深蓝学院
shenlanxueyuan.com

基于图优化(Graph-based)激光SLAM方法

主讲人 曾书格

越凡创新技术负责人

电子科技大学硕士

课程内容

Graph-based SLAM

1、Graph-based SLAM

2、非线性最小二乘原理

3、非线性最小二乘在SLAM中的应用

4、cartographer介绍

课程内容

Graph-based SLAM

1、Graph-based SLAM

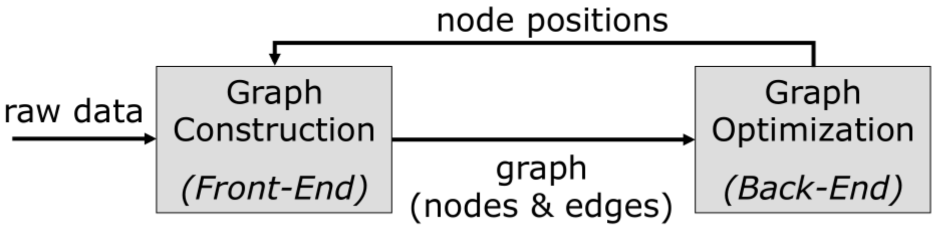
2、非线性最小二乘原理

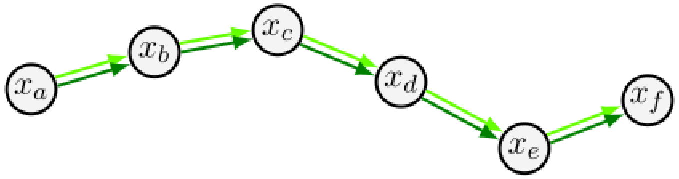
3、非线性最小二乘在SLAM中的应用

4、cartographer介绍

Graph-based SLAM

数学概念





- 用一个图(Graph)来表示SLAM问题
- 图中的节点来表示机器人的位姿
- 两个节点之间的边表示两个位姿的空间约束
- Graph-based SLAM：构建图，并且找到一个最优的配置(各节点的位姿)，让预测与观测的误差最小

课程内容

Graph-based SLAM

1、Graph-based SLAM

2、非线性最小二乘原理

3、非线性最小二乘在SLAM中的应用

4、cartographer介绍

非线性最小二乘(Non-Linear Least Square)

解决的问题

- 给定一个可以系统，其状态方程由$f(x) = z$描述。其中：

  x为该系统的状态向量—即需要估计的值

  $f(x)$是一个非线性的映射函数

  状态向量x，可以通过非线性函数$f(x)$映射得到z

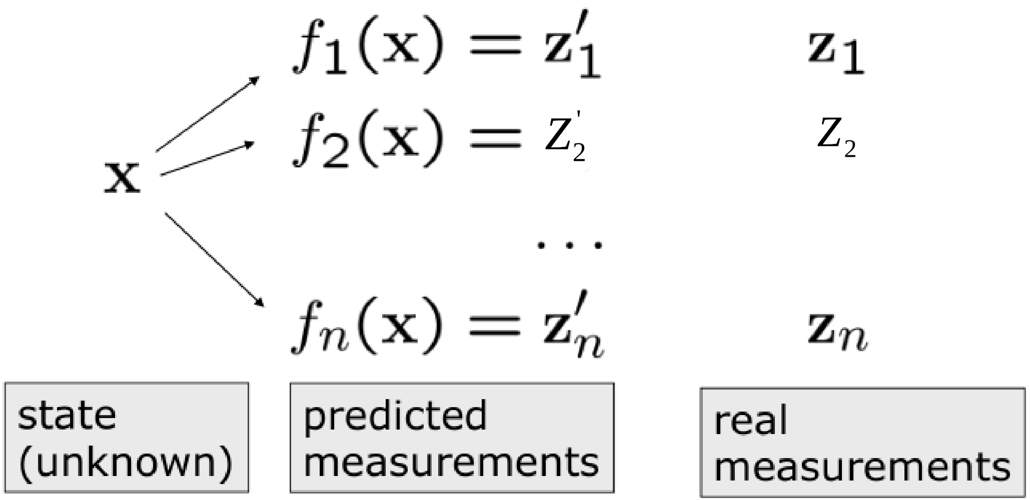
  z表示系统的观测值，可以通过传感器进行直接观测

- 给定该系统的n个混有噪声的观测值$(z_1, \cdots, z_n)$，估计状态向量x，使得其经过$f(x)$映射之后的预测值和观测值的误差最小

- 和线性最小二乘基本相同，只是状态方程$f(x)$是一个非线性函数

非线性最小二乘(Non-Linear Least Square)

示意图



- X为机器人的位置
- $f(x)$为传感器的观测模型(似然场模块或者重投影模型)
- Z为传感器的观测值，激光数据或者图像特征点。
- 找到最优的x，让预测和观测的误差最小。

非线性最小二乘(Non-Linear Least Square)

误差函数

- 目标为最小化预测和观测的差，因此误差即为预测和观测的差：

$$e_i(x) = f_i(x) - z_i$$

- 假设误差服从高斯分布，因此其对应的信息矩阵为Ω_i，因此该观测值误差的平方定义为：

$$E_i(x) = e_i(x)^T \Sigma_i e_i(x)$$

- 因此，非线性最小二乘的目标函数为：

$$F(x) = \sum E_i(x) = \sum e_i(x)^T \Sigma_i e_i(x)$$

$$\min_x F(x)$$

非线性最小二乘(Non-Linear Least Square)

解决的问题

- 目标函数：

$$\min_{x} F(x)$$

- 直接想法：求$F(x)$关于变量x的导数，令其等于0，求解方程既可。

- 对于线性问题，该方法可以正确，但是对于非线性问题不正确。

- $F(x)$为关于x的非线性方程，能否把其化为关于x的线性方程。

线性化：泰勒展开

非线性最小二乘(Non-Linear Least Square)

线性化

- $F(x)$是关于x的非线性函数的原因是，误差函数函数$e_i(x)$是一个非线性函数。
  因此直接对误差函数$e_i(x)$进行线性化即可：

$$e_i(x + \Delta x) = e_i(x) + J_i(x)\Delta x$$

- 其中J为映射函数对状态向量x的导数，称之为Jacobian矩阵。

$$J_i(x) = \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_n}\right)$$

- 因此函数$F(x)$的可化解为：

$$F(x+\Delta x) = \sum e_i(x+\Delta x)^T \Omega_i e_i(x+\Delta x)$$

非线性最小二乘(Non-Linear Least Square)

线性化

- $F(x)$的化解：

$$
\begin{aligned}
F(x+\Delta x) &= \sum e_i^T(x+\Delta x)\Sigma_i e_i(x+\Delta x) \\
&= \sum (e_i(x)+J_i\Delta x)^T\,\Sigma_i(e_i(x)+J_i\Delta x) \\
&= \sum e_i^T\Sigma_i e_i + e_i^T\Sigma_i J_i\Delta x + \Delta x^T J_i^T\Sigma_i e_i + \Delta x^T J_i^T\Sigma_i J_i\Delta x \\
&= \sum e_i^T\Sigma_i e_i + 2e_i^T\Sigma_i J_i\Delta x + \Delta x^T J_i^T\Sigma_i J_i\Delta x \\
&= \sum c_i + 2b_i^T\Delta x + \Delta x^T H_i\Delta x
\end{aligned}
$$

非线性最小二乘(Non-Linear Least Square)

线性化

- $F(x)$的化解：

$$F(x+\Delta x)=\sum c_i+2b_i^T\Delta x+\Delta x^T H_i\Delta x$$
$$=\sum c_i+2\sum b_i^T\Delta x+\Delta x^T\sum H_i\,\Delta x$$
$$=c+2b^T+\Delta x^T H\Delta x$$

- $F(x+\Delta x)$为关于变量Δx的二次函数

- $F(x+\Delta x)$的极值可通过令其关于Δx的导数等于0求解得到

非线性最小二乘(Non-Linear Least Square)

求解

- $F(x+\Delta x)$的极值可通过令其关于Δx的导数等于0求解得到：

$$\frac{\partial F(x+\Delta x)}{\partial \Delta x} = 2b + 2H\Delta x = 0$$

$$H\Delta x = -b$$

$$\Delta x^* = -H^{-1}b$$

- 令$x = x + \Delta x$，然后不断迭代，直至收敛即可。

非线性最小二乘(Non-Linear Least Square)

流程

- 1.线性化误差函数：

$$e_i(x+\Delta x) = e_i(x) + J_i \Delta x$$

- 2.构建线性系统：

$$b^T = \sum e_i^T \Sigma_i J_i \qquad H = \sum J_i^T \Sigma_i J_i \qquad H\Delta x = b$$

- 3.求解线性系统：

$$\Delta x^* = -H^{-1} b$$

- 4.更新解，并不断迭代直至收敛：

$$x = x + \Delta x^*$$

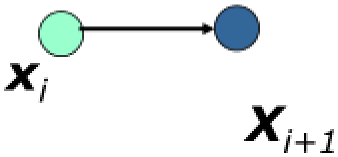
课程内容

Graph-based SLAM

NL Least Square在SLAM中的应用

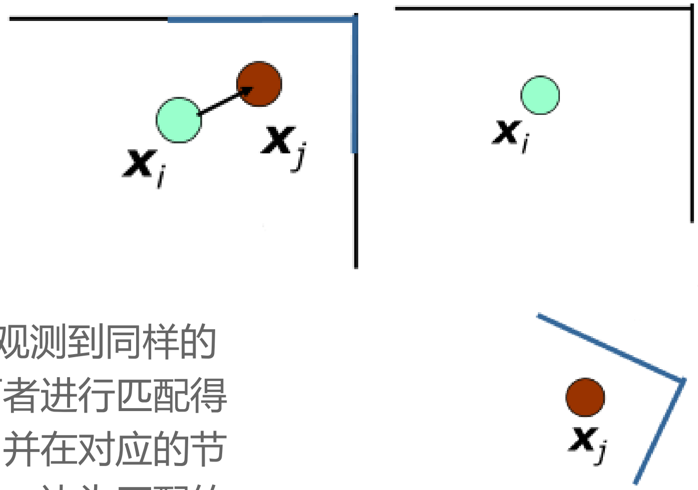
图的构建

- 里程计测量：



机器人从节点i运动到节点$i+1$，里程计测量得到此运动信息。并在对应的节点中连上一条边，边为里程计测量值。

- 回环检测：

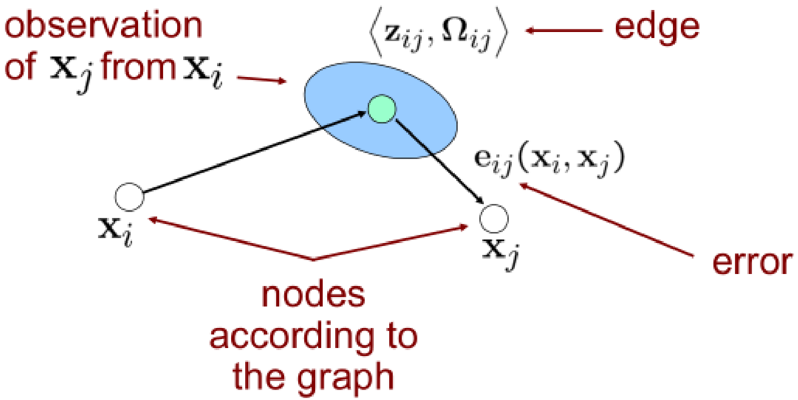


节点i和节点j观测到同样的环境信息，两者进行匹配得到相对位姿。并在对应的节点中连一条边，边为匹配的相对位姿。用信息矩阵来描述本次匹配的可靠性

NL Least Square在SLAM中的应用

误差函数

- 误差函数:



- 观测值$z_{ij} = (dx, dy, d\theta)$表示经过匹配计算得到的节点$x_i$和节点$x_j$的相对位姿。节点$x_j$在节点$x_i$坐标系下的坐标。

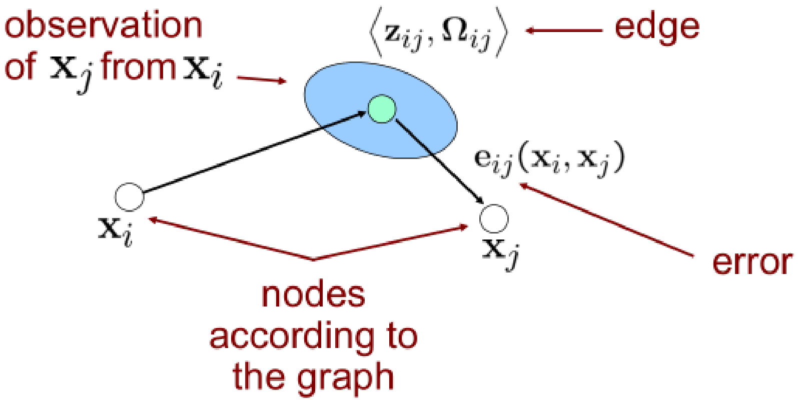
- 预测值为里程计的测量值，图中x_i和x_j即为里程计测量得到的坐标，因此预测值$z'_{ij} = X_i^{-1}X_j$，其中X_i表示x_i对应的转换矩阵。

- 因此误差函数$e_{ij}(x) = t2v\left(Z_{ij}^{-1}Z'_{ij}\right)$。$T2v$表示把转换矩阵转换到对应的位姿。

NL Least Square在SLAM中的应用

误差函数

- 误差函数:



- 误差函数的矩阵形式:

$$e_{ij}(x) = \begin{Bmatrix} R_{ij}^T(R_i^T(t_j - t_i) - t_{ij}) \\ \theta_j - \theta_i - \theta_{ij} \end{Bmatrix}$$

- 对应的Jacobian矩阵:

$$\frac{\partial e_{ij}(x)}{\partial x_i} = \begin{bmatrix} -R_{ij}^T R_i^T & R_{ij}^T \frac{\partial R_i^T}{\partial \theta}(t_j - t_i) \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial e_{ij}(x)}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} R_{ij}^T R_i^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

NL Least Square在SLAM中的应用

误差函数的线性化

- 误差函数：

$$e_{ij}(x+\Delta x) = e_{ij}(x) + J_{ij}\Delta x$$

$$J_{ij} = \frac{\partial e_{ij}(x)}{\partial x}$$

- 因为误差函数只跟x_i和x_j有关，因此具有下列的性质：

$$\frac{\partial \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \left(\mathbf{0} \cdots \frac{\partial \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} \cdots \frac{\partial \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{x}_j)}{\partial \mathbf{x}_j} \cdots \mathbf{0} \right)$$

$$\mathbf{J}_{ij} = \left(\mathbf{0} \cdots \mathbf{A}_{ij} \cdots \mathbf{B}_{ij} \cdots \mathbf{0} \right)$$

NL Least Square在SLAM中的应用

误差函数的线性化

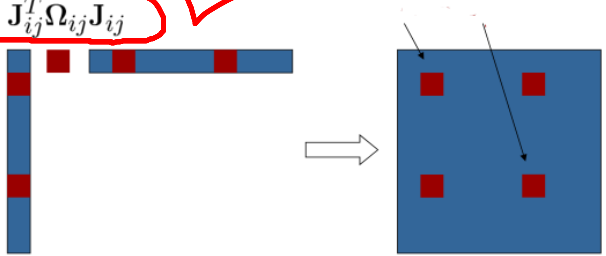
- Jacobian矩阵的形式：

$E = e_{ij}^T \Omega_{ij} e_{ij}$

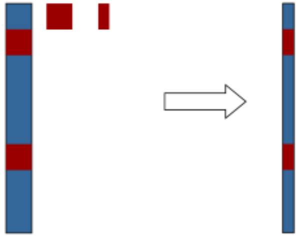
$$\mathbf{J}_{ij} = \left(\mathbf{0}\cdots\mathbf{0} \;\; \underbrace{\frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i}}_{\mathbf{A}_{ij}} \;\; \mathbf{0}\cdots\mathbf{0} \;\; \underbrace{\frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{x}_j)}{\partial \mathbf{x}_j}}_{\mathbf{B}_{ij}} \;\; \mathbf{0}\cdots\mathbf{0} \right)$$

- Jacobian是一个稀疏的向量，因此其会导致H矩阵的稀疏性：

$$\mathbf{H}_{ij} = \mathbf{J}_{ij}^T \Omega_{ij} \mathbf{J}_{ij}$$



$$\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{J}_{ij}^T \Omega_{ij} \mathbf{e}_{ij}$$



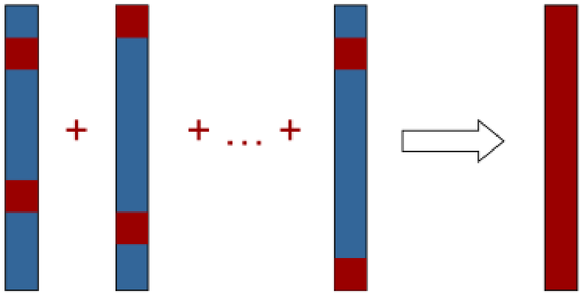
$H =$ $=$

NL Least Square在SLAM中的应用

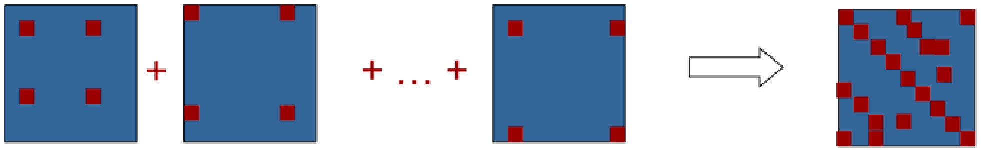
误差函数的线性化

- H和b的最终形式：

$$\mathbf{b} = \sum_{ij} \mathbf{b}_{ij}$$



$$\mathbf{H} = \sum_{ij} \mathbf{H}_{ij}$$



- H矩阵为稀疏矩阵，可以利用此特征进行快速求解。

NL Least Square在SLAM中的应用

固定坐标系

- 观测值观测到的值两个位姿之间的相对位姿
- 满足相对位姿约束的解有无穷多组
- 为了让解唯一，必须加入一个约束条件让某一个位姿固定，一般选择第一个位姿，即：

$$\Delta x_1 = 0$$

- 等价于：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

NL Least Square在SLAM中的应用

固定坐标系

- 加入的约束为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 求解的线性系统为：

$$H \Delta x = -b$$

- 因此等价于：

$$H_{11} += \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

NL Least Square在SLAM中的应用

构建线性系统

- 已知误差项和Jacobian矩阵A_{ij}和B_{ij}

- 向量b的更新为：

How

$$b_i^T \mathrel{+}= e_{ij}^T \Sigma_{ij} A_{ij} \qquad b_j^T \mathrel{+}= e_{ij}^T \Sigma_{ij} B_{ij}$$

- 矩阵H的更新为：

$$\underline{H_{ii}} \mathrel{+}= A_{ij}^T \Sigma_{ij} A_{ij} \qquad \underline{H_{ij}} \mathrel{+}= A_{ij}^T \Sigma_{ij} B_{ij}$$

$$H_{ji} \mathrel{+}= B_{ij}^T \Sigma_{ij} A_{ij} \qquad H_{jj} \mathrel{+}= B_{ij}^T \Sigma_{ij} B_{ij}$$

NL Least Square在SLAM中的应用

求解

- 已知矩阵H和向量b
- 求解线性方程组：

$$\Delta x = -H^{-1}b$$

- 不断进行迭代，直至收敛：

$$x = x + \Delta x$$

optimize(x):

$$
\begin{aligned}
&\text{while } (!\mathit{converged}) \\
&\qquad (\mathbf{H}, \mathbf{b}) = \text{buildLinearSystem}(\mathbf{x}) \\
&\qquad \mathbf{\Delta x} = \text{solveSparse}(\mathbf{H}\mathbf{\Delta x} = -\mathbf{b}) \\
&\qquad \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{\Delta x} \\
&\text{end} \\
&\mathit{return}\ \mathbf{x}
\end{aligned}
$$

课程内容

Graph-based SLAM

1、Graph-based SLAM

2、非线性最小二乘原理

3、非线性最小二乘在SLAM中的应用

4、cartographer介绍

Cartographer介绍

特性

- 基于图优化的SLAM算法
- 比较完善的匹配系统，包含建图和定位
- 目前效果最好的开源激光SLAM系统
- 有人在专门的维护，不断增加新的特性

代码分析

- 见视频

参考资料

[1]G2O:A General Framework for Graph Optimization

[2]A tutorial graph-based slam

[3]Efficient Sparse pose adjustment for 2D mapping

[4] Real-Time Loop Closure in 2D LIDAR SLAM

作业

详细见作业说明

结语

感谢各位聆听！

Thanks for Listening