深蓝学院
shenlanxueyuan.com

基于已知位姿的构图算法 (Grid-based)

主讲人 曾书格

越凡创新技术负责人

597457483@qq.com

课程内容

建图算法

1. 地图分类
2. 覆盖栅格建图算法
3. 计数(Count Model)建图算法
4. TSDF建图算法

课程内容

建图算法

1. 地图分类
2. 覆盖栅格建图算法
3. 计数(Count Model)建图算法
4. TSDF建图算法

地图分类

概念

- 地图即为环境的空间模型
- 环境地图是机器人进行定位和规划的前提
- 地图主要分为三类：

尺度地图

拓扑地图

语义地图

课程内容

建图算法

1、地图分类

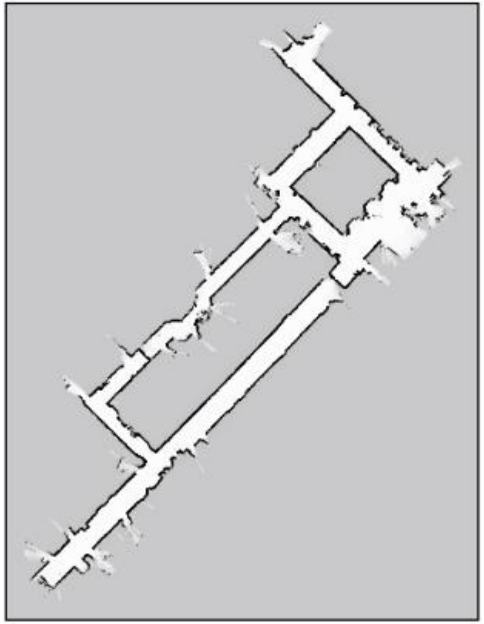
2、覆盖栅格建图算法

3、计数(Count Model)建图算法

4、TSDF建图算法

覆盖栅格建图算法

栅格地图的特点

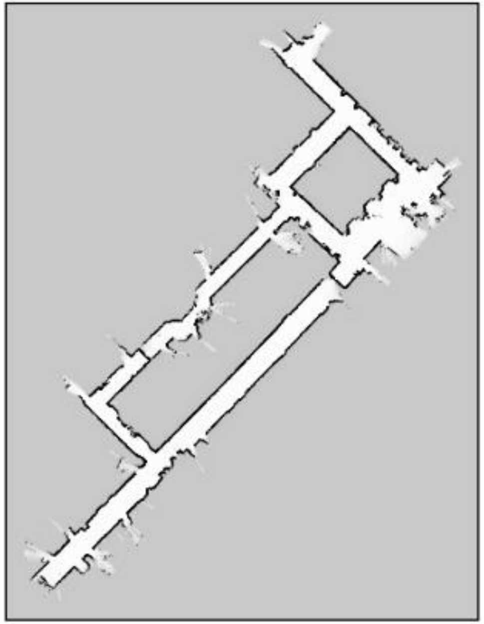


尺度地图

- 把环境分解成一个一个的小栅格
- 每个栅格有两种状态：占用(Occupied)或者空闲(free)
- 非参模型
- 随着地图的增大，内存需求急剧增加
- 天然区分可通行区域，适合进行轨迹规划

覆盖栅格建图算法

构建栅格地图



尺度地图

数学描述

- 给定机器人的位姿和传感器的观测数据(主要指激光雷达)。

$$data = \{x_1, z_1, x_2, z_2, \cdots x_n, z_n\}$$

- 估计出最可能的地图

$$m^* = arg\max_m P(m|data)$$

$$\downarrow$$

$$m^* = arg\max_m P(m|x_{1:t}, z_{1:t})$$

覆盖栅格建图算法

假设

- 栅格地图中的栅格是一个二元随机变量，只能取两个值：占用(Occupied)或者空闲(Free)
- $p(m_i)=1$表示被占用，$p(m_i)=0$表示空闲，$p(m_i)=0.5$表示不知道(Unknown)
- 在建图的过程中，环境不会发生改变

- 地图中的每一个栅格都是独立的，因此数学表达式可以表示为：

$$\mathrm{p}(m)=\prod p(m_i)$$

- 地图估计问题表示为：

$$\mathrm{p}(m|x_{1:t},z_{1:t})=\prod p(m_i|x_{1:t},z_{1:t})$$

- 因此，估计环境的地图只需要对每一个独立的栅格进行估计即可。

覆盖栅格建图算法

地图估计

- m_i是一个二元随机变量，因此：

$$p(m_i|x_{1:t},z_{1:t})=\frac{p(z_t|m_i,z_{1:t-1},x_{1:t})p(m_i|z_{1:t-1},x_{1:t})}{p(z_t|z_{1:t-1},x_{1:t})}$$
$$=\frac{p(z_t|m_i,x_t)p(m_i|z_{1:t-1},x_{1:t-1})}{p(z_t|z_{1:t-1},x_{1:t})}$$

$x_{1:t}$表示1:t时刻机器人位姿

$z_{1:t}$表示1:t时刻的激光数据

m_i表示第i个栅格的状态

- 其中：

$$p(z_t|m_i,x_t)=\frac{p(m_i|z_t,x_t)p(z_t|x_t)}{p(m_i|x_t)}$$

覆盖栅格建图算法

地图估计

- m_i是一个二元随机变量，因此：

$$
\mathrm{p}(m_i|x_{1:t},z_{1:t})=\frac{p(m_i|z_t,x_t)p(z_t|x_t)}{p(m_i|x_t)}\frac{p(m_i|z_{1:t-1},x_{1:t-1})}{p(z_t|z_{1:t-1},x_{1:t})}
=\frac{p(m_i|z_t,x_t)p(z_t|x_t)}{p(m_i)}\frac{p(m_i|z_{1:t-1},x_{1:t-1})}{p(z_t|z_{1:t-1},x_{1:t})}
$$

- 同理，对于$\neg m_i$：

$$
\mathrm{p}(\neg m_i|x_{1:t},z_{1:t})=\frac{p(\neg m_i|z_t,x_t)p(z_t|x_t)}{p(\neg m_i|x_t)}\frac{p(\neg m_i|z_{1:t-1},x_{1:t-1})}{p(z_t|z_{1:t-1},x_{1:t})}
=\frac{p(-m_i|z_t,x_t)p(z_t|x_t)}{p(\neg m_i)}\frac{p(\neg m_i|z_{1:t-1},x_{1:t-1})}{p(z_t|z_{1:t-1},x_{1:t})}
$$

地图估计

- 两者之比：

$$\frac{\mathrm{p}(m_i|x_{1:t},z_{1:t})}{\mathrm{p}(\neg m_i|x_{1:t},z_{1:t})}=\frac{p(m_i|z_t,x_t)}{p(m_i)}\frac{p(m_i|z_{1:t-1},x_{1:t-1})p(\neg m_i)}{p(-m_i|z_t,x_t)p(\neg m_i|z_{1:t-1},x_{1:t-1})}$$

$$=\frac{p(m_i|z_t,x_t)}{p(\neg m_i|z_t,x_t)}\frac{p(m_i|z_{1:t-1},x_{1:t-1})}{p(\neg m_i|z_{1:t-1},x_{1:t-1})}\frac{p(\neg m_i)}{p(m_i)}$$

- 对于二元随机变量：

$$\frac{\mathrm{p}(m_i|x_{1:t},z_{1:t})}{\mathrm{p}(\neg m_i|x_{1:t},z_{1:t})}=\frac{p(m_i|z_t,x_t)}{1-p(m_i|z_t,x_t)}\frac{p(m_i|z_{1:t-1},x_{1:t-1})}{1-p(m_i|z_{1:t-1},x_{1:t-1})}\frac{1-p(m_i)}{p(m_i)}$$

覆盖栅格建图算法

地图估计

- 对于p(x)，定义对应的Log-Odd项：

$$l(x) = \log \frac{p(x)}{1 - p(x)}$$

- 则：

$$\mathrm{p}(x) = 1 - \frac{1}{1 + \exp(l(x))}$$

覆盖栅格建图算法

地图估计

- 则变成：

$$l(m_i|x_{1:t}, z_{1:t}) = l(m_i|x_t, z_t) + l(m_i|x_{1:t-1}, z_{1:t-1}) - l(m_i)$$

- $l(m_i|x_t, z_t)$表示激光雷达的逆观测模型(inverse measurement Model)
- $l(m_i|x_{1:t-1}, z_{1:t-1})$表示栅格$m_i$在t-1时刻的状态
- $l(m_i)$表示栅格m_i的先验值，该值对所有栅格都相同

覆盖栅格建图算法

算法流程

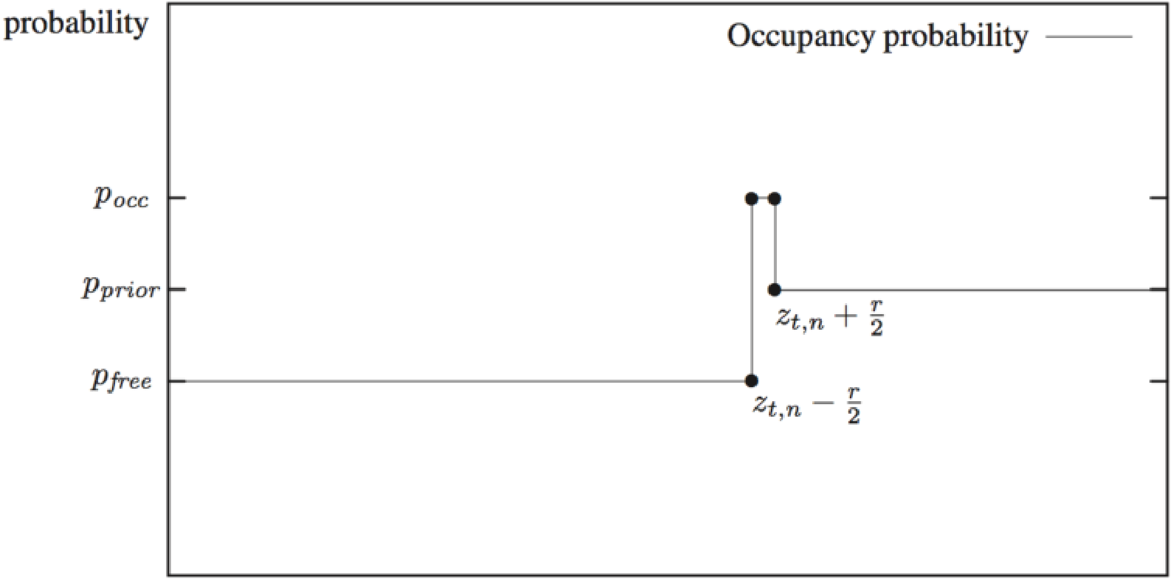
occupancy_grid_mapping($\{l_{t-1,i}\}, x_t, z_t$):

for all cells m_i *do*
    if m_i *in perceptual field of* z_t *then*
        $l_{t,i} = l_{t-1,i} + \text{inv\_sensor\_model}(m_i, x_t, z_t) - l_0$
    else
        $l_{t,i} = l_{t-1,i}$
    endif
endfor
return $\{l_{t,i}\}$

- 该算法对某一个栅格进行操作的时候，只有加法操作，因此具有非常高的更新速度。
- 更新的时候，需要知道传感器的逆测量模型

覆盖栅格建图算法

激光雷达的逆观测模型



- 经过的栅格都为Free。
- 击中的栅格为Occupied
- 其余栅格为Unknown

课程内容

建图算法

1、地图分类

2、覆盖栅格建图算法

3、计数(Count Model)建图算法

4、TSDF建图算法

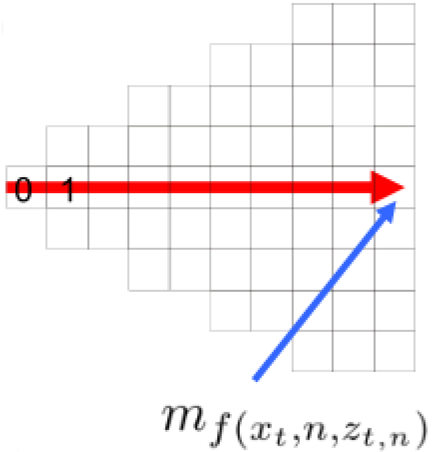
计数建图算法

概念

- 对于每一个栅格统计两个量：$misses(i)$和$hits(i)$
- $misses(i)$表示栅格i被激光束通过的次数，即被标为free的次数
- $hits(i)$表示栅格i被激光束击中的次数，即被标为occupied的次数
- 当$hits(i)$ / $(missed(i)\ +\ hits(i))$超过阈值则认为该栅格为Occupied，否则认为栅格是Free的。
- $Hits(i)/(misses(i)\ +\ hits(i))$表示栅格$i$的极大似然估计

计数建图算法

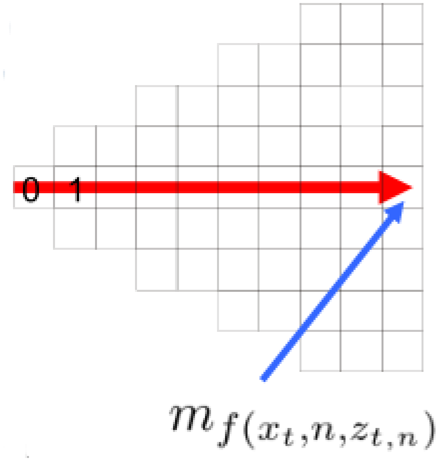
数学描述



- t时刻的机器人位姿为x_t
- t时刻的激光雷达数据为z_t，第n个激光束为$z_{t,n}$
- $c_{t,n}$表示t时刻的第n个激光束是否为最大值。$c_{t,n}$=1表示最大值，$c_{t,n}$=0表示正常值。
- $f(x_t, n, z_{t,n})$表示t时刻第n个激光束击中的栅格的下标，$m_{f(x_t,n,z_{t,n})}$表示对应的栅格的占用概率

计数建图算法

观测模型



$$p(z_{t,n}|x_t,m)=\begin{cases}\displaystyle\prod_{k=0}^{z_{t,n}-1}\left(1-m_{f(x_{t,n,k})}\right) & c_{t,n}=1\\ \displaystyle m_{f(x_{t,n,z_{t,n}})}\prod_{k=0}^{z_{t,n}-1}\left(1-m_{f(x_{t,n,z_{t,n}})}\right) & c_{t,n}=0\end{cases}$$

地图估计

- 地图的极大似然估计为：

$$m^* = arg\max_m P(m|x_{1:t}, z_{1:t})$$

- 等价于：

$$\begin{aligned} m^* &= arg\max_m P(z_{1:t}|m, x_{1:t}) \\ &= arg\max_m \prod P(z_t|m, x_t) \\ &= arg\max_m \sum \ln P(z_t|m, x_t) \end{aligned}$$

计数建图算法

地图估计

- 可化简为：

$$m^* = arg\max_m \sum_{j=0}^{J}\sum_{t=1}^{T}\sum_{n=1}^{N}\left(I(f(x_t,n,z_{t,n})=j)\cdot(1-c_{t,n})\cdot\ln m_j + \sum_{k=0}^{z_{t,n}-1} I(f(x_t,n,z_{t,n})=j)\cdot\ln(1-m_j)\right)$$

x_t表示t时刻机器人位姿　　　　z_t表示t时刻一帧激光数据

$z_{t,n}$表示t时刻激光帧的第n个激光束　　　　$c_{t,n}$表示激光束是否为最大值

$a_j = \sum_{t=1}^{T}\sum_{n=1}^{n} I(f(x_t,n,z_{t,n})=j))\cdot(1-c_{t,n})$表示栅格$j$被激光集中的次数，即$hits(j)$

$b_j = \sum_{t=1}^{T}\sum_{n=1}^{n}\sum_{k=0}^{z_{t,n}-1} I(f(x_t,n,z_{t,n})=j))$表示栅格$j$被激光通过的次数，即$missed(j)$

- 则：

$$m^* = arg\max_m \sum_{j=0}^{J} a_j\ln m_j + b_j\ln(1-m_j)$$

地图估计

- 优化函数：

$$m^* = arg\max_m \sum_{j=0}^{J} a_j \ln m_j + b_j \ln(1 - m_j)$$

- 显然是关于m_j的函数，其极值可直接求其对于m_j的导数，令其等于0即可：

$$\frac{\partial F(x)}{\partial m_j} = \frac{a_j}{m_j} - \frac{b_j}{1 - m_j} = 0$$

- 化解可得：

$$m_j = \frac{a_j}{a_j + b_j}$$

a_j表示$hits(j)$

b_j表示$misses(j)$

课程内容

建图算法

1、地图分类

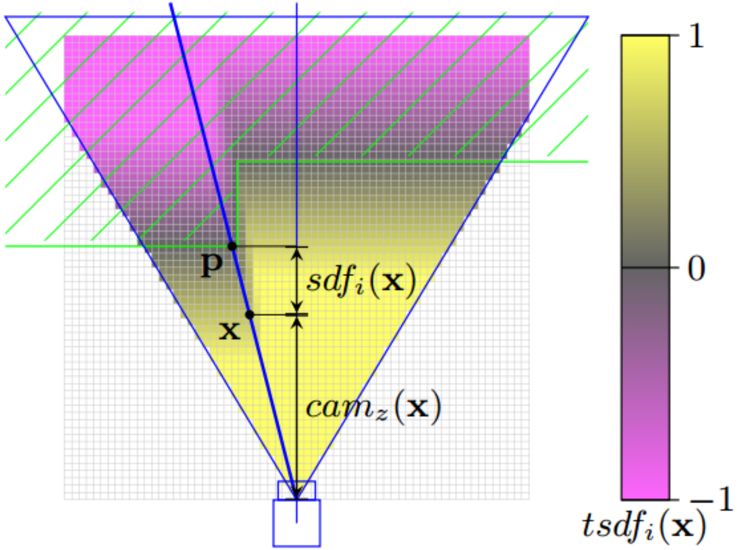
2、覆盖栅格建图算法

3、计数(Count Model)建图算法

4、TSDF建图算法

TSDF建图算法

TSDF示意图



TSDF示意图

基本思想

- 充分考虑传感器测量的不确定性，利用多次测量数据来实现更精确的表面重构，从而得到更精确、更细、更薄的地图。
- 为障碍物表面建立Signed Distance Function。
- 距离表面较远的点忽略不计，因为不会影响到表面重构

TSDF建图算法

数学描述

- sdf(x)的定义：

$$sdf_i(x) = laser_i(x) - dist_i(x)$$

$laser_i(x)$表示激光测量距离

$dist_i(x)$表示栅格离传感器原点的距离

- tsdf(x)的定义：

$$tsdf_i(\mathbf{x}) = \max(-1, \min(1, \frac{sdf_i(\mathbf{x})}{t}))$$

- 多次观测的融合更新方法：

$$TSDF_i(\mathbf{x}) = \frac{W_{i-1}(\mathbf{x})TSDF_{i-1}(\mathbf{x}) + w_i(\mathbf{x})tsdf_i(\mathbf{x})}{W_{i-1}(\mathbf{x}) + w_i(\mathbf{x})}$$

$$W_i(\mathbf{x}) = W_{i-1}(\mathbf{x}) + w_i(\mathbf{x})$$

- 不同的观测值不断按照上式进行融合，即可构造出整个地图的$TSDF$场，从地图的$TSDF$场中可以重构得到曲面。

TSDF建图算法

TSDF实例

- 假设机器人位置为(0,0)，障碍物的位置在(10,0)。
- 对障碍物进行了5次测量，测量值分别为 9.9494 10.0178 9.9733 10.0068 9.9676。
- 分辨率为0.05，截断距离为0.1。
- 需要更新的栅格一共有5个，终点距离分别为：9.90,9.95,10.00,10.05,10.10。分别分cell1~cell5表示。

cell1	0.049376	0.117762	0.073328	0.106820	0.067608
cell2	0.00062	0.06776	0.02332	0.05682	0.017608
cell3	-0.0506	0.01776	-0.026675	0.00682	-0.03239
cell4	-0.100624	-0.032238	-0.076672	-0.043180	-0.082392
cell5	-0.150624	-0.082238	-0.126672	-0.093180	-0.132392

TSDF建图算法

TSDF实例

- 按照公式进行更新得：

cell1-9.90	cell2-9.95	cell3-10.00	cell4-10.05	cell5-10.10
0.082979	0.032979(b)	-0.010702(a)	-0.067021	-0.11702

- 插值得到的表面位置：

$$x = 9.95 - 0.05 * b/(a - b) = 9.9830$$

- 原始数据直接进行平均得到位置为：

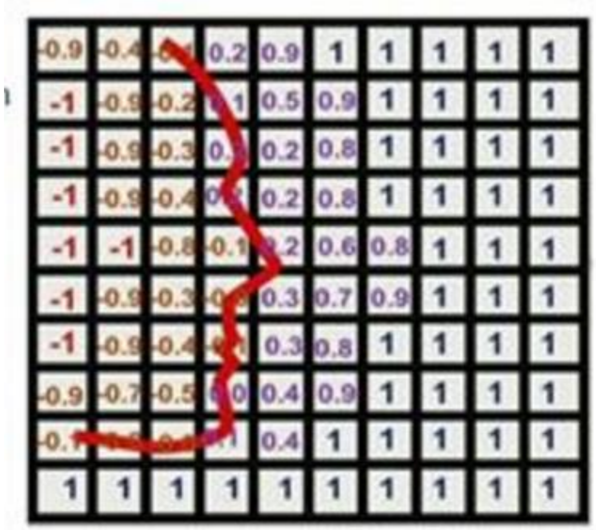
$$(9.9494 + 10.0178 + 9.9733 + 10.0068 + 9.9676)/5.0 = 9.9830$$

- $TSDF$等价于加权最小二乘！！！！

- 因此如果传感器的噪声服从高斯分布，那么通过$TSDF$进行融合，等价于通过最小二乘来进行融合，能比较好的进行曲面重构。

TSDF建图算法

TSDF算法



TSDF场示意图

- 寻找$TSDF$场中，符号进行变化的栅格，符号进行变化的地方即是曲面的所在。
- 在两个栅格之间进行插值，插值得到值为0的坐标就是曲面的精确位置。
- 融合多帧观测，等价于用加权最小二乘方法来对多帧数据进行融合。
- 能插值出确切的曲面，构建的地图最多只有一个栅格的厚度。

参考资料

[1]Probabilistic Robotics

[2]Truncated Signed Distance Function-Experiments on Voxel Size

作业

详细见作业说明

结语

感谢各位聆听！

Thanks for Listening