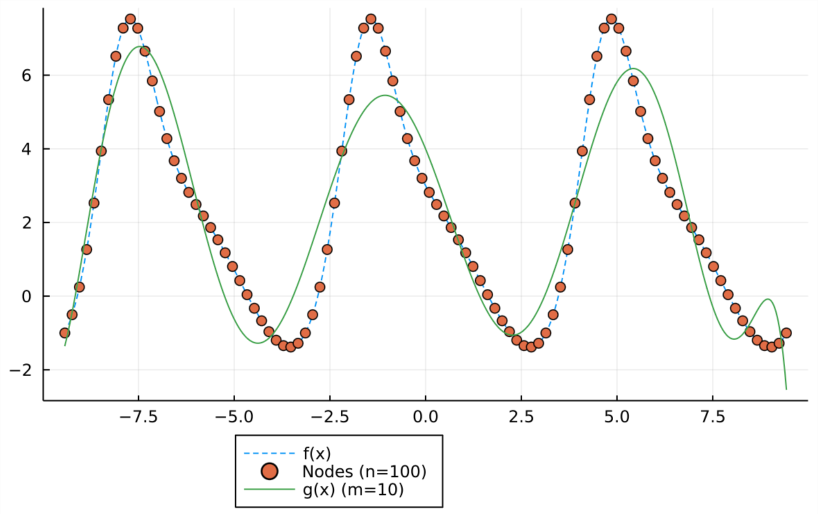


Rysunek 6: $n = 20, m = 16$

Mało węzłów, różne m

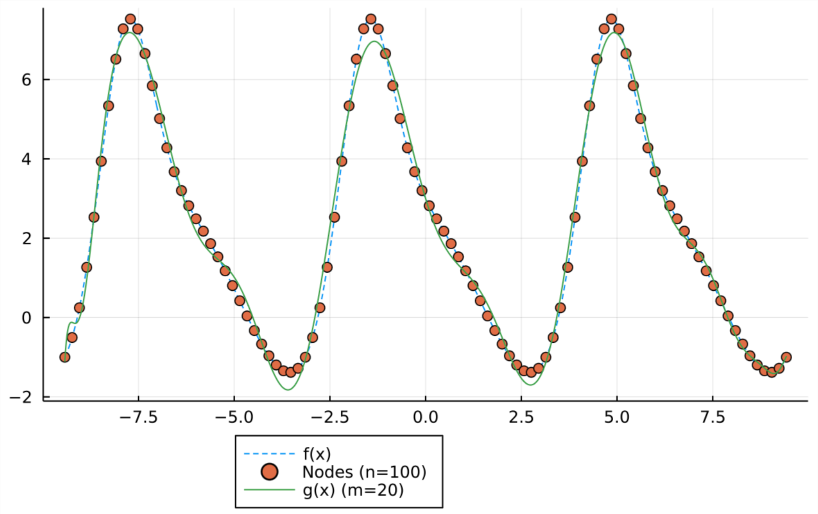
Ponownie dla m bliskiego n zwiększa się błąd na brzegach.

Dużo węzłów, różne m



Rysunek 7: $n = 100, m = 10$

Dużo węzłów, różne m



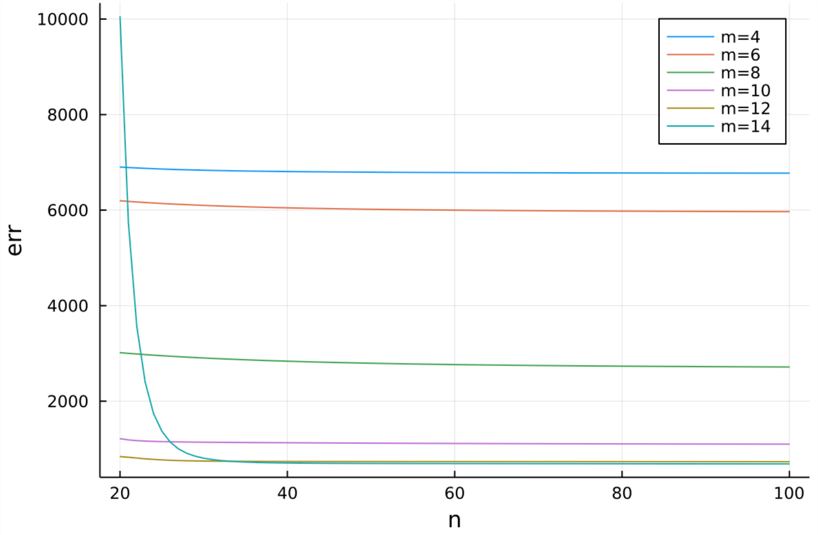
Rysunek 8: $n = 100, m = 20$

Wniosek

Kiedy m osiąga wartość zbliżoną do n, dochodzi do zwiększenia błędu na brzegach.

Kiedy $m \geq n$, błąd w węzłach wynosi 0. Jest tak, ponieważ dla stopnia wielomianu większego od liczby węzłów można poprowadzić funkcję dokładnie przez wszystkie węzły.

Zależność błędu od n i m



Rysunek 9: Zależność błędu od n i m

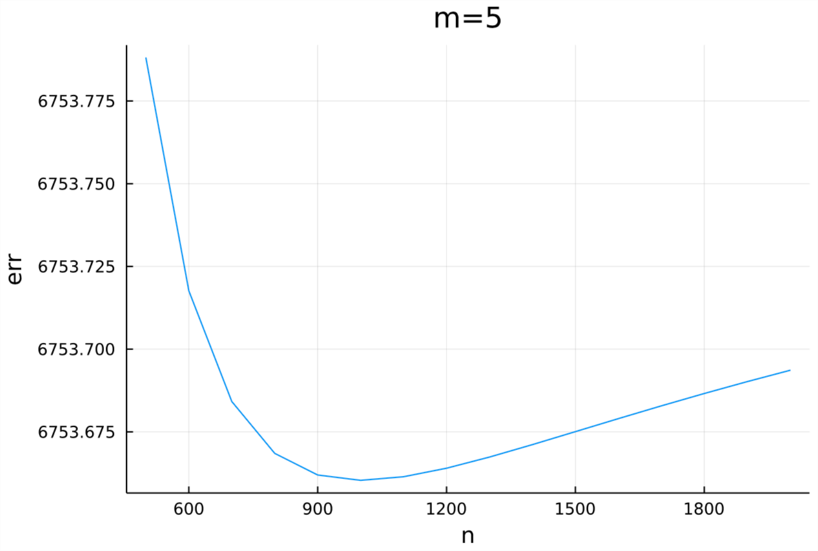
Zależność błędu od n i m

Zwiększanie n powoduje zmniejszanie się błędu.

Błąd dąży do pewnej wartości minimalnej, charakterystycznej dla danego m.

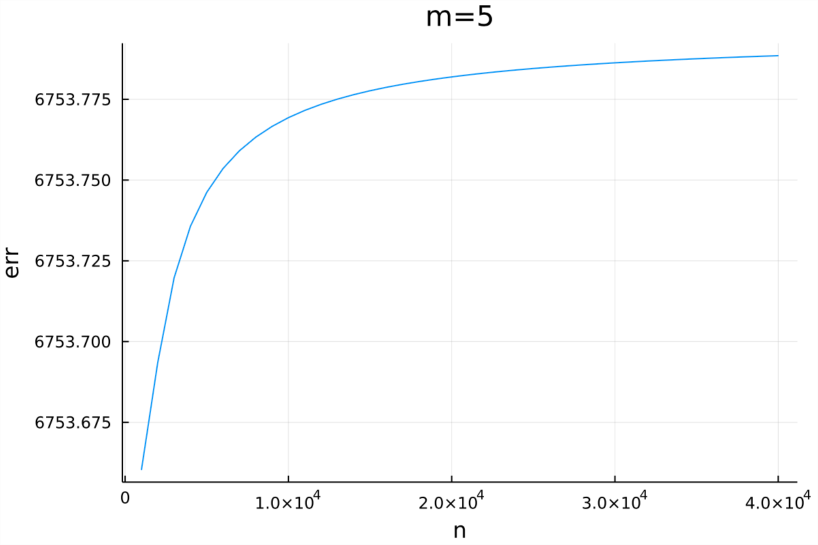
Dla $m = 14$ widać zwiększanie błędu dla niewystarczającej liczby węzłów ($n < 30$).

Optymalna wartość n



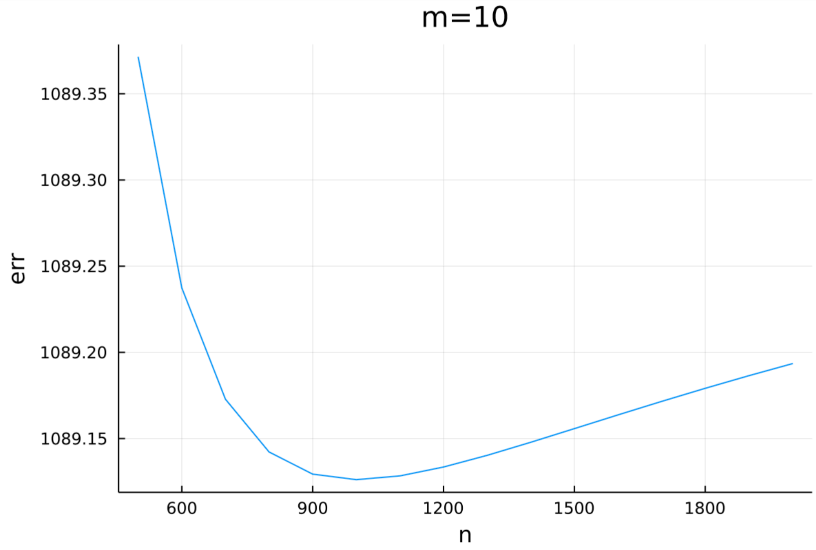
Rysunek 10: Zależność błędu od n, $m = 5$

Optymalna wartość n

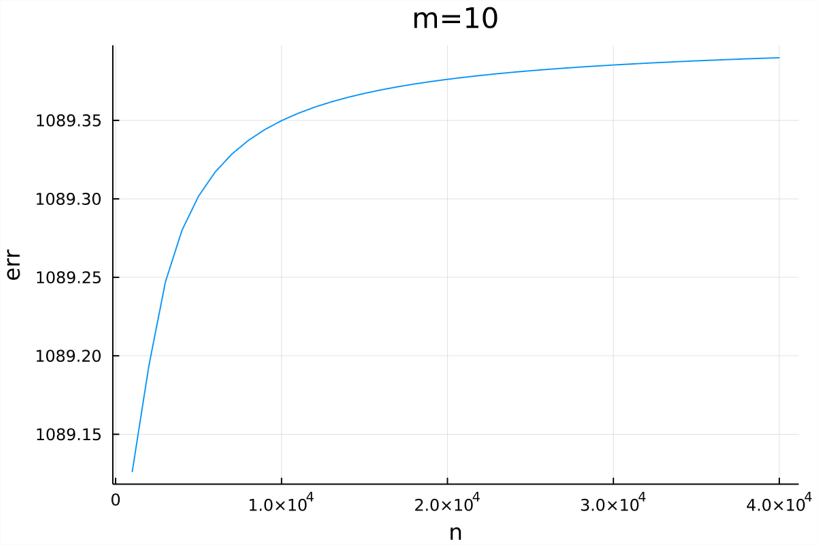


Rysunek 11: Zależność błędu od n, $m = 5$ (c.d.)

Optymalna wartość n

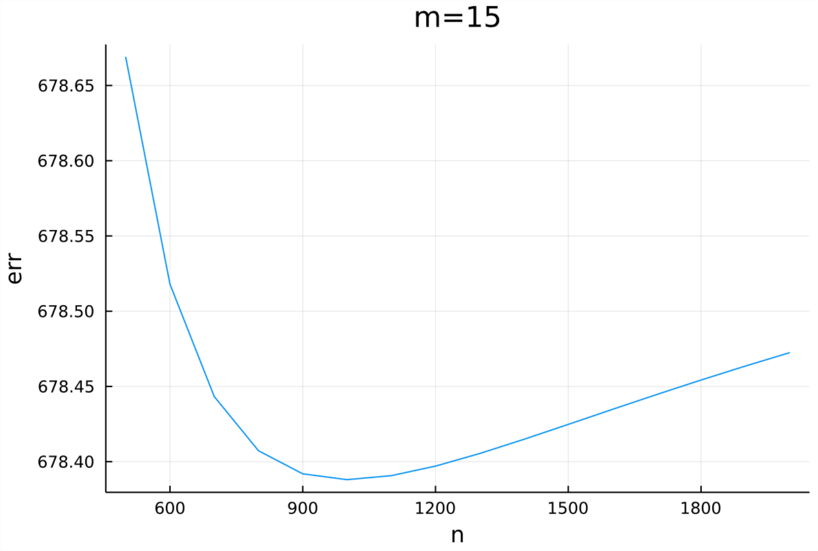


Rysunek 12: Zależność błędu od n, $m = 10$



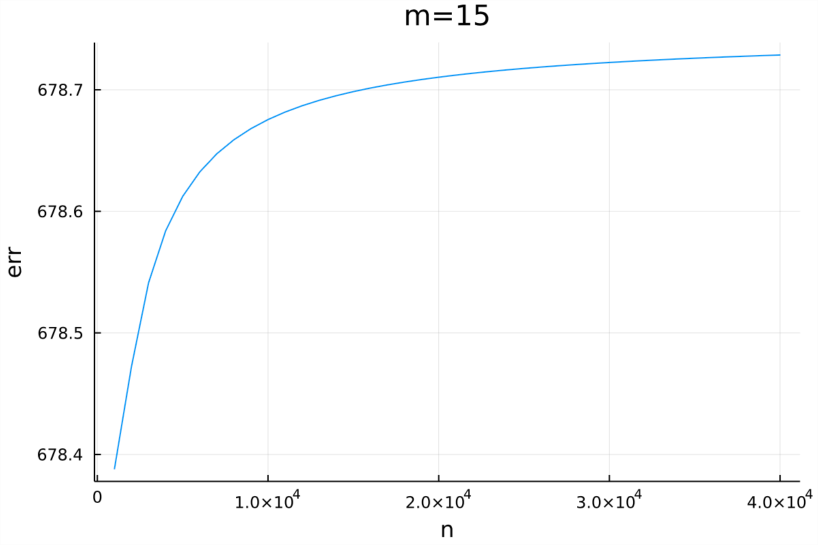
Rysunek 13: Zależność błędu od n, $m = 10$ (c.d.)

Optymalna wartość n



Rysunek 14: Zależność błędu od n, $m = 15$

Optymalna wartość n



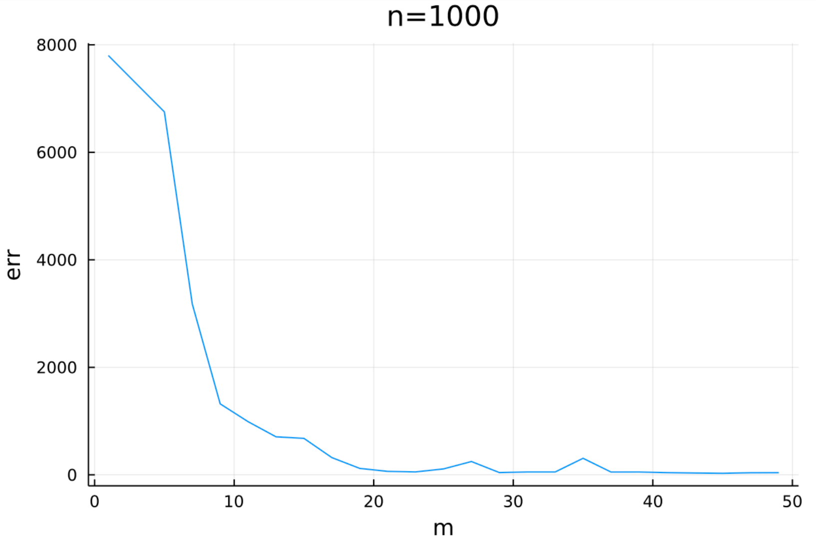
Rysunek 15: Zależność błędu od n, $m = 15$ (c.d.)

Optymalna wartość n

Błąd osiąga wartość minimalną dla $n = 1000$, niezależnie od m.

Jest tak, ponieważ błąd liczony jest w 1000 punktach. Dla $n = 1000$ następuje pokrycie węzłów z punktami, w których liczony jest błąd.

Duże wartości m



Rysunek 16: Zależność błędu od m, $n = 1000$

Duże wartości m

Tabela 1: Błąd vs m, $n = 1000$

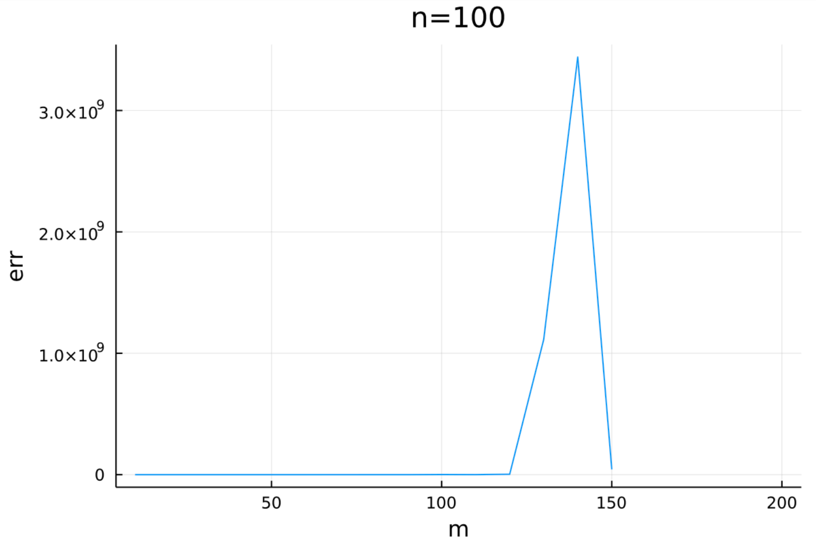
m	Błąd
5	6753.660
10	1089.130
15	678.388
20	72.177
25	110.238
30	46.804
35	307.579
40	91.446
45	28.524
50	34.701

Duże wartości m

Wraz ze wzrostem m maleje błąd. Dla tak dużego n nie udało się znaleźć m dającego złą aproksymację.

Następnie sprawdzono zachowanie dla $n = 100$.

Duże wartości m



Rysunek 17: Zależność błędu od m, $n = 100$

Duże wartości m

Tabela 2: Błąd vs m, $n = 100$

m	Błąd
10	1101.540
30	76.673
50	176.197
70	1.0×10^5
90	1.4×10^5
110	4.0×10^5
130	1.1×10^9
150	4.6×10^7
170	NaN
190	NaN

Duże wartości m

Dla bardzo dużych m aproksymacja nie udaje się.

Wnioski

1. Aproksymacja sprawdza się najlepiej dla $m << n$.
2. Aproksymacja to nie interpolacja. Sprawdza się najlepiej jeśli w danych występuje błąd pomiaru.
3. Kiedy chcemy przeprowadzić funkcję przez zadane węzły lepiej sprawdzi się interpolacja.