

Circuits et Architecture (CA7)

TD n° 4 : Circuits arithmétiques

Rappel

Pour les circuits combinatoires, c'est-à-dire les circuits sans boucle, on peut définir la *profondeur*. Intuitivement, c'est le nombre maximum de portes que les signaux en entrée doivent traverser pour atteindre les sorties. Cela conditionne le temps de réaction du circuit (et, plus tard, la fréquence d'horloge). Formellement, on peut définir la profondeur d'un fil par récurrence :

- la profondeur des entrées du circuit est 0 ;
- la profondeur à la sortie d'une porte est $1 + \max(p_1, p_2)$, où p_1 et p_2 sont les profondeurs des fils en entrée de la porte ;
- la profondeur du circuit est le maximum des profondeurs des fils en sortie du circuit.

En général, on ne comptera pas les portes NOT dans le calcul de la profondeur.

Exercice 1 – Incrémenteur

1. Construisez un circuit de profondeur linéaire qui prend un entier a en entrée (codé sous forme $a_{n-1} \dots a_0$) et calcule en sortie $a + 1$ (codé sous forme $b_{n-1} \dots b_0$). On ne s'intéresse pas aux éventuels débordements (overflows).
2. On veut maintenant construire une version du circuit de profondeur logarithmique, en utilisant une méthode "diviser pour régner", en supposant que $n = 2^k$ pour un certain k . On coupe l'entrée a en $a_h = \langle a_{n-1} \dots a_{n/2} \rangle$ et $a_l = \langle a_{n/2-1}, \dots, a_0 \rangle$ et la sortie b en $b_h = \langle b_{n-1}, \dots, b_{n/2} \rangle$ et $b_l = \langle b_{n/2-1}, \dots, b_0 \rangle$. À quelle condition sur b_l a-t-on $a_h = b_h$? Si ce n'est pas le cas, que vaut b_h ?
Dédisez-en une version récursive du circuit. Comptez le nombre de portes et la profondeur de ce circuit.

Exercice 2 – Un autre calcul

Construisez un circuit qui prend en entrée un nombre a et calcule $2a$.

Exercice 3 – Décodeur

Le décodeur est un circuit à n entrées et 2^n sorties. Il reçoit en entrée un nombre naturel i codé en binaire et met à 1 la sortie numéro i , et à 0 toutes les autres.

1. Écrivez le décodeur pour $n = 1$, puis pour $n = 2$.
2. Généralisez pour un circuit de profondeur linéaire en n pour n quelconque. De combien de portes logiques à deux entrées a-t-il besoin ? Quelle est la profondeur de ce circuit ?
3. Proposez un circuit de profondeur logarithmique en n pour résoudre le problème.
4. Combien de portes votre version logarithmique utilise-t-elle ?