由于之后的几篇文章会用到大量的index notation形式的张量计算，所以在这里做个简要的介绍。Index notation初次接触会很不习惯，但是熟悉了之后会发现确实能大大简化张量计算书写和计算过程。

首先从简单的一阶张量—向量说起。在一个以 $\{\hat{e_1}, \hat{e_2}, \hat{e_3}\}$ 为底的三维空间坐标系中,我们可以将向量表示为：

$\underline{v} = v_1\hat{e_1} + v_2\hat{e_2} + v_3\hat{e_3}$ ，或者用求和公式表示为： $\underline{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i\hat{e_i}$

通过求和公式，已经能把之前很长的方程大大简化了。但是爱因斯坦在大概100年前提出来写求和符号也好烦啊，就不能把它也省了吗。于是他想出了一个简化的方法，后来也被称为爱因斯坦求和约定(**Summation Convention**)。其主要内容是：**当一个下标在单独某项中出现了两次，那么我们可以省略求和符号，但依然对这单独某项关于重复下标的所有可能值求和。**我语文不好，这句话可能解释的有点拗口，还是结合上面的向量例子来说明。首先单独某项可以是任意多项的乘积，只要不出现加减之类的，我们都姑且把它当成是单独项。在向量的例子中， $v_i\hat{e_i}$ 就是一个单独项，而且下标 i 出现了两次，因此我们可以省去求和符号，但仍然进行求和运算。即可以将向量表示为 $\underline{v} = v_i\hat{e_i}$ 。

现在我们可以继续讨论二阶张量，一般用双下划线表示，如 $\underline{\underline{I}}$ 。在三维坐标系中，二阶张量有9个分量。比如应力张量:

$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{11}\hat{e_1}\hat{e_1} + \sigma_{12}\hat{e_1}\hat{e_2} + \sigma_{13}\hat{e_1}\hat{e_3} + \sigma_{21}\hat{e_2}\hat{e_1} + \sigma_{22}\hat{e_2}\hat{e_2} + \sigma_{23}\hat{e_2}\hat{e_3} + \sigma_{31}\hat{e_3}\hat{e_1} + \sigma_{32}\hat{e_3}\hat{e_2} + \sigma_{33}\hat{e_3}\hat{e_3}$

如果向量方程的长度还能接受的话，那二阶张量的长度就是灾难了（我打了好久啊）。但是我们现在有了Summation Convention可以用。这样就可以将其简写为：

$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{ij}\hat{e_i}\hat{e_j}$

这里乘积项中 i 和 j 各出现了两次，所以都要进行求和，对于某一个 i ， j 有三项要求和，而 i 本身又有三项求和，所以一共有3*3=9项。如果对这个过程不熟悉的，可以先写出带有求和符号的式子： $\underline{\underline{\sigma}} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}\hat{e_i}\hat{e_j}$ ，然后把求和符号去掉就行了。

运用Index notation时有一些重要的规则需要遵守。如果不注意会造成混乱。

规则1. 同一个下标不能在单独某项中出现两次以上。举个例子， $a_{ii}b_{ij}$ 就是没有意义的，因为 i 出现了三次。

规则2. 方程的每一项所含的自由下标(free index)必须一致。Free index就是指没有重复，不用求和的下标。举个例子： $a_{iik} + b_m c_{mk} = d_n d_n d_k$ 。这个式子中，只有 k 是free index，因为它在单项中没有重复。而每一项都有 k ，是一致的，所以成立，反之如果某一项缺少 k ，那么就不成立。

接下来我们引入一个很有用的量: Kronecker delta(δ_{ij})，它的定义为：

$\delta_{ij} = 1, \quad if \;\; i = j; \; \delta_{ij} = 0, \quad if \;\; i \neq j;$

上述定义和单位向量的乘积是一致的。比如 $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j$ 在 $i = j$ 的情况下等于1，在 $i \neq j$ 的情况下等于0，所以我们有： $\delta_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j$ 。 δ_{ij} 同样是有9项，我们可以把它当成是一个二阶张量的9个分量，写成矩阵的形式就是单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 。这个不难理解，因为单位矩阵是对角线上的项等于1，其他分量等于0。而对角线上的分量就是两个下标相等的情况。趁热问个tricky的问题: 那 δ_{kk} 是多少呢？等于3，因为 k 出现了两次，根据summation convention,需要进行求和，即等于 $\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$ 。

Kronecker delta有个令人兴奋的性质，举个例子说: $a_i\delta_{ij} = a_j$ 。语言叙述就是当某一项和Kronecker delta相乘时，如果它有和Kronecker delta相同的下标，那么可以将这个下标改成delta的另一个下标然后去掉delta。在例子中， a_i 和 δ_{ij} 有相同的下标 i ，所以可以把这个 i 改成 δ_{ij} 的另一个下标 j ，然后去掉 δ_{ij} ，就变成了 a_j 。这个性质很好证明，只要按照求和展开就一目了然了，之后就可以无脑使用了。

现在终于可以用上述知识解决问题啦。首先从向量点乘开始。

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_i\hat{e}_i \cdot b_j\hat{e}_j = a_ib_j\delta_{ij} = a_ib_i$$

这里要说明的是，由于要遵守上述的规则1，表示 $\underline{b}$ 的时候必须要使用和 $\underline{a}$ 不同的下标，比如 j。不然下标 i 就重复出现四次了。

向量本身就不难算，所以上述例子还不能体现Index notation的优越性。下面我们来试试二阶张量点乘向量，也可以看成是矩阵和向量相乘：

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \sigma_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j \cdot n_k\hat{e}_k = \sigma_{ij}n_k\hat{e}_i\delta_{jk} = \sigma_{ij}n_j\hat{e}_i \text{ 。}$$

上式是traction的计算公式，应力张量和表面法向量的乘积，得到的是向量，通常我们把这个结果记做 $\underline{t} = t_i\hat{e}_i$ ，带入上式得到 $\sigma_{ij}n_j = t_i$ 。

下面就是我觉得index notation最有用的地方了，计算梯度和散度，偏微分。

首先我们引入梯度(gradient) $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\hat{e}_i = \partial_i\hat{e}_i$,注意这里也用到了summation convention，其实是三项的和。比如对于标量的梯度： $\nabla u = \partial_k\hat{e_k}u = u_{,k}\hat{e_k} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\hat{e_1} + \dfrac{\partial u}{\partial x_2}\hat{e_2} + \dfrac{\partial u}{\partial x_3}\hat{e_3}$ ，得到的是向量。这里说明下一般会将 $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ 简写成 $u_{,i}$ 这种逗号的形式，同样遵循上述所说的index notation的所有性质。对于向量的梯度： $\nabla\underline{u} = \partial_k\hat{e_k}u_i\hat{e_i} = u_{i,k}\hat{e_i}\hat{e_k}$ 。可以看到得到的是二阶张量。所以梯度永远是将该项的阶数升高1阶。

再来看散度(divergence) $\nabla\cdot$ ，多了个点乘。标量没有散度。向量的散度为：
$\nabla \cdot \underline{u} = \partial_k\hat{e_k} \cdot u_i\hat{e_i} = u_{i,k}\delta_{ik} = u_{i,i}$ ，可以看到得到的是个标量。对于二阶张量的散度：
$\nabla \cdot \underline{\underline{u}} = \partial_k\hat{e_k} \cdot u_{ij}\hat{e_i}\hat{e_j} = u_{ij,k}\delta_{ik}\hat{e_j} = u_{ij,i}\hat{e_j}$ ，结果是一个向量。所以散度是将该项的阶数降1阶。

作为练习可以尝试计算Laplace operator: $\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = ?$