

# MOWNIT

## Laboratorium 3 – funkcje sklepane

---

Jakub Karbowski

7 kwietnia 2022

Dla zadanej funkcji

$$f(x) = e^{-k \cdot \sin(mx)} + k \cdot \cos(mx)$$

$$x \in [-3\pi, 3\pi]$$

$$k = 2$$

$$m = 1$$

wyznaczyć funkcje sklejane drugiego oraz trzeciego stopnia.  
Porównać dokładność dla różnych warunków brzegowych.

Język programowania:

- Julia

Typ zmiennoprzecinkowy:

- Float64

Obliczany błąd:

- $\text{sum err}^2 = \sum_{i=1}^{1000} [f(x_i) - g(x_i)]^2$

Ponieważ Julia indeksuje tablice od 1, węzły oznaczono następująco:

$$x_i, \quad i \in \{1, \dots, n+1\}$$

Dziedzina funkcji została podzielona na  $n$  przedziałów  $[x_i, x_{i+1}]$ , opisywanych przez funkcje  $s_i(x)$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

# Warunki brzegowe

Funkcje sklejane obliczane są za pomocą układu równań. W tym układzie wyróżniam dwa rodzaje równań (warunków):

1. podstawowe,
2. dodatkowe.

Warunkami podstawowymi nazywam:

1. ograniczenia na wartości funkcji w węzłach,
2. ograniczenia na pochodne funkcji w węzłach.

Warunki dodatkowe to wszystkie inne warunki brzegowe, jakie mogą być zastosowane do danej funkcji sklejanej.

## Clamped left/right

Warunek określający znaną wartość pochodnej w punkcie  $x_1/x_{n+1}$ .  
Wartość ta pochodzi z analitycznego wzoru na pochodną.

## Periodic

Warunek powoduje powstanie cyklicznej funkcji sklejaney  
( $s'(x_1) = s'(x_{n+1})$ ). Zadana funkcja  $f(x)$  jest cykliczna.

## Natural left/right

Warunek „free boundary”, zerujący drugą pochodną na brzegach.

## Uwagi

Ze względu na cykliczność zadanej funkcji, zastosowanie warunków clamped left i clamped right jest tożsame z clamped left/right i periodic.

# Funkcja sklejana drugiego stopnia

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2$$

Możliwe jest zastosowanie jednego warunku dodatkowego.

## Warunki podstawowe

Środkowe węzły:

$$\begin{cases} s_i(x_{i+1}) &= y_{i+1} \\ s_i(x_{i+1}) &= s_{i+1}(x_{i+1}) \\ s'_i(x_{i+1}) &= s'_{i+1}(x_{i+1}) \end{cases}$$

Węzły brzegowe:

$$\begin{cases} s_1(x_1) &= y_1 \\ s_n(x_{n+1}) &= y_{n+1} \end{cases}$$

## Warunki dodatkowe

Clamped left:

$$s'_1(x_1) = y'_1$$

Clamped right:

$$s'_n(x_{n+1}) = y'_{n+1}$$

Periodic:

$$s'_1(x_1) = s'_n(x_{n+1})$$

# Funkcja sklejana trzeciego stopnia

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

Możliwe jest zastosowanie dwóch warunków dodatkowych.

## Warunki podstawowe

Środkowe węzły:

$$\begin{cases} s_i(x_{i+1}) &= y_{i+1} \\ s_i(x_{i+1}) &= s_{i+1}(x_{i+1}) \\ s'_i(x_{i+1}) &= s'_{i+1}(x_{i+1}) \\ s''_i(x_{i+1}) &= s''_{i+1}(x_{i+1}) \end{cases}$$

Węzły brzegowe:

$$\begin{cases} s_1(x_1) &= y_1 \\ s_n(x_{n+1}) &= y_{n+1} \end{cases}$$

## Warunki dodatkowe

Clamped left/right:

$$s'_1(x_1) = y'_1$$

$$s'_n(x_{n+1}) = y'_{n+1}$$

Periodic:

$$s'_1(x_1) = s'_n(x_{n+1})$$

Natural left/right:

$$s''_1(x_1) = 0$$

$$s''_n(x_{n+1}) = 0$$



Porównano funkcje sklejane:

- drugi stopień, clamped,
- drugi stopień, periodic,

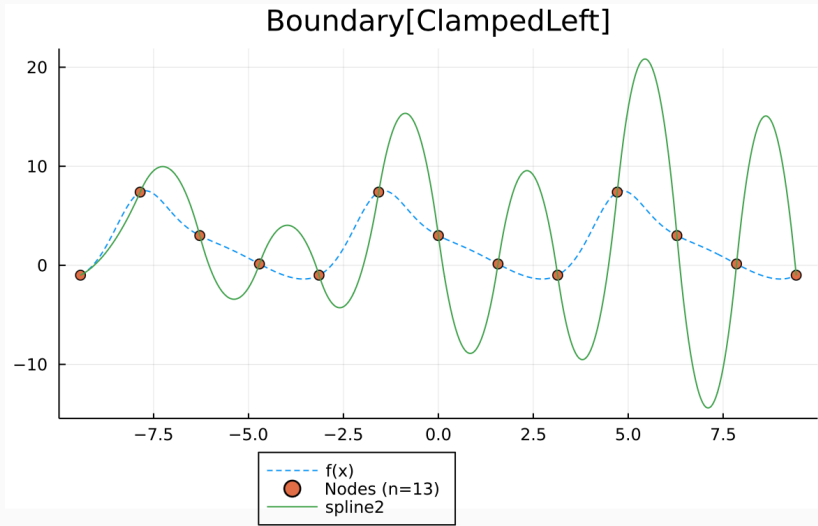
oraz

- trzeci stopień, clamped,
- trzeci stopień, natural.

Następnie porównano ze sobą zwycięzców poprzednich porównań.

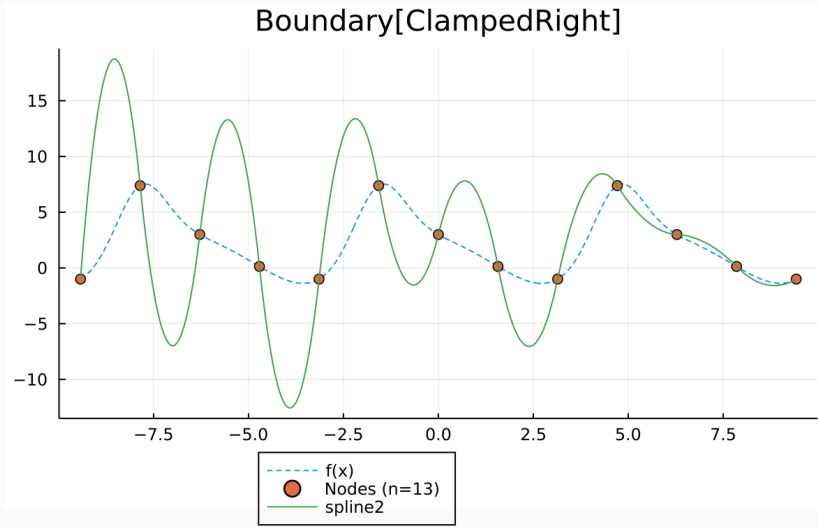
W tabelach liczony błąd to suma kwadratów.

# Clamped 2nd order



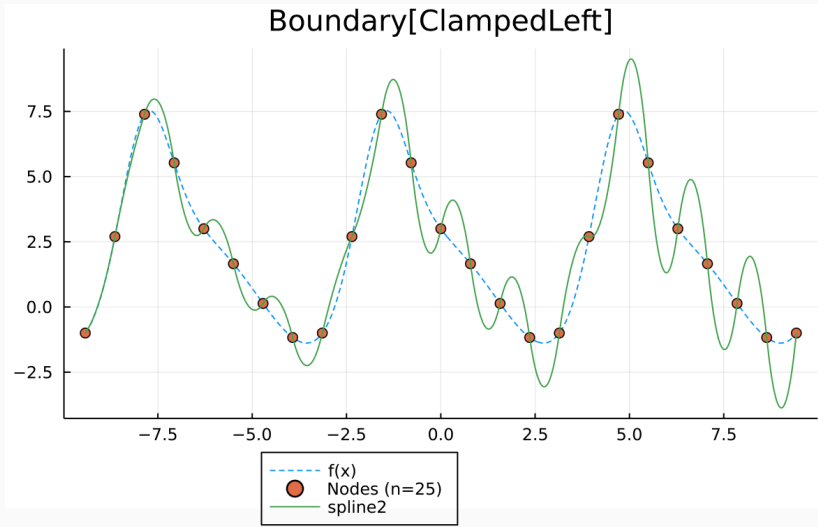
Rysunek 1:  $n = 13$ , Clamped left, 2nd

# Clamped 2nd order



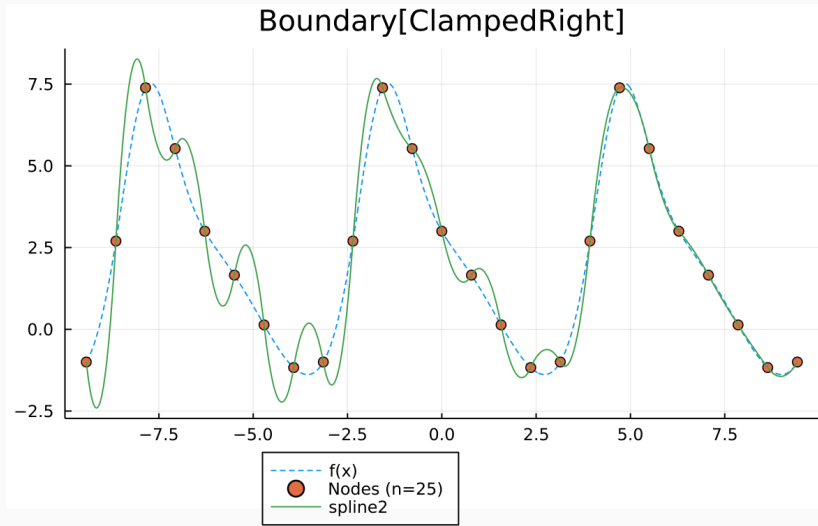
Rysunek 2:  $n = 13$ , Clamped right, 2nd

# Clamped 2nd order



Rysunek 3:  $n = 25$ , Clamped left, 2nd

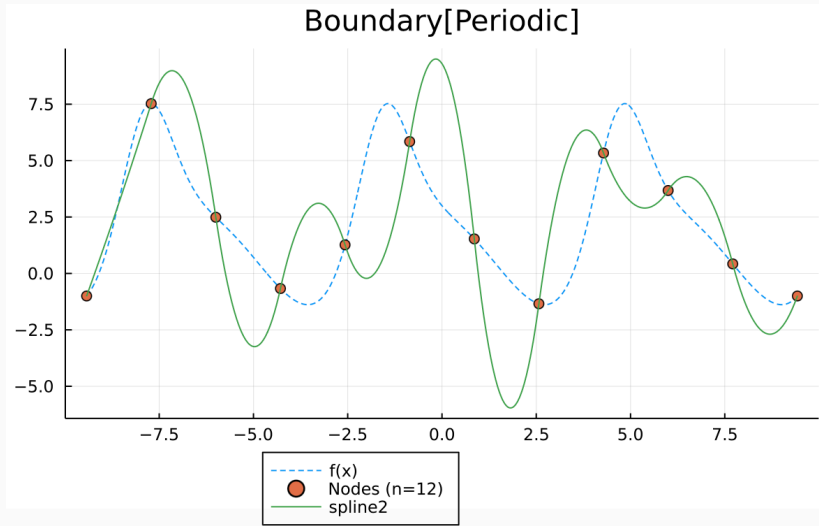
# Clamped 2nd order



Rysunek 4:  $n = 25$ , Clamped right, 2nd

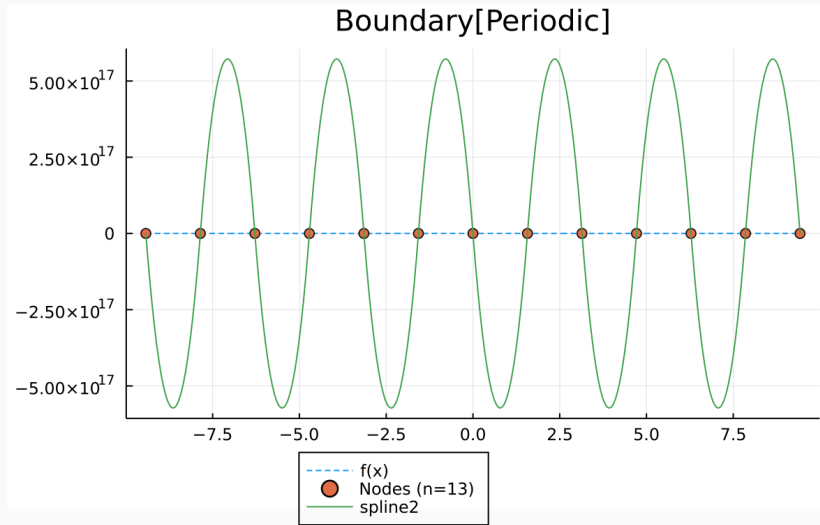
Im bliżej ograniczonego brzegu (left/right), tym lepsza interpolacja.

# Periodic 2nd order



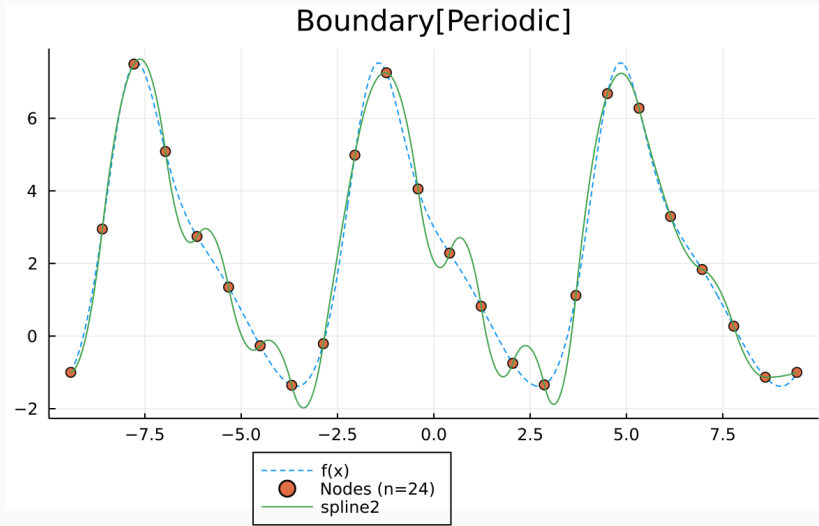
Rysunek 5:  $n = 12$ , Periodic, 2nd

# Periodic 2nd order



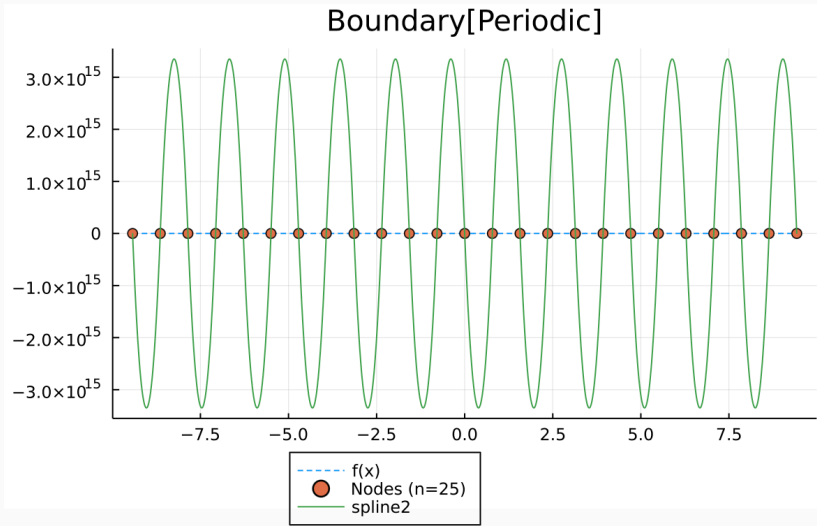
Rysunek 6:  $n = 13$ , Periodic, 2nd





Rysunek 7:  $n = 24$ , Periodic, 2nd

## Periodic 2nd order



Rysunek 8:  $n = 25$ , Periodic, 2nd

Dla pewnej liczby węzłów powstaje funkcja cykliczna bardzo odbiegająca od funkcji interpolowanej.

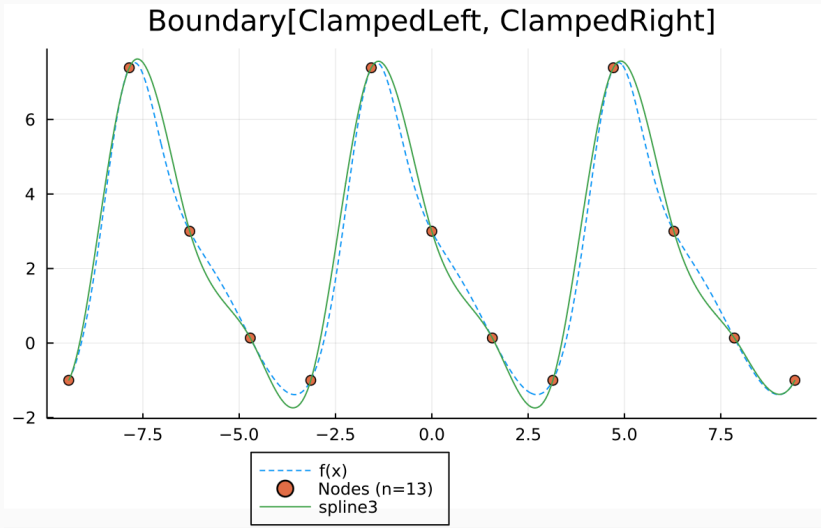
# Clamped vs Periodic (2nd order)

**Tabela 1:** Clamped vs Periodic (2nd order)

| $n$ | Clamped left | Clamped right | Periodic |
|-----|--------------|---------------|----------|
| 10  | 6290.11      | 3615.69       | 3430.34  |
| 20  | 3918.1       | 3896.63       | 1304.33  |
| 30  | 62.0504      | 55.4839       | 15.8624  |
| 40  | 0.3696       | 0.4080        | 0.3321   |
| 50  | 0.0845       | 0.0758        | 0.0464   |
| 60  | 0.0215       | 0.0215        | 0.0114   |
| 70  | 0.0075       | 0.0075        | 0.0037   |
| 80  | 0.0031       | 0.0031        | 0.0014   |
| 90  | 0.0014       | 0.0014        | 0.0006   |
| 100 | 0.0007       | 0.0007        | 0.0003   |

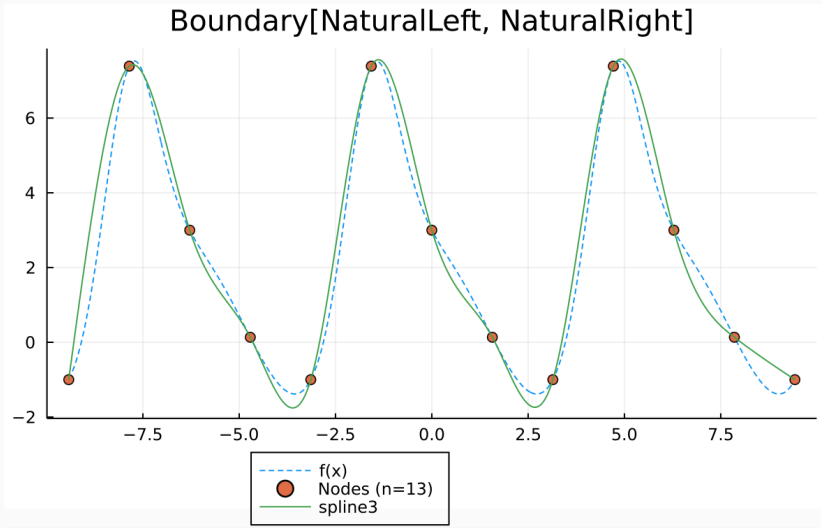
Warunek brzegowy „periodic” daje najmniejszy błąd (o ile nie trafi się w pechową liczbę węzłów).

# Clamped vs Natural (3rd order)



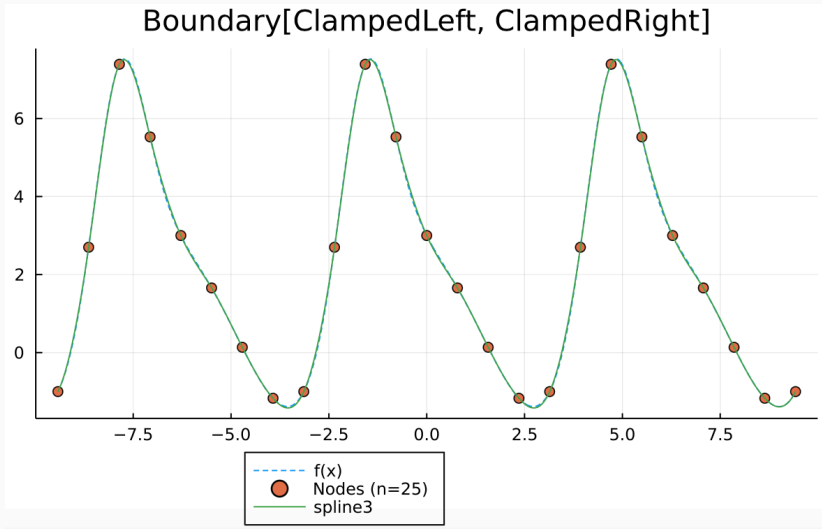
Rysunek 9:  $n = 13$ , Clamped, 3rd

# Clamped vs Natural (3rd order)



Rysunek 10:  $n = 13$ , Natural, 3rd

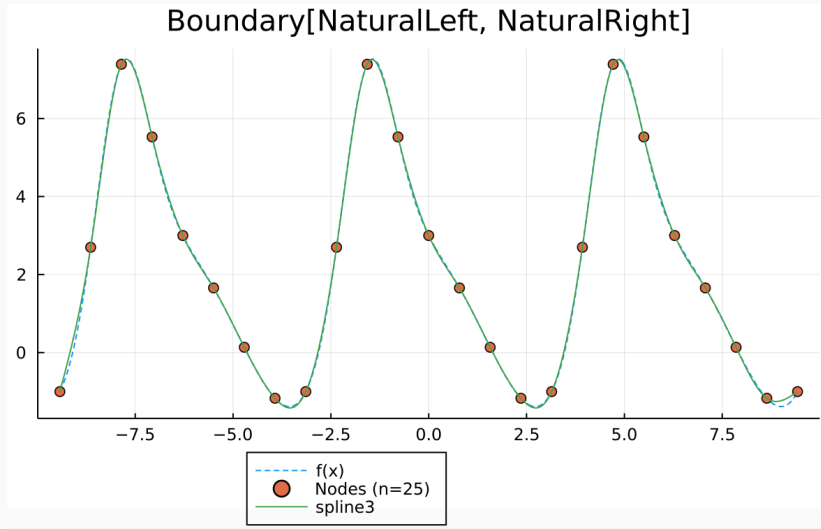
# Clamped vs Natural (3rd order)



Rysunek 11:  $n = 25$ , Clamped, 3rd



# Clamped vs Natural (3rd order)



Rysunek 12:  $n = 25$ , Natural, 3rd

## Clamped vs Natural (3rd order)

Tabela 2: Clamped vs Natural (3rd order)

| $n$ | Clamped | Natural |
|-----|---------|---------|
| 10  | 1426.5  | 1183.06 |
| 20  | 35.6706 | 60.5417 |
| 30  | 0.9248  | 1.3900  |
| 40  | 0.0428  | 0.1610  |
| 50  | 0.0042  | 0.0443  |
| 60  | 0.0007  | 0.0167  |
| 70  | 0.0001  | 0.0074  |

## Clamped vs Natural (3rd order)

Warunek „clamped” daje lepszą interpolację niż warunek „natural”.

## Periodic (2nd order) vs Clamped (3rd order)

Tabela 3: Periodic (2nd order) vs Clamped (3rd order)

| $n$ | Periodic 2nd | Clamped 3rd |
|-----|--------------|-------------|
| 10  | 3430.34      | 1426.5      |
| 20  | 1304.33      | 35.6706     |
| 30  | 15.8624      | 0.9248      |
| 40  | 0.3321       | 0.0428      |
| 50  | 0.0464       | 0.0042      |
| 60  | 0.0114       | 0.0007      |
| 70  | 0.0037       | 0.0001      |

Warunek „clamped” dla funkcji sklejaney trzeciego stopnia daje najmniejszy błąd.

1. Warunek „periodic” powoduje powstanie silnie oscylującej funkcji sklejaney dla pewnej liczby węzłów. Przyczyna nieznana.
2. Dla funkcji sklejaney drugiego stopnia, warunek „periodic” daje lepszą interpolację niż „clamped”. Jest tak, ponieważ nie można zastosować warunku „clamped” na obydwu brzegach.
3. Dla funkcji sklejaney trzeciego stopnia, warunek „clamped” daje lepszą interpolację niż „natural”. Jednak jeśli nie jest znana druga pochodna, warunek „natural” zadowalająco przybliża daną funkcję.