Circuits et Architecture (CA7)
TD n° 1 : Fonctions booléennes et tableaux de Karnaugh

Tableaux de Karnaugh

Notations

Dans la suite, on notera 0 pour $\mathtt{faux}$ et 1 pour $\mathtt{vrai}$. Si a et b sont des variables booléennes, alors "a OU b" se notera "$a + b$", "a ET b" se notera "$a \cdot b$" ou "ab", " a OU_EXCLUSIF b" se notera "$a \oplus b$" et, enfin, "NON a" se notera "$\bar{a}$".

Il est pratique de représenter la valeur prise par une fonction dans une table de vérité. Par exemple, ici on représente la fonction F, telle que $F(a, b) = a \cdot b$.

ab	$F(a,b)$
00	0
01	0
10	0
11	1

Les **tableaux de Karnaugh** sont une variante des tables de vérités, qui permettent en particulier de trouver plus aisément une expression simple d'une fonction booléenne. L'exemple précédent s'écrira comme ceci :

F		a	
		0	1
b	0	0	0
	1	0	1

Les colonnes représentent les valeurs de a et les lignes, les valeurs de b.

Exercice 1 – *De tableau de Karnaugh vers fonction booléenne*

Quelle fonction représente le tableau suivant ?

F		a	
		0	1
b	0	0	0
	1	1	1

Exercice 2 – *. . . et vice versa*

Écrivez les tableaux de Karnaugh des fonctions suivantes :

1. $a \cdot \bar{b}$

2. $a + b$
3. $\bar{a} + b$
4. a EQ b (la fonction renvoie 1 (vrai) si et seulement si $a = b$)
5. $a \oplus b$ (rappel : $\oplus$ est le OU_EXCLUSIF.)
6. $a \cdot (a + b)$
7. $a + ab$

Tableaux de Karnaugh avec 3 ou 4 paramètres

Lorsqu'il y a plus de deux paramètres (ici entre 3 et 4), on dispose les paramètres comme ci-dessous, en les groupant. Observez que pour les valeurs de groupes de variables, chaque séquence de valeurs est obtenue en partant de la précédente et en changeant un seul bit. (Cet ordonnancement des représentations binaire s'appelle le code de Gray.)

F		ab			
		00	01	11	10
cd	00				
	01				
	11				
	10				

ou

F		a	
		0	1
bc	00		
	01		
	11		
	10		

Pour une formule en FND (Forme Normale Disjonctive), le tableau de Karnaugh est remplit en mettant 1 dans la case correspondant à chaque monôme de la formule. Les autres cases sont remplies à 0. Par exemple, pour la formule $\bar{a}d + c\bar{a}\bar{b} + ab\bar{d}$ le tableau obtenu est le suivant :

A		ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	0
	01	1	1	0	0
	11	1	1	0	0
	10	1	0	1	0

$ab\bar{d}$

$c\bar{a}\bar{b}$ $\bar{a}d$

Remarque : On trouve une FND à partir d'un tableau de Karnaugh sur le même principe, en écrivant que les monômes pour les cases remplies à 1.

La forme simplifiée de la formule est retrouvée en effectuant des regroupements de 1 par paquets de 1, 2, 4, 8, 16… Le regroupement de 1 correspond à la FND. Ces regroupements doivent être des rectangles ou des carrés, les plus grands possible sachant qu'un élément 1 déjà utilisé peut être repris. Attention, le tableau de Karnaugh doit être interprété comme écrit sur un cylindre, ce qui donnera des simplifications supplémentaires entre la première et la dernière ligne (resp. colonne).

Exercice 3

Écrivez les tableaux de Karnaugh des fonctions suivantes et simplifiez-les grâce au tableau.

1. $F_1(a, b, c, d) = a\bar{b}\bar{d} + ac + \bar{a}b\bar{c}$
2. $F_2(a, b, c, d) = \bar{a} + bd + a\bar{b}d$

Exercice 4

Donnez les expressions booléennes les plus simples possibles déduites des tableaux de Karnaugh donnés ci-dessous.

1.

F_3		ab			
		00	01	11	10
cd	00	1	1	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	1	1	0
	10	0	1	1	0

2.

F_4		ab			
		00	01	11	10
cd	00	1	0	0	1
	01	0	1	1	0
	11	0	1	1	0
	10	1	0	0	1

3.

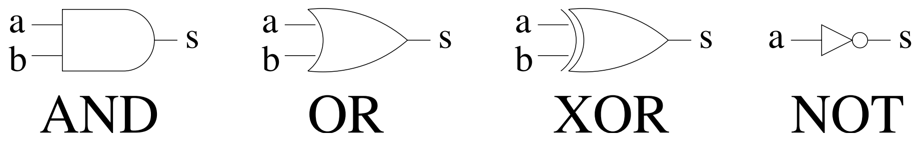
F_5		ab			
		00	01	11	10
cd	00	1	0	0	1
	01	1	1	1	1
	11	1	1	0	0
	10	0	0	0	0

4.

F_6		ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	1	1	0
	01	1	0	0	1
	11	1	0	0	1
	10	0	1	1	0

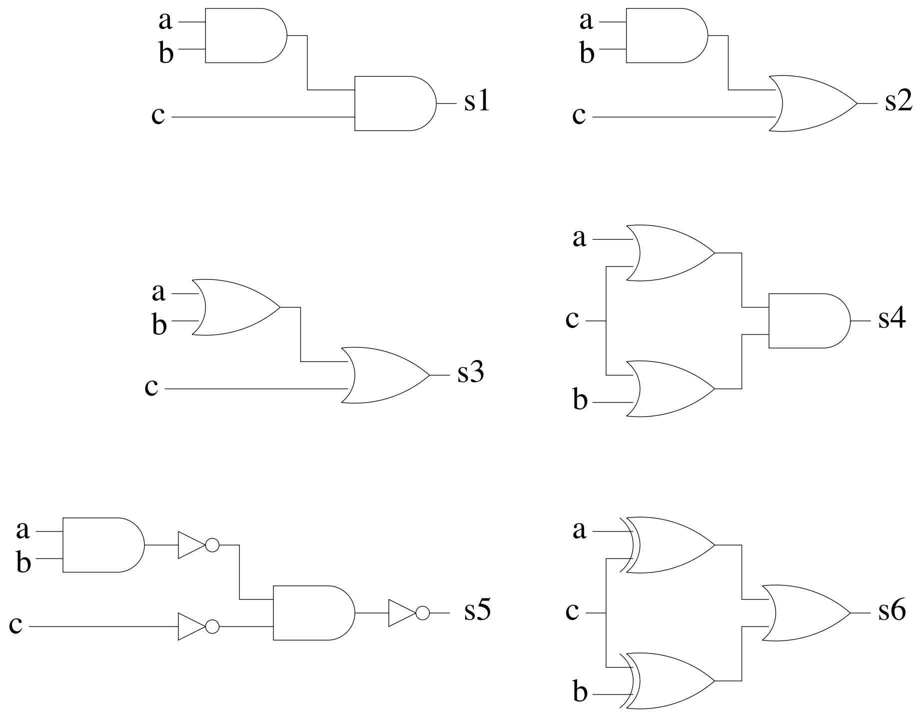
Circuits et portes

On rappelle que les portes de bases sont :



Exercice 5 – *Fonction booléenne d'un circuit*

Écrivez les fonctions booléennes (éventuellement simplifiée) des six circuits suivants :



Exercice 6 – *Circuit d'une fonction booléenne*

Dessinez les circuits correspondant aux fonctions suivantes. (Aidez-vous si nécessaire des tableaux de Karnaugh.)

1. OU : $f_1(a, b, c) = 1$ si l'un au moins des trois paramètres est vrai ;
2. TOUS EGAUX : $f_2(a, b, c) = 1$ ssi $a = b = c$;
3. $f_3(a, b, c) = (a + b) \oplus (bc)$;
4. UN SEUL : $f_4(a, b, c) = 1$ ssi exactement un paramètre parmi a,b,c est vrai ;
5. MAJORITE : $f_5(a, b, c) = 1$ ssi au moins deux des paramètres sont vrais ;
6. $f_6(a, b, c) = (a + b)(a + c)(b + c)$.