

Jakub Karbowski

# Wibracje akustyczne warstwy materiału

14 stycznia 2022

## 1. Sformułowanie silne

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} - u = \sin x \quad (1)$$

$$u(0) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{du(2)}{dx} - u(2) = 0 \quad (3)$$

$$[0, 2] \ni x \rightarrow u(x) \in \mathbb{R}$$

Poszukiwana funkcja to  $u(x)$ .

## 2. Sformułowanie słabe

Równanie (2) to zerowy warunek Dirichleta a (3) to warunek Robina. Za przestrzeń  $V$  przyjmujemy funkcje  $v(x)$  zerujące się na lewym brzegu  $v(0) = 0$ . Z (3) dostajemy  $u'(2) = u(2)$ .

$$\begin{aligned} -u'' - u &= \sin x \\ -u''v - uv &= v \sin x \\ \underbrace{-\int_0^2 u''v dx}_{\text{przez części}} - \int_0^2 uv dx &= \int_0^2 v \sin x dx \\ -u'v \Big|_0^2 + \int_0^2 u'v' dx - \int_0^2 uv dx &= \int_0^2 v \sin x dx \\ -u'(2)v(2) + u'(0)\underbrace{v(0)}_0 + \int_0^2 u'v' dx - \int_0^2 uv dx &= \int_0^2 v \sin x dx \\ -\underbrace{u'(2)v(2)}_{u(2)} + \int_0^2 u'v' dx - \int_0^2 uv dx &= \int_0^2 v \sin x dx \\ \underbrace{-u(2)v(2) + \int_0^2 u'v' dx - \int_0^2 uv dx}_{B(u,v)} &= \underbrace{\int_0^2 v \sin x dx}_{L(v)} \end{aligned}$$

Funkcje  $B(u, v)$ ,  $L(v)$  są gotowe do wstawienia do macierzy.

### 3. Funkcje bazowe

Za funkcje bazowe przyjęto

$$e_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & \text{dla } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & \text{dla } x \in (x_i, x_{i+1}] \end{cases}$$
$$x_0 = 0$$
$$x_n = 2$$

### 4. Równanie macierzowe

Usuujemy  $e_0$  z macierzy, ze względu na warunek Dirichleta ( $u_0 = 0$ ). Na prawym brzegu zostaje  $e_n$ .

$$\begin{bmatrix} B(e_1, e_1) & \cdots & B(e_n, e_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_1, e_n) & \cdots & B(e_n, e_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(e_1) \\ \vdots \\ L(e_n) \end{bmatrix}$$

$$u(x) \approx \tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^n (u_i \cdot e_i(x))$$

### 5. Indeksy

Ponieważ indeksy tablic w Julii zaczynają się od 1,  $e_0$  we wzorach oznaczane jest przez  $e_1$  w kodzie. Należy zwrócić też uwagę na liczbę elementów  $n$ . We wzorach oznacza liczbę elementów, czyli przedziałów. W kodzie jest to liczba węzłów  $= n + 1$ .

### 6. Program

Należy pobrać Julię ze strony <https://julialang.org>. Testowane na wersji 1.7.1, spokojnie powinno działać na  $>1.5.0$ . Program można włączyć komendą:

```
julia src/main.jl
```

Po obliczeniach pokaże się okno z wykresem. Plik `src/main.jl` jest tylko skryptyem uruchamiającym. Główny algorytm jest w pliku `src/rurki.jl`. Pierwsze obliczenia będą wolne, ze względu na kompilator JIT. Potem już śmiga (u mnie  $N = 5000$  jeszcze policzy, dalej trzeba poczekać).

### 7. Wyniki

Rozwiązanie analityczne to

$$\frac{1}{2} \left( x \cos x + \frac{\sin(x)(2 \sin 2 + \cos 2)}{\cos 2 - \sin 2} \right)$$

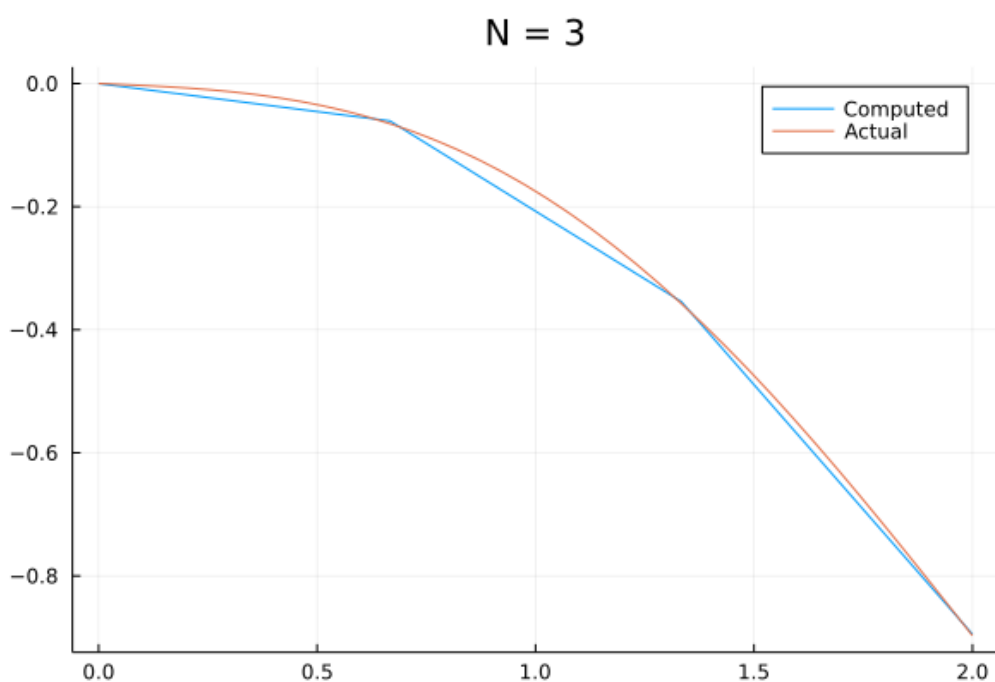
Na wykresie Rys. 2 „widać”, że się zgadza. Dodatkowo obliczono *mean squared error* dla 40 punktów ( $N = 3$ ).  $\text{mse} = 0.00026$ .

```

[ Info: Loading project
Activating project at `~/aghproj/rurki-2`
Precompiling project...
1 dependency successfully precompiled in 5 seconds (126 already precompiled)
[ Info: Ready
Enter q to quit
Enter number of elements: 10
[ Info: Running FEM
Problem definition:
-u'' - u = sin(x)
u(0) = 0
u'(2) - u(2) = 0
0 <= x <= 2
[ Info: Building B and L matrix
B | L matrix:
10x11 SparseArrays.SparseMatrixCSC{Float64, Int64} with 38 stored entries:
 9.84461 -5.03333 . . . . . 0.0417945
-5.03333 9.84461 -5.03333 . . . . . 0.0819229
. -5.03333 9.84461 -5.03333 . . . . . 0.118785
. . -5.03333 9.84461 -5.03333 . . . . . 0.150912
. . . -5.03333 9.84461 -5.03333 . . . . . 0.177022
. . . . -5.03333 9.84461 -5.03333 . . . . . 0.196075
. . . . . -5.03333 9.84461 -5.03333 . . . . . 0.207311
. . . . . . -5.03333 9.84461 -5.03333 . . . . . 0.210283
. . . . . . . -5.03333 9.84461 -5.03333 . . . . . 0.204871
. . . . . . . . -5.03333 3.93333 0.0933958
[ Info: Solving
u vector:
11-element Vector{Float64}:
 0.0
-0.004167678024554342
-0.016455038011572866
-0.0442925026715896
-0.0937755822204181
-0.169103983213724
-0.2721418647069179
-0.40212878688169873
-0.5555623492731538
-0.7262637126810185
-0.9056266620872592
[ Info: Plotting
Save plot [y/N]?
[ Info: Verification
mse = 2.0635381340072626e-5
[ Info: Done
Enter number of elements: 10

```

Rysunek 1: Przykładowe uruchomienie programu



Rysunek 2: Wyniki dla  $N = 3$