

MOWNIT

Laboratorium 7 – układy równań liniowych – metody iteracyjne

Jakub Karbowski

2 czerwca 2022

Metodą Jacobiego rozwiązać układ równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

$$\begin{cases} a_{i,i} = 8 \\ a_{i,j} = \frac{1}{|i-j|+3} & i \neq j \end{cases}$$

1. $\text{termcrit_change} = \max(\mathbf{x}^{(i+1)} - \mathbf{x}^{(i)}) < \epsilon$
2. $\text{termcrit_resid} = \max(\mathbf{Ax}^{(i)} - \mathbf{b}) < \epsilon$

Jako norma liczona jest wartość maksymalnego elementu wektora.

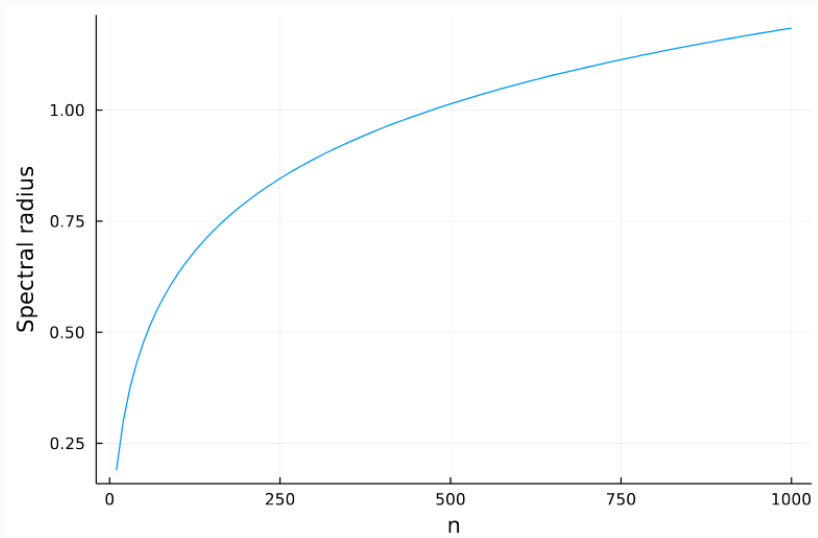
Promień spektralny

Za pomocą funkcji `opnorm` z biblioteki `LinearAlgebra` policzono promień spektralny macierzy iteracji.

Tabela 1: Promień spektralny

n	Promień spektralny
100	0.631 31
200	0.792 746
300	0.889 834
400	0.959 529
500	1.013 95
600	1.0586
700	1.096 46
800	1.129 33
900	1.158 38
1000	1.1844

Promień spektralny



Rysunek 1: Promień spektralny

Od $n = 500$ promień spektralny macierzy iteracji jest większy od 1.
Oznacza to, że od takiego n metoda nie będzie zbieżna.

Wykonywane eksperymenty

Dla wszystkich kombinacji:

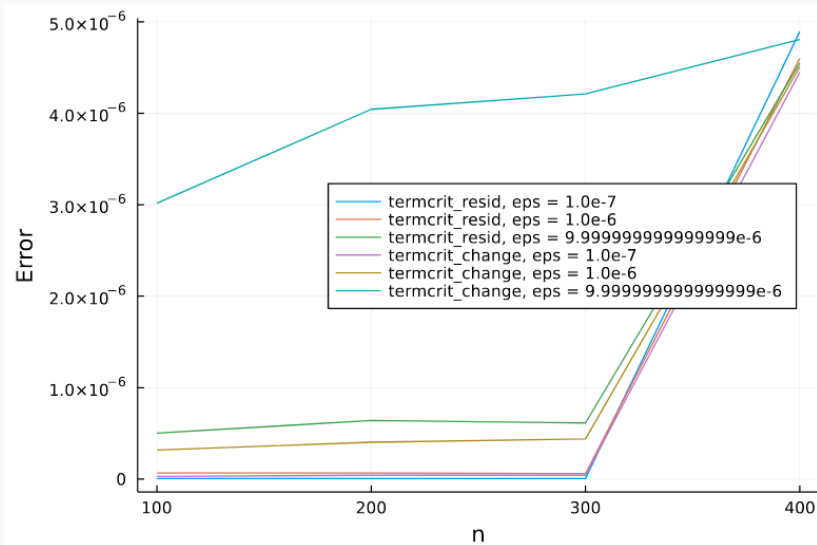
1. $n = 100, 200, \dots, 1000$,
2. kryterium stopu = termcrit_change, termcrit_resid,
3. $\epsilon = 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}$,

wykonywano następujący eksperyment:

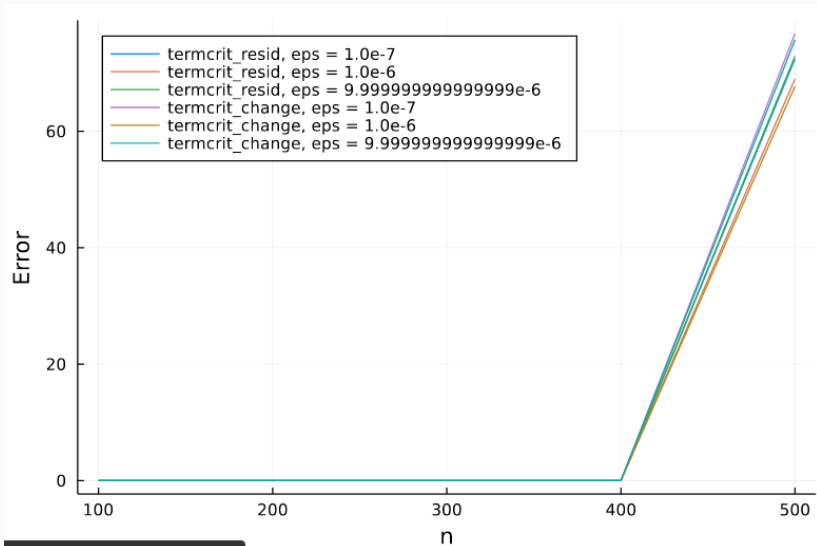
1. wygenerowanie macierzy **A** dla danego n ,
2. wylosowanie wektora **x** jako permutację $\{0, 1\}$,
3. obliczenie **b** = **Ax**,
4. rozwiązanie układu metodą Jacobiego,
5. pomiar czasu, liczby iteracji i błędu.

Liczba iteracji została ograniczona do 300 w przypadku braku zbieżności metody.

Jako wektor początkowy losowano różne wektory ze współrzędnymi z przedziału $[-100, 100]$.



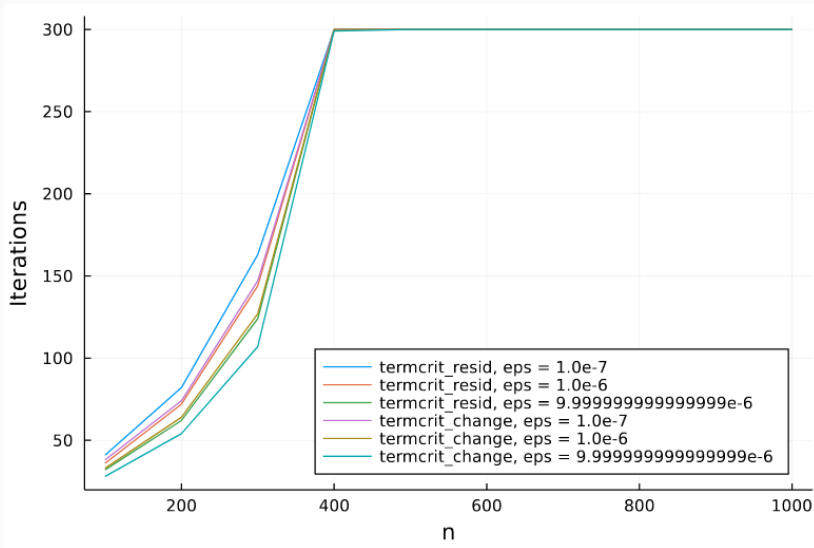
Rysunek 2: Błąd vs n (do 400)



Rysunek 3: Błąd vs n (do 500)

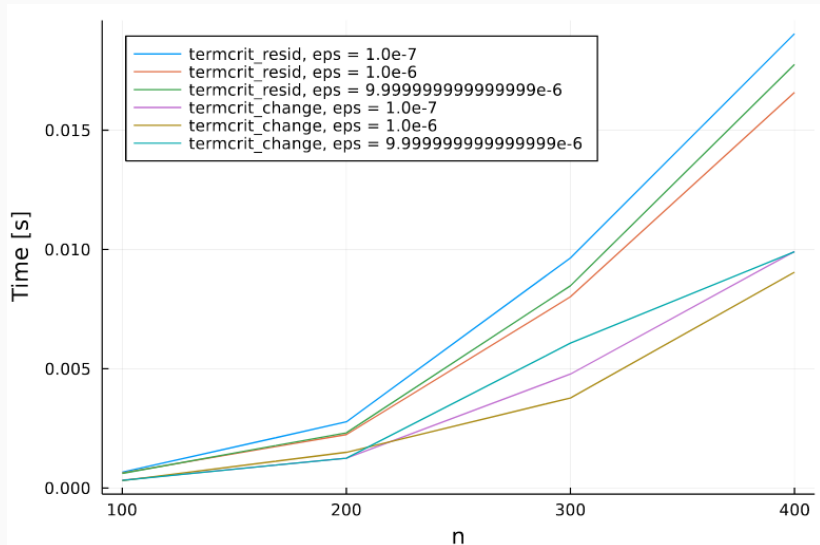
1. Kryterium `termcrit_resid` daje mniejszy błąd od `termcrit_change`.
2. Dla kryterium `termcrit_change` błąd rośnie wraz z n . Dla `termcrit_resid` błąd nie zależy od n .
3. Od $n = 500$ następuje nagły wzrost błędu, zgodnie z analizą promienia spektralnego.

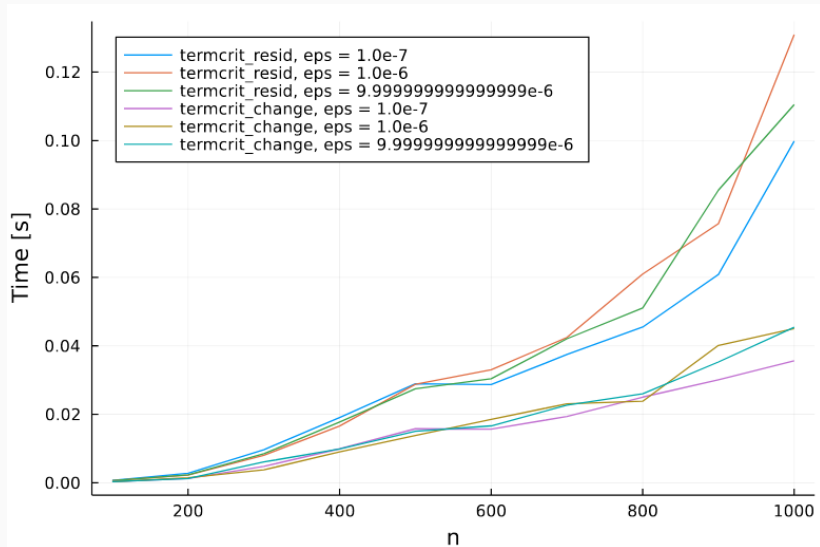
Liczba iteracji



Rysunek 4: Liczba iteracji vs n

1. Zgodnie z analizą błędu, termcrit_resid potrzebuje więcej iteracji niż termcrit_change.
2. Od $n = 500$ liczba iteracji osiąga górny limit (300), przez brak zbieżności metody.

Rysunek 5: Czas vs n (do 400)

Rysunek 6: Czas vs n

1. Do $n = 400$ czas rośnie pod wpływem wzrostu wielkości macierzy oraz większej liczbie iteracji.
2. Od $n = 500$ czas rośnie tylko ze względu na rozmiar macierzy.

1. Metoda Jacobiego jest bardzo szybka i pozwala na obliczanie dużych układów.
2. Należy zagwarantować, że promień spektralny będzie mniejszy od 1. Inaczej metoda nie sprawdza się, co potwierdzają wszystkie eksperymenty.