

传感器数据处理I： 轮式里程计运动模型及标定



主讲人 曾书格

越凡创新技术负责人
597457483@qq.com





课程内容

轮式里程计模型



1、两轮差分底盘的运动学模型



2、航迹推算(Dead Reckoning)

轮式里程计标定



1、线性最小二乘的基本原理



2、线性最小二乘的直线拟合



3、线性最小二乘在里程计标定中的应用



里程计模型

轮式里程计模型



1、两轮差分底盘的运动学模型



2、航迹推算(Dead Reckoning)



两轮差速底盘的运动学模型



应用实例



优点

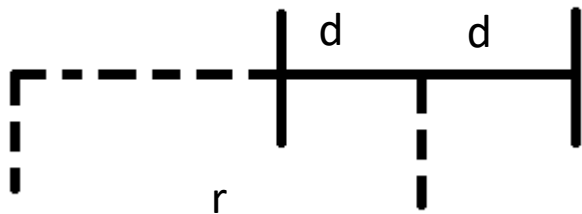
- 结构简单
- 便宜(2个电机)
- 模型简单



两轮差速底盘的运动学模型



差分模型



运动解算

- v, ω 为底盘中心的线速度和角速度
- v_R 和 v_L 两轮的线速度, ω_R 和 ω_L 为两轮的角速度
- d 为轮子离底盘中心的距离, b 为两轮之间的距离

$$v = \frac{v_R + v_L}{2} = \frac{\omega_R \cdot r_R + \omega_L \cdot r_L}{2} \quad \omega = \frac{v_R - v_L}{2d} = \frac{\omega_R \cdot r_R - \omega_L \cdot r_L}{2d}$$

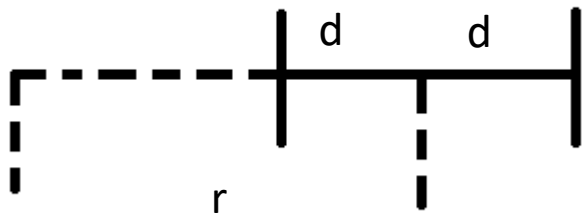
$$\begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r_L}{2} & \frac{r_R}{2} \\ -\frac{r_L}{b} & \frac{r_R}{b} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{pmatrix}$$



两轮差速底盘的运动学模型



差分模型



运动解算

- 圆弧运动
- 欠驱动系统：运动耦合
- r 底盘中心圆弧运动的半径

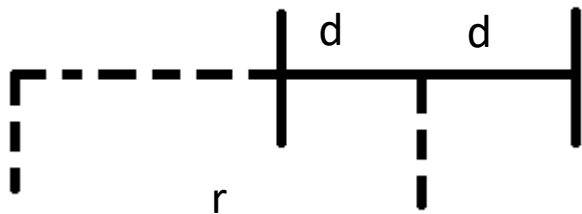
$$\begin{aligned}\frac{v_L}{r-d} &= \frac{v_R}{r+d} \\ v_L(r+d) &= v_R(r-d) \\ (v_R - v_L)r &= (v_R + v_L)d \\ r &= \frac{(v_R + v_L)d}{(v_R - v_L)}\end{aligned}$$



两轮差速底盘的运动学模型



差分模型



运动解算

- 圆弧运动
- 欠驱动系统：运动耦合
- r 底盘中心圆弧运动的半径

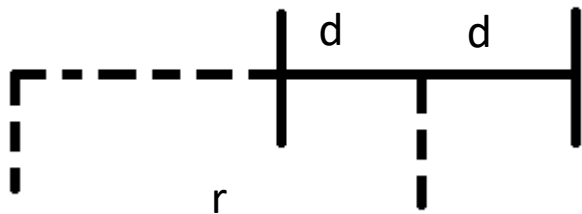
$$\begin{aligned} \omega &= \frac{v_R}{r+d} \\ r+d &= \frac{(v_R+v_L)d}{(v_R-v_L)} + \frac{(v_R-v_L)d}{(v_R-v_L)} = 2 \frac{v_R d}{(v_R-v_L)} \\ \omega &= \frac{(v_R-v_L)}{2d} \end{aligned}$$



两轮差速底盘的运动学模型



差分模型



运动解算

- 圆弧运动
- 欠驱动系统：运动耦合
- r 底盘中心圆弧运动的半径

$$v = \omega * r = \frac{(v_R - v_L)(v_R + v_L)d}{2d(v_R - v_L)} = \frac{v_R + v_L}{2}$$
$$v = \frac{v_R + v_L}{2}$$



轮式里程计模型



1、两轮差分底盘的运动学模型



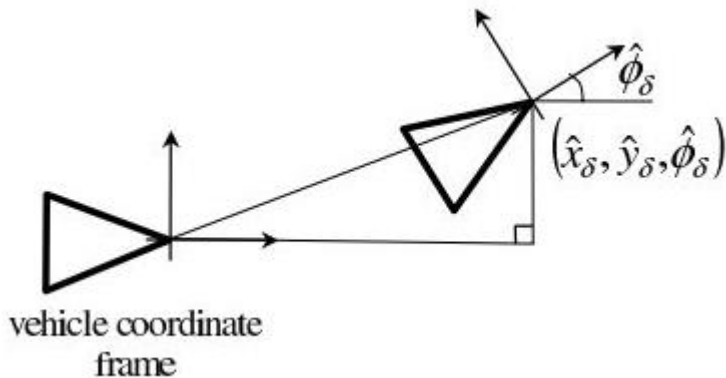
2、航迹推算(Dead Reckoning)



航迹推算



示意图



递推公式

- (x, y, θ) 为当前位姿--世界坐标系
- $(dx, dy, d\theta)$ 为运动增量--车体坐标系

增量从车体转换到世界坐标系：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ d\theta \end{bmatrix}$$

加入噪声：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx + \varepsilon_x \\ dy + \varepsilon_y \\ d\theta + \varepsilon_\theta \end{bmatrix}$$



课程内容

轮式里程计标定



1、线性最小二乘的基本原理



2、线性最小二乘的直线拟合



3、线性最小二乘在里程计标定中的应用



线性最小二乘



线性方程组 $Ax=b$

- A 为 $m \times n$ 的矩阵。
- x 为 $n \times 1$ 的向量


m 表示约束个数， n 表示自变量个数。

- 当 $m=n$ 时，适定方程组，方程组有唯一解
- 当 $m<n$ 时，欠定方程组，方程组有无穷多解
- 当 $m>n$ 时，超定方程组，方程组有通常无解



最小二乘解

- ◆ 绝大多数情况为 $m>n$ ，超定方程组
- ◆ 多数约束自相矛盾，**无解！**
- ◆ 无解但是有最小二乘解

 通解: $x^* = (A^T A)^{-1} A^T b$



线性最小二乘



最小二乘的求解—线性空间的角度

- Ax 表示矩阵 A 的列向量张成的线性空间 S

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \cdot x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} \cdot x_2 + \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} \cdot x_3$$

- 无解: $Ax = b$ 对于任意的 x 均不成立, 即 b 不在 S 中
- 最小二乘解: S 中, 离 b 最近的向量

向量 b 在线性空间 S 中的投影



线性最小二乘



最小二乘的求解—线性空间的角度

- 设 Ax^* 为向量 b 在空间 S 中的投影，显然 $(b - Ax^*)$ 垂直于空间 S 。
- $(b - Ax^*)$ 跟矩阵 A 的每一个列向量都垂直

设：

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

a_i 表示矩阵 A 的第 i 个列向量

则：

$$a_i^T (b - Ax^*) = 0$$

可得：

$$A^T (b - Ax^*) = 0$$

$$A^T b = A^T A x^*$$

$$x^* = (A^T A)^{-1} A^T b$$



课程内容

轮式里程计标定



1、线性最小二乘的基本原理



2、线性最小二乘的直线拟合



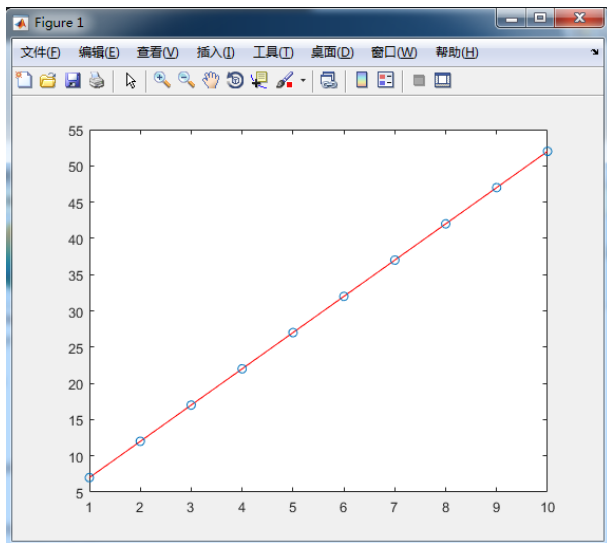
3、线性最小二乘在里程计标定中的应用



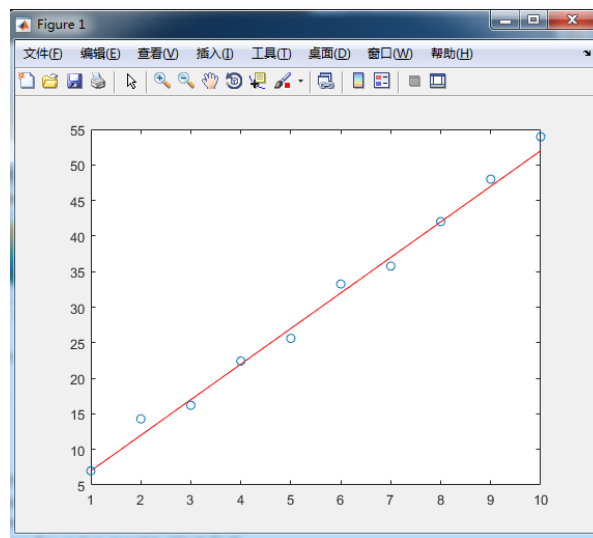
线性最小二乘



直线拟合— $y=5x+2$



● 理想情况



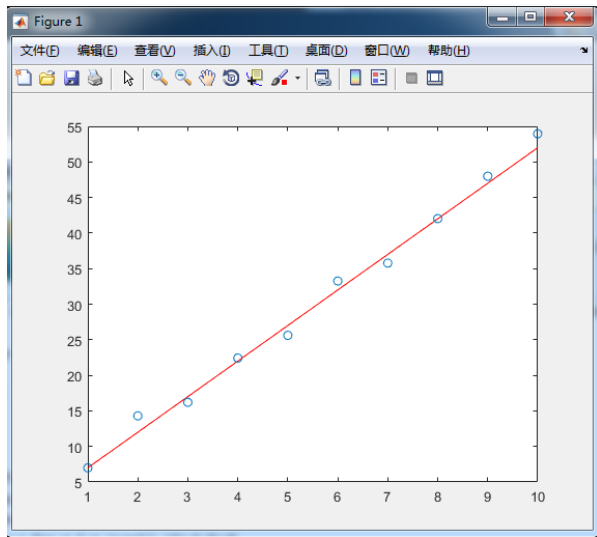
● 混入采样噪声



线性最小二乘



直线拟合— $y=5x+2$



- 混入采样噪声

- 采样数据:

$$x=(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)$$

$$y = (6.9918, 14.2987, 16.2019, 22.4263, 25.6191, 33.2563, 35.7755, 42.0298, 47.9954, 53.9545)$$

- 假设直线方程: $y = ax + b$, 带入数据可得

$$ax_1 + b = y_1$$

$$ax_2 + b = y_2$$

$$\vdots$$

$$ax_n + b = y_n$$



$$\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

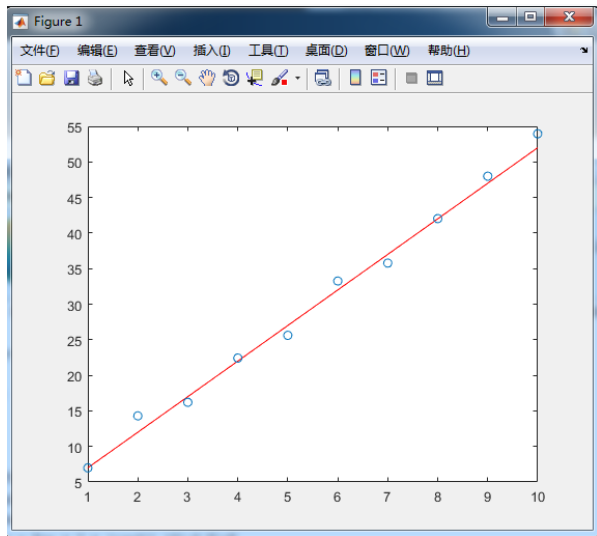
$$Ax = b$$



线性最小二乘



直线拟合— $y=5x+2$



- 混入采样噪声

$$A^T A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{bmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-n}{B} & \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{B} \\ \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{B} & \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{B} \end{bmatrix}$$

$$B = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i - n \sum_{i=1}^n x_i^2$$

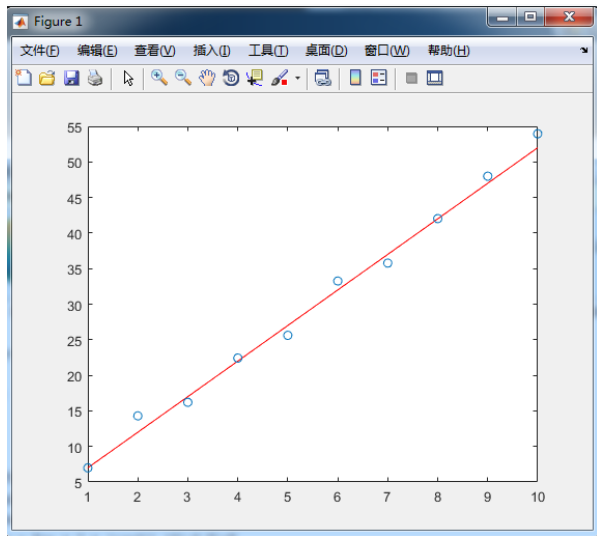
$$x = \begin{bmatrix} \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} \\ \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i y_i \sum x_i}{n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} \end{bmatrix}$$



线性最小二乘



直线拟合— $y=5x+2$



- 混入采样噪声

- 代入数据可得：

$$\begin{aligned}\sum x_i^2 &= 385 \\ \sum x_i &= 55 \\ \sum x_i y_i &= 2059.7039 \\ \sum y_i &= 298.5494\end{aligned}$$

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} = \frac{2059.7039 * 10 - 298.5494 * 55}{385 * 10 - 55 * 55} = 5.063$$

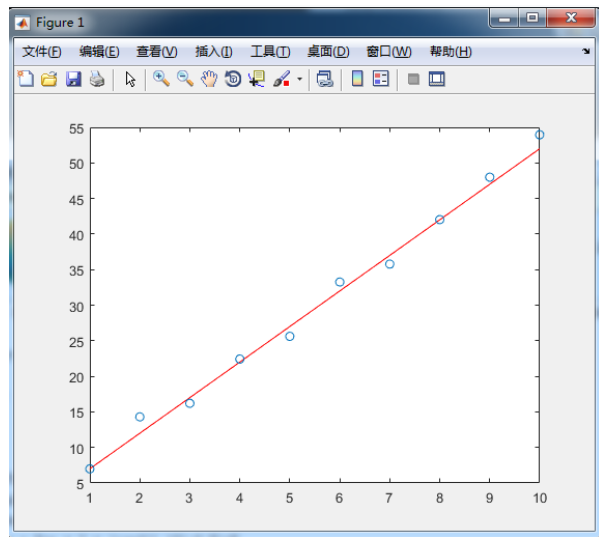
$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i y_i \sum x_i}{n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} = \frac{385 * 298.5494 - 2059.7039 * 55}{385 * 10 - 55 * 55} = 2.009$$



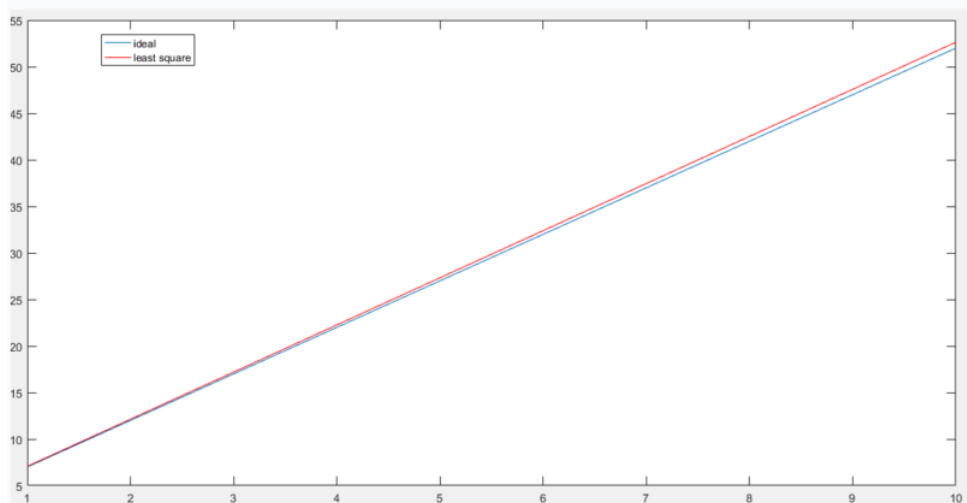
线性最小二乘



直线拟合— $y=5x+2$



- 混入采样噪声



- 拟合对比



课程内容

轮式里程计标定



1、线性最小二乘的基本原理



2、线性最小二乘的直线拟合



3、线性最小二乘在里程计标定中的应用



里程计标定



直接线性方法

- 通用性强
- 实现简单
- 精度不高



基于模型的方法

- 精度高
- 实现复杂
- 特异性高



里程计标定



直接线性方法

- 用激光雷达的scan-match数据作为真值 u_i^*
- 里程计测量得到的数据为 u_i
- 假设成线性关系 $u_i^* = X * u_i$

其中:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

对于每一组数据, 可得:

$$u_{ix} * x_{11} + u_{iy} * x_{12} + u_{i\theta} * x_{13} = u_{ix}^*$$

$$u_{ix} * x_{21} + u_{iy} * x_{22} + u_{i\theta} * x_{23} = u_{iy}^*$$

$$u_{ix} * x_{31} + u_{iy} * x_{32} + u_{i\theta} * x_{33} = u_{i\theta}^*$$

$$\begin{bmatrix} u_{ix} & u_{iy} & u_{i\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_{ix} & u_{iy} & u_{i\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{ix} & u_{iy} & u_{i\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{ix}^* \\ u_{iy}^* \\ u_{i\theta}^* \end{bmatrix}$$

$$A_i \vec{X} = b_i$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\vec{X} = (A^T A)^{-1} A^T b$$



里程计标定



基于模型的方法

- 运动学模型

$$\begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r_L}{2} & \frac{r_R}{2} \\ -\frac{r_L}{b} & \frac{r_R}{b} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{pmatrix}$$

$$\theta(t) = \int \omega(t) dt$$

$$x(t) = \int v(t) \cos(\theta(t)) dt$$

$$y(t) = \int v(t) \sin(\theta(t)) dt$$

- 匀速运动假设

$$\omega(t) = \omega = J_{21} \omega_L + J_{22} \omega_R$$

$$v(t) = v = J_{11} \omega_L + J_{12} \omega_R$$

$$J_{11} = -\frac{b}{2} \cdot J_{21} \quad J_{12} = \frac{b}{2} \cdot J_{22}$$

$$v(t) = v = \frac{b}{2} (-J_{21} \omega_L + J_{22} \omega_R)$$

- 已知两个轮子的角速度 ω_L 和 ω_R ，需要求解两个轮子的半径(r_L 和 r_R)和两轮之间的距离 b .



里程计标定



基于模型的方法

- 假设激光雷达位于车体的正中心
- 激光雷达的匹配值作为观测值
- 里程计的积分值作为预测值
- 通过最小化预测值和观测值的差即可得到里程计的参数
- 里程计的积分值用 r_x, r_y, r_θ 表示, 激光雷达的匹配值用 s_x, s_y, s_θ 表示。

- 角度积分表达式

$$\mathbf{r}_\theta(t) = \int \omega(t) dt = \int J_{21} \omega_L + J_{22} \omega_R dt$$

$$\mathbf{r}_\theta(t) = \begin{pmatrix} \omega_L \cdot \Delta T & \omega_R \cdot \Delta T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{21} \\ J_{22} \end{pmatrix}$$

- 罗列方程组

$$\begin{bmatrix} \omega_{L0} \cdot \Delta T_0 & \omega_{R0} \cdot \Delta T_0 \\ \omega_{L1} \cdot \Delta T_1 & \omega_{R1} \cdot \Delta T_1 \\ \vdots & \vdots \\ \omega_{Ln} \cdot \Delta T_n & \omega_{Rn} \cdot \Delta T_n \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} J_{21} \\ J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{\theta 0} \\ S_{\theta 1} \\ \vdots \\ S_{\theta n} \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$



基于模型的方法

- 套用线性最小二乘的求解公式：

$$\begin{bmatrix} J_{21} \\ J_{22} \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

- 在已知 J_{21} 和 J_{22} 的情况下，里程计的位置积分和参数 b 呈线性关系，推导过程如下：

$$\begin{aligned} r_x(t) &= \int v(t) \cos(\theta(t)) dt \\ &= \frac{b}{2} (-J_{21} \omega_L + J_{22} \omega_R) \int \cos(\theta(t)) dt = c_x b \end{aligned}$$

$$r_y(t) = \int v(t) \sin(\theta(t)) dt$$

$$= \frac{b}{2} (-J_{21} \omega_L + J_{22} \omega_R) \int \sin(\theta(t)) dt = c_y b$$

- 罗列方程组

$$\begin{bmatrix} c_{x0} \\ c_{y0} \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{xn} \\ c_{yn} \end{bmatrix} \bullet b = \begin{bmatrix} s_{x0} \\ s_{y0} \\ \vdots \\ \vdots \\ s_{xn} \\ s_{yn} \end{bmatrix}$$

- 求解此方程组，得到参数 b 。



里程计标定



基于模型的方法

- 已知参数 b, J_{21}, J_{22} ，可以得到：

$$J_{21} = -\frac{r_L}{b} \quad J_{22} = \frac{r_R}{b}$$

- 因此，可得：

$$r_L = -J_{21} \cdot b \quad r_R = J_{22} \cdot b$$

- 两轮直径和轮间距都已知，求解完毕



总结

- 收集 n 段数据，每段数据包含两个轮子的角速度 (ω_L, ω_R) 、该段数据持续的时间 dt 以及激光雷达的匹配值
- 按照上面介绍的公式，计算中间变量 J_{21} 和 J_{22}
- 按照上面介绍的公式，计算轮间距 b
- 用轮间距 b 、 J_{21} 和 J_{22} ，计算两个轮子的半径。



参考资料

[1] Simultaneous calibration of odometry and sensor parameters for mobile Robots



作业



详细见作业说明



结语

感谢各位聆听!

Thanks for Listening

