知乎 | 首发于 小时百科

多维球体的体积

小时百科
小时百科 http://wuli.wiki

23 人赞同了该文章

（建议阅读最新版本）

预备知识 gamma 函数

半径为 R 的 n 维欧几里得空间中的球体的体积可以用 Γ 函数表示为

$$V_n = \begin{cases} \dfrac{R^n}{(n/2)!}\pi^{(n-1)/2} & (n = 2n-1) \\ \dfrac{R^n}{(n/2)!}\pi^{n/2} & (n = 2n) \end{cases} = \frac{\pi^{n/2}R^n}{\Gamma(1+n/2)} \qquad (1)$$

说明

若定义 n 维球体的表面满足方程 $\sum_{i=1}^n x_i^2 = R_n^2$，其中 x_i 为 n 维直角坐标系中第 i 个坐标．所有满足 $\sum_{i=1}^n x_i^2 \leqslant R_n^2$ 的坐标点都定义为球内的点，且定义 n 维直角坐标系中的体积为 $V_n = \int \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n$，积分是对所有球内的点积分．

如果这些定义看起来很抽象，不妨代入到三维空间中考虑．三维直角坐标系中，x_1, x_2, x_3 分别是 x, y, z，R_3 是球的半径，球表面上任意一点都满足 $x^2+y^2+z^2 = R_3^2$，且球的体积分为 $\int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 是对球内部的所有点积分． 另外，若把上述定义代入到 1 维和 2 维， 不难发现所谓的 “1 维球” 和 “2 维球” 分别是半径为 R_1 的线段和半径为 R_2 的圆．

推导

由于正常人的空间想象力最高是 3 维，我们先由 3 维以内的球体总结出体积的递推公式，这样即使我们无法想象高维球的形状，也可以计算其体积．下面在推导前 3 个维度时，请把所有 x_1, x_2, x_3 想象成 xyz．

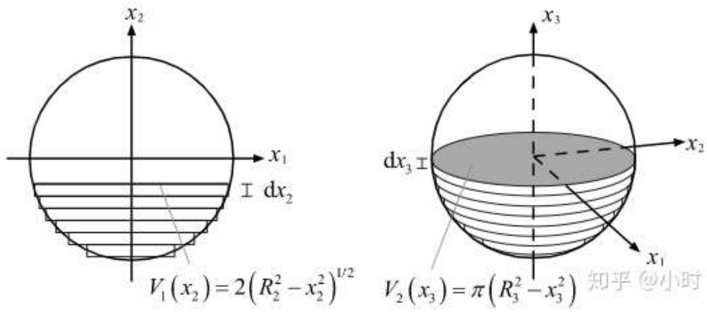


图 1：二维和三维球的体积

1 维球

这是一条线段，满足 $x_1^2 \leqslant R_1^2$， “体积” 就是线段长度

$$V_1 = \int \mathrm{d}x_1 = 2R_1 \qquad (2)$$

2 维球

这是一个圆，满足 $x_1^2 + x_2^2 \leqslant R_2^2$， 在计算体积 $V_2 = \int \mathrm{d}x$

再对 x_2 积分

登录即可查看 超5亿 专业优质内容
超 5 千万创作者的优质提问、专业回答、深度文章和精彩视频尽在知乎。
立即登录/注册

$$V_2 = \int \left(\int \mathrm{d}x_1\right) \mathrm{d}x_2 = \int V_1(x_2)\,\mathrm{d}x_2 \qquad (3)$$

在几何上，这就是说把圆从沿 x_1 轴切成许多一维球（线段），由 $x_1^2 \leqslant R_2^2 - x_2^2$，一维球的半

知乎 首发于 小时百科

$$V_1(x_2) = \int \mathrm{d}x_1 = 2R_1 = 2(R_2^2 - x_2^2)^{1/2} \qquad (4)$$

再代入式 3， 得二维球的体积为（注意 $-R_2 < x_2 < R_2$ ）

$$V_2 = \int V_1 \,\mathrm{d}x_2 = \int 2(R_2^2 - x_2^2)^{1/2} \,\mathrm{d}x_2 = \pi R_2^2 \qquad (5)$$

3 维球

这是一个球体，满足 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant R_3^2$，计算体积 $V_3 = \int \mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \,\mathrm{d}x_3$ 时，可以先对 $x_1 x_2$ 积分

$$V_3 = \int \left(\int \mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_3 = \int V_2(x_3) \,\mathrm{d}x_3 \qquad (6)$$

在几何意义上，这是说把球沿 $x_1 x_2$ 平面切成许多二维球（圆），然后把球的体积（面积）沿 x_3 轴积分．由 $x_1^2 + x_2^2 \leqslant R_3^2 - x_3^2$，得 x_3 处二维球半径为 $R_2 = (R_3^2 - x_3^2)^{1/2}$． 由式 5 得体积为

$$V_2(x_3) = \pi R_2^2 = \pi(R_3^2 - x_3^2) \qquad (7)$$

代入式 6 得三维球体积（注意 $-R_2 < x_2 < R_2$）

$$V_3 = \int V_2(x_3) \,\mathrm{d}x_3 = \int \pi(R_3^2 - x_3^2) \,\mathrm{d}x_3 = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad (8)$$

n 维球

由以上两个推导，可以在代数上总结出递推的规律．把 n 维球在 $n+1$ 维积分，得（可使用 Mathematica 软件计算积分，见 Mathematica 积分）

$$\begin{aligned}
V_4 &= \int_{-R}^{R} \frac{4}{3}\pi (R_4^2 - x_4^2)^{3/2} \,\mathrm{d}x_4 = \frac{1}{2}\pi^2 R^4 \\
V_5 &= \int_{-R}^{R} \frac{1}{2}\pi^2 (R_5^2 - x_5^2)^{4/2} \,\mathrm{d}x_5 = \frac{8}{15}\pi^2 R^5 \\
V_6 &= \int_{-R}^{R} \frac{8}{15}\pi^2 (R_6^2 - x_6^2)^{5/2} \,\mathrm{d}x_6 = \frac{1}{6}\pi^3 R^6 \\
V_7 &= \int_{-R}^{R} \frac{1}{6}\pi^3 (R_7^2 - x_7^2)^{6/2} \,\mathrm{d}x_6 = \frac{16}{105}\pi^3 R^7
\end{aligned}$$

对奇数项和偶数项分别总结规律，不难发现

$$V_n = \begin{cases} \dfrac{R^n}{(n/2)!}\pi^{(n-1)/2} & (n = 2n-1) \\ \dfrac{R^n}{(n/2)!}\pi^{n/2} & (n = 2n) \end{cases} \qquad (9)$$

半整数的阶乘的定义 为

$$\frac{n}{2}! = \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right) \dots \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \qquad (10)$$

若用 Γ 函数 表示以上结果，就是

$$V_n = \frac{\pi^{n/2} R^n}{\Gamma(1 + n/2)} \qquad (11)$$

编辑于 2021-05-29 16:21

高等数学 微积分 统计力学

登录即可查看 超5亿 专业优质内容
超 5 千万创作者的优质提问、专业回答、深度文章和精彩视频尽在知乎。

写下你的评论...

7 条评论 默认 最新

全能伟大崔克茜
离大谱吧，找规律法。。。
05-07 赞

小时百科 作者
23333
05-07 赞

全能伟大崔克茜 ‣ **小时百科**
我记得好像有一个多重积分化Gamma函数的做法（不是用统计力学方法的那种），能教教吗？
05-07 赞

weiyinfu
(n/2)!这种写法是谁发明的？很怪异
2019-12-27 赞

小时百科 作者
你是说！只能用于整数吧？我改过来。
2019-12-28 赞

小时百科 作者
这是我自己推的...
2019-10-19 赞

阿飞
希望能加上参考文献哦 谢谢大大
2019-10-19 赞

文章被以下专栏收录

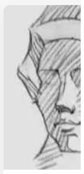
小时百科
自学大学物理，数学和编程

推荐阅读

球体-表面积与体积

球的体积公式： V=\frac{4}{3}\pi R^3 球的表面积公式： S=4\pi R^2 圆柱的表面积公式： S=2\pi R^2+2\pi Rh (R为底面圆的半径，h为圆柱的高)题目1：若圆柱的底面直径和高都与球的直径相等...

Jerry 发表于数学天天练



速写 |

美院帮

登录即可查看 超5亿 专业优质内容
超 5 千万创作者的优质提问、专业回答、深度文章和精彩视频尽在知乎。